

ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Κεφάλαιο 2: Πραγματικοί αριθμοί

Παράγραφος 2.2: Διάταξη



Ομάδα Α'

Άσκηση 1

Αν $1 \leq x \leq 2$ και $3 \leq y < 5$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

a) $2x + y$

b) $3x - 2y$

c) $\frac{2x}{y}$

d) $2x^2 + y^2$

Άσκηση 2

Αν είναι $2 < x < 8$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις

$A = 2x$

$B = -2x$

$\Gamma = \frac{1}{x} + 2$

$\Delta = 1 - \frac{1}{1-x}$

$E = \frac{2x-3}{x}$

$Z = x^2$

$H = 1 - x^3$

Άσκηση 3

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ να δείξετε ότι: $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$.

Άσκηση 4

Αν $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ και $\frac{1}{2} < y < \frac{5}{4}$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών παίρνει τιμές η παράσταση

$A = -5x + 2y$.

Άσκηση 5

Το μήκος x και το πλάτος y ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, κυμαίνεται εντός των ορίων $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$.

i) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του παραλληλογράμμου.

ii) Αν το μήκος μειωθεί κατά μονάδα και το πλάτος τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου παραλληλογράμμου.

Ομάδα Β'

Άσκηση 6

Αν $\alpha + \beta = 4$ να δειχθεί ότι $\alpha\beta \leq 4$ και $\alpha^2 + \beta^2 \geq 8$.

Άσκηση 7

Αν $\alpha > -1 > \beta$, να αποδείξετε ότι $1 + \alpha + \beta + \alpha\beta < 0$.

Άσκηση 8

Να αποδείξετε ότι:

- a) $2y^2 - 8y + 16 \geq 0$, για κάθε $y \in \mathbb{R}$
- b) $2a^2 + 2a + 1 > 0$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$
- c) $(a + b)^2 + 2ab \geq -3b^2$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$

Άσκηση 9

Να δείξετε ότι $2x^2 + 2x + 1 > 0$, για $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 10

Αν $x \in (2,3)$ και $y \in [3,4)$ να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της παράστασης:

- i) $x + y$
- ii) xy
- iii) $\frac{1}{x}$
- iv) $\frac{x}{y}$

Άσκηση 11

Έστω $0 < \alpha < \beta$.

- i) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς $1, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$.
- ii) Να δείξετε ότι πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών ο $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι πιο κοντά στον 1 από τον $\frac{\beta}{\alpha}$.

Άσκηση 12

Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$x^2 + 4y^2 \text{ και } 4y - 2$$

Άσκηση 13

Αν $\alpha \leq -2$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^3}{2} + 4 \leq \alpha^2 + 2\alpha$.

Άσκηση 14

Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, να αποδείξετε ότι $(\alpha - \beta) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \geq 4$.

Άσκηση 15

Αν $x, y > 0$, να δειχθεί ότι $\frac{x^2+y^2}{x+y} \geq \frac{x+y}{2}$.

Άσκηση 16

Να βρείτε τις τιμές των x, y για τις οποίες ισχύει $5x^2 + 4x + y^2 - 2xy + 1 = 0$.

Άσκηση 17

Αν α, β θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{4}$.

Άσκηση 18

Να δείξετε ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$, για $\alpha \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Άσκηση 19

Δίνονται οι παραστάσεις $A = 2x^2 + y^2 + 9$ και $B = 2x(3 - y)$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

i) $A - B = (x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 6x + 9)$

ii) $A \geq B \forall x, y \in \mathbb{R}$.

iii) Πότε ισχύει η ισότητα $A = B$;

Άσκηση 20

Αν $x, y > 0$, να δείξετε ότι:

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} \geq \frac{x + y}{2}$$