UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Dissertação de Mestrado

EFEITO CASIMIR EM TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS: UMA ANÁLISE PARA CAMPOS ESCALARES SOB CONDIÇÕES DE CONTORNO

STENIO WONEY RAMOS DA SILVA

Campina Grande, PB
1 de março de 2026

STENIO WONEY RAMOS DA SILVA

EFEITO CASIMIR EM TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS: UMA ANÁLISE PARA CAMPOS ESCALARES SOB CONDIÇÕES DE CONTORNO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Áreas de Concentração: Física de Partículas, Cosmologia e Gravitação.
Orientador: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
Coorientador: Prof. Dr. Klécio Emanuel Lima de Farias

Campina Grande, PB
1 de março de 2026

Resumo

O efeito Casimir constitui uma das manifestações mais diretas da natureza quântica do vácuo, emergindo da quantização de campos na presença de condições de contorno. Neste trabalho, investigamos o efeito Casimir no contexto da teoria quântica de campos, com ênfase em campos escalares livres submetidos a geometrias confinadas. Inicialmente, apresentamos uma revisão dos fundamentos da teoria quântica de campos relativística, incluindo a formulação lagrangiana, a análise de simetrias contínuas e o teorema de Noether, estabelecendo a base conceitual necessária para a definição rigorosa da energia do sistema.

Em seguida, procedemos à quantização canônica do campo escalar e à interpretação da energia de ponto zero como uma soma sobre os modos normais do campo. A imposição de condições de contorno discretiza o espectro desses modos, dando origem a uma energia de vácuo dependente da geometria do sistema. Como aplicação explícita do formalismo desenvolvido, analisamos o efeito Casimir para um campo escalar confinado entre placas paralelas, obtendo a energia de Casimir e a pressão associada.

Os resultados apresentados evidenciam a sensibilidade da energia de vácuo às condições de contorno e reforçam o papel do efeito Casimir como uma ferramenta conceitual para o estudo da estrutura do vácuo quântico. O formalismo desenvolvido neste trabalho estabelece ainda uma base sólida para investigações futuras envolvendo extensões do modelo considerado, tais como modificações na topologia do espaço-tempo e a inclusão de campos externos.

Palavras-chave: Efeito Casimir; energia de vácuo; teoria quântica de campos; campos escalares; condições de contorno.

Abstract

The Casimir effect represents one of the most direct manifestations of the quantum nature of the vacuum, arising from the quantization of fields in the presence of boundary conditions. In this work, we investigate the Casimir effect within the framework of quantum field theory, with emphasis on free scalar fields subjected to confined geometries. We begin with a review of the fundamental aspects of relativistic quantum field theory, including the Lagrangian formulation, the analysis of continuous symmetries, and Noether's theorem, thereby establishing the conceptual basis required for a rigorous definition of the system's energy.

Subsequently, we perform the canonical quantization of the scalar field and interpret the zero-point energy as a sum over the normal modes of the field. The imposition of boundary conditions leads to a discretization of the mode spectrum, giving rise to a vacuum energy that depends on the geometry of the system. As an explicit application of the developed formalism, we analyze the Casimir effect for a scalar field confined between parallel plates, obtaining the Casimir energy and the associated pressure.

The results highlight the sensitivity of the vacuum energy to boundary conditions and reinforce the role of the Casimir effect as a conceptual tool for probing the structure of the quantum vacuum. Moreover, the formalism presented in this work provides a solid foundation for future investigations involving extensions of the model, such as modifications of spacetime topology and the inclusion of external fields.

Keywords: Casimir effect; vacuum energy; quantum field theory; scalar fields; boundary conditions.

Sumário

Introdução

O efeito Casimir constitui uma das manifestações mais claras da natureza física do vácuo quântico, emergindo como consequência direta da quantização de campos na presença de condições de contorno. Desde sua formulação original [1], esse fenômeno tem desempenhado papel central tanto em investigações conceituais da teoria quântica de campos quanto em aplicações contemporâneas que envolvem sistemas mesoscópicos [2], nanotecnologia [3] e modelos de dimensões extras [4]. Em sua essência, o efeito Casimir explicita que o vácuo não é um estado vazio no sentido clássico: mesmo na ausência de partículas reais, permanecem flutuações quânticas associadas aos graus de liberdade do campo, e a energia de ponto zero passa a depender das propriedades geométricas, topológicas e das restrições impostas ao sistema.

Do ponto de vista físico, o cerne do efeito Casimir pode ser entendido como uma competição entre espectros de modos: ao se introduzir fronteiras (placas, cavidades, cascas esféricas, guias de onda, etc.) ou ao se compactificar dimensões, altera-se o conjunto de soluções admissíveis para a equação de movimento do campo [5]. Em uma teoria quântica, essa alteração não é "gratuita": como cada modo carrega uma contribuição de energia de ponto zero, tipicamente $\frac{1}{2}\hbar\omega$, a reorganização do espectro leva a uma variação mensurável da energia do vácuo [6]. A força (ou pressão) de Casimir surge, então, como resposta do sistema à mudança de energia quando um parâmetro geométrico (como a separação entre placas) é modificado. Essa perspectiva é particularmente útil porque torna transparente a origem do fenômeno: não se trata de uma força fundamental adicional, mas de um efeito coletivo associado ao estado fundamental do campo sob restrições.

Em termos mais técnicos, a energia de ponto zero em teoria quântica de campos é, em geral, divergente. A soma $\sum_J \frac{1}{2}\hbar\omega_J$ sobre todos os modos cresce sem limite quando se inclui o contínuo de altas frequências (ultravioleta) [7]. O que se observa fisicamente, entretanto, não é a energia absoluta do vácuo, mas diferenças de energia entre configurações distintas, por exemplo, "com placas" versus "sem placas", ou uma dada geometria versus um espaço de referência. Essas diferenças podem ser finitas após um procedimento apropriado de regularização e renormalização [8], refletindo o fato de que apenas variações controladas da energia do vácuo são acessíveis experimentalmente. Essa característica torna o efeito Casimir um laboratório conceitual privilegiado: ele obriga a tratar com cuidado a noção de energia do vácuo, a interpretação física de quantidades divergentes e o papel das condições impostas pelo aparato experimental.

A relevância do efeito Casimir transcende o interesse puramente formal. Em escalas micro e nanométricas, forças de Casimir (e efeitos correlatos, como forças de van der Waals em regimes apropriados) podem tornar-se comparáveis a forças eletrostáticas e elásticas típicas de dispositivos [9]. Isso impacta diretamente o projeto e a confiabilidade de sistemas microeletromecânicos (MEMS/NEMS), onde a atração induzida pelo vácuo pode contribuir para instabilidades mecânicas, aderência ("stiction") e limitação de desempenho [10]. Em outra direção, o efeito também aparece em contextos de física matemática e física de altas energias: modelos de "bag" e confinamento efetivo [11], teoria de campos em espaços com topologia não trivial [12], presença de defeitos e fronteiras [13], bem como cenários com dimensões extras compactificadas, nos quais a quantização dos modos ao longo de uma dimensão compacta produz correções de energia interpretáveis como termos de Casimir [14]. Assim, o estudo sistemático do efeito Casimir fornece uma ponte entre aspectos fundamentais do vácuo quântico e consequências em sistemas físicos concretos.

Nesta dissertação, investigamos o efeito Casimir no contexto da teoria quântica de campos, com ênfase inicial em campos escalares submetidos a condições de contorno simples. O propósito dessa escolha é duplo. Primeiro, campos escalares constituem o cenário mais direto para explicitar a estrutura matemática do problema: as equações de movimento, a expansão modal e a definição do vácuo são formuladas de modo particularmente transparente. Segundo, as técnicas desenvolvidas no caso escalar (construção do tensor energia-momento, quantização canônica, identificação e manipulação da energia de ponto zero, tratamento de somas de modos e subtrações de referência) servem como base para generalizações posteriores, incluindo geometrias mais complexas, condições de contorno mais gerais e acoplamentos externos.

O objetivo principal do presente trabalho é, portanto, estabelecer uma base conceitual e técnica sólida que permita, em etapas posteriores, generalizar o efeito Casimir para cenários fisicamente mais ricos, envolvendo modificações na estrutura do espaço-tempo e a presença de campos externos. Em termos operacionais, isso significa construir com rigor (i) a noção de energia do sistema a partir do formalismo lagrangiano e das simetrias, (ii) a quantização do campo e a identificação do conteúdo físico do vácuo, e (iii) um procedimento de cálculo que torne finitas as grandezas relevantes (energia de Casimir e pressão associada) em geometrias confinadas.

Para organizar essa construção, adotamos uma estratégia progressiva. Partimos de fundamentos da teoria clássica de campos [15] e avançamos até o formalismo quântico necessário para interpretar e calcular a energia do vácuo. Nesse caminho, o teorema de Noether [16] desempenha papel central: ao relacionar simetrias contínuas da ação a correntes conservadas, ele fornece o arcabouço conceitual para introduzir o tensor energia-momento e, consequentemente, uma definição consistente de energia em teoria de campos.

Em seguida, procedemos à quantização canônica do campo escalar, enfatizando a interpretação da energia do vácuo como soma sobre modos normais. A presença de fronteiras (ou, mais genericamente, a imposição de restrições de contorno) converte parte do espectro contínuo em espectro discreto e introduz dependência geométrica explícita nas frequências ω_J. Entretanto, como já mencionado, a soma direta sobre modos é divergente e exige ferramentas matemáticas de regularização. Assim, além de estabelecer o formalismo quântico, é necessário explicar com clareza por que e como se extrai a contribuição física finita: tipicamente, por comparação com uma configuração de referência (por exemplo, o espaço de Minkowski sem fronteiras) e pela aplicação de identidades e técnicas analíticas que reorganizam somas e integrais de modo consistente.

No escopo deste trabalho, escolhemos como aplicação explícita a configuração de placas paralelas, por ser a geometria prototípica onde o efeito Casimir se manifesta de maneira mais direta e onde a conexão entre espectro discreto e força resultante pode ser exposta com nitidez. O confinamento em uma direção espacial impõe condições de contorno que selecionam um conjunto particular de modos admissíveis, modificando o espectro ao longo do eixo perpendicular às placas. A energia de Casimir por unidade de área é obtida a partir do valor esperado do tensor energia-momento no vácuo, subtraindo-se a contribuição de referência e aplicando-se procedimentos analíticos que tornam a expressão finita; a pressão associada decorre então da derivada da energia em relação à separação entre as placas.

Além do cálculo em si, é importante destacar o lugar do efeito Casimir no panorama mais amplo da física teórica. A energia do vácuo aparece em discussões sobre estabilidade [17], estrutura do estado fundamental e respostas do sistema a perturbações geométricas. Em cenários com topologia não trivial, a energia de vácuo pode induzir termos efetivos que influenciam a dinâmica em baixas energias. Em modelos com dimensões extras compactificadas, as condições periódicas (ou quase-periódicas) ao longo de direções compactas geram espectros discretos análogos aos obtidos com placas, e a energia resultante pode ter implicações em mecanismos de estabilização de raios de compactificação e em correções efetivas observáveis em teorias de campo e gravitação. Dessa forma, o efeito Casimir torna visíveis, por meio de uma quantidade energética, informações sobre a estrutura geométrica e topológica do espaço-tempo e sobre as restrições físicas impostas aos campos.

Com base nessas motivações, a dissertação tem uma sequência consistente com elas. O Capítulo 1 é dedicado a uma revisão sistemática dos fundamentos necessários para o estudo do efeito Casimir. Iniciamos com a formulação lagrangiana de campos clássicos e a análise das simetrias contínuas da ação, destacando o papel do teorema de Noether na construção do tensor energia-momento e na definição rigorosa da energia do sistema. Em seguida, procedemos à quantização canônica do campo escalar e à interpretação da energia do vácuo como soma sobre modos normais, estabelecendo o arcabouço formal que sustenta o cálculo da energia de Casimir.

No Capítulo 2, o efeito Casimir é analisado explicitamente no caso de um campo escalar confinado entre placas paralelas, onde as condições de contorno discretizam o espectro de modos do campo. A partir desse formalismo, obtêm-se a energia do vácuo e a pressão de Casimir associada, evidenciando a dependência do efeito em relação às propriedades geométricas do sistema. O objetivo aqui é apresentar um cálculo completo e consistente, no qual cada etapa (da escolha de modos à obtenção de uma grandeza finita) seja motivada e interpretada fisicamente.

Por fim, o Capítulo 3 sintetiza as conclusões e discute perspectivas. A estrutura desenvolvida nesta dissertação foi concebida de modo a permitir extensões naturais do modelo básico. Em trabalhos futuros, pretende-se investigar o efeito Casimir na presença de um campo éter associado a uma dimensão extra compactificada, com condições de quase-periodicidade ao longo da quinta dimensão, conforme sugerido em modelos de teorias efetivas com quebra suave de simetrias de Lorentz [18]. Além disso, a inclusão de um campo magnético externo exigirá a modificação da dinâmica do campo escalar por meio da introdução de uma derivada covariante, incorporando explicitamente o acoplamento mínimo com o quadrivetor potencial eletromagnético [19]. Essas generalizações permitirão explorar como a estrutura do vácuo quântico é afetada por dimensões extras e campos externos, ampliando o alcance físico dos resultados obtidos.

Capítulo 1

Revisão de Teoria Quâtica de Campos

Neste capítulo apresentamos uma revisão sistemática do efeito Casimir à luz da teoria quântica de campos. O desenvolvimento inicia-se com a formulação lagrangiana de campos clássicos, a discussão de simetrias contínuas e suas consequências via o teorema de Nöther. Em seguida, procede-se à quantização de campos escalares e à análise da energia do vácuo na presença de fronteiras. A partir desse formalismo, o efeito Casimir é estudado explicitamente no caso de placas paralelas, conduzindo à obtenção da energia do vácuo e da pressão associada.

1.1 Teorema de Nöther

O teorema de Nöther estabelece a relação fundamental entre simetrias contínuas da ação e leis de conservação, desempenhando um papel central na teoria clássica e quântica de campos. Em particular, as simetrias de translação no espaço-tempo conduzem à conservação da energia e do momento, que são descritas de forma unificada pelo tensor energia-momento. Nesta seção, revisamos o teorema de Nöther no formalismo lagrangiano e derivamos a expressão do tensor energia-momento para campos clássicos, com o objetivo de fundamentar sua utilização posterior no cálculo da energia de Casimir em sistemas com condições de contorno.

Seja um sistema dinâmico descrito pela ação

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \tag{1.1}$$

onde assumimos,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \tag{1.2}$$

Sob uma tranformação geral da forma

$$\begin{aligned} x^\mu &\to x'^\mu \\ \phi(x) &\to \phi'(x') \\ \partial_\mu \phi(x) &\to \partial'_\mu \phi'(x') \end{aligned} \tag{1.3}$$

dizemos que a dinâmica descrita pela ação (1.1) é invariante sob transformações (1.3) se a ação não muda sob essa tranformações. A saber, se

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = \int d^4x' \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x')) \tag{1.4}$$

então, as transformações (1.3) definem uma simetria do sistema. É claro que neste caso, as equações de Euler-Lagrange para os sietmas com e sem linha continuariam invariantes. Vale a pena enfatizar aqui que 1.3 inclui uma classe muito interessante de transformações onde as coordenadas espaço-tempo não mudam, ou seja,

$$x'^\mu = x^\mu, \tag{1.5}$$

e somente as variáveis dinâmicas da teoria se transformam. Tais transformações são conhecidas como transforamções de simetria interna para serem contrastadas com as transformações espaço-tempo onde as coordenadas espaço-tempo se transformam juntamente com comm as variáveis dinâmicas, como em (1.3). Nossa discussão de simetrias se aplica tanto às transformações espaço-tempo, onde as coordenadas espaço-tempo são transformadas, como as transformações de simetria interna, onde as coordenadas espaço-tempo não são afetadas pelas transformações.

Simetrias têm consequências interessantes para transformações contínuas. Então, Consideremos uma transformação infinitesimal com

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = 1, \tag{1.6}$$

o que vale para a maioria das simetrias globais de espaço-tempo , bem como para as simetrias internas. Nesse caso, invariância da ação sob as formas infinitesimais das transformações em (1.3) implicaria

$$
\begin{aligned}
\delta S = & \int d^4x' \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x')) - \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = 0, \\
ou, \quad & \int d^4x \mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) - \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = 0, \\
ou, \quad & \int d^4x (\mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))) = 0,
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Claramente, (1.7) será válida se

$$
\mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = \partial_\mu K^\mu, \tag{1.8}
$$

que deve valer independentemente do uso de equações de movimento para o sistema que estamos vendo. Isto é bem geral e é possível ter transformações de simetria pelo qual K^μ. Por outro lado, definir a transformação infinitesimal no campo como

$$
\phi'(x) - \phi(x) = \delta\phi(x) \tag{1.9}
$$

de modo que

$$
\delta(\partial_\mu \phi(x)) = \partial_\mu \phi'(x) - \partial_\mu \phi(x) = \partial_\mu \delta\phi(x) \tag{1.10}
$$

podemos calcular explicitamente, uma vez que mantemos somente os termos lineares, porque $\delta\phi(x)$ é infinitesimal,

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \\
& = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) + \delta\phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} + \delta(\partial_\mu \phi(x)) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \\
& = \delta\phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} + \delta(\partial_\mu \phi(x)) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \\
& = \delta\phi(x) \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} + \delta(\partial_\mu \phi(x)) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \\
& = \partial_\mu \left(\delta\phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \right).
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Usamos a equação de Euler-Lagrange na penúltima linha. Comparando (1.8) e (1.11), obtemos

$$\begin{aligned} &\partial_\mu \left(\delta\phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \right) = \partial_\mu K^\mu \\ ou, \quad &\partial_\mu \left(\delta\phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} - K^\mu \right) = 0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Isso mostra que sempre que houver uma simetria contínua associada com o sistema, podemos definir uma corrente

$$\partial J^\mu = \delta\phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} - K^\mu \tag{1.13}$$

que é conservado, ou seja,

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{1.14}$$

1.1.1 Translação espaço-tempo

Como um exemplo das consequências do teorema de Nöther, consideremos o caso simples de uma translação infinitesima global espaço-tempo definido por

$$\begin{aligned} &x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \\ ou, \quad &\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = \epsilon^\mu, \end{aligned} \tag{1.15}$$

Como estamos lidando com um campo escalar,

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{1.16}$$

E nesse caso nós obtemos a mudança no campo para corresponder a

$$\begin{aligned} \delta\phi(x) &= \phi'(x) - \phi(x) = \phi'(x) - \phi'(x') \\ &= -(\phi'(x') - \phi'(x)) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi'(x) \\ &= -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Fizemos $\phi'(x) = \phi(x)$, porque multiplicar o parâmetro infinitesimal ϵ^μ no lado direito da equação nos permite ignorar termos de mais altas ordens. Com isso, podemos calcular explicitamente a mudança na densidade lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) &= \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \\ &= \delta\phi(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} + (\partial_\nu \delta\phi(x))\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi(x)} \\ &= -\epsilon^\mu \partial_\phi(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \epsilon^\mu(\partial_\mu \partial_\nu \phi(x))\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi(x)} \\ &= -\epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu,\end{aligned} \tag{1.18}$$

Vemos que uma vez que a mudança na densidade lagrangiana é uma divergência total, a ação é invariante sob translações infinitesimais que definem uma simetria do sistema. Podemos identificar agora de (1.18) que

$$K^\mu = -\epsilon^\mu \mathcal{L} \tag{1.19}$$

Perceba que sob a transformação (1.17) ,

$$\delta\phi(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} = -\epsilon^\nu(\partial_\nu \phi(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \tag{1.20}$$

de maneira que obtemos a corrente associada com a transormação de simetria, dependendo do parâmetro de transformação,

$$\begin{aligned}J^\mu_\epsilon &= \delta\phi(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} - K^\mu \\ &= -\epsilon^\nu(\partial_\nu \phi(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} + \epsilon^\mu \mathcal{L} \\ &= -\epsilon_\nu \left((\partial_\nu \phi(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}\right) = -\epsilon_\nu T^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{1.21}$$

Fica claro, portanto, que a corrente conservada independente do parâmetro pode ser identificada com

$$T^{\mu\nu} = (\partial_\nu \phi(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{1.22}$$

Que é o tensor energia momemto. Pode-se verificar que

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{1.23}$$

Além disso, verifica-se que ele é simétrico, ou seja,

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \tag{1.24}$$

O operador energia-momento pode ser obtido a partir de

$$P^\mu = \int d^3x T^{0\mu} \tag{1.25}$$

Ou seja, o tensor energia-momento e o operador energia-momento são, respectivamente, a corrente e a carga associadas à simetria de transnalação de um sistema.

Para a teoria de Klein-Gordon livre de interações, lembremos que a densidade Lagrangiana tem a forma,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2. \tag{1.26}$$

Então obtemos,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi(x)} = \partial^\mu\phi(x), \tag{1.27}$$

E isso leva à forma explícita do tensor de tensão, a partir de (1.22)

$$T^{\mu\nu} = \partial^\nu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} = T^{\nu\mu} \tag{1.28}$$

Notamos que, para a teoria de um sistema livre de interações,

$$\begin{aligned}
P^0 &= \int d^3x T^{00} \\
&= \int d^3x \left[\left(\dot{\phi}(x)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}(x)\right)^2 + \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi + \frac{1}{2}\phi^2\right] \\
&= \int d^3x \left[\frac{1}{2}\left(\dot{\phi}(x)\right)^2 + \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi + \frac{1}{2}\phi^2\right] \\
&= H \qquad (1.29)\\
P^i &= \int d^3x T^{0i} \\
&= \int d^3x \partial^i\phi(x)\dot{\phi(x)}, \\
\boldsymbol{P} &= -\int d^3x \nabla\phi(x)\dot{\phi}(x)
\end{aligned}$$

1.2 Equação do campo

A equação de Klein-Gordon para um campo escalar real $\phi(x)$ é dada por

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0, \tag{1.30}$$

onde o operador D'Alembertiano quadridimensional é definido como

$$\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \partial^\nu \partial_\nu \tag{1.31}$$

e m é a massa do campo. Se houver alguma fonte externa, a equação (1.30) é generalizada para

$$(\Box + m^2)\phi(x) = \Upsilon(x) \tag{1.32}$$

Ambas as equações (1.30) e (1.32) são obtidas das equações de Euler-Lagrange da ação de um campo escalar

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(x) = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial^\nu \phi \partial_\nu - \frac{m^2}{2}\phi^2 + \Upsilon\phi\right) \tag{1.33}$$

Usando integração por partes, a ação pode ficar na forma

$$S[\phi] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi K \phi + \Upsilon\phi\right) \tag{1.34}$$

onde o operador

$$K \equiv K(x) = \Box + m^2 \tag{1.35}$$

é o kernel da ação.

1.3 Quantização canônica do campo e a energia de vácuo como uma expansão em modos

Para contornos estáticos suaves de qualquer forma geométrica, sempre é possível introduzir soluções de frequências negativas e positivas da equação de Klein-Gordon

$$\phi_J^{(+)}(t, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_J}} e^{-i\omega_J t}\boldsymbol{\Phi}_J(\boldsymbol{r}), \quad \phi_J^{(-)}(t, \boldsymbol{r}) = \left[\phi_J^{(+)}(t, \boldsymbol{r})\right]^* \tag{1.36}$$

Onde J é um índice coletivo para o vetor de onda generalizado, e $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r})$ satifaz algumas condições de contorno de uma superfície S. Se ela for aplicada à (1.30), ficamos com

$$-\nabla^2\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{r}) = \Lambda_J\mathbf{\Phi}_J(\boldsymbol{r}), \quad \Lambda_J \equiv \omega_J - m^2. \tag{1.37}$$

As funções (1.36) satifazem as condições de normalização

$$\left(\phi_J^{(\pm)}(x), \phi_{J'}^{(\pm)}(x)\right) = \pm\delta_{JJ'}, \quad \left(\phi_J^{(\pm)}(x), \phi_{J'}^{(\mp)}(x)\right) = 0, \tag{1.38}$$

onde

$$(f,g) = i\int_V d^3x \left(f^*\frac{\partial g}{\partial x^0} - \frac{\partial f^*}{\partial x^0}g\right) \tag{1.39}$$

é definido como o produto escalar de duas funções. De (1.39) também obtemos a condição de normalização para as soluções $\mathbf{\Phi}(x)$ do problema de contorno,

$$\int_V d^3x\mathbf{\Phi}_J^*(\boldsymbol{r})\mathbf{\Phi}_{J'}(\boldsymbol{r}) = \delta_{JJ'} \tag{1.40}$$

Seguindo o processo de quantização canônica, segue-se o operador campo como a soma dos modos

$$\phi(x) = \sum_J \left[\phi_J^{(+)}(x)a_J + \phi_J^{(-)}(x)a_J^+\right] \tag{1.41}$$

onde a_J e a_J^+ são, respectivamente, os operadores de criação e de aniquilação de uma partícula com números quânticos indicados pelo índice coletivo J. O somatório sobre J pode se tornar uma integral se alguns (ou todos) os números quânticos forem contínuos. Eles satifazem as relações de comutação

$$[a_J, a_{J'}^+] = \delta_{JJ'}, \quad [a_J, a_{J'}] = 0. \tag{1.42}$$

O estado de vácuo do campo é definido por

$$a_J\left|0\right\rangle = 0 \tag{1.43}$$

E para obter estados com partículas usamos o operador de criação no vácuo. Por exemplo,

$$\left|1\right\rangle = a_J^+\left|0\right\rangle \tag{1.44}$$

No caso em que não há nenhuma condição de contorno, o índice J coincide como o vetor de onda, $J \equiv \boldsymbol{k} = (k^1, k^2, k^3)$, as frequências de oscilação são dadas por $\omega_J = \omega_k = (m^2 + \boldsymbol{k}^2)^{\frac{1}{2}}$, e

$$\boldsymbol{\Phi}_J(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = \frac{e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \tag{1.45}$$

Neste caso, o símbolo $\delta_{JJ'}$ nas equações anteriores em que ele aparece deve ser mudado para $\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})$. O estado de vácuo do campo escalar no espaço de Minkowski livre de interações é definido por

$$a_{\boldsymbol{k}} \left|0_M\right\rangle = 0. \tag{1.46}$$

A energia de densidade no vácuo do campo escalar na presença de contornos é o valor esperado da componente 00 do tensor energia momento (1.22) no estado de vácuo,

$$\left\langle 0\right| T_{00}^{(0)}(x) \left|0\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle 0\left|\left[\sum_{\mu=0}^{3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\right)^2 + m^2\phi^2\right]\right|0\right\rangle \tag{1.47}$$

Substituindo a equação (1.41) na (1.47) e usando as equações (1.36), (1.42) e (1.43), obtemos

$$\left\langle 0\right| T_{00}^{(0)}(x) \left|0\right\rangle = \sum_J \frac{1}{4\omega_J}\left[(\omega_J^2+m^2)\boldsymbol{\Phi}_J(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\Phi}_J^*(\boldsymbol{r}) + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_J(\boldsymbol{r})}{\partial x^k}\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_J^*(\boldsymbol{r})}{\partial x^k}\right] \tag{1.48}$$

Consideremos agora a energia total do vácuo do campo escalar no volume de quantização V. Assumimos que as funções $\boldsymbol{\Phi}_J(\boldsymbol{r})$ a condição de contorno de Dirichlet ou de Neumann numa superfície S. Ao integrar a equação (1.48) sobre V usando (1.37) e (1.40), obtemos

$$E_0 = \int_V d^3x \left\langle 0\right| T_{00}^{(0)} \left|0\right\rangle = \frac{1}{2}\sum_J \omega_J \tag{1.49}$$

Para o espaço de Minkowski livre de interação sem fronteiras, a densidade de energia de vácuo é obtida das equações (1.45) e (1.48)

$$\left\langle 0_M\right| T_{00}^{(0)} \left|0_M\right\rangle = \frac{1}{2}\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3}\omega_k. \tag{1.50}$$

A energia total do vácuo no volume V é

$$E_0 = \int_V d^3x \left\langle 0_M\right| T_{00}^{(0)} \left|0_M\right\rangle = \frac{1}{2}\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3}\omega_k V. \tag{1.51}$$

Capítulo 2

Efeito Casimir

Neste capítulo aplicamos o formalismo desenvolvido no Capítulo 1 ao cálculo do efeito Casimir para um campo escalar confinado entre duas placas paralelas. A partir da quantização canônica e da expressão da energia de ponto zero como soma sobre modos, determinamos a energia de Casimir por unidade de área e a pressão associada em função da separação entre as placas.

2.1 Aplicação em placas paralelas

Consideremos a energia de vácuo de Casimir de um campo escalar numa configuração de dois planos paralelos em três dimensões com Dirichlet.

Começamos das quantidades locais e damos especial atenção às regiões do espaço externo à configuração entre as placas. Sejam duas placas em z=0 e z=a. Na região entre as placas, o conjunto completo ortonormal de soluções para a equação (1.30) satisfazendo a condição de contorno de Dirichlet $\mathbf{\Phi}_J(x,y,0) = \mathbf{\Phi}_J(x,y,a) = 0$ é dada pela equação (1.36), onde

$$\begin{gathered}
\mathbf{\Phi}_J(\boldsymbol{r}) = \mathbf{\Phi}_{k_\perp,n}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\pi\sqrt{2a}} e^{i(k_x x + k_y y)} sen(k_{zn} z), \\
\omega^2_{k_\perp,n} = m^2 + k_\perp^2 + k_{zn}^2, \quad k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad k_{zn} = \frac{\pi n}{a}.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Onde a discretização de k na direção de z é devido às condições de contorno impostas durante a solução da equação (1.30). Substituindo essas soluções na equação (1.48) obtemos a densidade de energia no vácuo

$$\langle 0|\, T_{00}^{(0)}\, |0\rangle = \frac{1}{2a} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\omega_{k_\perp,n} - \frac{m^2 + k_\perp^2}{\omega_{k_\perp,n}} cos(2k_{zn} z) \right] \tag{2.2}$$

Onde mudamos para o sistema de coordenadas polares e usamos a relação $sen^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2}$

O último termo é oscilatório e não contribui para a energia total. No espaço de Minkowski livre de interações, como vimos, o conjunto completo ortonormel de soluções é dado pela equação (1.50), que mudando para coordenadam em k, nos leva a

$$\langle 0_M | T_{00}^{(0)} | 0_M \rangle = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k. \tag{2.3}$$

onde $d^3k = dk_x dk_y dk_z$, $\omega_k = (m^2 + \boldsymbol{k}^2)^{1/2}$. A densidade de energia de Casimir

$$\epsilon(z) = \langle 0 | T_{00}^{(0)}(z) | 0 \rangle - \langle 0_M | T_{00}^{(0)} | 0_M \rangle \tag{2.4}$$

pode ser encontrada a partir de (2.2) e (2.3) usando a fórmula de Abel-Plana

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(t)dt = \frac{1}{2}F(0) + i \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}[F(it) - F(-it)], \tag{2.5}$$

de modo que obtemos o resultado

$$\begin{aligned} \epsilon(z) = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{k_\perp dk_\perp}{2\pi} \Bigg[\frac{\sqrt{m^2 + k_\perp^2}}{2} + \frac{2\pi}{a} \int_A^{\infty} \frac{\sqrt{t^2 - A^2}}{e^{2\pi t} - 1} dt \\ + (m^2 + k_\perp^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(2k_{zn}z)}{\omega_{k_\perp, n}} \Bigg], \end{aligned} \tag{2.6}$$

Onde,

$$A \equiv \frac{a\sqrt{m^2 + k_\perp^2}}{\pi}, \quad t \equiv \frac{ak_z}{\pi}. \tag{2.7}$$

Se descartarmos o termos oscilatório de (2.6), a energia de Casimir por unidade de área das placas é dada por

$$\begin{aligned} E(a) = \int_0^a dz \epsilon(z) = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{k_\perp dk_\perp}{2\pi} \Bigg(\frac{\sqrt{m^2 + k_\perp^2}}{2} \\ + \frac{2\pi}{a} \int_A^{\infty} \frac{\sqrt{t^2 - A^2}}{e^{2\pi t} - 1} dt \Bigg) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Para um campo sem massa, temos $A = ak_\perp/\pi$, de modo que depois de integramos temos,

$$E(a) = -\frac{\pi^2}{1440a^3} - \frac{1}{8\pi}\int_0^\infty k_\perp^2 dk_\perp. \tag{2.9}$$

Uma vez que essa já é a energia por undide de área, para calcular a pressão basta derivar em relação à distância entre as placas

$$P(a) = -\frac{\partial E(a)}{\partial a} \tag{2.10}$$

Portanto a pressão entre as placas é

$$P(a) = -\frac{\pi^2}{480a^4} \tag{2.11}$$

Capítulo 3

Compactificação do campo Éter-escalar e o efeito Casimir

Neste capítulo, estendemos o formalismo do efeito Casimir desenvolvido nos capítulos anteriores para um cenário em que a estrutura do espaço-tempo é modificada pela presença de uma dimensão extra compactificada e por um campo éter acoplado ao campo escalar. O objetivo central é analisar como essas modificações alteram o espectro de modos do campo e, consequentemente, a energia de vácuo e a força de Casimir observada entre placas paralelas. Em contraste com o caso usual em quatro dimensões, a compactificação introduz uma nova escala de comprimento no problema, enquanto o acoplamento com o campo éter modifica a relação de dispersão dos modos, produzindo correções que dependem explicitamente dos parâmetros do modelo.

Além disso, consideramos condições de quase-periodicidade ao longo da dimensão extra, o que permite interpolar entre diferentes classes de condições de contorno e investigar, de forma sistemática, o papel da topologia e das fases de contorno na energia de Casimir. Essa abordagem é particularmente relevante porque conecta o efeito Casimir (tradicionalmente interpretado como um efeito espectral induzido por fronteiras) a cenários de física além do modelo padrão, nos quais dimensões extras e quebras efetivas de simetria de Lorentz podem deixar assinaturas em observáveis de baixa energia.

A análise apresentada neste capítulo também se insere de modo natural na continuidade desta dissertação, uma vez que, após a formulação do caso escalar padrão e da geometria de placas paralelas, torna-se possível generalizar o problema para configurações fisicamente mais ricas, preservando o mesmo núcleo metodológico: determinar o espectro permitido, construir a energia de vácuo renormalizada e extrair a pressão de Casimir a partir da dependência com a separação entre as placas. Assim, este capítulo fornece uma aplicação direta e avançada das ferramentas desenvolvidas anteriormente, ao mesmo tempo em que explicita como a estrutura geométrica e os acoplamentos adicionais podem modificar a resposta do vácuo quântico.

3.1 Acoplamento Éter-escalar

O campo éter é um campo vetorial que pode ser acoplado a um campo escalar, modificando a dinâmica deste último. Ele é um vetor do tipo espaço de cinco dimensões $u^a = (0, 0, 0, 0, v)$, onde a quinta dimensão, x_5, é compactificada num círculo de raio b. O vetor tem dimensão de massa e é constante, ou seja, ele dá um direção preferencial, consequentemente, quebrando a simetria de Lorentz. Deste modo, a lagrangiana do sistema, associada à interação entre o campo escalar e o éter é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_a \phi)^2 - \frac{1}{2\mu_\phi^2} u^a u^b \partial_a \phi \partial_b \phi \tag{3.1}$$

onde μ_ϕ é um parâmetro de acoplamento com dimensão de massa que controla a intensidade do acoplamento entre o campo escalar e o éter. Substituindo (3.1) nas equações de Euler-Lagrange,

$$\partial_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \tag{3.2}$$

Obtemos a equação de movimento para o campo escalar acoplado ao éter,

$$\begin{aligned} \partial_a \partial^a \phi + \frac{1}{\mu_\phi^2} u^a u^b \partial_a \partial_b \phi = 0, \\ \partial_a \partial^a \phi = -\mu_\phi^{-2} \partial_a (u^a u^b \partial_b \phi) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ao usar a solução de onda plana $\phi \sim e^{ik_a x^a} = e^{ik_\mu k^\mu + ik_5 k^5}$, e $u_a u^a = v^2$, obtemos a relação de dispersão modificada,

$$-k_\mu k^\mu = (1 + \alpha_\phi^2) k_5^2 \tag{3.4}$$

Onde $\alpha_\phi = \frac{v}{\mu_\phi}$ é um parâmetro adimensional. Essa relação de dispersão modificada implica que a presença do campo éter altera a energia dos modos do campo escalar, o que, por sua vez, afeta a energia de vácuo e a força de Casimir entre as placas paralelas.

Se impusermos a condição de contorno quasi-periódica

$$\phi(t, x, y, z, x_5) = e^{-2\pi\beta i} \phi(t, x, y, z, x_5 + b), \tag{3.5}$$

e a condição de contorno de Neumann

$$\partial_z \phi(t,x,y,z,x^5)_{z=0} = 0, \quad \partial_z \phi(t,x,y,z,x^5)_{z=a} = 0, \tag{3.6}$$

na solução de onda plana do campo escalar os momentos na direção de x^5 e z são discretizados. β é uma fase que pode variar entre 0 e 1, permitindo interpolar entre condições de contorno periódicas ($\beta = 0$) e antiperiódicas ($\beta = 1/2$). Ela generaliza as condições de contorno periódica e antiperiódica já bem conhecidas $\beta = 0$ e $\beta = 1/2$, respectivamente. Então, pela condição quasi-periódica, a dimensão extra é compactificada num círculo $\mathbb{S}^1$. A presenção das condições de contorno de Neumann na direçao z permite a medição do efeito no laboratório. Desse modo, os efeitos da dimensão extra e do campo éter podem ser detectados como modificações na força de Casimir entre as placas paralelas.

Estamos lidando com o espaço-tempo $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{S}^1$, onde $\mathbb{R}^4$ é o espaço-tempo de Minkowski e $\mathbb{S}^1$ é a dimensão extra compactificada. A condição (3.5) aplicada ao fator $e^{ik_5x^5}$ da solução $\phi \sim e^{ik_\mu x^\mu + ik_5x^5}$, da

$$e^{ik_5x^5} = e^{-2\pi i\beta} e^{k_5(x^5+b)} \implies 1 = e^{-2\pi i\beta} e^{ik_5 b} \implies e^{ik_5 b} = e^{2\pi i\beta} \tag{3.7}$$

portanto o espectro é

$$k_n = \frac{2\pi}{b}(n+\beta), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{3.8}$$

onde fizemos $k_5 \equiv k_n$. Já para a dependência de ϕ em relação a z em modo estacionário devido à condição de contorno de Neumann , temos, por sepração de variáveis,

$$\phi \sim e^{-i\omega t} e^{ik_x x + ik_y y} Z(z) e^k_x x^5 \tag{3.9}$$

A parte em z satisfaz

$$Z''(z) + k_z^2 Z(z) = 0, \quad k_z^2 = \omega^2 - k_x^2 - k_y^2 - (1+\alpha_\phi^2)k_n^2 \tag{3.10}$$

Usando as condiçoes de Neumann

$$\left.\frac{dZ}{dz}\right|_{z=0} = 0, \quad \left.\frac{dZ}{dz}\right|_{z=a} = 0, \tag{3.11}$$

em (3.10), obtemos que

$$k_z = k_m = \frac{m\pi}{a}, \quad m \in \mathbb{Z} \tag{3.12}$$

Então, a relação de dispersão submetida a ambas as condições de contorno é dada por

$$-k^{\mu}k_{\mu} = k_m^2 + (1+\alpha_{\phi}^2)k_n^2, \tag{3.13}$$

Consequentemente, as autofrequências do sistema são

$$\omega_n^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_m^2 + (1+\alpha_{\phi}^2)k_n^2 \tag{3.14}$$

Usaremos essa expressão para calcular a energia de Casimir na próxima seção.

3.2 Energia de Casimir

No espaço-tempo plano, a energia de casimir surge como consequência das condições de contorno impostas no campo quântico. Como impusemos duas condições de contorno dinstintas ao sistema (3.13), Um acontribuição finita da energia de Casimir pode ser calculada. Usando a equação (3.14) na equação (1.49), que obtivemos no capítulo 1, a energia de vácuo do campo escalar acoplado ao éter é dada por

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{\ell} \int d^{\ell}k \sum_m \sum_n \sqrt{k^2 + k_m^2 + (1+\alpha_{\phi}^2)k_n^2} \tag{3.15}$$

Onde $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, L^2 é a área das placas e $\ell = 2$. O parâmetro ℓ é chamado de regularizador de dimensão. Nós o usamos em vez de 2, porque a soma e a integral na equação (3.15) são divergentes. O processo de regularização é necessário para obter um resultado finito para a energia de Casimir. Para isso usaremos a relação

$$\int f(k)d^n k = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^{\infty} f(k)k^{n-1}dk \tag{3.16}$$

que é a generalização da mudança de coordenadas esféricas para n dimensões. Substituindo a equação (3.16) na equação (3.15), obtemos

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{\ell} \frac{2\pi^{\ell/2}}{\Gamma(\ell/2)} \sum_m \sum_n \int_0^{\infty} dk k^{\ell-1}[k^2 + k_m^2 + (1+\alpha_{\phi}^2)k_n^2]^{-r} \tag{3.17}$$

para calcular a integral em (3.17) definamos $A = k_m^2 + (1+\alpha_{\phi}^2)k_n^2$, então a integral se torna

$$I(A) = \int_o^{\infty} dk k^{\ell} - 1(k^2 + A)^{-r} \tag{3.18}$$

se fizermos a substituição $k = \sqrt{A}t$, obtemos

$$I(A) = A^{\frac{\ell}{2}-r} \int_0^\infty dt t^{\ell-1} (1+t^2)^{-r} \tag{3.19}$$

Agora fazemos a substituição $t^2 = u$, então $t^{\ell-1}dt = \frac{1}{2}u^{\frac{\ell}{2}-1}du$, e a integral se torna

$$I(A) = \frac{1}{2} A^{\frac{\ell}{2}-r} \int_0^\infty du u^{\frac{\ell}{2}-1} (1+u)^{-r} \tag{3.20}$$

usando a definição da função beta, que é dada por

$$B(x,y) = \int_0^\infty du u^{x-1} (1+u)^{-x-y} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{3.21}$$

podemos escrever a integral $I(A)$ como

$$I(A) = \frac{1}{2} A^{\frac{\ell}{2}-r} B\left(\frac{\ell}{2}, r - \frac{\ell}{2}\right) = \frac{1}{2} A^{\frac{\ell}{2}-r} \frac{\Gamma(\frac{\ell}{2})\Gamma(r-\frac{\ell}{2})}{\Gamma(r)} \tag{3.22}$$

Substituindo a equação (3.22) na equação (3.17), obtemos

$$E = \frac{1}{4} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^\ell \frac{2\pi^{\ell/2}}{\Gamma(\ell/2)} \frac{\Gamma(\frac{\ell}{2})\Gamma(r-\frac{\ell}{2})}{\Gamma(r)} \sum_m \sum_n [k_m^2 + (1+\alpha_\phi^2)k_n^2]^{\frac{\ell}{2}-r} \tag{3.23}$$

cancelando os fatores $\Gamma(\ell/2)$ e o 2 com o 4, obtemos

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^\ell \pi^{\ell/2} \frac{\Gamma(r-\frac{\ell}{2})}{\Gamma(r)} \sum_m \sum_n [k_m^2 + (1+\alpha_\phi^2)k_n^2]^{\frac{\ell}{2}-r} \tag{3.24}$$

Substituindo os valores de $k_m = \frac{m\pi}{a}$ e $k_n = \frac{2\pi}{b}(n+\beta)$, obtemos

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^\ell \pi^{\ell/2} \frac{\Gamma(r-\frac{\ell}{2})}{\Gamma(r)} \sum_m \sum_n \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + (1+\alpha_\phi^2)\left(\frac{2\pi}{b}(n+\beta)\right)^2\right]^{\frac{\ell}{2}-r} \tag{3.25}$$

Capítulo 4

Conclusões e Perpectivas

Esta dissertação teve como objetivo estabelecer a ligação entre a formulação lagrangiana e as simetrias de uma teoria de campos, a construção do tensor energia–momento e da energia do vácuo, e a emergência do efeito Casimir quando o espectro de modos do campo é modificado pela presença de fronteiras.

O ponto de partida foi a dinâmica clássica de um campo escalar real descrita pela equação de Klein–Gordon (1.30) e sua generalização na presença de uma fonte externa (1.32). A partir desse formalismo, evidenciou-se que a informação essencial para a discussão do vácuo e de seus observáveis encontra-se na definição da ação e da densidade lagrangiana, Eqs. (1.1) e (1.2), e nas consequências das simetrias contínuas dessa ação.

Em particular, explorou-se a condição de invariância da ação sob transformações gerais (1.3), com ênfase no caso em que a variação da lagrangiana se reduz a uma divergência total (1.8). A equivalência entre essa condição e a existência de uma corrente conservada foi explicitada ao comparar (1.8) com a identidade obtida via Euler–Lagrange (1.11).

Como exemplo central, analisou-se a simetria de translação no espaço-tempo (1.15), que induz a transformação infinitesimal do campo (1.17) e implica a forma de divergência total (1.18). Nesse contexto, identificou-se o tensor energia–momento como a corrente de Nöther associada à translação, Eq. (1.22), e sua conexão com o operador energia–momento é obtida pela integração espacial (ver, por exemplo, a relação final em (1.29)). Essa etapa é conceitualmente decisiva, pois o efeito Casimir será extraídode valores esperados do tensor energia–momento e de sua dependência geométrica.

A transição para a teoria quântica foi realizada via quantização canônica e expansão em modos. Para contornos estáticos, introduziram-se soluções de frequência positiva e negativa (1.36) e o correspondente problema espectral espacial (1.37), com produto escalar (1.39) e condição de normalização (1.40). O operador de campo (1.41) foi construído em termos de operadores de criação e aniquilação que satisfazem as relações de comutação (1.42), com definição do vácuo (1.43).

Nesse formalismo, a energia de vácuo surge como valor esperado da componente 00 do tensor energia–momento (1.47). Substituindo-se a solução geral (1.41) em (1.47), obtém-se a expressão local (1.48), cuja integração no volume leva à soma sobre modos para a energia de ponto zero (1.49). Em contrapartida, na ausência de fronteiras, a solução plana (1.45) conduz à densidade de energia de vácuo de Minkowski (1.50). Embora cada energia de vácuo seja divergente, as diferenças entre configurações com e sem restrições podem ser finitas e mensuráveis.

No Capítulo 2, o formalismo acima foi aplicado à geometria de duas placas paralelas com condições de contorno de Dirichlet. O espectro do campo é explicitamente modificado pela discretização do número de onda na direção normal às placas, o que se reflete na densidade de energia de vácuo entre as placas, Eq. (2.2). A densidade correspondente do vácuo de Minkowski, escrita como integral contínua, é dada por (2.3). A desindade renormalizada (2.6) foi obtida a partir da diferença de energia nas configurações com e sem placas usando Abel–Plana (2.5).

Ao descartar o termo oscilatório de (2.6), que não contribui para a energia total, obteve-se a energia de Casimir por unidade de àrea no limite não-massivo, Eq. (2.9). Finalmente, a pressão de Casimir foi extraída como derivada da energia em relação à separação entre as placas, culminando no resultado padrão (2.11). Esses resultados explicitam que o efeito Casimir é, essencialmente, um efeito espectral: as fronteiras alteram o conjunto de frequências (1.36) que contribuem na soma (1.49), e a parte finita dessa reorganização espectral se manifesta como uma força (ou pressão) dependente de a.

4.1 Perspectivas e trabalhos futuros

A estrutura desenvolvida ao longo do texto sugere extensões naturais, mantendo o mesmo núcleo metodológico: especificar a dinâmica (por exemplo, via (1.30) ou (1.32)), fixar o observável de energia a partir de T_{00} (como em (1.47)–(1.49)) e caracterizar como condições geométricas e de contorno alteram o espectro (via (1.37) e (1.36)), produzindo uma contribuição física finita após o procedimento de comparação/regularização (como ilustrado por (2.2)–(2.5)).

Uma primeira direção é estudar compactificações (por exemplo, dimensões extras) e campos adicionais que modifiquem as frequências permitidas, o que se traduz, na prática, em uma alteração do problema espectral (1.37) e, portanto, da soma de modos (1.49). Uma segunda direção é a inclusão de campos externos, que tipicamente alteram a forma efetiva da equação de movimento (e seu espectro), afetando as expressões locais de energia (1.48) e os resultados integrados análogos a (2.9) e (2.11). Por fim, geometrias mais gerais e condições de contorno alternativas podem ser tratadas dentro do mesmo arcabouço, modificando-se o conjunto de autofunções e frequências em (1.36)–(1.37) e repetindo-se o procedimento de regularização do tipo (2.5).

Em síntese, os resultados desta dissertação mostram que o efeito Casimir fornece um teste conceitual e técnico privilegiado para a teoria quântica de campos: a partir das equações (Eqs. (1.47)–(1.49)), torna-se possível compreender como informações geométricas e de contorno entram no espectro do campo (Eqs. (1.36) e (1.37)) e como essa dependência se traduz em grandezas observáveis como a energia (2.9) e a pressão (2.11).

Referências Bibliográficas

[1] H. B. G. Casimir, "On the attraction between two perfectly conducting plates," *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, vol. 51, pp. 793–795, 1948.

[2] G. E. Volovik, "Mesoscopic casimir forces from effects of discrete particle number in the quantum vacuum," *arXiv preprint*, 2001. also published in Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 73 (2001) 419–423; JETP Lett. 73 (2001) 375–379.

[3] R. Passante, L. Rizzuto, P. Schall, and E. Marino, "Quantum and critical casimir effects: Bridging fluctuation physics and nanotechnology," *arXiv preprint*, 2025.

[4] R. S. Decca, E. Fischbach, G. L. Klimchitskaya, D. E. Krause, D. Lopez, and V. M. Mostepanenko, "Improved tests of extra-dimensional physics and thermal quantum field theory from new casimir force measurements," *Physical Review D*, vol. 68, p. 116003, 2003.

[5] M. Asorey, D. García-Alvarez, and J. M. Muñoz Castañeda, "Casimir effect and global theory of boundary conditions," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 39, pp. 6127–6136, 2006.

[6] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir Effect*. Oxford: Oxford University Press, 2009.

[7] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, 1995.

[8] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2007.

[9] A. A. Banishev, A. W. Rodriguez, F. Capasso, and J. N. Munday, "Repulsive casimir and van der waals forces: From measurements to future technologies," *Journal of Vacuum Science & Technology B*, vol. 28, p. 060801, 2010.

[10] F. M. Serry, D. Walliser, and G. J. Maclay, "The role of the casimir effect in the static deflection and stiction of membrane strips in microelectromechanical systems (mems)," *Journal of Applied Physics*, vol. 84, no. 5, pp. 2501–2506, 1998.

[11] S. N. Solodukhin, "Surface terms, conformal anomalies and the geometry of entanglement," *arXiv preprint*, 2002.

[12] A. A. Bytsenko, G. Cognola, L. Vanzo, and S. Zerbini, "The casimir effect and topological field theories," *arXiv preprint*, 2001.

[13] F. M. Stefanazzi, A. M. Rossi, and C. J. Nunes, "Casimir effect and its implications in nanomechanics and soft matter," *Physics*, vol. 6, no. 2, p. 36, 2024.

[14] D. A. R. Dalvit and S. K. Lamoreaux, "Quantum friction and vacuum fluctuations: general concepts and recent advances," *arXiv preprint*, 2021.

[15] F. Scheck, *Classical Field Theory.* Springer, 2013.

[16] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume 1: Foundations.* Cambridge University Press, 1995.

[17] R. Zhao, L. Li, S. Yang, W. Bao, Y. Xia, P. Ashby, Y. Wang, and X. Zhang, "Stable casimir equilibria and quantum trapping," *Science*, vol. 364, no. 6444, pp. 984–987, 2019.

[18] K. E. L. de Farias, M. A. Anacleto, E. Passos, I. Brevik, H. Mota, and J. R. L. Santos, "Aether-scalar field compactification and casimir effect," *arXiv preprint*, 2023.

[19] K. E. L. de Farias, M. A. Anacleto, E. Passos, I. Brevik, H. Mota, and J. R. L. Santos, "Aether-electromagnetic theory and the casimir effect," *Physical Review D*, vol. 109, p. 125010, 2024.

[20] A. Das, *Lectures on Quantum Field Theory.* Singapore: World Scientific, 2008.