

# ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Κεφάλαιο 2º: Οι Πραγματικοί αριθμοί

Παράγραφος 2.1: Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους



## Ομάδα Α'

### Άσκηση 1

Να υπολογίσεις τις δυνάμεις:

$1^2$	$4^2$	$7^2$	$10^2$	$13^2$	$16^2$	$19^2$	$40^2$	$70^2$	$100^2$
$2^2$	$5^2$	$8^2$	$11^2$	$14^2$	$17^2$	$20^2$	$50^2$	$80^2$	
$3^2$	$6^2$	$9^2$	$12^2$	$15^2$	$18^2$	$30^2$	$60^2$	$90^2$	

### Άσκηση 2

Να υπολογίσεις τις δυνάμεις:

$(-20)^2$	$(-40)^2$	$(-60)^2$	$(-80)^2$	$(-100)^2$
$(-30)^2$	$(-50)^2$	$(-70)^2$	$(-90)^2$	

### Άσκηση 3

Να υπολογίσεις τις δυνάμεις:

$(-1)^3$	$(-3)^3$	$(-5)^3$	$(-20)^3$	$(-40)^3$
$(-2)^3$	$(-4)^3$	$(-10)^3$	$(-30)^3$	$(-50)^3$

### Άσκηση 4

Να υπολογίσεις τις δυνάμεις:

$1^{-2}$	$3^{-2}$	$5^{-2}$	$7^{-2}$	$9^{-2}$
$2^{-2}$	$4^{-2}$	$6^{-2}$	$8^{-2}$	$10^{-2}$

### Άσκηση 5

Να υπολογίσεις τις δυνάμεις:

$(-2)^{-2}$	$(-5)^{-2}$	$(-8)^{-2}$	$(-\frac{2}{3})^{-2}$
$(-3)^{-2}$	$(-6)^{-2}$	$(-9)^{-2}$	$(-\frac{3}{2})^{-3}$
$(-4)^{-2}$	$(-7)^{-2}$	$(-10)^{-2}$	

### Άσκηση 6

Να υπολογίσεις τις δυνάμεις:

$-2^{-2}$

$-4^{-2}$

$-6^{-2}$

$-8^{-2}$

$-10^{-2}$

$-3^{-2}$

$-5^{-2}$

$-7^{-2}$

$-9^{-2}$

### Άσκηση 7

Να μετατρέψεις σε δυνάμεις με βάση το 2 τους αριθμούς

1

1/8

64

2

16

1/128

4

1/32

1/256.

### Άσκηση 8

Να μετατρέψεις σε δυνάμεις με βάση το 3 τους αριθμούς

1

9

81

3

27

243

### Άσκηση 9

Να μετατρέψεις σε δυνάμεις με αρνητικό εκθέτη τα κλάσματα:

$\frac{1}{2^3}$

$\frac{1}{11^{12}}$

$\frac{1}{(-7)^6}$

$\frac{1}{5^6}$

$\frac{1}{100^{100}}$

$\frac{1}{(-4)^9}$

$\frac{1}{7^9}$

$\frac{1}{(-3)^{-7}}$

### Άσκηση 10

Να μετατρέψεις σε δυνάμεις με αρνητικό εκθέτη τα κλάσματα:

$\frac{1}{2^3}$

$\frac{1}{11^{12}}$

$\frac{1}{(-7)^6}$

$\frac{1}{5^6}$

$\frac{1}{100^{100}}$

$\frac{1}{(-4)^9}$

$\frac{1}{7^9}$

$\frac{1}{(-3)^{-7}}$

### Άσκηση 11

Να βρεις το πρόσημο των δυνάμεων που ακολουθούν:

$$10^{2003}$$

$$(-5)^{2007}$$

$$(-17)^{3010}$$

$$(-1)^{2003}$$

$$(-11)^{-2005}$$

$$(-31)^{2007}$$

$$(-4)^0$$

$$(-7)^{-2000}$$

### Άσκηση 12

Να υπολογίσεις τα αποτελέσματα των πράξεων:

$$0,3 \cdot \frac{1}{10^{-3}}$$

$$8 \cdot \frac{1}{10^{-4}}$$

$$\frac{2^{-4}}{8^{-2}}$$

$$0,5 \cdot \frac{1}{10^{-2}}$$

$$0,009 \cdot \frac{1}{10^{-6}}$$

$$0,07 \cdot \frac{1}{10^{-3}}$$

$$\frac{5^{-1}}{10^{-2}}$$

## Ομάδα Β'

### Άσκηση 13

Να γράψεις τα γινόμενα που ακολουθούν σε μορφή μίας δύναμης:

$$5^{31} \cdot 5^{55}$$

$$(-2)^{40} \cdot (-2)^{50}$$

$$7^{40} \cdot 7^{-40}$$

$$2^{25} \cdot \frac{1}{2^{-20}}$$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^{152} \cdot \left(\frac{12}{13}\right)^{-51}$$

$$\left(\frac{19}{23}\right)^{152} \cdot \left(\frac{23}{19}\right)^{-51}$$

$$x \cdot x$$

$$x^2 \cdot x$$

$$x^2 \cdot x^2$$

$$x^2 \cdot x^3$$

### Άσκηση 14

Να γράψεις τα γινόμενα που ακολουθούν σε μορφή μίας δύναμης:

$$(2^5)^3 \cdot (2^2)^4$$

$$x^3 \left(\frac{2}{x}\right)^3$$

$$2(3x)^2 x^3$$

$$2(5x)^2 x$$

$$5(3x^2)^2 x^3$$

$$2(3x^2)^2 x^{-3}$$

$$3\left(\frac{2}{x}\right)^2 x^3$$

### Άσκηση 15

Να γραφτούν τα πηλίκα που ακολουθούν σε μία μορφή δύναμης:

$$2^{31} : 2^{55}$$

$$(-3)^{40} : (-3)^{50}$$

$$5^{40} : 5^{-40}$$

$$5^{25} : \frac{1}{5^{-20}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{152} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-51}$$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^{152} : \left(\frac{13}{12}\right)^{-51}$$

### Άσκηση 16

Να γράψεις τα πηλίκα που ακολουθούν σε μορφή μίας δύναμης:

$$\frac{(2^5)^3}{(2^2)^4}$$

$$\frac{(3^2)^3}{(3^5)^4}$$

$$\frac{(x^{-2})^6}{(x^4)^{-3}}$$

$$\frac{(x^3)^4}{(x^2)^5}$$

### Άσκηση 17

Να κάνεις τις πράξεις που ακολουθούν:

$$\frac{(3x^3)^2}{(5x^2)^4} \cdot \left(\frac{5}{x^{-3}}\right)^2 \left(\frac{4}{x^6}\right)^{-1} \cdot \frac{3^{-2}}{5^{-2}x^{-2}}$$

### Άσκηση 18

Να γράψεις σε μία δύναμη τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = \frac{16^7 \cdot 8^5}{256^6 \cdot 32^5}$$

$$A = \frac{27^7 \cdot 9^{15}}{81^2 \cdot 243^5}$$

$$A = \frac{2^{100} 27^{15}}{16^{50} 81^5}$$

$$A = \frac{64^7 \cdot 4^{15}}{128^2 \cdot 256^5}$$

$$A = \frac{25^7 \cdot 125^{15}}{625^5}$$

### Άσκηση 19

Να απλοποιήσεις τα κλάσματα:

$$A = \frac{5^{340} + 5^{359}}{5^{339} + 5^{358}}$$

$$A = \frac{2^{-490} + 2^{-440}}{2^{-492} + 2^{-442}}$$

### Άσκηση 20

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(α) xy(x - y) + y^z(y - z) + zx(z - x)$$

$$(β) x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)$$

$$(γ) (x - y)^3 + (y - ω)^3 + (ω - x)^3$$

$$(δ) x^4 + 4y^4$$

$$(ε) a^4 + 3a^2b^2 + 9b^4$$

$$(στ) (a - 1)^3 - 8 + (a + 1)^3 + 6(a^2 - 1)$$

$$(ζ) x^2 - y^2 - 2ω^2 + ωx + 3yω$$

### Άσκηση 21

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(α) \frac{a^3 + b^3}{a^4 + a^2b^2 + b^4}$$

$$(β) \frac{1}{(a+b)^3} \left( \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{3}{(a+b)^4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{6}{(a+b)^5} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$(γ) \frac{1}{(a+b)^3} \left( \frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4} \right) + \frac{2}{(a+b)^4} \left( \frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right) + \frac{2}{(a+b)^5} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)$$

$$(δ) \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$(ε) \frac{a^2 - bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2 - ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2 - ab}{(c+a)(c+b)}$$

### Άσκηση 22

Να γίνουν οι πράξεις στις παραστάσεις:

α)  $2(x - y) - 3[5(x - 2y) - 2(3x - y)]$

β)  $(x + y)(x - y) + (y + \rho)(y - \rho) + (\rho - x)(\rho + x)$

γ)  $[x^2(y^2\rho^{-1})^3] : (x^2y^4\rho^{-2})^{-4}$

### Άσκηση 23

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α)  $98 \cdot 102$

β)  $1002^2$

γ)  $\frac{5,36^2 - 1,36^2}{6,72}$

### Άσκηση 24

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

(α)  $4x^2 - 25$

(δ)  $a^2 - (3\beta + 7)^2$

(ζ)  $36x^2 + 24x + 4$

(β)  $x^4 - y^4$

(ε)  $9k^2 - 100\beta^2$

(η)  $x^2 + 6x + 9$

(γ)  $9\beta^2 - 16$

(στ)  $x^2 + 8x + 16$

(θ)  $x^4 - 4x^3 + 4x^2$

## Ομάδα Γ'

### Άσκηση 25

Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$(α)(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$$

$$(β)(a + b + c + d)^2 + (a + b - c - d)^2 + (a + c - b - d)^2 + (a + d - b - c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

$$(γ)(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 + 2(ab - bc + dc + ad)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 2(ab - ad + bc + dc)^2$$

$$(δ)x^3 = \left(x \frac{x^3 - 2y^3}{x^3 + y^3}\right)^3 + \left(y \frac{2x^3 - y^3}{x^3 + y^3}\right)^3 + y^3$$

$$(ε)(6x^2 - 4xy + 4y^2)^3 = (3x^2 + 5xy - 5y^2)^3 + (4x^2 - 4xy + 6y^2)^3 + (5x^2 - 5xy - 3y^2)^3$$

### Άσκηση 26

Αν  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq b \neq c \neq a$  να αποδείξετε ότι:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 2\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)$$

### Άσκηση 27

Αν οι  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  είναι διαφορετικοί ανά δύο και  $s_k = \frac{a^k}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^k}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^k}{(c-a)(c-b)}$  να αποδείξετε ότι:

$$(α)s_0 = s_1 = 0$$

$$(β)s_2 = 1$$

$$(γ)s_3 = a + b + c$$

$$(δ)s_4 = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$$

$$(ε)s_5 = a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c + abc$$

### Άσκηση 28

Αν οι  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  είναι διαφορετικοί ανά δύο και

$$T_k = \frac{a^k}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^k}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^k}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^k}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

να αποδείξετε ότι:

$$(α)T_0 = T_1 = T_2 = 0$$

$$(β)T_3 = 1$$

$$(γ)T_4 = a + b + c + d$$

### Άσκηση 29

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(α) \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

$$(β) \frac{1}{a^2(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b^2(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c^2(c-a)(c-b)}$$

### Άσκηση 30

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $a, b, c$  ισχύει ότι  $a + b + c = 0$ , να αποδείξετε ότι:

$$(α) (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$$

$$(β) [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]^2 = 2[(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4]$$

### Άσκηση 31

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $a, b, c$  ισχύει ότι  $a + b + c = 0$ , να αποδείξετε ότι:

$$(α) a^5 + b^5 + c^5 = \frac{5}{2}abc(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$(β) (a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{6}{5}(a^5 + b^5 + c^5)$$

$$(γ) a^7 + b^7 + c^7 = \frac{7}{10}(a^2 + b^2 + c^2)(a^5 + b^5 + c^5)$$

### Άσκηση 32

Αν είναι  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$  και  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{nr}{2}$ , να αποδείξετε ότι:

$$(\tau - x_1)^2 + (\tau - x_2)^2 + \dots + (\tau - x_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

### Άσκηση 33

Αν είναι  $ax + by + cz = 0$ , να απλοποιήσετε την παράσταση  $A = \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2}$

### Άσκηση 34

Αν  $a - \beta = 2$  να αποδείξετε ότι:  $a^2 + \beta^2 - 2a\beta - 4a + 4\beta + 3 = -1$

### Άσκηση 35

Αν  $a + \beta = 2$  να αποδείξετε ότι:  $(a^2 + \beta^2 - 2)^2 - (2a\beta - 2)^2 = 0$



### Άσκηση 36

Αν  $a - \beta = 1$  να αποδείξετε ότι:  $a^3(1 - \beta) + \beta^3(1 + a) = a + \beta$

### Άσκηση 37

Να γίνει γινόμενο η παράσταση  $a^4 + a^2 + 1$ .

### Άσκηση 38

Να αποδείξετε τις σχέσεις:

α)  $(a + 2)^3 - a(a + 3)^2 = 3a + 8$

β)  $(a + \beta)(a^3 - \beta^3) - (a - \beta)(a^3 + \beta^3) = 2a\beta(a - \beta)(a + \beta)$

γ)  $(a^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = (a\gamma + \beta\delta)^2(a\delta - \beta\gamma)$

### Άσκηση 39

Αν για τους  $a, \beta$  όπου  $a, \beta \neq 0$ , ισχύει  $(a + \beta)^3 = a^3 + \beta^3$ , τότε οι  $a, \beta$  είναι αντίθετοι.

### Άσκηση 40

Ναδειχθεί ότι ο  $2^{100} + 1$  είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 17, δηλαδή ο  $2^{100} + 1$  είναι της μορφής  $17k$  όπου  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Καλή διασκέδαση*