Capítulo 1

Revisão do efeito casimir

Neste capítulo apresentamos uma revisão sistemática do efeito Casimir à luz da teoria quântica de campos. O desenvolvimento inicia-se com a formulação lagrangiana de campos clássicos, a discussão de simetrias contínuas e suas consequências via o teorema de Nöther. Em seguida, procede-se à quantização de campos escalares e à análise da energia do vácuo na presença de fronteiras. A partir desse formalismo, o efeito Casimir é estudado explicitamente no caso de placas paralelas, conduzindo à obtenção da energia do vácuo e da pressão associada.

1.1 Teorema de Nöther

O teorema de Nöther estabelece a relação fundamental entre simetrias contínuas da ação e leis de conservação, desempenhando um papel central na teoria clássica e quântica de campos. Em particular, as simetrias de translação no espaço-tempo conduzem à conservação da energia e do momento, que são descritas de forma unificada pelo tensor energia-momento. Nesta seção, revisamos o teorema de Nöther no formalismo lagrangiano e derivamos a expressão do tensor energia-momento para campos clássicos, com o objetivo de fundamentar sua utilização posterior no cálculo da energia de Casimir em sistemas com condições de contorno.

Seja um sistema dinâmico descrito pela ação

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \tag{1.1}$$

onde assumimos,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \tag{1.2}$$

Sob uma tranformação geral da forma

$$\begin{aligned} & x^\mu \to x'^\mu \\ & \phi(x) \to \phi'(x') \\ & \partial_\mu \phi(x) \to \partial'_\mu \phi'(x') \end{aligned} \tag{1.3}$$

dizemos que a dinâmica descrita pela ação (1.1) é invariante sob transformações (1.3) se a ação não muda sob essa tranformações.A saber, se

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = \int d^4x' \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x')) \tag{1.4}$$

então, as transformações (1.3) definem uma simetria do sistema. É claro que neste caso, as equações de Euler-Lagrange para os sietmas com e sem linha continuariam invariantes. Vale a pena enfatizar aqui que 1.3 inclui uma classe muito interessante de transformações onde as coordenadas espaço-tempo não mudam, ou seja,

$$x'^\mu = x^\mu, \tag{1.5}$$

e somente as variáveis dinâmicas da teoria se transformam. Tais transformações são conhecidas como transforamções de simetria interna para serem contrastadas com as transformações espaço-tempo onde as coordenadas espaço-tempo se transformam juntamente com comm as variáveis dinâmicas, como em (1.3). Nossa discussão de simetrias se aplica tanto às transformações espaço-tempo, onde as coordenadas espaço-tempo são transformadas, como as transformações de simetria interna, onde as coordenadas espaço-tempo não são afetadas pelas transformações.

Simetrias têm consequências interessantes para transformações contínuas. Então, Consideremos uma trsnformação infinitesimal com

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = 1, \tag{1.6}$$

o que vale para a maioria das simetrias globais de espaço-tempo , bem como para as simetrias internas. Nesse caso, invariância da ação sob as formas infinitesimais das transformações em (1.3) implicaria

$$
\begin{aligned}
\delta S = & \int d^4x' \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x')) - \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = 0, \\
or, \quad & \int d^4x \mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) - \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = 0, \\
or, \quad & \int d^4x (\mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))) = 0,
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Claramente, (1.7) será válida se

$$
\mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = \partial_\mu K^\mu, \tag{1.8}
$$

que deve valer independentemente do uso de equações de movimento para o sistema que estamos vendo. Isto é bem geral e é possível ter transformações de simetria pelo qual K^μ. Por outro lado, definir a transformação infinitesimal no campo como

$$
\phi'(x) - \phi(x) = \delta\phi(x) \tag{1.9}
$$

de modo que

$$
\delta(\partial_\mu \phi(x)) = \partial_\mu \phi'(x) - \partial_m u \phi(x) = \partial_\mu \delta\phi(x) \tag{1.10}
$$

podemos calcular explicitamente, uma vez que mantemos somente os termos lineares, porque $\delta\phi(x)$ é infinitesimal,

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \\
& = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) + \delta\phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} + \delta(\partial_\mu \phi(x)) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \\
& = \delta\phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} + \delta(\partial_\mu \phi(x)) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \\
& = \delta\phi(x) \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} + \delta(\partial_\mu \phi(x)) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \\
& = \partial_\mu \left(\delta\phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \right).
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Usamos a equação de Euler-Lagrange na penúltima linha. Comparando (1.8) e (1.11), obtemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\delta\phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_\mu \phi(x)} \right) &= \partial_\mu K^\mu \\ ou, \quad \partial_\mu \left(\delta\phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_\mu \phi(x)} - K^\mu \right) &= 0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Isso mostra que sempre que houver uma simetria contínua associada com o sistema, podemos definir uma corrente

$$\partial J^\mu = \delta\phi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_\mu \phi(x)} - K^\mu \tag{1.13}$$

que é conservado, ou seja,

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{1.14}$$

1.1.1 Translação espaço-tempo

Como um exemplo das consequências do teorema de Nöther, consideremos o caso simples de uma translação infinitesima global espaço-tempo definido por

$$\begin{aligned} x^\mu \to x'^\mu &= x^\mu + \epsilon^\mu \\ ou, \quad \delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu &= \epsilon^\mu, \end{aligned} \tag{1.15}$$

Como estamos lidando com um campo escalar,

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{1.16}$$

E nesse caso nós obtemos a a mudança no campo para corresponder a

$$\begin{aligned} \delta\phi(x) &= \phi'(x) - \phi(x) = \phi'(x) - \phi'(x') \\ &= -(\phi'(x') - \phi'(x)) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi'(x) \\ &= -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Fizemos $\phi'(x) = \phi(x)$, porque multiplicar o parâmetro infinitesimal ϵ^μ no lado direito da equação nos permite ignorar termos de mais altas ordens. Com isso, podemos calcular a explicitamente a mudança na densidade lagrangiana

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) &= \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \\
&= \delta\phi(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} + (\partial_\nu \delta\phi(x))\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi(x)} \\
&= -\epsilon^\mu \partial_\phi(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \epsilon^\mu(\partial_\mu \partial_\nu \phi(x))\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi(x)} \\
&= -\epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu,
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Vemos que uma vez que a mudança na densidade lagrangiana é uma divergência total, a ação é invariante sob translações infinitesimais que definem uma simetria do sistema. Podemos identificar agora de (1.18) que

$$K^\mu = -\epsilon^\mu \mathcal{L} \tag{1.19}$$

Perceba que sob a transformação (1.17) ,

$$\delta\phi(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} = -\epsilon^\nu(\partial_\nu \phi(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \tag{1.20}$$

de maneira que obtemos a corrente associada com a transormação de simetria, dependendo do parâmetro de transformação,

$$\begin{aligned}
J^\mu_\epsilon &= \delta\phi(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} - K^\mu \\
&= -\epsilon^\nu(\partial_\nu \phi(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} + \epsilon^\mu \mathcal{L} \\
&= -\epsilon_\nu \left((\partial_\nu \phi(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \right) = -\epsilon_\nu T^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Fica claro, portanto, que a corrente conservada independente do parâmetro pode ser identificada com

$$T^{\mu\nu} = (\partial_\nu \phi(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{1.22}$$

Que é o tensor energia momemto. Pode-se verificar que

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{1.23}$$

Além disso, verifica-se que ele é simétrico, ou seja,

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \tag{1.24}$$

O operador energia-momento pode ser obtido a partir de

$$P^\mu = \int d^3x T^{0\mu} \tag{1.25}$$

Ou seja, o tensor energia-momento e o operador energia-momento são, respectivamente, a corrente e a carga associadas à simetria de transnalação de um sistema.

Para a teoria de Klein-Gordon livre de interações, lembremos que a densidade Lagrangiana tem a forma,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2. \tag{1.26}$$

Então obtemos,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi(x)} = \partial^\mu\phi(x), \tag{1.27}$$

E isso leva à forma explícita do tensor de tensão, a partir de (1.22)

$$T^{\mu\nu} = \partial^\nu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} = T^{\nu\mu} \tag{1.28}$$

Notamos que, para a teoria de um sistema livre de interações,

$$\begin{aligned}
P^0 &= \int d^3x T^{00} \\
&= \int d^3x \left[\left(\dot{\phi}(x)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}(x)\right)^2 + \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi + \frac{1}{2}\phi^2\right] \\
&= \int d^3x \left[\frac{1}{2}\left(\dot{\phi}(x)\right)^2 + \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi + \frac{1}{2}\phi^2\right] \\
&= H \qquad\qquad (1.29)\\
P^i &= \int d^3x T^{0i} \\
&= \int d^3x \partial^i\phi(x)\dot{\phi(x)}, \\
\boldsymbol{P} &= -\int d^3x \nabla\phi(x)\dot{\phi}(x)
\end{aligned}$$

1.2 O efeito Casimir escalar para placas paralelas

Nesta seção da revisão iremos desenvolver o formalismo do campo escalar necessário para o estudo do efeito Casimir entre placas paralelas, desde a equação de Klein–Gordon e as condições de contorno até a obtenção da energia do vácuo e da pressão de Casimir.

1.2.1 Equação do campo

A equação de Klein-Gordon para um campo escalar real $\phi(x)$ é dada por

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0, \tag{1.30}$$

onde o operador D'Alembertiano quadridimensional é definido como

$$\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \partial^\nu \partial_\nu \tag{1.31}$$

e m é a massa do campo. Se houver alguma fonte externa, a equação (1.30) é generalizada para

$$(\Box + m^2)\phi(x) = \Upsilon(x) \tag{1.32}$$

Ambas as equações (1.30) e (1.32) são obtidas das equações de Euler-Lagrange da ação de um campo escalar

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(x) = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial^\nu \phi \partial_\nu - \frac{m^2}{2}\phi^2 + \Upsilon\phi\right) \tag{1.33}$$

Usando integração por partes, a ação pode ficar na forma

$$S[\phi] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi K \phi + \Upsilon\phi\right) \tag{1.34}$$

onde o operador

$$K \equiv K(x) = \Box + m^2 \tag{1.35}$$

é o kernel da ação.

1.2.2 Quantização canônica do campo e a energia de vácuo como uma expansão em modos

Para contornos estáticos suaves de qualquer forma geométrica, sempre é possível introduzir soluções de frequências negativas e positivas da equação de Klein-Gordon

$$\phi_J^{(+)}(t,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_J}} e^{-i\omega_J t}\boldsymbol{\Phi}_J(\boldsymbol{r}), \quad \phi_J^{(-)}(t,\boldsymbol{r}) = \left[\phi_J^{(+)}(t,\boldsymbol{r})\right]^* \tag{1.36}$$

Onde J é um índice coletivo para o vetor de onda generalizado, e $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r})$ satifaz algumas condições de uma superfície S. Se ela for aplicada à (1.30), ficamos com

$$-\nabla^2\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}) = \Lambda_J\boldsymbol{\Phi}_J(\boldsymbol{r}), \quad \Lambda_J \equiv \omega_J - m^2. \tag{1.37}$$

As funções (1.36) satifazem as condições de normalização

$$\left(\phi_J^{(\pm)}(x), \phi_{J'}^{(\pm)}(x)\right) = \pm\delta_{JJ'}, \quad \left(\phi_J^{(\pm)}(x), \phi_{J'}^{(\mp)}(x)\right) = 0, \tag{1.38}$$

onde

$$(f,g) = i\int_V d^3x \left(f^*\frac{\partial g}{\partial x^0} - \frac{\partial f^*}{\partial x^0}g\right) \tag{1.39}$$

é definido como o produto escalar de duas funções. De (1.39) também obtemos a condição de normalização para as soluções $\boldsymbol{\Phi}(x)$ do problemma de contorno,

$$\int_V d^3x\boldsymbol{\Phi}_J^*(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\Phi}_{J'}(\boldsymbol{r}) = \delta_{JJ'} \tag{1.40}$$

Seguindo o processo de quantização canônica, segue-se o operador campo como a soma dos modos

$$\phi(x) = \sum_J \left[\phi_J^{(+)}(x)a_J + \phi_J^{(-)}(x)a_J^+\right] \tag{1.41}$$

onde a_J e a_J^+ são, respectivamente, os operadores de criação e de aniquilação de uma partícula com números quânticos indicados pelo índice coletivo J. O somatório sobre J pode se tornar uma integral se alguns (ou todos) os números quânticos forem contínuos. Eles satifazem as relações de comutação

$$[a_J, a_{J'}^+] = \delta_{JJ'}, \quad [a_J, a_{J'}] = 0. \tag{1.42}$$

O estado de vácuo do campo é definido por

$$a_J |0\rangle = 0 \tag{1.43}$$

E para obter estados com partículas usamos o operador de criação no vácuo. Por exemplo,

$$|1\rangle = a_J^{+} |0\rangle \tag{1.44}$$

No caso em que não há nenhuma condição de contorno, o índice J coincide como o vetor de onda, $J \equiv \boldsymbol{k} = (k^1, k^2, k^3)$, as frequências de oscilação são dadas por $\omega_J = \omega_k = (m^2 + \boldsymbol{k}^2)^{\frac{1}{2}}$, e

$$\boldsymbol{\Phi}_J(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = \frac{e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \tag{1.45}$$

Neste caso, o símbolo $\delta_{JJ'}$ nas equações anteriores em que ele aparece deve ser mudado para $\delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'})$. O estado de vácuo do campo escalar no espaçoo de Minkowski livre de interações é definido por

$$a_{\boldsymbol{k}} |0_M\rangle = 0. \tag{1.46}$$

A energia de densidade no vácuo do campo escalar na presença de contornos é o valor esperado da componente 00 do tensor energia momento (1.22) no estado de vácuo,

$$\langle 0| T_{00}^{(0)}(x) |0\rangle = \frac{1}{2} \left\langle 0 \left| \left[\sum_{\mu=0}^{3} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \right)^2 + m^2 \phi^2 \right] \right| 0 \right\rangle \tag{1.47}$$

Substituindo a equação (1.41) na (1.47) e usando as equações (1.36), (1.42) e (1.43), obtemos

$$\langle 0| T_{00}^{(0)}(x) |0\rangle = \sum_J \frac{1}{4\omega_J} \left[(\omega_J^2 + m^2) \boldsymbol{\Phi}_J(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{\Phi}_J^*(\boldsymbol{r}) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_J(\boldsymbol{r})}{\partial x^k} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_J^*(\boldsymbol{r})}{\partial x^k} \right] \tag{1.48}$$

Consideremos agora a energia total do vácuo do campo escalar no volume de quantização V. Assumimos que as funções $\boldsymbol{\Phi}_J(\boldsymbol{r})$ a condição de contorno de Dirichlet ou de Neumann numa superfície S. Ao integrar a equação (1.48) sobre V usando (1.37) e (1.40), obtemos

$$E_0 = \int_V d^3x \, \langle 0| T_{00}^{(0)} |0\rangle = \frac{1}{2} \sum_J \omega_J \tag{1.49}$$

Para o espaço de Minkowski livre de interação sem fronteiras, a densidade de energia de vácuo é obtida das equações (1.45) e (1.48)

$$\langle 0_M | T_{00}^{(0)} | 0_M \rangle = \frac{1}{2} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \omega_k. \tag{1.50}$$

A energia total do vácuo no volume V é

$$E_0 = \int_V d^3x \langle 0_M | T_{00}^{(0)} | 0_M \rangle = \frac{1}{2} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \omega_k V. \tag{1.51}$$

1.2.3 Aplicação em placas paralelas

Consideremos a energia de vácuo de Casimir de um campo escalar numa configuração de dois planos paralelos em três dimensões com Dirichlet.

Começamos das quantidades locais e damos espacial atenção às regiões do espaço externo à configuração entre as placas. Sejam duas placas em z=0 e z=a. Na região entre as placas, o conjunto completo ortonormal de soluções para a equação (1.30) satisfazendo a condição de contorno de Dirichlet $\mathbf{\Phi}_J(x, y, 0) = \mathbf{\Phi}_J(x, y, a) = 0$ é dada pela equação (1.36), onde

$$\begin{gathered} \mathbf{\Phi}_J(\boldsymbol{r}) = \mathbf{\Phi}_{k_\perp, n}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\pi\sqrt{2a}} e^{i(k_x x + k_y y)} sen(k_{zn} z), \\ \omega_{k_\perp, n}^2 = m^2 + k_\perp^2 + k_{zn}^2, \quad k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad k_{zn} = \frac{\pi n}{a}. \end{gathered} \tag{1.52}$$

Onde a discretização de k na direção de z é devido às condições de contorno impostas durante a solução da equação (1.30). Substituindo essas soluções na equação (1.48) obtemos a densidade de energia no vácuo

$$\langle 0 | T_{00}^{(0)} | 0 \rangle = \frac{1}{2a} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\omega_{k_\perp, n} - \frac{m^2 + k_\perp^2}{\omega_{k_\perp, n}} cos(2k_{zn} z) \right] \tag{1.53}$$

Onde mudamos para o sistema de coordenadas polares e usamos a relação $sen^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2}$

O último termo é oscilatório e não contribui para a energia total. No espaço de Minkowski livre de interações, como vimos, o conjunto completo ortonormel de soluções é dado pela equação (1.50), que mudando para coordenadam em k, nos leva a

$$\langle 0_M | T_{00}^{(0)} | 0_M \rangle = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k. \tag{1.54}$$

onde $d^3k = dk_x dk_y dk_z$, $\omega_k = (m^2 + \boldsymbol{k}^2)^{1/2}$. A densidade de energia de Casimir

$$\epsilon(z) = \langle 0| T_{00}^{(0)}(z) |0\rangle - \langle 0_M| T_{00}^{(0)} |0_M\rangle \tag{1.55}$$

pode ser encontrada a partir de (1.53) e (1.54) usando a fórmula de Abel-Plana

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(t)dt = \frac{1}{2}F(0) + i\int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}[F(it) - F(-it)], \tag{1.56}$$

de modo que obtemos o resultado

$$\begin{aligned} \epsilon(z) = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{k_\perp dk_\perp}{2\pi}\Bigg[\frac{\sqrt{m^2+k_\perp^2}}{2} + \frac{2\pi}{a}\int_A^{\infty}\frac{\sqrt{t^2-A^2}}{e^{2\pi t}-1}dt \\ + (m^2+k_\perp^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(2k_{zn}z)}{\omega_{k_\perp,n}}\Bigg], \end{aligned} \tag{1.57}$$

Onde,

$$A \equiv \frac{a\sqrt{m^2+k_\perp^2}}{\pi}, \quad t \equiv \frac{ak_z}{\pi}. \tag{1.58}$$

Se descartarmos o termos oscilatório de (1.57), a energia de Casimir por unidade de área das placas é dada por

$$\begin{aligned} E(a) = \int_0^a dz\epsilon(z) = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{k_\perp dk_\perp}{2\pi}\Bigg(\frac{\sqrt{m^2+k_\perp^2}}{2} \\ + \frac{2\pi}{a}\int_A^{\infty}\frac{\sqrt{t^2-A^2}}{e^{2\pi t}-1}dt\Bigg) \end{aligned} \tag{1.59}$$

Para um campo sem massa, temos $A = ak_\perp/\pi$, de modo que depois de integramos temos,

$$E(a) = -\frac{\pi^2}{1440a^3} - \frac{1}{8\pi}\int_0^{\infty} k_\perp^2 dk_\perp. \tag{1.60}$$

Uma vez que essa já é a energia por undide de área, para calcular a pressão basta derivar em relação à distância entre as placas

$$P(a) = -\frac{\partial E(a)}{\partial a} \tag{1.61}$$

Portanto a pressão entre as placas é

$$P(a) = -\frac{\pi^2}{480a^4} \tag{1.62}$$