

EXPERIMENTELL METODIK



Thore Bucht
Bo Kjellmert
Torbjörn Löfqvist

Nils Almqvist rev. 130821

6:e upplagan, augusti 2006, rev2 2013

Förord

I kursen experimentell metodik skall teknologerna planlägga, genomföra och redovisa ett visst antal fysikaliska experiment. Detta kompendium behandlar de nödvändiga verktygen för att genomföra och analysera experimenten. Kompendiet användes vid de teorielektioner, som föregår laborationerna.

Vid laborationerna fordras att läsaren skall kunna

- a) göra lämpliga antaganden om funktionssamband med ledning av mätresultat
- b) bestämma sambanden genom linearisering
- c) komplettera gjorda undersökningar med dimensionsanalys
- d) göra en undersökning med hjälp av dimensionslösa grupper

Inför rapportskrivningen utdelas kompletterande anvisningar av lärarna.

Vissa fel kan ha smugit sig in i denna försöksupplaga. Lärarna i experimentell metodik noterar tacksamt rättelser och även tips om förbättringar av kompendiet.

Luleå i augusti 1992, Thore Bucht Bo Kjellmert

Förord till tredje upplagan

Från och med läsåret 93/94 är Experimentell metodik en del av kursen Forskningsmetodik vid Luleå Tekniska Högskola. Detta kompendium är skrivet för att ge lite teori som hjälp för laborationerna i Experimentell metodik. Ytterligare litteratur tillkommer för delarna Matematiska Modeller och Presentationsteknik.

Jag har försökt att förbättra kompendiet i Experimentell metodik genom att redigera om en del kapitel och rätta diverse fel.

Luleå i maj 1993, Bo Kjellmert

Förord till fjärde och femte upplagan

Allt förändras här i världen, så även detta kompendium. I denna upplaga har fel från tidigare upplagor rättats till, text skrivits om och kapitel och textdelar lagts till och dragits ifrån.

Om du har synpunkter eller om jag har stavat fel, formulerat mig dåligt eller (huh!) fel i sak så hör gärna av dig till: torbj@mt.luth.se

Luleå, mitt i soliga juli 1994, soliga juli 1995, och soliga oktober 1995, Torbjörn Löfqvist

Förord till sjätte upplagan

Detta blir den första elektroniska upplagan. Därför kan det ha tillkommit enstaka formatteringsfel. I övrigt har jag rättat några fel samt adderat text om polynom, linearisering av polynom, dimensionsanalys och en lathund med exempel på metoder som ofta fungerar när man praktiskt genomför ett fysikaliskt experiment för att hitta ett funktionssamband.

Luleå, en underbar sommar 2006, Nils Almqvist

©1995, författarna. Kopiera gärna men glöm då inte att ange källan.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

	SID
1. PLANLÄGGNING OCH GENOMFÖRANDE AV ETT EXPERIMENT	1
1.1 Strategi.....	1
1.2 Tabeller och diagram.....	2
2. KURVANPASSNING.....	3
2.1 Inledning.....	3
2.2 Val av ansats.....	5
2.3 Linearisering.....	7
2.4 En speciell teknik	10
2.5 Övningsuppgifter.....	12
2.6 Svar.....	15
3. STORHET, MÄTETAL, ENHET, DIMENSION	16
3.1 Inledning.....	16
3.2 SI-systemets grundenheter och supplementenheter.....	17
3.3 Härledda enheter.....	17
3.4 Multipelenheter.....	18
3.5 Storheters dimension	19
3.6 Dimensionskontroll	20
3.7 Inledande dimensionsanalys	21
3.8 Övningsuppgifter.....	22
3.9 Svar till övningsuppgifter	22
4. ELEMENTÄR MEKANIK OCH STRÖMNINGSLÄRA	23
4.1 Töjning av fasta kroppar.....	23
4.2 Skjuvning av fasta kroppar	24
4.3 Samband mellan E och G	25
4.4 Viskositet (vätskors skjuvning)	26
4.5 Övningsuppgifter.....	27
5. DIMENSIONSANALYS	28
5.1 Dimensionsbetraktelser	28
5.2 Tre exempel på samband mellan dimensionsfria storheter.....	30
5.3 Val av variabler	34
5.4 Strykmetoden för att finna \square -grupper	35
5.5 Alternativ metod för att finna \square -grupper	42
5.6 Övningsuppgifter.....	44
5.7 Svar till övningsuppgifter	48
6. MÄTFEL.....	50
6.1 Olika typer av fel.....	50
6.3 Få mätningar.....	52
6.4 Avrundning.....	52
6.5 Indirekta mätningar.....	53
6.6 Presentation av mätdata i diagramform	55
APPENDIX	56
A 1 Exempel på dimensionsfria standardgrupper.....	56
A 2 Definition av symboler (mekanik, värme).....	56
A 3 Elektriska symboler	57
A 4 Tryck och temperatur.....	57
A 5 Metoder för planläggning och genomförande av ett experiment.....	61
A 6 Litteraturlista.....	63

Kapitel 1

1. Planläggning och genomförande av ett experiment

1.1 Strategi

Det är viktigt att ha en genomtänkt strategi för hur man skall genomföra och utvärdera ett experiment. Experimentet måste planläggas ordenligt, genomföras på ett ändamålsenligt sätt och analyseras noggrant.

a) Planläggning

Innan man börjar ett experiment är det viktigt att grundligt analysera problemet. Vilka variabler skall undersökas? Vilka hjälpmedel finns? Vilka apparater behövs för mätningarna och hur skall mätningarna organiseras? Ta god tid på dig för inventering och planering!

Variabelinventeringen kan gärna göras i tabellform så att den blir överskådlig. Tänk på att även om du inte kan variera en storhet, t.ex. tyngdaccelerationen, och denna storhet påverkar försöksresultatet så skall den tas med i variabellistan. Tänk också på vilka materialkonstanter som skall ingå.

Under försökets gång kommer man ofta på nya variabler. Lämna därför alltid plats i eventuella tabeller för kompletteringar. Variablerna skall också ges i så enkel form som möjligt, t.ex. I stället för arean för en rektangel väljer man variablerna bredd och höjd. Ett exempel på en variabeltabell ges nedan.

Tabell 1.1: *Tabell exempel.*

Storhet ¹	Beteckning	Dimension ²
tid	t	T
höjd	h	L
densitet	ρ	M/L ³

Det är praktiskt att redan vid införandet av en storhet även skriva dit beteckning och dimension samt att börja tabellen med den beroende variabeln.

b) Genomförande

Många experiment går ut på att söka ett funktionssamband mellan ingående variabler. Den klassiska metoden att göra detta är att variera endast en av de oberoende variablerna samt mäta motsvarande värden på den beroende variabeln. Försöksserien kan sedan ge ett samband mellan dessa variabler. Övriga variabler har då konstanta värden. Genom att variera en oberoende variabel i taget fås flera olika funktionssamband som sedan sammanställs till en slutlig formel.

¹Storhet = mätetal*enhet

²T= tid, L= längd, M = massa

Tänk noga igenom i vilken ordning du skall undersöka variablerna. Misstänker du att en variabel inte har någon inverkan bör du börja med att verifiera detta genom mätningar för att slippa kontrollera variabeln i fortsättningen.

När man utför experiment är det vedertagen praxis, och väldigt praktiskt, att föra en labjournal. I denna antecknar du alla observationer och resultat och givetvis din plan-läggning av försöket och försöksuppsättningar. Tänk på att labjournalen skall utgöra underlag för analys och för en rapport som kanske skrivs långt senare. För därför in allt som har betydelse för dokumentationen av försöket t.ex. konstanta variablers värden vid ett försök. Även misslyckade försök skall noteras. De kan ha betydelse för någon som vill upprepa mätningen.

Gör inte alla tänkbara mätningar först utan stanna upp efter några mätserier och gör en bearbetning av gjorda mätningar. Det är lättare att komma vidare när man har en plattform att stå på. Man ser då också vilka mätningar som måste kompletteras och undviker att göra onödiga mätningar.

c) *Analys*

Olika mätserier analyseras genom kurvanpassningar och eventuella samband kompletteras till ett slutresultat. Hur man gör detta visas i kommande kapitel. Tänk på att dokumentera allt i labjournalen.

Rent mättekniskt är de laborationer du skall genomföra relativt enkla. Vissa av sambanden är bekanta för dig och de flesta förklaras teoretiskt senare i din utbildning.

1.2 Tabeller och diagram

a) *Tabeller*

- En tabell skall ge en överskådlig bild av hur storheter beror av varandra.
- Tabellen skall alltid ha en rubrik, som klargör innehållet i tabellen.
- Tabellen skall kunna läsas lätt och entydigt.
- I tabellhuvudet skall både storhet och enhet vara angiven.
- Komplexa tabeller där många variabler varierar blir svårlästa och bör undvikas.

Det förekommer olika skrivsätt i tabellhuvuden. I exemplet nedan ges samma tid t på två olika sätt.

Tabell 1.2: *Exempel på skrivsätt i tabellhuvudet.*

t (10^{-3} s)	t (ms)
5,0	5,0

I båda skrivsätten avses tiden $5,0 \cdot 10^{-3}$ s = 5,0 ms. Missförstånd kan inte uppstå. Flera andra skrivsätt förekommer. Ett skrivsätt som inte kan feltolkas bör alltid användas.

b) *Diagram*

- Diagram skall, liksom tabeller, alltid ha rubrik som beskriver diagrammets innehåll.
- På diagramaxlar skall man ange både storhet och enhet. Liksom i tabellhuvuden skall angivelsen för axlar vara entydig.
- Mätpunkter markeras alltid med någon symbol som t.ex. "♦" eller "+" och i förekommande fall sätts felgränser ut.
- Välj skalorna så att en skaldel är 1, 2 eller 5 längdenheter.
- En kurva som skall anpassas till en serie mätpunkter bör dras så jämn som möjligt. Inga sick-sack linjer! Hänsyn tas till eventuella felgränser, se kapitel 6.

Kapitel 2

2. Kurvanpassning

2.1 Inledning

Vid experiment får man vanligen mätdata i tabellform och man vill ofta beskriva sambandet mellan de ingående variablerna matematiskt med ett funktionssamband. Har man kännedom om vissa elementära funktioner i matematik är det möjligt i många fall att få det sökta sambandet på grafiskt sätt. (Man kan också göra detta numeriskt med t.ex. minsta kvadratmetoden.) Vi kommer i kursen endast att beröra den grafiska metoden och nedanstående exempel får illustrera den metoden.

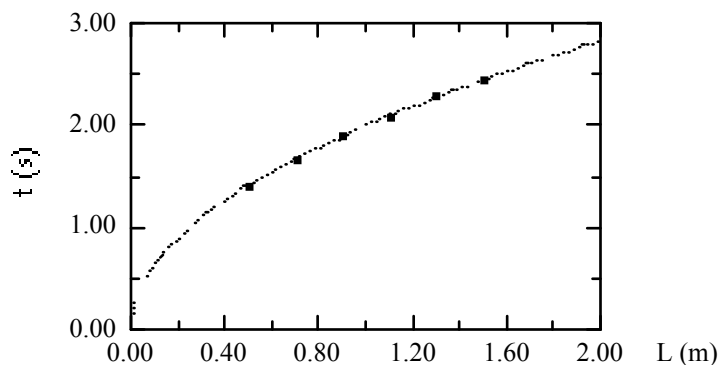
Exempel 1. Vid ett försök uppmättes svängningstiden t för en matematisk pendel vid olika pendellängder L . Följande tabell med mätvärden erhöles:

Tabell 2.1: Data från pendelförsök.

Pendellängd L (m)	0,50	0,70	0,90	1,10	1,30	1,50
Svängningstid t (s)	1,42	1,68	1,90	2,10	2,29	2,46

Vi vill få fram ett funktionssamband mellan de två variablerna t och L . Det viktigaste steget i processen är att plotta mätdata i ett x - y diagram för att sedan göra en mer eller mindre kvalificerad *gissning* på vilken typ av funktionssamband det kan vara mellan t och L . Vi skall sedan se om gissningen var rätt eller fel.

Vi börjar med att plotta data i ett vanligt x - y diagram (göra en s.k. översiktskurva) för att kunna göra något antagande om sambandet. Vi inser att om pendellängden går mot noll, så går även svängningstiden mot noll, så i vår tabell ovan (och i diagrammet) så borde också punkten $L=0$, $t=0$ finnas med. Den kurva vi skall anpassa till punkterna skall alltså gå genom origo. Vi ritar ut den kurva som bäst ansluter till mätpunkterna.



Figur 2.1: Diagrammet beskriver pendelns svängningstid som funktion av pendellängd.

Prickarna i diagrammet betecknar mätpunkterna. Med kännedom om hur elementära funktioner ser ut kan vi *gissa* funktionssambandet $t = f(L)$. Kurvan tycks illustrera någon potensfunktion och vår gissning blir

$$t = aL^b$$

där a och b är ännu ej bestämda konstanter.

För att kunna bestämma konstanterna a och b i vårt gissade samband så skall vi trixa med sambandet så att vi får över det *på samma form som räta linjens ekvation*. Hur man gör själva trixandet beror på vilken funktion man har gissat. I vårt fall har vi gissat en potensfunktion och för att göra om denna till räta linjens ekvation så logaritmerar vi sambandet.

Vi får

$$\ln(t) = \ln(a L^b).$$

Tillämpas logaritmlagarna i högerledet erhålls

$$\ln(t) = \ln(a) + b \ln(L).$$

Om vi inför variablerna $\ln(t) = Y$, $\ln(L) = X$ och $\ln(a) = c$ erhålls ett samband av typen

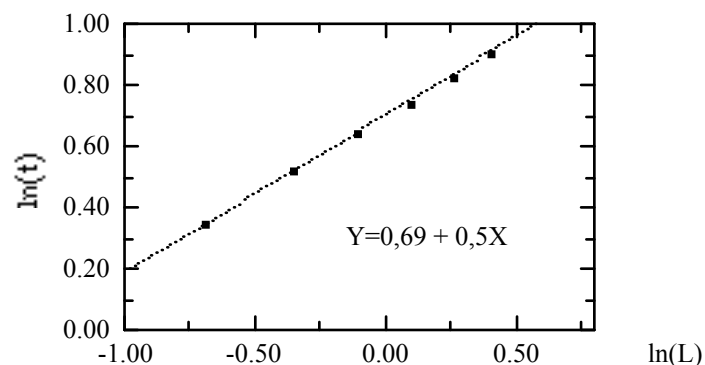
$$Y = c + bX$$

dvs. ett *linjärt samband* eftersom $\ln(a) = c = \text{konstant}$. Jämför ekvationen ovan med räta linjens ekvation och vi finner att riktningskoefficienten för linjen är b och skärningspunkten med t -axeln (Y -axeln) är $\ln(a)$. Att föra över gissningen till samma form som räta linjens ekvation kallas för att *linearisera* sambandet. Vi kan då med mätdata beräkna värden på konstanterna a och b . Vi kompletterar tabellen med värden på $\ln(t)$ och $\ln(L)$.

Tabell 2.2: Data från pendelförsök.

Pendellängd L (m)	0,50	0,70	0,90	1,10	1,30	1,50
$\ln(L)$	-0,693	-0,357	-0,105	0,095	0,262	0,405
Svängningstid t (s)	1,42	1,68	1,90	2,10	2,29	2,46
$\ln(t)$	0,351	0,519	0,642	0,742	0,829	0,900

I ett koordinatsystem med $\ln(t)$ som Y -koordinat och $\ln(L)$ som X -koordinat dras den räta linje som bäst ansluter till punkterna. Konstanten b ges av linjens riktningskoefficient.



Figur 2.2: Den lineariserade ekvationen. Linjens (streckad i fig.) ekvation finns utskrivet i figuren.

Vi kan notera att det går utmärkt att anpassa en rät linje till mätdata. Ur diagrammet med $\ln(t)$ som funktion av $\ln(L)$ erhålls $b \approx 0,5$ (b = riktningskoefficienten). Skärningspunkten med Y -axeln, $X = \ln(L) = 0$, ger att $\ln(a) \approx 0,69$, dvs. $a \approx e^{0,69} \approx 2,0$. Bestämningen av både a och b ges av noggrannheten i avläsningen ur diagrammet. Även andra lineariseringar kan utnyttjas för att bestämma konstanten. Sambandet $t = ax^{0,5}$ kan t.ex. kvadreras och man får $t^2 = a^2 x$. Uppritas t^2 som funktion av x fås en rät linje med riktningskoefficienten a^2 . I båda fallen blir det sökta sambandet

$$t = 2,0 L^{0,5} = 2,0\sqrt{L}.$$

I exemplet ovan gick det bra att anpassa en rät linje till lineariserade mätdata. Detta innebär att vårt gissade samband var korrekt. Om vi hade gissat fel funktion, och gjort alla stegen ovan, så hade det *inte* gått att anpassa en rät linje till mätdata. Då får man snällt börja om från början, med en ny gissning, och upprepa proceduren igen.

I fysikaliska sammanhang har ju alla storheter dimensioner och ingår med dessa i formler och samband. Vi kommer i senare kapitel att visa att exponenter i de flesta fysikaliska formler antar heltals- eller

halvtalsvärden¹ t.ex. -1, -0,5, 0,5, 1, Detta kan inses utifrån de ingående storheternas dimensioner. Detta gör att exponenter i potensfunktioner kan bestämmas med relativt stor säkerhet ur diagram.

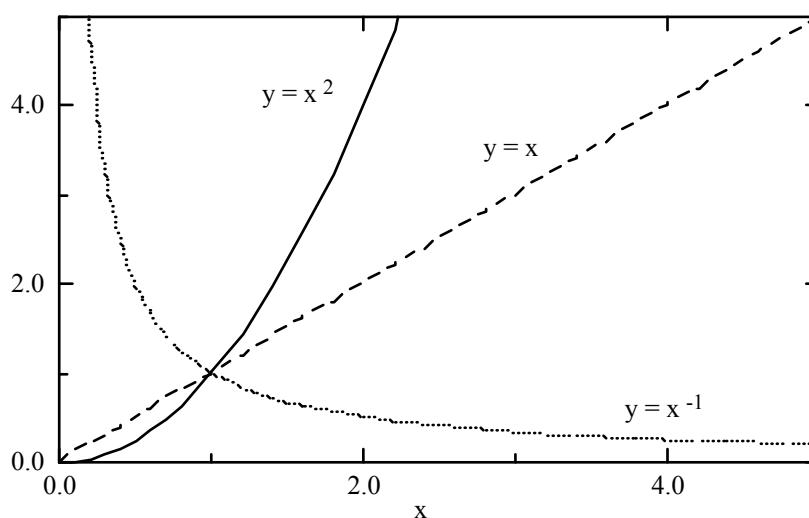
2.2 Val av ansats

Valet av ansats är ett viktigt steg när man försöker bestämma ett funktionssamband. Med kännedom om utseendet av några elementära funktioner är det lättare att hitta rätt samband.

Linjära funktioner är triviala (linjer är ju lätta att känna igen) så vi börjar med potensfunktioner.

Potensfunktioner

Potensfunktioner är funktioner av typen $y = ax^n$, där a och n är konstanter. Figuren nedan visar tre kurvor som svarar mot olika värden på konstanten n (a är satt till ett).



Figur 2.3: Olika potensfunktioner.

Vi ser att för $n = 1$ så är funktionen en rät linje. Det kan noteras att för $n < 0$ går $y \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0$ och att $y \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$. Med andra ord så går funktionen asymptotiskt mot noll för stora x .

Det finns potensfunktioner med positiva n som *inte* går genom origo eller negativa n som *inte* går asymptotiskt mot noll för stora x . Dessa potensfunktioner kan skrivas $y = C + ax^n$. Konstanten C fås ur en översiktskurva då $x \rightarrow 0$ eller då $x \rightarrow \infty$.

Många verkliga experiment kan beskrivas med en enkel faktoriell potensfunktion av typen:

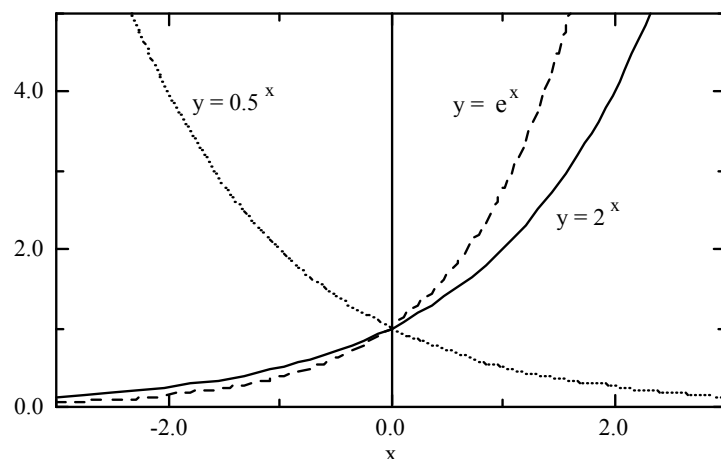
$$y = C \cdot x^\alpha \cdot z^\beta \cdot h^\gamma \cdot p^\delta \cdot q^\varepsilon \dots,$$

där x, z, h, p, q är de oberoende variablerna i experimentet, C är en (dimensionslösa) konstant, och exponenterna $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ är konstanter (bråktalet, heltal).

Exponentialfunktioner

Exponentialfunktioner är funktioner av typen $y = a^x$. Nedan visas kurvor för olika värden på konstanten a .

¹) rationella tal i det allmänna fallet.

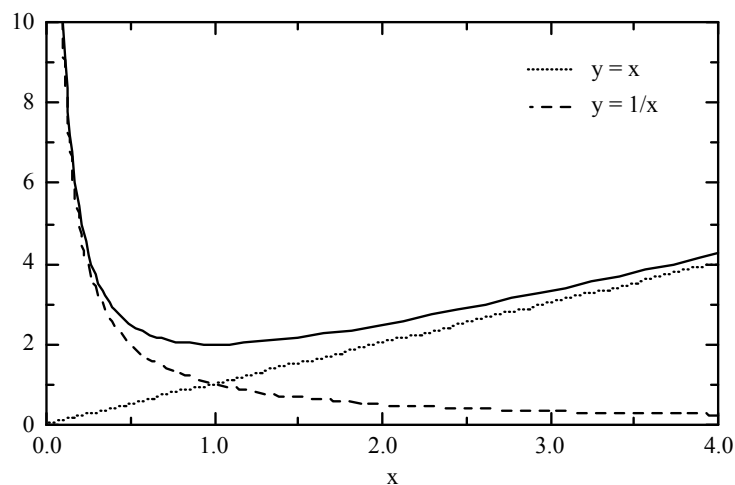


Figur 2.4: Olika exponentialfunktioner.

Notera att alla kurvorna går genom $y = 1$. Skulle mätdata *inte* gå genom $y = 1$ så kan det röra sig om en funktion av typen $y = C + a^x$, där C och a är konstanter.

En sammansatt funktion

Det finns massor med olika funktionstyper och vi har hittills bara diskuterat de två enklaste. En ytterligare funktionstyp som kan dyka upp är sammansatt av två olika potensfunktioner, $y = ax^n + bx^m$. Nedan visas ett exempel där $a = b = 1$, $n = -1$ och $m = 1$.



Figur 2.5: Den heldragna kurvan beskrivs av ekvationen $y = x^{-1} + x$.

I figuren är den heldragna kurvan $y = x^{-1} + x$. Den är sammansatt av de båda potensfunktionerna $y = x^{-1}$ och $y = x$ som finns utritade som streckade kurvor i figuren. Funktionen är lätt att känna igen på sitt karakteristiska "hängmatte"-utseende.

Polynom

Den sista funktionstypen som vi tar upp här är polynom. Ett polynom kan vi skriva:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Även polynom kan självfallet dyka upp som funktionssamband i verkliga experiment även om det ofta är lämpligare med sammansatta eller faktoriella exponentialfunktioner som matematiska modeller till experimenten.

2.3 Linearisering

Då man väl valt funktionstyp utifrån en översiktsskurva är det dags att kontrollera om ansatsen är korrekt. Det enklaste sättet att göra det på är att göra om ansatsen så att den får samma form som räta linjens ekvation och sedan se i fall lineariseringen kan anpassas till mätdata. Är ansatsen rätt så går anpassningen bra och är den fel så går det inte att anpassa en rät linje till mätdata. Då får man börja om från början med en ny gissning och upprepa proceduren igen.

Själva lineariseringsmetoden är direkt beroende på vilken typ av funktion man vill linearisera. Har man en potensfunktion

$$y = C + a x^n$$

så kan den lineariseras genom att konstanten C flyttas till vänsterledet och därefter logaritmeras båda leden;

$$\ln(y - C) = \ln(a) + n \ln(x).$$

Inför $\ln(y - C) = Y$, $\ln(x) = X$ och $\ln(a) = b$ så fås

$$Y = b + n X,$$

dvs. ett linjärt samband mellan Y och X . Vi ser att linjens riktningskoefficient är n och att skärningspunkten med y -axeln ger a .

Förfarandet är likartat för en exponentialfunktion. För att linearisera kan man då göra såhär;

$$y = C + a^x.$$

Flytta över konstanten och logaritmera,

$$\ln(y - C) = x \ln(a).$$

Inför $\ln(y - C) = Y$ och $\ln(a) = b$ så fås

$$Y = b x,$$

dvs. ett linjärt samband mellan Y och x . Vi ser att linjen går genom origo och har riktningskoefficienten b .

Den tredje och sista funktionstypen vi berör är sammansatt av två potensfunktioner,

$$y = ax^n + bx^m.$$

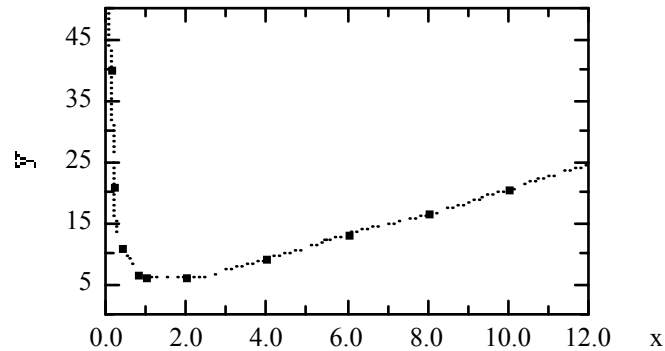
En metod att linearisera funktionen får illustreras av nedanstående exempel.

Exempel 2. Vid ett experiment uppmättes följande värden på storheterna x och y .

Tabell 2.3: Värdetabell.

x	0,1	0,2	0,4	0,8	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0
y	40	21	11	6,5	6,0	6,0	9,0	13	16,4	20,4

Vi börjar med att rita en översiktskurva, dvs. vi ritar upp y som funktion av x .



Figur 2.6: Diagram över data i exempel 2.

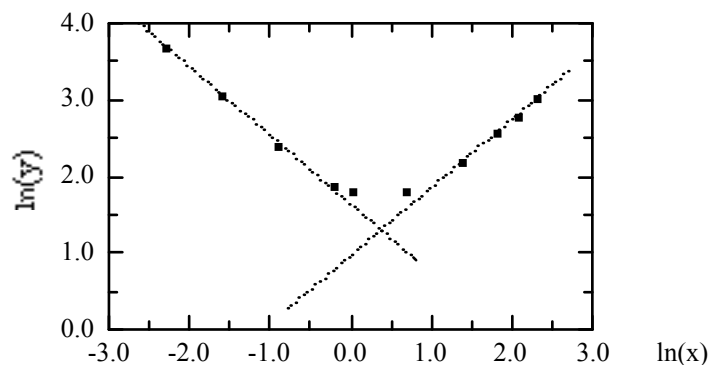
Det är uppenbart att mätserien inte kan beskrivas av funktionen $y = ax^n$. Det är rimligt att anta att funktionen kan beskrivas av $y = ax^n + bx^m$ där funktionsvärdet domineras av den första termen, ax^n , för små x och av den andra termen, bx^m , för stora x . För små x gäller alltså $y \approx ax^n + 0$ och för stora x är $y \approx 0 + bx^m$.

Tabellen kompletteras med rader för $\ln(x)$ och $\ln(y)$.

Tabell 2.4: Värdetabell.

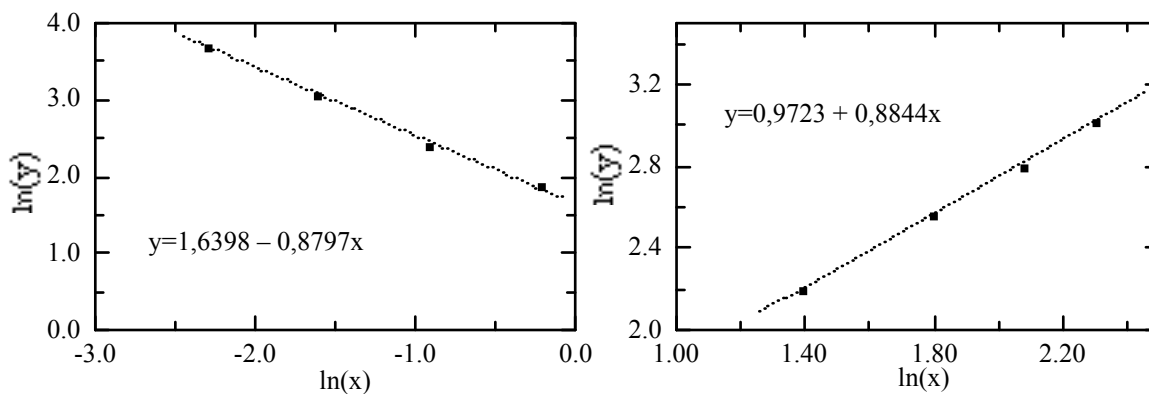
x	0,1	0,2	0,4	0,8	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0
$\ln(x)$	-2,303	-1,609	-0,916	-0,223	0,000	0,693	1,386	1,792	2,079	2,303
y	40	21	11	6,5	6,0	6,0	9,0	13	16,4	20,4
$\ln(y)$	3,689	3,045	2,398	1,872	1,792	1,792	2,197	2,565	2,797	3,016

Vi ritar upp $\ln(y)$ som funktion av $\ln(x)$ och ser om vi kan hitta något som vi känner igen



Figur 2.7: Diagram över logaritmerade data. Linjerna (streckade) är linjära kurvanpassningar.

Av grafen framgår att vi får två rätta linjer, en för små x och en för stora x . Med hjälp av dessa linjer kan exponenterna n och m bestämmas. Vi ritar upp varje del av grafen för sig i var sitt diagram och tar bara med de punkter som hör till rätta-linje anpassningen.



Figur 2.8: Diagram över kurvanpassningarna i diagram 2.6. Ekvationerna för respektive linje finns i diagrammen.

För små x fås ur grafen ovan att $n =$ linjens riktningskoefficient ≈ -1 (logaritmeringen ger ju att $\ln(y) \approx \ln(a) + n \ln(x)$). Ur grafen för stora x fås $m =$ linjens riktningskoefficient ≈ 1 . Funktionssambandet blir då

$$y = ax^{-1} + bx^1 = \frac{a}{x} + bx.$$

För att se om denna funktion även beskriver de punkter som ej ligger på de räta linjerna och för att bestämma konstanterna a och b lineariseras funktionen.

Sambandet

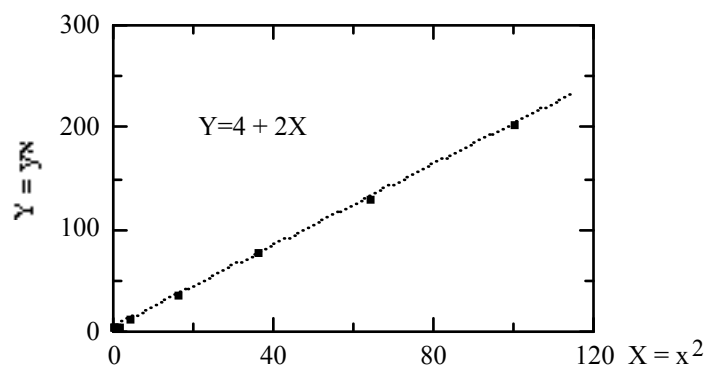
$$y = \frac{a}{x} + bx \quad \text{kan skrivas} \quad yx = a + bx^2.$$

Om vi inför variablerna $yx = Y$ och $x^2 = X$ fås ekvationen för en rät linje $Y = bX + a$ där b är riktningskoefficienten och a fås för $X = 0$. Vi har alltså lineariserat vår ursprungliga ekvation. Vi måste komplettera vår värdetabell för x och y med värden för yx och x^2 och pricka in dessa värden i ett koordinatsystem.

Tabell 2.5: Värdetabell.

x	0,1	0,2	0,4	0,8	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0
x^2	0,01	0,04	0,16	0,64	1,0	4,0	16,0	36,0	64,0	100,0
yx	4,0	4,2	4,4	5,2	6,0	12,0	36,0	78,0	131,2	204
y	40	21	11	6,5	6,0	6,0	9,0	13	16,4	20,4

Vi ritar upp $Y = yx$ som funktion av $X = x^2$



Figur 2.9: Diagram över Y som funktion av X , helt enkelt.

Diagrammet visar att mellanliggande punkter är väl anpassade till funktionen. Avläsning ur diagrammet ger $a \approx 4$ och $b \approx 2$. Den sökta funktionen blir

$$y = \frac{4}{x} + 2x.$$

När man lineariserar kan man välja skalor fritt. Tänk på att valet av skalor påverkar din bild av de verkliga förhållandena. Vissa skalor kan ge en helt förvrängd bild av verkligheten.

2.4 En speciell teknik

En speciell teknik, som används när man inte har tillräckligt med mätvärden, illustreras i nedanstående exempel.

Exempel 3. Man vill bestämma hur omloppstiden för ett homogent svänghjul beror av hjulets egenskaper. Ett snöre hakas på en skruv på hjulets periferi, lindas några varv runt hjulet och i den andra ändan fästas en vikt med massan m . Då vikten släpps kommer den att röra sig neråt och får hjulet att rotera. Då vikten rört sig en bestämd sträcka s nedåt mäts hjulets omloppstid. Hur beror omloppstiden t på hjulets egenskaper dvs. dess radie R , tjocklek h och densitet ρ ? Till vårt förfogande har vi 11 svänghjul med nedanstående värden på R , h och ρ .

Tabell 2.6: *Hjuldata.*

Sammanhörande värden på R , h och ρ .

Hjul nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
R (10^{-2} m)	4,30	6,00	8,00	11,50	5,50	7,50	10,00	10,00	12,20	9,00	6,80
h (10^{-2} m)	2,91	2,91	2,91	2,91	1,95	2,30	0,50	1,25	3,00	2,50	2,00
ρ (10^3 kg/m ³)	8,80	8,80	8,80	8,80	8,80	8,80	8,80	8,80	2,70	7,14	19,3

Tabell 2.7: *Data från försök.*

Uppmätta omloppstider t för de olika hjulen då $m = 0,020$ kg och $s = 0,905$ m.

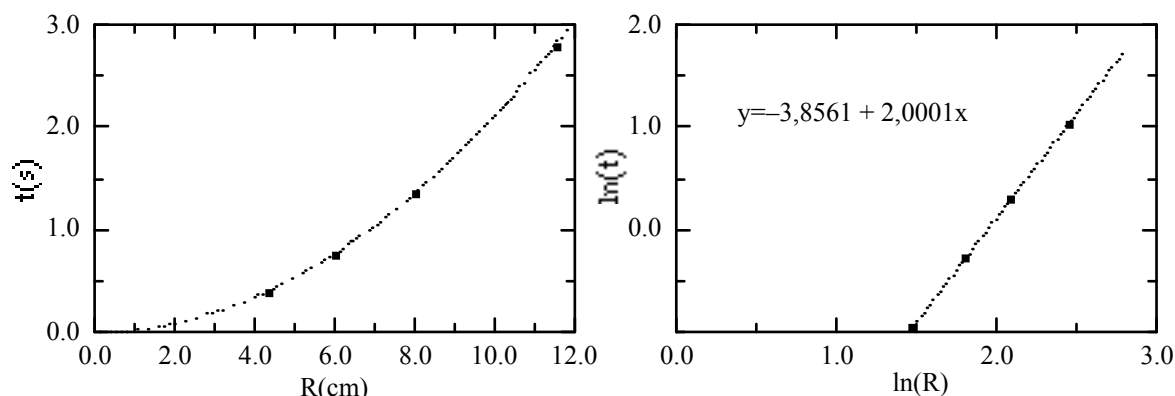
Hjul nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t (s)	0,391	0,761	1,356	2,795	0,523	1,057	0,876	1,385	1,769	1,429	1,120

När man skall finna ett samband mellan flera olika variabler är det lämpligt att anta att sambandet är av typen $t = C R^\alpha h^\beta \rho^\gamma$ där C är en konstant. För att kunna bestämma någon av exponenterna α , β eller γ gäller det att finna mätresultat där endast en av de oberoende variablerna ändras och de andra är konstanta. För hjulen 1–4 är h och ρ konstanta och endast R varierar. Vi kan då skriva $t = C_1 R^\alpha$ där den nya konstanten $C_1 = C h^\beta \rho^\gamma$ då både h och ρ är konstanta. Man kan med dessa mätvärden få ett samband mellan t och R . Vi

börjar med att rita upp en översiktskurva $t = t(R)$ för att se om vårt antagande är rimligt, se diagram 2.10 vänster. Stämmer antagandet är kurvan är en potensfunktion med positiv eller negativ exponent, dvs. av typen

$$y = \text{konstant} \cdot x^n.$$

Översiktskurvan visar att vårt antagande är rimligt och att det tycks vara en potensfunktion med positiv exponent. Lineariseringen (se högra kurvan i diagram 2.10) visar att $\alpha = 2$. Konstanten C_1 beror av valda värden på h och ρ och är inte av intresse.

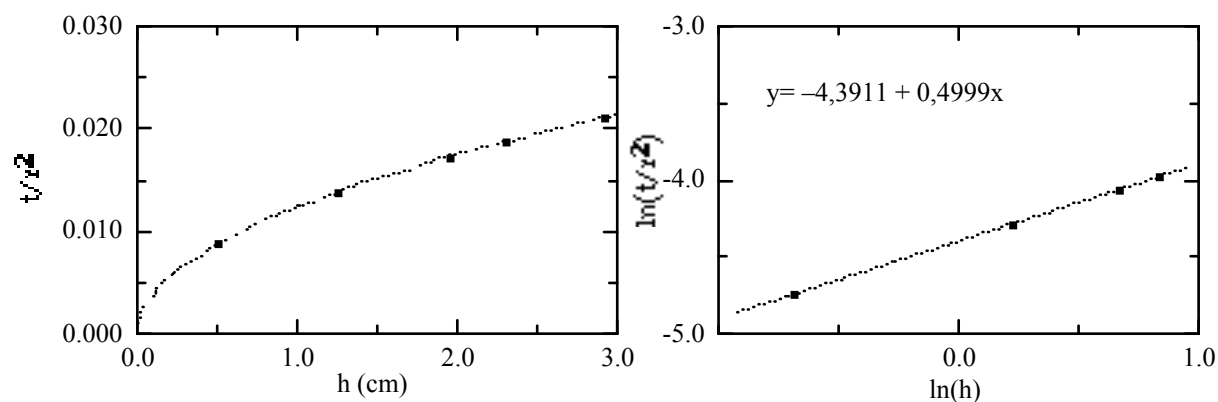


Figur 2.10: Till vänster: hjul 1–4, tid som funktion av radie. Till höger: hjul 1–4, lineariserade data. Den punktstreckade linjen har sin ekvation inskriven i diagrammet

Om densiteten ρ är konstant skulle det antagna sambandet bli $t = C_2 R^2 h^\beta$, där $C_2 = C \rho^\gamma$ och C_2 är konstant. Vi har i tabellen icke tillräckligt med mätvärden för att låta även radien vara konstant. Minst fyra mätpunkter bör vi ha för att kunna bestämma exponenten β . Eftersom beroendet av radien är känt kan vi genom att skriva om det antagna sambandet som

$$\frac{t}{R^2} = C_2 h^\beta$$

även låta radien variera, om vi väljer t/R^2 som variabel. Vi kan då använda mätningarna av hjul 4-8 vid bestämningen av β . Observera att $t \rightarrow 0$ då $h \rightarrow 0$. Översiktsgrafen till vänster nedan bekräftar den gjorda ansatsen.



Figur 2.11: Till vänster: hjul 4–8, t/r^2 som funktion av höjden h . Till höger: lineariserade data, den streckade linjens ekvation finns i diagrammet.

Logaritmering ger sambandet

$$\ln\left(\frac{t}{R^2}\right) = \ln(C_2) + \beta \ln(h)$$

och högra diagrammet ovan ger $\beta = 0,5$. Allt klart! Sambandet är alltså

$$\frac{t}{R^2} = C_2 h^{0,5} \quad \text{dvs.} \quad t = C_2 R^2 \sqrt{h}.$$

Konstanten C_2 's värde beror av densiteten och får bestämmas senare.

2.5 Övningsuppgifter

I samtliga uppgifter förutsätts att exponenten i ett potensuttryck endast antar hel-, halv-, eller bråktalstvården.

2.1 Finn sambandet mellan de uppmätta variablerna x och y . Kontrollera sedan sambandet genom linearisering.

a)

x	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
y	0,00	2,00	2,83	3,46	4,00	4,47

b)

x	0,00	1,50	2,00	3,00	5,00
y	1,00	1,92	2,41	3,60	6,59

2.2 Följande variabelvärden har uppmätts vid ett experiment:

x	0,20	0,70	1,25	1,50	1,70
y	2,03	3,37	9,84	15,52	21,70

Vidare kan man anta att $y \rightarrow 2$ då $x \rightarrow 0$. Bestäm sambandet mellan x och y samt ange hur det bör omformas om det skall kunna återges med en rät linje.

2.3 För planeternas medelavstånd till solen och deras omloppstider finns i almanackan följande uppmätta värden:

Tabell: Omloppstid och medelavstånd till solen för solsystemets planeter

Planet	Omloppstid T (år)	Medelavstånd från solen R (AE)
Merkurius	0,2408	0,3871
Venus	0,6152	0,7233
Jorden	1,0000	1,0000
Mars	1,8809	1,5237
Jupiter	11,8622	5,2028
Saturnus	29,4577	9,540
Uranus	84,013	19,18
Neptunus	164,79	30,07
(Pluto)	248,4	39,44)

Visa att omloppstiden är en potensfunktion av medelavståndet och bestäm detta funktionssamband.

2.4 Beskriv variabeln m som funktion av variabeln L om man har följande uppmätta värden:

L	0,49	0,57	0,75	0,82	0,96
m	53	83	190	250	400

2.5 Linearisera nedanstående samband. Vad skall i ett diagram avsättas som funktion av vad för att sambandet skall bli linjärt? a, b och k är konstanter.

a) $y = a + bx^2$ b) $y = a + b\sqrt{x}$ c) $y = \sqrt{a+bx}$ d) $y = a\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}}$

e) $y = \sqrt{ax + \frac{b}{x}}$ f) $y = ae^{bx}$ g) $y = a + be^{kx}$

2.6 Under en laboration i värmelära studerade man hur ett aluminiumkärl med vatten svalnade. Temperaturdifferensen mellan kärlet och omgivningen $T-T_0$ noterades vid vissa tidpunkter t .

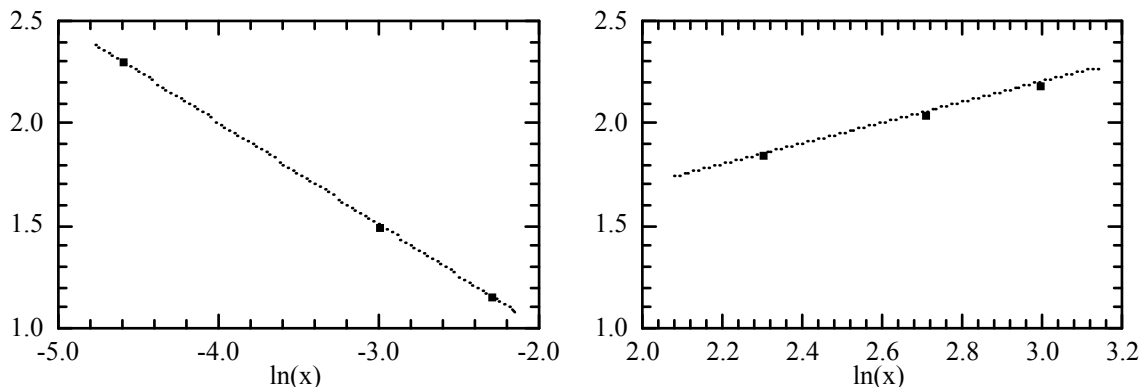
Tid t (min)	0	4,0	12,0	17,0	27,0
Temperaturdifferens $T-T_0$ (°C)	63	57	48	44	36

Anpassa, genom linearisering, exponentialfunktionen $T-T_0 = Ae^{-kt}$ till de uppmätta värdena.

2.7 Jordens totala folkmängd uppskattades 1976 till lägst 3,5 och högst 3,6 miljarder och 1984 till lägst 4,1 och högst 4,2 miljarder. Med stöd av dessa värden och under antagande att folkmängden växer exponentiellt med tiden kan man göra prognoser för framtiden. Resultaten blir beroende vilka av de angivna värdena för de två åren man väljer.

- Bestäm med hjälp av linearisering ett lägsta och ett högsta värde på jordens folkmängd enligt denna modell.
- Ange när folkmängden tidigast och senast når värdet 6 miljarder.

2.8 För små respektive stora värden på variabeln x har nedanstående lineariseringar erhållits:



*Till vänster $\ln(y)$ som funktion av $\ln(x)$ för små x .
Till höger $\ln(y)$ som funktion av $\ln(x)$ för stora x .*

- a) Sambandet mellan y och x är av typen $y = ax^n$. Bestäm n för små respektive stora x .
b) Mätserien har följande värden på variablerna x och y :

x	0,01	0,05	0,10	0,20	0,50	1,0	2,0	3,0	5,0	7,0	10,0	15,0	20,0
y	10,2	4,92	3,79	3,13	2,83	3,00	3,54	4,04	4,92	5,67	6,67	8,00	9,17

I övning a) har endast de tre första och de tre sista mätvärdena använts. Det är troligt att funktionen $y = f(x)$ som beskriver hela mätserien är en summa av två termer där den ena dominerar för små x och den andra för stora x . Man kan tänka sig två olika modeller för funktionen $y = f(x)$. Vilka?

c) Bestäm genom linearisering vilken av modellerna som gäller för denna mätserie samt ange funtionsambandet.

2.9 Vid mätning av variablerna x och y uppmäts följande värden:

x	0,1	0,2	0,3	0,5	1,0	2,0	5,0	10,0	15,0	20,0
y	100,5	51,0	34,8	22,5	15,0	15,0	27,0	51,0	75,7	100,5

Det är rimligt att anta att funktionssambandet $y = f(x)$ är sådant att vi har två termer varav den ena dominerar för små x medan den andra dominerar för stora x . Bestäm funktionssambandet.

2.10 En vikt med massan m fästs i ena änden av ett snöre. Den andra änden hakas på en skruv på periferin på ett homogent svänghjul varefter snöret lindas upp runt hjulet. Vikten släpps därefter och då vikten rört sig en viss sträcka s nedåt mäts hjulets omloppstid.

Då s är 0,905 m uppmäts för omloppstiden t och massan m följande värden:

m (10^{-3} kg)	10,0	15,0	20,0	25,0	30,0
t (s)	1,927	1,567	1,356	1,213	1,108

Då massan m är 0,020 kg erhålles för tiden t och sträckan s följande värden:

s (m)	0,315	0,565	0,705	0,905	1,190	1,500
t (s)	2,304	1,716	1,541	1,356	1,181	1,054

Hur beror tiden t av m och s ? Ange ett enda samband, som anger t :s beroende av både m och s samtidigt.

2.6 Svar

2.1 a) $y = 2\sqrt{x}$ b) $y = 1 + 0,5 x^{1,5}$

2.2 $y = 2 + 4x^3$

2.3 $t = 1,00 r^{1,5}$

2.4 $m = 453 L^3$

2.5 a) $y = f(x^2)$ b) $y = f(\sqrt{x})$ c) $y^2 = f(x)$ d) $y\sqrt{x} = f(x)$ e) $y^2x = f(x^2)$
f) $\ln y = f(x)$ g) $\ln(y-a) = f(x)$

2.6 $T - T_0 = 63 \cdot e^{-0,021t}$

2.7 a) min = 5,9 miljarder, max = 6,9 miljarder b) 1994 resp 2002

2.8 a) -0,5 respektive 0,5 b) $y = \sqrt{\frac{a}{x}} + bx$ respektive $y = \frac{a}{\sqrt{x}} + b\sqrt{x}$

c) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}$

2.9 $y = \frac{10}{x} + 5x$

2.10 $t = \frac{0,18}{\sqrt{ms}}$

Kapitel 3

3. Storhet, mätetal, enhet, dimension

3.1 Inledning

En storhet är uttryck för en egenskap hos ett föremål eller en företeelse som kan mätas eller beräknas. Storheten bestäms med hjälp av ett jämförelsevärde (en enhet) och ett mätetal:

$$\text{STORHET} = \text{MÄTETAL} \cdot \text{ENHET}$$

Exempel 1: En vikt har massan 5 kilogram (kg). Detta anges på följande sätt

$$m = 5 \text{ kg}$$

där m är storhetsbeteckning, 5 är mätetal och kg är enhetsbeteckning. Om mätetalet inte är känt skrivs $m = x \text{ kg}$, där x = mätetalsbeteckning, dvs olika beteckningar används för en storhet och en storhets mätetal. En fysikalisk ekvation kan skrivas som ett samband mellan storheter.

Exempel 2: Newtons gravitationslag ger kraften F på jorden med massa m från solen med massa M . Avståndet mellan jorden och solen är r . Sambandet lyder

$$F = k \frac{m M}{r^2},$$

där F , m , M och r är storheter och k är en konstant.

Exempel 3: Newtons kraftlag ger samband mellan kraften F på en kropp med massa m och massans acceleration a ,

$$F = k m a,$$

där F , m och a är storheter och k en konstant.

För att resultatet av en mätning skall ha någon relevans är det viktigt att den enhet som används är tillförlitlig eftersom mätetalet beror på måttstocken. För att få ett praktiskt och universellt system har man infört s.k. grundenheter för ett fåtal storheter. Övriga enheter kan definieras utifrån grundenheterna. Av grundenheterna fordras att de är omsorgsfullt definierade, internationellt användbara och relaterade till decimalsystemet.

I Sverige används ett måttenhetssystem kallat *Système International d'Unités* med beteckningen (och benämningen) SI. SI är ett system som fastställts som nationell standard i de flesta länder. SI bygger på äldre metriska system och har utformats så att det skall kunna användas i alla sammanhang, vetenskapliga, tekniska och vardagliga.

3.2 SI-systemets grundenheter och supplementenheter

SI-systemet baseras på enheter för sju olika storheter:

Tabell 3.1: *SI-systemets 7 grundenheter.*

Storhet	SI-enhet	
	Benämning	Beteckning
längd	meter	m
tid	sekund	s
elektrisk ström	ampere	A
temperatur	kelvin	K
ljusstyrka	candela	cd
substans-mängd	mol	mol
massa	kilogram	kg

Härtill kommer två supplementenheter, radian och sterradian för storheterna plan vinkel respektive rymdvinkel.

Plan vinkel: 1 radian (beteckning rad) utgör (den plana)vinkeln för den cirkelsektor där båglängden är lika med radien.

Rymdvinkel: 1 sterradian (beteckning sr) utgör rymdvinkeln hos en kon som har sin spets i centrum av en sfär och av sfärens yta skär ut en area som är lika med arean av en kvadrat med sidan lika med sfärens radie.

Som en följd av dessa definitioner blir omkretsen för en cirkel med radien a lika med $2\pi a$ och arean för en sfär med radien blir $4\pi a^2$.

3.3 Härledda enheter

För att definiera en härledd enhet utgår man från ett samband där motsvarande storhet ingår. Enheterna för samtliga övriga storheter skall vara fastlagda, antingen som grundenheter eller som tidigare härledda enheter.

Exempel 4: Enheten för area

Arean A för en kvadrat med sida a ges av sambandet

$$A = k a^2 .$$

Genom att välja konstanten k till 1 blir enheten för area 'kvadratmeter' (m^2). 1m^2 är lika med arean för en kvadrat vars sida är 1m.

Exempel 5: Hastighet

Hastigheten v fastläggs som längdändringen Δs per tidsenhet Δt , dvs

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} .$$

Utgående från enheterna för längd och tid fås enheten för hastighet som m/s, eller $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ vilket utläses meter per sekund.

Exempel 6: Kraft

I SI-systemet utgår man från Newtons kraftlag för att definiera enheten för kraft, benämnd Newton. Genom att i sambandet $F = k m a$ fastlägga att konstanten k är lika med 1 fås:

Newton = (kilogram) (meter per sekundkvadrat), eller med beteckningar:

$$N = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

Observera att konstanten k i Newtons gravitationslag inte sätts till 1; Newtons gravitationskonstant är $6.659 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$. Man brukar säga att enheten N har avstämts med hjälp av Newtons kraftlag, där man har fastlagt konstantens värde. Konstanten i gravitationslagen är endast approximativt känd, då den inte är fastlagd.

Sammanfattning: En härledd enhet är bildad som en potens eller som produkt av potenser av grundenheter och supplementenheter enligt vissa bestämda fysikaliska lagar för samband mellan olika storheter.

Nitton härledda SI-enheter har för närvarande getts egna namn.

3.4 Multipelenheter

För att uttrycka ett måttetal som är stort eller litet i förhållande till grundenhet eller härledd enhet kan man använda positiva eller negativa tiopotenser. Med hjälp av de s.k. multipelenheterna kan man göra detta betydligt enklare. Talfaktorn uttrycks då med ett prefix som anger med vilken tiopotens enheten skall multipliceras.

Tabell 3.2: *Multipelenheter och prefix.*

Talfaktor	Prefix	
	Beteckning	Benämning
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	hekto	h
10^1	deka	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	mikro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	piko	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

De flesta beteckningarna kommer från grekiskan och latinet men två av enheterna kommer från nordiska språken, femto (femten) och atto (atten). Prefix som representerar 10 upphöjt till ett tal som är en multipel av 3 skall väljas i första hand. Prefixen hekto, deka, deci och centi bör därför undvikas.

Exempel 7: $2\,500 \text{ J} = 2.5 \text{ kJ}$

Exempel 8: $0.000\,001\text{ A} = 10^{-6}\text{ A} = 1\text{ }\mu\text{A}$

Exempel 9: Exponent vid en multipelenhet gäller även för prefixet, dvs $1\text{ km}^2 = 1\text{ km} \cdot 1\text{ km}$

Exempel 10: Prefixen kan även användas för pengar. $200\,000\text{ kr} = 200\text{ kkr}$.

3.5 Storheters dimension

Vi skall utgå från SI-systemet när vi definierar begreppet dimension. Vi utgår då från att det är intuitivt klart vilka dimensioner de olika grundenheterna har; vid alla längdmätningar med olika måttstockar mäts en storhet med dimensionen längd, vid alla tidmätningar med olika klockor mäts en storhet med dimensionen tid osv.

För grundenheterna i SI används följande beteckningar för motsvarande dimensioner:

[längd]	= L
[massa]	= M
[tid]	= T
[elektrisk ström]	= I
[temperatur]	= Θ
[substansmängd]	= N
[ljusstyrka]	= J

Observera att hakparenteser, [...], används för att ange dimensionen av storheten inom hakparenteserna. Inom mekaniken uppträder bara dimensionerna L, M och T. En mekanisk storhet Q får därmed en dimension som kan skrivas

$$[Q] = L^\alpha M^\beta T^\gamma.$$

En storhet Q med $\alpha = \beta = \dots = 0$ har dimensionen 1 (ett) och sägs i dagligt tal vara dimensionslös eller dimensionsfri.

Exempel 11: Arean A har $[A] = L^2$, vinkeln α har $[\alpha] = 1$, hastigheten v har $[v] = L\,T^{-1}$ och kraften F har $[F] = M\,L\,T^{-2}$.

3.6 Dimensionskontroll

Alla fysikaliska formler kan kontrolleras med dimensionsanalys.

Exempel 12: En partikel med massan m faller rakt ned sträckan s och uppnår då hastigheten v . Utgångshastigheten är 0 och tyngdaccelerationen är g .

Då gäller att $v = \sqrt{2sg}$.

Kontroll av uttrycket för v :

$$[v] = L T^{-1}$$
$$[\sqrt{2sg}] = (L L T^{-2})^{1/2} = L T^{-1}$$

Alltså är $[VL] = [HL]$ och uttrycket för v kan vara riktigt.

Räknereglerna för dimensionen för integraler och derivator är som motsvarande räkneregler för produkt och kvot.

Exempel 13:

Hastigheten $v = \frac{dx}{dt}$ där x är sträcka och t är tid, varför $[v] = [x]/[t] = L/T$

Exempel 14:

Definitionsmsigt är tröghetsmoment $I = \int r^2 \rho dV$, där r är avstånd, ρ densitet och V volym. Det följer att $[I] = L^2 ML^{-3} L^3 = L^2 M$. Enheten för I är kilogrammeterkvadrat, $kg \cdot m^2$.

Exempel 15:

En behållare som har formen av en liggande cylinder med horisontell axel är helt fylld med bensen. Den har invändigt längden 210 cm och diametern 128 cm. Upptill finns ett hål till luften, och behållaren kan tappas ur genom ett cirkulärt hål med diametern 60 mm beläget på undersidan och mynnande rakt nedåt. Beräkna tiden för tömningen, då den kontraktionskoefficienten k är 0.90.

Beteckningar: Behållarens längd är L , behållarens diameter är D , hålets diameter är d , kontraktionskoefficienten är k (dimensionslös storhet), tyngdaccelerationen är g , vätskeytans höjd över kärlets botten är x , vätskevolymen i kärlet är V , och utströmningstiden är τ .

Då gäller

$$\tau = \frac{8\sqrt{2}LD^{3/2}}{3\pi k\sqrt{g}d^2}.$$

Man finner

$$[8\sqrt{2}] = 1, [L] = L, [D^{3/2}] = L^{3/2}$$
$$[3\pi] = 1, [k] = 1, [\sqrt{g}] = L^{1/2} T^{-1}, [d^2] = L^2$$

och högerledet blir då

$$[HL] = L L^{3/2} / (L^{1/2} T^{-1} L^2) = T,$$

som är lika med dimensionen för vänsterledet.

3.7 Inledande dimensionsanalys

Enligt tidigare kan alla fysikaliska formler kontrolleras med dimensionsanalys. Man kan även använda dimensionsanalys för att få en dimensionsmässigt riktig formel. Vi illustrerar det med ett exempel.

Exempel 16: Vi vill ha en matematisk modell för planeternas omloppstid runt solen. Vi antar planetbanan är elliptisk och har starka skäl att tro att omloppstiden (beroende variabel) t beror av huvudaxelns längd a , solens massa m_s och gravitationskonstanten G (som har enheten Nm^2/kg^2). Däremot har vi tagit reda på att omloppstiden för en planet inte beror av dess massa. Vår variabeltabell, där den beroende variabeln placeras överst, finns nedan.

Tabell 3.3: Variabeltabell för exempel 16.

Storhet ³	Beteckning	Dimension ⁴
omloppstid	t	T
huvudaxelns längd	a	L
solens massa	m_s	M
gravitationskonstanten	G	$\text{L}^3\text{T}^{-2}\text{M}^{-1}$

Omloppstiden kan skrivas som en funktion f av de oberoende variablerna enligt:

$$T = f(a, m_s, G)$$

Vi gissar, med goda skäl, att vi kan göra en produktansats (faktoriell potensfunktion):

$$T = C \cdot a^\alpha \cdot m_s^\beta \cdot G^\gamma,$$

där C är en dimensionslös konstant och α , β och γ är exponenter.

Det ska gälla att $[\text{VL}] = [\text{HL}]$. Det betyder att vi kan bestämma lika många exponenter som vi har grunddimensioner i ansatsen.

$[\text{VL}] = [\text{HL}]$ ger:

$$T = \text{L}^\alpha \cdot \text{M}^\beta \cdot (\text{L}^3\text{T}^{-2}\text{M}^{-1})^\gamma$$

Alltså:

$$\text{T: } 1 = -2\gamma \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{2}$$

$$\text{L: } 0 = \alpha + 3\gamma \Rightarrow \alpha = -3\gamma = -3\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\text{M: } 0 = \beta - \gamma \Rightarrow \beta = \gamma = -\frac{1}{2}$$

En dimensionsriktig modell enligt vår ansats är då:

$$T = C \frac{a^{3/2}}{\sqrt{Gm_s}}$$

Det blir mer om dimensionsanalys i Fysik 2 (kap. 5)

³Storhet = mätetal*enhet

⁴T= tid, L= längd, M = massa

3.8 Övningsuppgifter

1. Snörkraft.

En partikel med massan m är fäst i ett snöre och rör sig i en cirkulär bana på ett glatt bord. Partikelns fart är v och banans radie är r . Radien är konstant. Härled ett uttryck för den kraft F varmed snöret påverkar partikeln.

2. Skriv ut följande multipelenheter i siffror med ledning av det ifyllda exemplet

1 kilowatt	(1 kW)	= 1000 W
1 mikrometer	(1 μm)	= m
1 megajoule	(1 MJ)	= J
1 milligram	(1 mg)	= g

3. Skriv om dessa måttangivelser med ledning av de första sambanden i respektive kolumn

50 km = $50 \cdot 10^3$ m	$2 \cdot 10^7$ Pa = 20 MPa
180 MPa = Pa	2000 N = kN
5 TJ = J	0,00003 m = μm
50 μm = m	10^{11} Pa = GPa
1 nm = m	10^{13} J = TJ
50 kW = W	
350 cm^3 = m^3	
220 GPa = Pa	

4. Hur definieras följande tilläggsenheter och i vilka sammanhang används dessa? ångström, parsek, barn, universella massenheten, elektronvolt, gauss.

5. Utför följande enhetsbyten!

1 N = dyn	1 hk = W
1 at = torr	1 kWh = J
1 kp = N	1 kcal/h = W
1 eV = J	100°C = K
1 kcal = J	

6. Vid lösning av ett problem erhöles med beteckningar enligt nedan följande slututtryck för skjuvmodulen:

$$G = \frac{16\pi s m (d_1^2 + d_2^2)}{d^4 (T_2^2 - T_1^2)}$$

Beteckningar: Trådlängd s , tråddiameter d , trådens skjuvmodul G , massa för pålagd ring m , svängningstid utan ring T_1 , svängningstid med ring T_2 , ringens ytterdiameter d_1 och ringens innerdiameter d_2 .

Avgör genom en dimensionsbetraktelse om slututtrycket kan vara riktigt.

3.9 Svar till övningsuppgifter

Övning	Svar
1	$F = Cmv^2/r$, där C är en dimensionslös konstant.
2-6	-

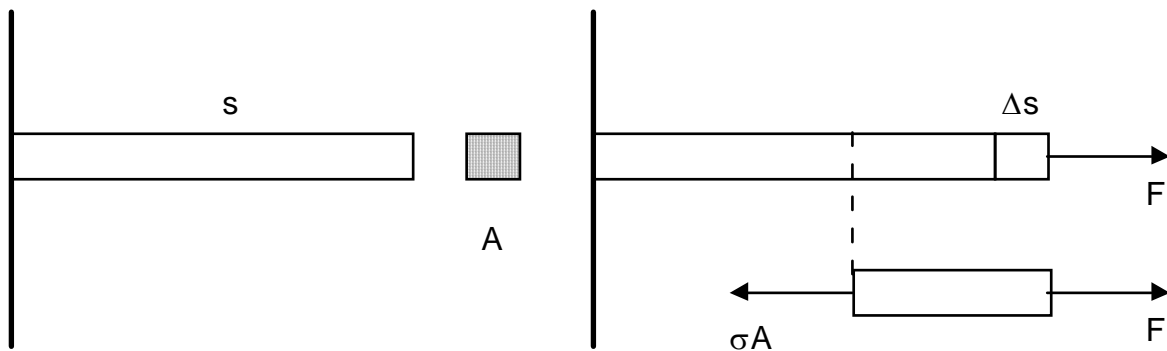
Kapitel 4

4. Elementär mekanik och strömningslära

4.1 Töjning av fasta kroppar

Alla kroppar deformeras av krafter. En kropp som återtar sin ursprungliga form när krafterna avlägsnas sägs uppföra sig elastiskt. Betrakta en stång med längden s och tvärsnittsarean A . Stången är fast inspänd i ena änden. Då stången belastas med en axiell dragkraft F förlängs den ett stycke Δs .

I stången uppträder inre krafter. För att beskriva de inre krafterna kan man tänka sig stången delad genom ett snitt vinkelrätt mot dess längdriktning. På den bortsnittade delen verkar, från den andra delen av stången, krafter svarande mot en normalspänning σ . Den genom snittet frilagda delen av stången är i jämvikt.



Figur 4.1: Axiell töjning av elastisk stång.

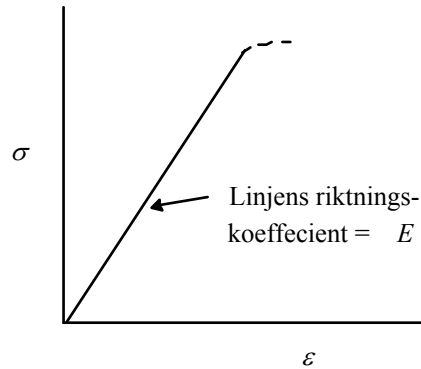
Summan av krafterna är därför noll, dvs

$$F - \sigma A = 0$$

Vid deformationen förlängs varje längdenhet av stången lika mycket. Töjningen ε definieras som relativa längdändringen:

$$\varepsilon = \Delta s / s$$

Töjningen är alltså dimensionslös, $[\varepsilon] = 1$.



Figur 4.2: Spännings-töjnings diagram för ett linjärt elastiskt material.

Så länge som deformationen är elastisk beror spänningen bara på töjningen. För många material gäller att σ är proportionell mot ε inom en stor del av det elastiska området, dvs.

$$\sigma = E \varepsilon. \quad (\text{Hookes lag})$$

Proportionalitetskonstanten E kallas elasticitetsmodul. Det är en materialkonstant som finns tabulerad för metaller och andra fasta ämnen. Eftersom ε är dimensionslös har E samma dimension som σ ,

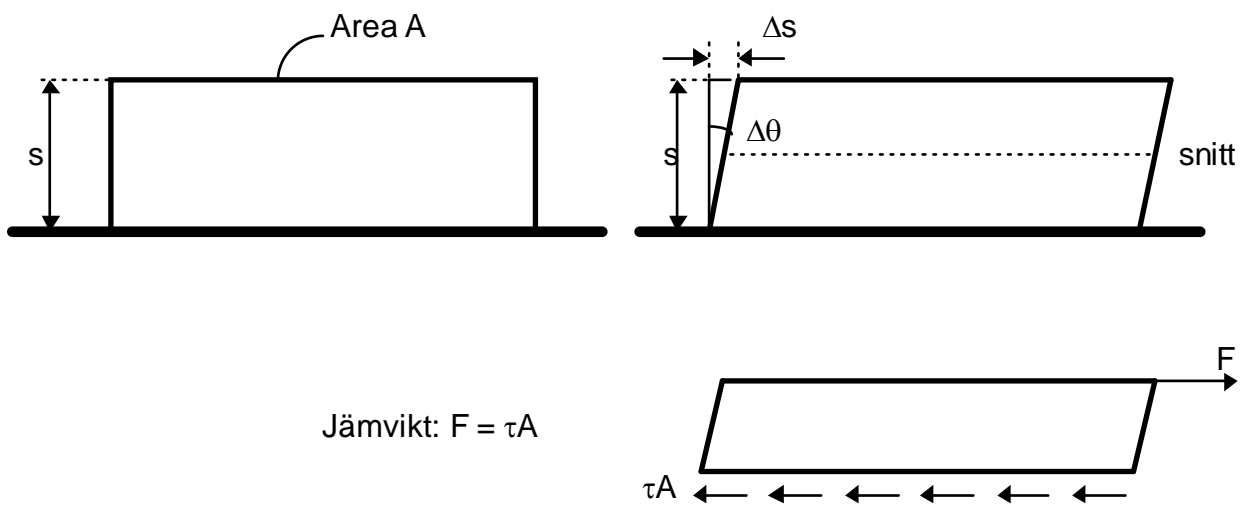
$$[E] = \text{M L}^{-1} \text{T}^{-2}.$$

E anges vanligen i enheten N/m^2 (= Pascal, Pa). Som framgår av definitionerna ovan kan Hookes lag även skrivas på den dimensionsfria formen

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{F}{EA}.$$

4.2 Skjuvning av fasta kroppar

Ett rätblock är fäst i ett plant underlag. Då den övre ytan med area A



Fig

Figur 4.3: Skjuvning av ett elastiskt block. Blocket skjuvas av kraften F och den tangentiella skjuvspänningen τ är motriktad kraften.

belastas med en kraft F , parallell med den ena kanten, deformeras blocket enligt figur 4.3. Denna typ av deformation kallas skjuvning. Vid skjuvningen tenderar skikten att förskjutas relativt varandra. I ett tänkt snitt genom ett skikt parallellt med den övre ytan vars area är A uppträder en tangentiell kraftfördelning given av skjuvspänningen $\tau = F/A$. Deformationen anges av skjuvningen $\gamma = \Delta s/s = \tan \Delta\theta$.

Vid måttliga belastningar uppträder vanligen materialet linjärt elastiskt, vilket innebär att

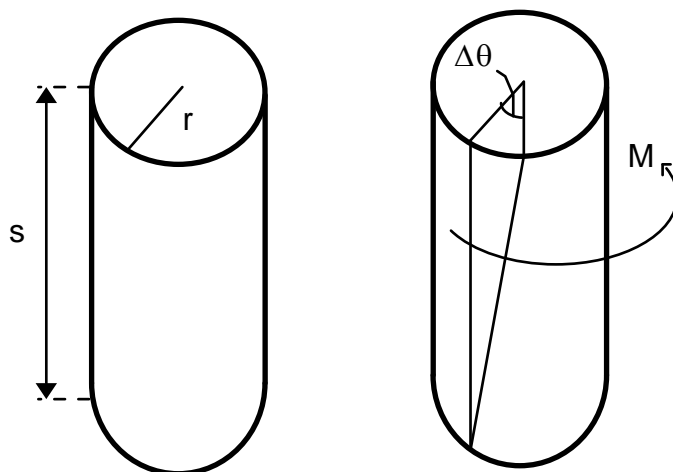
$$\tau = G\gamma = G\Delta\theta, \quad \text{eller} \quad \Delta\theta = \frac{F}{GA}.$$

Proportionalitetskonstanten G , skjuvmodulen (eller torsionsmodulen), är en materialkonstant med dimensionen kraft per ytenhet, dvs.

$$[G] = \text{M L}^{-1} \text{T}^{-2}.$$

Skjuvning uppträder även vid vridning av trådar och axlar. Figuren på nästa sida visar en tråd som vrids under inverkan av kraftmomentet M . För en tråd med cirkulärt tvärsnitt gäller

$$\Delta\theta = \frac{2Ms}{G\pi r^4}.$$



Figur 4.4: Stången belastas av ett moment och deformeras, skjuvas.

4.3 Samband mellan E och G

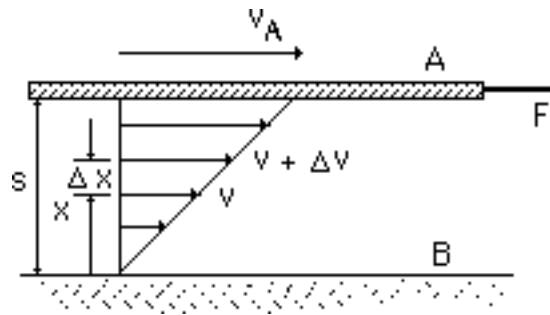
När en stav töjs till följd av en axiell kraft F så smalnar den också. Låt x -axeln vara riktad längs staven, och y - och z -axeln vara vinkelräta mot stavens längsriktning. Det gäller

$$\varepsilon_x = \sigma_x/E, \quad \varepsilon_y = -\nu \sigma_x/E, \quad \varepsilon_z = -\nu \sigma_x/E,$$

där ν är Poissons tal. Poissons tal är en konstant som anger hur mycket staven krymper i tvärlä. För många material är Poissons tal ungefär lika med 0.25. Eftersom kraften F både orsakar töjning och skjuvning så inses att det bör finnas ett samband mellan E , G och ν . Man kan visa att

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

4.4 Viskositet (vätskors skjuvning)



Figur 4.5: Hastighetsprofil för tidsoberoende, laminär Couette-strömning.

Låt oss studera en vätska mellan två parallella plattor. Platta A rör sig med den konstanta hastigheten v_A under inverkan av kraften F medan platta B är i vila. Vätskans molekyler "fastnar" på plattornas ytor, det gör gas- och vätskemolekyler i allmänhet, och följer med plattornas rörelse. Eftersom vätskan är viskös, har en viss "seghet", så kommer vätskan i utrymmet mellan skivorna att dras med då den övre skivan rör sig. Vi antar att den strömning som då uppstår i vätskan är laminär, dvs. vätskeskikten glider mot varandra utan att blandas. (Laminär strömning uppträder vid låga strömningshastigheter. Vid högre hastigheter bryts skikten upp, turbulent strömning uppstår.)

Vid strömningen uppstår, på grund av viskositeten, tangentiella friktionskrafter, och därmed skjuvspänningar, mellan skikten. Den konstanta kraften F verkande på platta A balanserar friktionskrafterna. Jämvikt råder, varför skjuvspänningen $\tau = F/A$. Experimentellt finner man att F/A är proportionell mot plattans hastighet v_A och omvänt proportionell mot avståndet s mellan plattorna, dvs.

$$\frac{F}{A} = \text{konst} \cdot \frac{v_A}{s}, \quad \text{eller} \quad \tau = \mu \frac{v_A}{s},$$

där proportionalitetskonstanten μ kallas den dynamiska viskositeten, $[\mu] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$ eller Ns/m^2 . Den resulterande hastighetsfördelningen i vätskan illustreras i figuren ovan. Strömningshastigheten växer linjärt med koordinaten x . Från $v = 0$ vid ytan på platta B till $v = v_A$ vid ytan på platta A. Vi får

$$\frac{v_A}{s} = \frac{\Delta v}{\Delta x}, \quad \text{eller efter gränsövergång} \quad \frac{v_A}{s} = \frac{dv}{dx}.$$

Derivatan dv/dx kallas hastighetsgradient och anger hastighetstillväxten per längdenhet vinkelrät mot strömningen. Därmed fås det mer allmängiltiga sambandet för laminär strömning,

$$\tau = \mu \frac{dv}{dx}.$$

Dimensionen för μ bestäms av sambandet ovan; kom ihåg att $[\tau] = \text{M L}^{-1} \text{T}^{-2}$ och att $[dv/dx] = \text{T}^{-1}$,

$$[\mu] = \text{M L}^{-1} \text{T}^{-1}.$$

I olika sammanhang används den dynamiska viskositeten istället för den kinematiska. Den dynamiska viskositeten definieras:

$$\nu = \mu/\rho. \quad [\nu] = \text{L}^2 \text{T}^{-1}$$

Dessa samband mellan viskositet, skjuvspänning och hastighetsändring per längdenhet ansattes i mitten av 1600-talet av Isaac Newton. De vätskor som lyder detta samband kallas därför Newtonska vätskor. De flesta vätskor är Newtonska; undantag är t.ex. en del oljor och polymera vätskor.

4.5 Övningsuppgifter

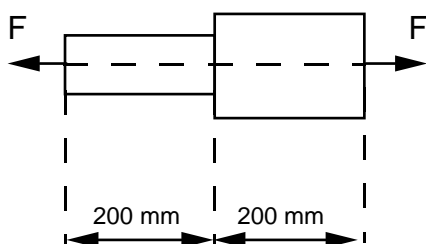
1. a) En rundstav av stål med 10 mm diameter belastas med en dragkraft av 18 000 N. Hur stor är spänningen i staven?

b) På staven är en mätlängd av 100 mm markerad. Hur mycket ökar mätlängden?

Elasticitetsmodulen för staven är $210\,000\text{ N/mm}^2$.

2. En spinnfiskare råkar få bottenapp. Nylonlinan har diametern 0,70 mm och den utrullade längden är 16 m. Under losstagningsförsöket drar fiskaren med kraften 250 N, varvid linan förlängs med 340 mm. Bestäm elasticitetsmodulen för nylonmaterialet i linan.

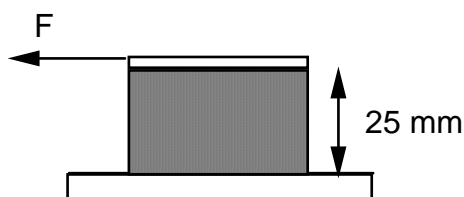
3.



En stav är sammansatt av två delar med cirkulära tvärsnitt. Den klenare delen är av stål och har diametern 10 mm, medan den grövre är av aluminium och har diametern 20 mm. Båda bitarna har längden 200 mm. Hur mycket förlängs staven då den belastas med en kraft av 20 000 N?

Stål har elasticitetsmodulen $200\,000\text{ N/mm}^2$ och aluminium $75\,000\text{ N/mm}^2$.

4.



Figuren visar ett gummiblock med måtten $40\text{ mm} \times 40\text{ mm} \times 25\text{ mm}$, som är fastlimmat mellan två metallplattor. Under påverkan av kraften F förskjuts den övre plattan 3,0 mm i sidled. Bestäm skjuvmodulen för gummimaterialet om F är 200 N.

5. En liten sfärisk regndroppe har radien 0,05 mm. Bestäm hastigheten för regndroppen vid fritt fall i luft. Droppen faller med konstant hastighet. En liten sfär med radien r som rör sig med låg hastighet v i en viskös vätska eller gas påverkas av denna med motståndet $F = 6\pi r\mu v$ där μ är dynamiska viskositeten för det omgivande mediet. Sambandet kallas Stokes lag och gäller om Reynolds tal ($Re = 2rv\rho/\mu$) är mycket mindre än ett. Antag att droppens hastighet är sådan att Stokes lag gäller.

4.6 Svar

1. a) $230 \cdot 10^6\text{ N/m}^2$ b) 0,11 mm

2. $30,6 \cdot 10^9\text{ N/m}^2$

3. 0,42 mm

4. $1,04 \cdot 10^6\text{ N/m}^2$

5. 0,32 m/s

Kapitel 5

5. Dimensionsanalys

5.1 Dimensionsbetraktelser

Avsnittet syftar till att göra dig mer bekant med fysikens dimensionsbegrepp. I några exempel visas hur man ofta kan beskriva fenomen i naturen genom enkla dimensionsbetraktelser. Flera exempel är hämtade ur en av fysiklitteraturens klassiker: d'Arcy Thompson, *"On Growth and Form"* vars första upplaga publicerades 1917.

Längd, area och volym

Vad är det för fysikalisk effekt som förmår en middagsätare att skära den heta potatisen i bitar? Skär man en potatis i bitar är volymen potatis oförändrad och därmed totala värmemängden som måste ledas bort för att göra den ätbar. Däremot ökar potatisens yta mot omgivningen och därmed också den värmemängd som per tidsenhet leds ut genom ytan vilket resulterar i att avsvälningen sker snabbare.

Samma fenomen har inflytande på däggdjurens behov av föda. En avsevärd del av födan krävs för att upprätthålla kroppstemperaturen. Djurets volym (med dimensionen L^3) växer i proportion till kuben på storleken (med dimension L). Då djurets kroppsytta beror som kvadraten på längden (L^2) får små djur proportionellt större kroppsytta, i förhållande till sin volym, och därmed proportionellt större värmeförlust att kompensera. En mus konsumerar föda svarande mot ungefär halva sin kroppsvikt per dygn medan människan endast behöver ca en femtiondedel av sin kroppsvikt per dygn. Den ungefärliga energiomsättningen per kilogram kroppsvikt och per dygn i metabolismen hos några däggdjur är:

Tabell 5.1: *Effektbehov och vikt för några olika djur.*

	Vikt (kg)	Effektbehov J/(dygn kg)
Marsvin	0.7	940
Människa	70	140
Häst	600	93
Elefant	4 000	54
Val	150 000	7

Det är alltså ca 20 gånger dyrare energimässigt att underhålla ett kilogram människa än ett kilogram val. Ett däggdjur med en massa mycket mindre än en hasselmus skulle inte hinna äta, smälta och omsätta den föda som behövs för att klara energiomsättningen.

I Jonathan Swifts bok om Gullivers resor berättas bla vad som händer när Gulliver kommer till landet "Lilliput". När ministrarna i "Lilliput" finner att Gulliver är ca tolv gånger större än "medellilliputianen" beslutar de att tilldela Gulliver en daglig matranson i proportion till hans kroppsvolym, dvs $12^3 = 1728$ normalransoner i "Lilliput". Gulliver torde ha haft avsevärda svårigheter om han försökt sätta i sig all den maten, som var tillräcklig för ungefär tolv jättar av hans storlek. Hans behov av föda står i proportion till kroppsytan, dvs. det är $12^2 = 144$ normalportioner. Jonathan Swift skrev boken som en samhällssatir, men detta var nog en omedveten ironi över de politiska beslutsfattarnas skrala kunskaper om naturvetenskaplig problemlösning.

Ytterligare exempel på yt- kontra volymseffekten får man om man tittar på naturens sätt att konstruera fruktskaft eller ben.

Stora frukter (t.ex. äpplen) har proportionsvis grövre skaft än små (t.ex. blåbär) och i vissa fall placeras läckerheten på marken (t.ex. gurkor och pumpor). Den bakomliggande orsaken är densamma som när det gäller djurens ben.

Djurens ben skall ju bära kroppstyngden. Tyngden är proportionell mot volymen (L^3), eftersom densiteten är ungefär densamma för levande materia. Benets bärkraft är däremot proportionell mot benets tvärsnittsarea, dvs. ungefär proportionell mot L^2 . Det gynnar små djur som kan tillåtas ha eleganta, smäckra benkonstruktioner. Jämför t.ex. benen på en elefant med benen på en antilop. Ännu mer markant skiljer sig vissa insekters (exempelvis lockespindlarna) benkonstruktioner från däggdjurens. I extremfallet kan man tänka sig ett ben så stort att det inte kan bära sig själv. Sagornas jättar var alltså helt ofarliga och snarast ömkansvärda. De behövde bara försöka stå upp så bröt de benen.

Konsten att hoppa

Det händer att skribenter, fyllda av beundran över gräshoppanns förmåga att hoppa, skriver att om gräshoppan vore stor som en människa skulle hon hoppa över kyrktorn. Det är naturligtvis orimligt och dessutom kan man konstatera att i vissa avseenden är människan överlägsen gräshoppan som höjdhoppare.

Hur högt kan man vänta sig att ett djur med längdutsträckning L kan hoppa? Hopp höjden bestäms av det muskelarbete som uträttas vid upphoppet. Muskelkraften är proportionell mot musklernas tvärsnittsarea, dvs. mot L^2 . Muskelkraften gånger kontraktionslängden (proportionell mot L) bestämmer arbetet, dvs.

$$\begin{aligned} W &= \text{muskelarbete vid upphoppet} = (\text{muskelkraft}) \cdot (\text{kontraktionslängd}) \\ &= \text{konst } (L^2) \cdot (L) = \text{konst} \cdot M \end{aligned}$$

eftersom massan M är proportionell mot volymen.

Muskelarbetet ger kroppen kinetisk energi. Den kinetiska energin omvandlas till potentiell energi när kroppen rör sig uppåt i tyngdkraftfältet och när kroppen når högsta punkten har muskelarbetet via rörelseenergin omvandlats i potentiell energi (vi försummar energiförluster på grund av friktion i leder, luftmotstånd etc.). Den potentiella energin, E_p , vid vändpunkten blir (h = hopp höjden)

$$\begin{aligned} E_p &= (\text{kroppens tyngd}) \cdot (\text{hopp höjden}) = \text{konst } (\text{kroppens massa}) \cdot (\text{hopp höjden}) \\ &= \text{konst} \cdot Mh. \end{aligned}$$

Enligt energiprincipen så kommer W och E_p att vara lika vilket innebär att hopp höjden (h) är konstant och oberoende av massan.

En "Lilliputian" borde alltså ha kunnat hoppa lika högt som Gulliver. Mer allmänt kan man säga att alla levande varelser som är lika byggda i proportion till längden bör kunna hoppa lika högt.

Gräshoppan eller loppan kan dock konstrueras med proportionsvis mycket längre och smäckrare ben än t.ex. en människa eller en elefant, eftersom hållfasthetsproblemen är mindre svårlösta. Det har också naturen utnyttjat och därför är gräshoppan bättre höjdhoppare än människan. Å andra sidan hoppar människan höjd med "insidan av huvudet", dvs. hon (om hon är vältränad) ser till att kroppen bit för bit går över ribban på sådant sätt att tyngdpunkten går under eller genom ribban (stilen kallas Fosbury-flop efter höjdhopparen Richard (Dick) Fosbury som först använde stilen vid OS i Mexico City, 1968). I det avseendet är människan överlägsen gräshoppan.

5.2 Tre exempel på samband mellan dimensionsfria storheter

Varje vettigt samband mellan fysikaliska storheter går att skriva som ett samband mellan dimensionsfria storheter. Det ursprungliga sambandet innehåller fler variabler än det dimensionsfria, som därför är enklare att åskådliggöra.

Exempel 1: Radioaktivt sönderfall

Betrakta en radioaktiv isotop vars ursprungliga massa är m_0 vid tiden $t=0$. Massan m som återstår efter tiden t beror på m_0 enligt ekvationen

$$m = m_0 e^{-0,693t/t_0},$$

där t_0 är isotopens halveringstid.

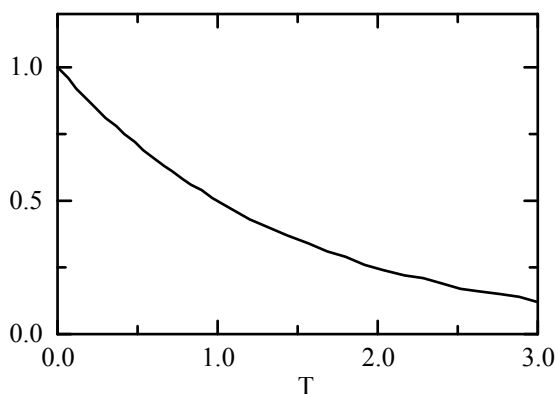
(Observera att $\exp(-0,693) = 2^{-1}$.) Halveringstiden t_0 finns tabellerad för nästan varje radioaktivt element. Det är därför möjligt att rita en graf där m avsätts mot tiden t för elementet ifråga. Det är dock att föredra att rita m/m_0 mot t/t_0 som visas nedan. Denna kurva gäller allmänt för alla radioaktiva element. Ekvationen kan skrivas:

$$M = e^{-0,693T} \quad \text{eller} \quad M = f(T),$$

där

$$M = \frac{m}{m_0} \quad \text{och} \quad T = \frac{t}{t_0}.$$

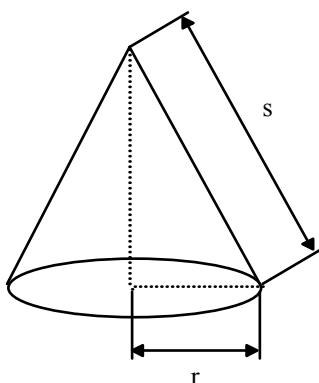
Uppenbarligen är M och T dimensionsfria variabler svarande mot storheterna m och t . (Om en kurva ritades av m mot t så finge den samma form som kurvan i figuren nedan.)



Figur 5.1: Radioaktivt sönderfall i dimensionslösa storheter.

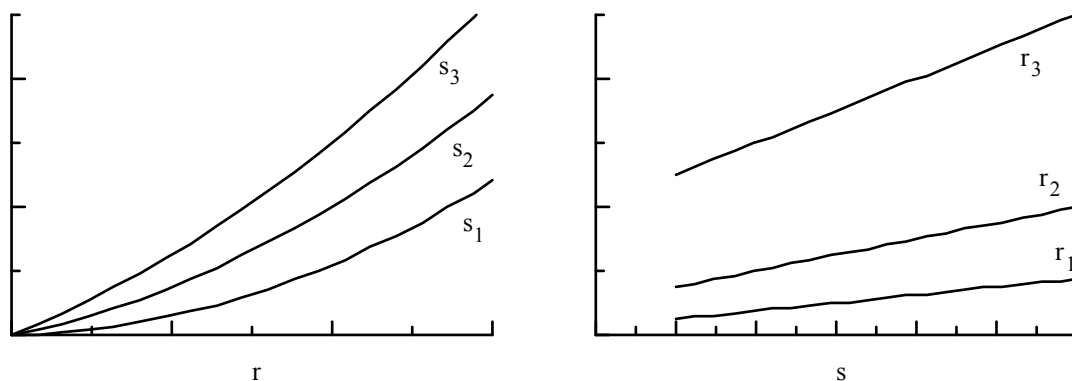
I detta exempel är funktionen f en känd funktion; $f(T) = 2^{-T}$. Dock kan man bestämma funktionen f experimentellt genom att mäta m som funktion av t , beräkna M och T och plotta resultatet. Kurvan som fås kommer att bli densamma som i figur 5.1, ovan.

Exempel 2: Arean av en rät cirkulär kon



Figur 5.1: Kon.

Arean av en kons totala begränsningsyta består av bottenarean samt mantelarean. Totala arean beror av två variabler, r och s , och kan tecknas $A = \pi r^2 + \pi rs$, eller symboliskt $A = \phi_I(r, s)$. Arean kan framställas som en kurvfamilj:



Figur 5.2: Begränsningsytans area för en kon. Diagrammet till vänster visar arean som funktion av r med s som parameter och till höger arean som funktion av s med r som parameter.

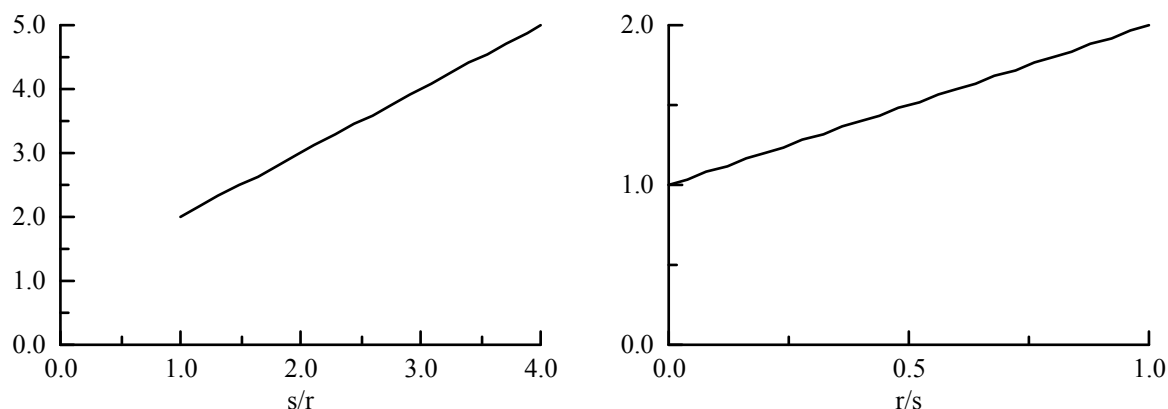
Om man dividerar sambandet för arean A med, i första fallet, πr^2 och i andra fallet med πrs fås två samband.

$$\frac{A}{\pi r^2} = 1 + \frac{s}{r} \quad \text{dvs.} \quad \frac{A}{\pi r^2} = \phi_2\left(\frac{s}{r}\right)$$

respektive

$$\frac{A}{\pi rs} = 1 + \frac{r}{s} \quad \text{dvs.} \quad \frac{A}{\pi rs} = \phi_3\left(\frac{r}{s}\right)$$

Grafiskt kan detta framställas som i figur 5.3.



Figur 5.3: Begränsningsytans area för en kon. Axlarna är dimensionslösa.

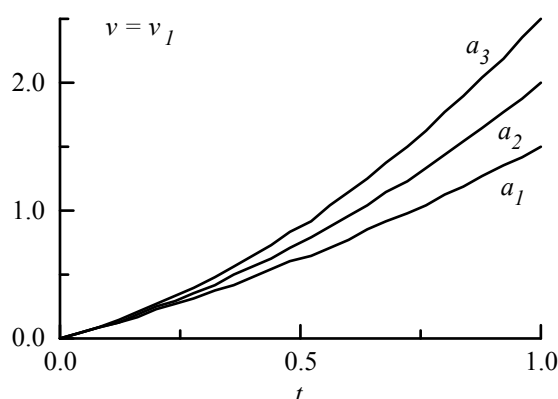
Kurvfamiljen har ersatts med *en enda* rät linje som kan beskriva *alla* typer av koner. Känner man s och r kan s/r beräknas och $A/(\pi r^2)$ avläsas från grafen. Därefter kan A beräknas. Observera också att alla koner med samma kvot s/r representeras av samma punkt på den räta linjen. För att det skall vara en kon måste s vara större än r . s/r varierar därför mellan 1 och oändligheten för olika koner medan r/s varierar mellan 0 och 1. Det är ofta fördelaktigt att använda den senare variabeln som varierar mellan 0 och 1.

Exempel 3: Kinematik

För rörelse med konstant acceleration a gäller att den tillryggalagda vägen s efter en tid t är

$$s = v t + \frac{1}{2} a t^2$$

om begynnelsehastigheten vid tid $t = 0$ är v . Vi har fyra variabler och eftersom begynnelsehastigheten är konstant så svarar det mot en kurvfamilj med tre varierande storheter, s , t och a , som visas i diagrammet nedan. För varje värde på den fjärde variabeln v får man liknande diagram.

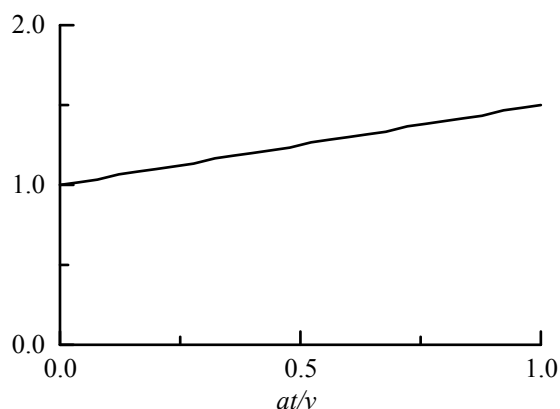


Figur 5.4: Färdad sträcka, s , vid konstant acceleration. Diagrammet visar sträcka som funktion av tid med accelerationen som parameter. Begynnelsehastigheten är konstant.

Vi skall liksom i föregående exempel härleda ett motsvarande dimensionsfritt samband. Dividera t.ex. med $v t$

$$\frac{s}{v t} = 1 + \frac{a t}{2 v} \quad \text{dvs.} \quad \frac{s}{v t} = \phi\left(\frac{a t}{v}\right).$$

I exemplet känner vi funktionen ϕ . Men antag att formen på ϕ är okänd och att vi med hjälp av experiment skall bestämma s för olika värden på a , t och v . De dimensionsfria variablerna $s/(v t)$ och $at/(2v)$ beräknas och plottas i ett diagram. Grafens utseende ger nu funktionen ϕ . Vi får följande.



Figur 5.5: Färdad sträcka, s , vid konstant acceleration. Ritat i dimensionslösa storheter.

De olika kurvfamiljerna för $v = v_1$, $v = v_2$, .. har tydligen reducerats till en enda graf som även i detta fall råkar bli en rät linje.

Sambandet mellan s , v , t och a kan göras dimensionsfritt på olika sätt. Division med $v \cdot t$ (som ovan) ger en form som är lämplig om man vill bestämma s för kända a , v och t eftersom s ingår i endast en av de dimensionsfria variablerna. Om man istället dividerar med at^2 fås ekvationen

$$\frac{s}{at^2} = \frac{v}{at} + \frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad \frac{s}{at^2} = \phi\left(\frac{v}{at}\right).$$

Här ingår storheten v i endast en av de dimensionsfria variablerna och motsvarande graf är lämplig för att bestämma v för givna s , t och a .

Slutsatser av exemplen

Exemplen illustrerar tre principer som är värda att komma ihåg.

1. De dimensionsfria sambanden kan ges olika former t.ex.

$$\frac{s}{vt} = \phi\left(\frac{at}{v}\right) \quad \text{eller} \quad \frac{s}{at^2} = \phi\left(\frac{v}{at}\right).$$

Vilken form som är lämplig beror på omständigheterna, t.ex. om s eller v skall beräknas med övriga variabler kända.

2. Funktionen ϕ bestäms genom en särskild analys eller genom att en kurva anpassas till experimentellt funna punkter. I exemplen ovan var funktionerna ϕ kända genom teoretiska härledningar. De kunde ha bestämts genom en serie experiment.
3. Antalet dimensionsfria variabler blir mindre än det ursprungliga antalet variabler. Reduktionen kan sammanfattas i en tabell, se tabell 5.2 nästa sida.

Tabell 5.2: Tabell över variablerna i exemplen.

Exempel	Antal variabler (n)	Antal grunddimensioner (m)	Antal dimensionslösa variabler
"konen"	3 (A, r, s)	1 (L)	$2 = 3-1$
"kinematik"	4 (s, v, a, t)	2 (L,T)	$2 = 4-2$
"sönderfall"	4 (m, m_0, t, t_0)	2 (M,T)	$2 = 4-2$

5.3 Val av variabler

Som regel måste experiment, dimensionsanalys och vanlig matematisk analys användas i samverkan för att man skall kunna skapa en tillfredsställande modell. Valet av primära variabler är naturligtvis en del av arbetet med modellen. Målet är att finna en ekvation

$$f(q_1, q_2, q_3, \dots) = 0$$

för storheterna q_1, q_2, q_3, \dots , en ekvation som är fullständig och unik. Fullständigheten innebär att inga ytterligare mätningar krävs, att den är unik innebär att ingen ytterligare relation mellan variablerna finns.

Låt oss ge en del tumregler vid valet av primära variabler.

1. Välj så enkla variabler som möjligt. Om, säg, en stång har cirkulärt tvärsnitt är det bättre att låta diametern vara variabel än arean.
2. När ett föremåls tyngd är av betydelse bör tyngdaccelerationen, g , tas med som variabel, även om vi naturligtvis inte kan variera g .
3. En del storheter är redan från början dimensionsfria, t.ex. vinklar och kvoter mellan längder, massor och tider. Dessa dimensionsfria variabler är ofta lämpliga att välja.
4. Ett föremåls form kan karakteriseras av en längd och av kvoter mellan längder.

Fysiker och ingenjörer använder förenklingar för att minska antalet variabler som beskriver ett problem. Härigenom ökas ofta förståelsen av problemet och det blir hanterligt. En kropp är stel, töjningen är liten, jämvikt råder, rörelsen är tidsoberoende, vätskan är icke-viskös, materialet är homogent m.m. är exempel på approximationer som gör det möjligt att behandla viktiga fenomen utan att fastna i oväsentligheter. Resultatet av förenklingarna är en idealiserad modell. Användandet av sådana begrepp och metoder är så vitt spritt att man ofta inte skiljer på modellen och verkligheten. Ibland blir resultatet av detta förbiseende katastrofalt. För att få en enkel modell är det viktigt att reducera antalet variabler och att offra en del av noggrannheten. Om vår förståelse av problemet är rudimentär bör vi förenkla kraftigt. Om å andra sidan stor precision är väsentlig, som vid navigering i skärgården i dimma och mörker, blir vi tvungna att fördra mera sammansatta och noggranna modeller.

Allmänt gäller att de fysikaliska samband som modelleras kan uttryckas med hjälp av dimensionsfria variabler. Det är ofta effektivt att kombinera dimensionsanalys och experimentellt arbete. Fördelarna är:

- a. Antalet dimensionsfria variabler blir mindre än det ursprungliga antalet variabler (jfr (5.2) ovan).
- b. Verkan av en ursprunglig variabel kan bestämmas genom variation av en annan ursprunglig variabel.
- c. Vid modellförsök framgår skalningen tydligt.
- d. Ibland inser man att en tänkt ursprunglig variabel inte påverkar den beroende variabeln, eller att en väsentlig oberoende variabel har glömts bort.

Nackdelarna med analysen är det arbete som den medför. Ibland är det enklare att först variera alla de ursprungliga variablerna direkt, en i sänder, och sedan kontrollera dimensionerna hos slututtrycket än att från början arbeta med dimensionsfria variabler.

5.4 Strykmetoden för att finna π -grupper

Detta är en metod att på ett 'mekaniskt' sätt finna dimensionsfria storheter. Vi utgår från de primära storheterna, vilka som regel inte är dimensionsfria.

Antag att ett samband råder mellan några fysikaliska storheter

P, Q, R, S, \dots . Ekvationen

$$P = \phi(Q, R, S, \dots) \quad (1)$$

antas vara homogen, dvs. varje term i ekvationen har samma dimension. Strykmetoden anvisar ett sätt att finna möjliga dimensionslösa storheter $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$ och en möjlig dimensionsfri ekvation utgående från P, Q, R, S, \dots och ekvation (1). Ekvation (1) får formen

$$\pi_1 = \phi(\pi_2, \pi_3, \dots) \quad (2)$$

$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$ betecknar s.k. dimensionslösa grupper. Varje π -grupp är en produkt av potenser av någon av P, Q, R, S, \dots . Enligt Buckingham's sats gäller att π -grupperna $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$ är variabler som lika väl som de ursprungliga variablerna P, Q, R, S, \dots beskriver den fysikaliska situationen. Detta förutsätter att

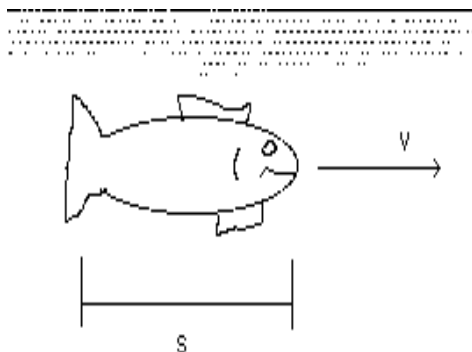
1. Varje variabel användes minst en gång.
2. De dimensionsfria grupperna är oberoende av varandra, dvs. det får inte vara möjligt att bilda någon av dem genom att kombinera några av de övriga.
3. Varje kolumn i indexmatrisen måste elimineras med *en enda* variabel, se exempel 4, nedan.

Om antalet ursprungliga variabler är lika med n och antalet grundläggande dimensioner är lika med m är som regel antalet π -grupper lika med $n - m$.

Följande exempel belyser strykmetoden.

Exempel 4: Fisk i vatten

Hur stort är motståndet för en fisk som rör sig med hastigheten v i vatten? Fisken karakteriseras av längden s . Problemet är mycket komplext. Först gör vi en bättre formulering av problemet eftersom alla fiskar inte har samma form, samma fjäll eller samma slem.



Figur 5.6: Fisk i vatten. Fisken har karaktäristisk längd s och fart v .

För att komma någon vart förenklar vi så att vi får ett uttryck som gäller under vissa förutsättningar och som eventuellt kan byggas ut och fås att gälla under mer allmänna förhållanden. Antag att avstånden till andra föremål är mycket stora, dvs. fisken simmar ensam på djupt vatten långt från botten. Antag vidare att vattnets kompressibilitet kan försummas. (Detta gäller hyggligt om fisken inte når en hastighet jämförbar

med ljudhastigheten i vatten.) Till slut förutsätts att varje fisk är formad såsom fisken i figuren ovan och kan karakteriseras med hjälp av en enda längd s . Fisken ändrar inte heller form när den rör sig.

De storheter som under angivna förutsättningar bestämmer motståndet ges då av tabellen nedan.

Tabell 5.3: Variabeltabell för fisk-motståndets problemet.

Fysikalisk storhet	Symbol	Dimension
Fisk: Motstånd	F	$M L T^{-2}$
Hastighet	v	$L T^{-1}$
Storlek	s	L
Vatten: Viskositet	μ	$M L^{-1} T^{-1}$
Densitet	ρ	$M L^{-3}$

Denna tabell skall skrivas på matrisform. Vi gör en s.k. indexmatris med grundläggande dimensioner som kolumner och variabler som rader. I exemplet "fisken" fås:

Tabell 5.4: Indexmatris för fisk-motståndets problemet.

	M	L	T
F	1	1	-2
v	0	1	-1
s	0	1	0
μ	1	-1	-1
ρ	1	-3	0

Talen i denna tabell svarar mot exponenterna för de grundläggande dimensionerna för varje variabel.

Tanken är nu att skapa dimensionslösa grupper $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$ genom att med hjälp av multiplikation eller division bilda nya variabler. Vi bildar först (a) variabler som inte beror på M, sedan (b) sådana som ej beror på T och till sist (c) bildar vi variabler som inte heller beror på L. De olika dimensionsberoendena "stryks" ett i sänder; den ordning som beroendena stryks i kan väljas godtyckligt.

a) Dividera *alla* variabler som innehåller dimensionen massa, M, med ρ , men tag inte med den triviala variabeln ρ/ρ . Vi får:

	M	L	T
F/ρ	0	4	-2
v	0	1	-1
s	0	1	0
μ/ρ	0	2	-1

Det är mycket viktigt att allt dimensionsberoende i varje kolumn elimineras med en och samma variabel. Ovan har vi valt ρ för att ta bort M-beroendet hos variablerna. Samma princip gäller även L och T-beroendet, se nästa sida.

b) För att eliminera beroendet av dimensionen tid, T, dividerar vi F/ρ med v^2 , μ/ρ med v och får

	M	L	T
$F/(\rho v^2)$	0	2	0
s	0	1	0
$\mu/(\rho v)$	0	1	0

Här har v använts för att eliminera allt T-beroende.

c) Bilda slutligen dimensionslösa grupper genom att använda storheten s som har dimensionen längd, L. Vi använder alltså s för att eliminera allt L-beroende.

	M	L	T
$F/(\rho v^2 s^2)$	0	0	0
$\mu/(\rho v s)$	0	0	0

Uppenbarligen är $F/(\rho v^2 s^2)$ och $\mu/(\rho v s)$ två π -grupper som är oberoende av varandra; $\pi_1 = F/(\rho v^2 s^2)$ och $\pi_2 = \mu/(\rho v s)$. Observera att antalet π -grupper är två; $n - m = 2$, eftersom $n = 5$ och $m = 3$.

Nu gäller att π_1 och π_2 är variabler, som lika väl som de ursprungliga variablerna F , v , s , μ , ρ beskriver fisken i vattnet. Med andra ord,

$$\pi_1 = \phi(\pi_2), \quad (3)$$

där ϕ är en (ännu ej fastlagd) funktion, är en lika uttömmande beskrivning av fisken i vattnet som

$$F = \phi(v, s, \mu, \rho). \quad (4)$$

Ekv (3) och definitionerna av π_1 och π_2 visar att (4) har formen

$$F = \rho v^2 s^2 \phi\left(\frac{\mu}{\rho v s}\right). \quad (5)$$

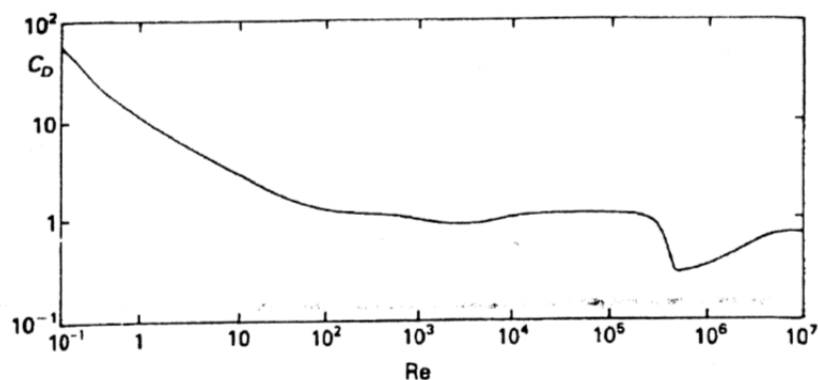
Lägg märke till att i ekv (3), (4) och (5) betecknar ϕ i princip olika funktioner.

De två π -grupper i problemet ovan dyker ofta upp inom strömningssammanhang och har getts speciella namn.

$$\pi_1 = \frac{F}{\rho v^2 s^2} \approx C_d \quad (6)$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho v s} = \frac{1}{\text{Re}} \quad (7)$$

Den första π -gruppen, π_1 kallas för "drag coefficient" (C_d), eller motståndskoefficient, och är ett icke-dimensionellt mått på motståndet på en omströmmad kropp. Den andra π -gruppens, π_2 , invers kallas "Reynolds number", eller Reynolds tal (Re), och är ett icke-dimensionellt mått på hur stora vätskans tröghetskrafter är i förhållande till de viskösa krafterna (obegripligt?) mycket grovt kan man säga att Re helt enkelt säger något om hur strömningen runt kroppen är beskaffad.) Att bestämma sambandet mellan π_1 och π_2 är inte alls lätt och har sysselsatt många forskare runt om i världen. Den bistra sanningen är att det inte finns något enkelt samband mellan π_1 och π_2 . En del av förklaringen finns i bilden nedan.



Figur 5.7:

Motståndskoefficienten, C_D , som funktion av Reynolds tal, Re , för en omströmmad cirkulär cylinder. Cylindern är vinkelrät mot strömningen. Från Tritton D.J. *Physical fluid dynamics*, Oxford science publications, 1988.

Kurvan i figuren är experimentellt framtagen med bl.a. vindtunnelförsök. De enskilda mätvärdena är för många för att synas som individuella punkter i figuren.

I fiskproblemet kom vi fram till att vi måste göra en hel del försök för att (möjligen) kunna utröna sambandet mellan π -grupperna. I bland kan man lösa sitt problem utan att göra försök. Ett exempel på det är såpbubbleproblemet nedan.

Exempel 5: Såpbubbla

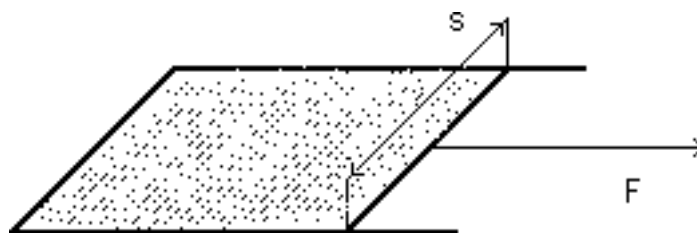
Hur stort är övertrycket i en såpbubbla? En analys måste utgå från att bubblan uppstår tack vare såplösningens ytspänning γ . Dimensionen för ytspänning bestäms av dess definition. Ytspänning kan definieras som den potentiella energin per ytenhet av vätskeytan, dvs

$$\gamma = \text{energi/area},$$

varför

$$[\gamma] = (M L^2 T^{-2})/(L^2) = M T^{-2}.$$

Enligt en annan definition är ytspänning den kraft som måste anbringas per längdenhet av ett snitt i en vätskeyta för att kompensera effekten av den bortskurna delen av ytan.



Figur 5.8: Såphinna på en båge av sträng. Kraften F verkar på en rörlig strängbit med längden s .

Här är $\gamma = F/s$, $[\gamma] = [\text{kraft}]/[\text{längd}] = (M L T^{-2})/(L) = M T^{-2}$.

Ytspänningen tenderar att dra samman en såpbubbla, vilket svarar mot att ytenergin strävar efter ett minimivärde. Detta motverkas av ett övertryck som finns inne i bubblan. Övertrycket bör bero på ytspänningen och bubblans radie. Inga andra fysikaliska storheter kan rimligen inverka på övertrycket. Däremot är det inte alls självklart att övertrycket beror på radien.

De väsentliga variablerna i tabellform:

Tabell 5.5: Variabeltabell för såpbubbleproblemet.

Fysikalisk storhet	Symbol	Dimension
Övertryck	p	$M L^{-1} T^{-2}$
Ytspänning	γ	$M T^{-2}$
Bubblans radie	r	L

Här är antalet variabler $n = 3$ och antalet grunddimensioner $m = 3$. Alltså är enligt Buckingham's sats antalet π -grupper $k = 0$. Indexmatrisen svarande mot tabellen är:

Tabell 5.6: Indexmatris för såpbubbleproblemet.

	M	L	T
p	1	-1	-2
γ	1	0	-2
r	0	1	0

Strykmetoden ger möjliga π -grupper. Använd först r för att bli av med L-beroendet:

	M	L	T
pr	1	0	-2
γ	1	0	-2

Dividera sedan γ med pr för att bli av med M-beroendet. På köpet försvinner också T-beroendet.

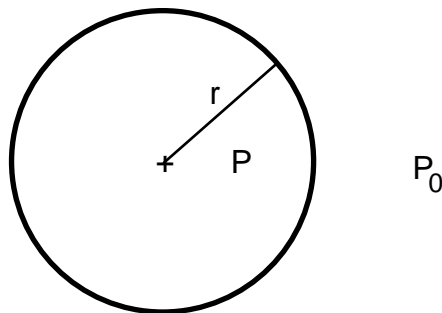
	M	L	T
γ/pr	0	0	0

Uppenbarligen finns en enda π -grupp, som kan väljas lika med $\gamma/(pr)$.

Men sambandet $\pi_1 = \phi(\pi_2, \pi_3, \dots)$ kan formuleras $\phi(\pi_1, \pi_2, \dots) = 0$. Man inser att om det finns en enda π -grupp måste $\pi_1 = \text{konstant}$.

Slutsatsen blir

$$\frac{\gamma}{pr} = \text{konstant}, \quad \text{dvs.} \quad p = \text{konstant} \frac{\gamma}{r}$$

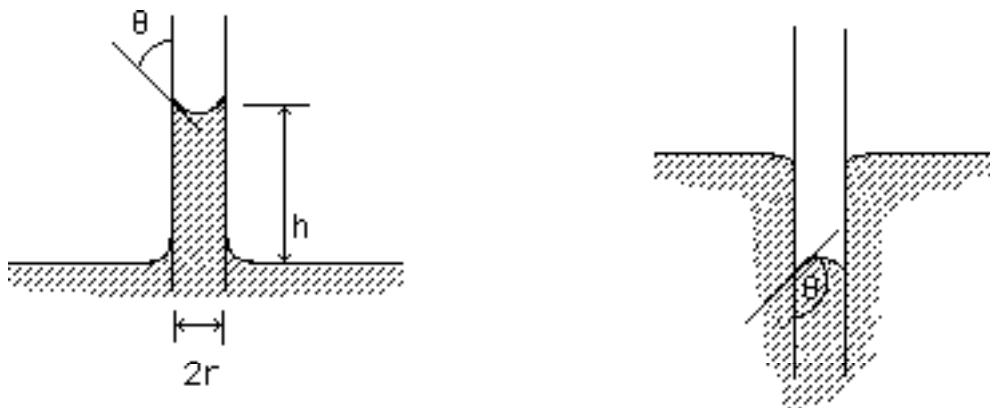


Figur 5.9: Såpbubbla.

Övertrycket $p = P - P_0$. Observera att ju större bubblan är desto mindre är övertrycket. Det är just därför som det är jobbigt att blåsa upp en ballong då dess radie är liten och det är lätt då dess radie är stor.

Exempel 6: Stighöjd i kapillär

Om den ena änden av ett tunt rör sticks ned i en vätska stiger (eller sjunker) vätskenivån i röret över (eller under) den omgivande vätskans nivå. Fenomenet spelar en stor roll i naturen för t.ex. växternas vattenförsörjning och för olika jordarters vattengenomtränglighet.



Figur 5.10: Vätning i två olika fall. Vatten-glasrör till vänster och kvicksilver-glasrör till höger.

Genom experiment ser man att vätskan stiger i kapillären om den väter väggmaterialet ($\theta < \pi/2$, t.ex. vatten - glas), och att vätskan sjunker om vätskan inte väter ($\theta > \pi/2$, t.ex. kvicksilver - glas). Följande storheter bör vara relevanta:

Tabell 5.7: Variabeltabell för ytspänningsproblemet.

Fysikalisk storhet	Symbol	Dimension
Stighöjd	h	L
Radie	r	L
Ytspänning	γ	M T ⁻²
Vätskans densitet	ρ	M L ⁻³
Tyngdaccelerationen	g	L T ⁻²
Kontaktvinkel	θ	1

Indexmatrisen är

Tabell 5.8: Indexmatris för ytspänningsproblemet.

	M	L	T
h	0	1	0
r	0	1	0
γ	1	0	-2
ρ	1	-3	0
g	0	1	-2
θ	0	0	0

Antalet grundläggande dimensioner är 3 och antalet variabler är 6. Alltså bör 3 π -grupper beskriva fenomenet. Låt oss använda strykmetoden för att finna dessa π -grupper. Vi ser att bara två variabler, γ och g , innehåller dimensionen tid. Låt oss dividera γ med g

	M	L	T
h	0	1	0
r	0	1	0
γ/g	1	-1	0
ρ	1	-3	0
θ	0	0	0

För att eliminera också beroendet av dimensionen massa dividerar vi γ/g med ρ och får:

	M	L	T
h	0	1	0
r	0	1	0
$\gamma/(\rho g)$	0	2	0
θ	0	0	0

Bilda slutligen dimensionsfria grupper genom att dividera med storheter som har dimensionen längd.

	M	L	T
h/r	0	0	0
$\gamma/(\rho g r^2)$	0	0	0
θ	0	0	0

Uppenbarligen är h/r , $\gamma/(\rho g r^2)$ och θ tre π -grupper som är oberoende av varandra.
Slutsats:

$$\frac{h}{r} = \phi\left(\frac{\gamma}{\rho g r^2}, \theta\right).$$

Genom experiment finner man till slut funktionen ϕ som beskriver stighöjden som funktion av övriga variabler. Resultatet blir

$$\frac{h}{r} = 2\cos\theta \frac{\gamma}{\rho g r^2}.$$

5.5 Alternativ metod för att finna π -grupper

Strykmetoden är en 'mekanisk' metod att finna π -grupper som alltid fungerar. Alternativt kan man använda följande 'kokboksrecept' för att ta fram π -grupper:

Kokboksrecept för att beräkna π -grupper

1. Plocka fram alla variabler som du tror är nödvändiga för att beskriva det fenomen du vill studera. Totala antalet variabler är m .
2. Bestäm alla variablers dimensioner. Totala antalet grunddimensioner (M, L, T och sånt) är n .
3. Antalet π -grupper som du bestämmer är $m-n$ stycken. Är $m-n < 2$ så är problemet lättare att lösa utan att använda π -grupper.
4. Välj $m-n$ stycken variabler som bas för π -grupperna. En av basvariablerna kan med fördel väljas som den variabel man vill studera.
5. De variabler som *inte* är valda till baser *måste* tillsammans innehålla *samtliga* n stycken grunddimensioner.
6. Bilda de $m-n$ π -grupperna på detta sätt:

Exempel (från stighöjd i kapillär)

$$\pi_1 = \frac{h}{r^\alpha \gamma^\beta g^\delta}$$

Här har h valts som en av basvariablerna och placeras i täljaren till en av π -grupperna. De variabler som inte är valda till baser placeras i nämnaren. Jämför sedan dimensionen hos nämnaren och täljaren. Målet är att både täljare och nämnare skall ha *samma* dimension. Detta ger α, β, δ som lösningar till ett ekvationssystem. Med de i exemplet ingående dimensionerna, $[h] = L$, $[r] = L$, $[g] = LT^{-2}$, $[\gamma] = MT^{-2}$, får vi

$$\begin{aligned} \text{L: } 1 &= \alpha + 0 + \delta & \Rightarrow \alpha = 1 \\ \text{M: } 0 &= \beta \\ \text{T: } 0 &= -2\beta - 2\delta & \Rightarrow \delta = 0 \end{aligned}$$

och vi får den första dimensionslösa π -gruppen som

$$\pi_1 = \frac{h}{r}$$

7. Gör om samma sak med de andra basvariablerna för att skapa de övriga av de $m-n$ π -grupperna. Observera att genom hela processen innehåller nämnaren *alltid* samma variabler. Naturligtvis kommer α, β, δ att vara olika för varje π -grupp.

8. Uttryck sambandet mellan π -grupperna som

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \pi_4, \dots, \pi_{m-n})$$

Formen för funktionen f bestäms experimentellt. Varje π -grupp behandlas som en vanlig variabel.

Vi tar ett exempel till för att göra metoden absolut glasklar.

Exempel 7: Värmeöverföring

En vätska flyter inne i ett rör. Värmeöverföringen från rörväggen in i vätskan söks; detta är ett vanligt värmeväxlarproblem. Värmeöverföringstalet h är den beroende variabeln. Dimensionsanalysen måste beakta vätskans termiska egenskaper och flödesegenskaper och geometrin för systemet. Dessa storheters grunddimensioner är M, L, T och Θ . De väsentliga storheterna, deras symboler och dimensioner ges i tabell:

Tabell 5.9: Variabeltabell för värmeöverföringsproblemet.

Fysikalisk storhet	Symbol	Dimension
Värmeöverföringstal	h	$M T^{-3} \Theta^{-1}$
Hastighet (medelvärde)	v	$L T^{-1}$
Vätskans densitet	ρ	$M L^{-3}$
Vätskans viskositet	μ	$M L^{-1} T^{-1}$
Vätskans värmekapacitivitet	C_p	$L^2 T^{-2} \Theta^{-1}$
Vätskans värmeledningsförmåga	λ	$M L T^{-3} \Theta^{-1}$
Rördiametern	D	L

Antalet oberoende π -grupper är tre, eftersom antalet variabler ovan är sju och antalet grunddimensioner är fyra ($7 - 4 = 3$). Enligt Buckingham's sats krävs således tre π -grupper för att beskriva problemet. Ansätt de olika π -grupperna som kvoter:

$$\pi_1 = \frac{h}{v^a \mu^b k^c D^d}$$

$$\pi_2 = \frac{\rho}{v^e \mu^f k^g D^i}$$

$$\pi_3 = \frac{C_p}{v^j \mu^l k^m D^n}.$$

Vi har här valt att låta π -grupperna vara proportionella mot h , ρ resp C_p .

Dimensionsekvationen för π_1 blir

$$1 = (M T^{-3} \Theta^{-1}) (L T^{-1})^{-a} (M L^{-1} T^{-1})^{-b} (M L T^{-3} \Theta^{-1})^{-c} (L)^{-d}$$

varav följer dessa ekvationer för exponenterna a , b , c och d

$$\begin{aligned} \text{M:} \quad & 1 = b + c \\ \text{L:} \quad & 0 = a - b + c + d \\ \text{T:} \quad & -3 = -a - b - 3c \\ \Theta: \quad & -1 = -c \end{aligned}$$

Lösningen är

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 1, \quad d = -1.$$

Alltså är

$$\pi_1 = \frac{hD}{k} = \text{Nusselts tal, } Nu$$

På liknande sätt fås

$$\pi_2 = \frac{vD\rho}{\mu} = \text{Reynolds tal, } Re$$

$$\pi_3 = \frac{\mu C_p}{k} = \text{Prandtls tal, } Pr$$

En möjlig ekvation som beskriver värmeledningen är därför

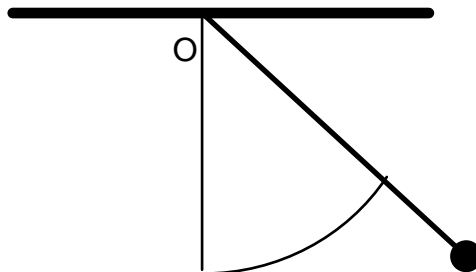
$$Nu = f(Re, Pr)$$

Längre än så här kommer man inte med dimensionsanalys. För att gå vidare och bestämma funktionen f krävs experiment. Lägg dock märke till att det ursprungliga problemet innehåller sju variabler, varav sex oberoende, medan relationen mellan de dimensionslösa grupperna endast innehåller tre variabler, varav två oberoende. *Dimensionsanalysen har därför förenklat det experimentella arbetet högst avsevärt.*

5.6 Övningsuppgifter

1. Pendel.

En matematisk pendel består av en tunn tråd med försumbar massa. Tråden är fäst i punkt O. I trådens andra ände är fäst en punktformig massa och pendeln svänger fritt i ett vertikalt plan under inverkan av tyngdkraften. Luftmotstånd m.m. kan försummas.



Vilka variabler påverkar svängningstiden? Bestäm ett samband mellan svängningstiden och övriga variabler med hjälp av dimensionsanalys.

2. Vätsketryck.

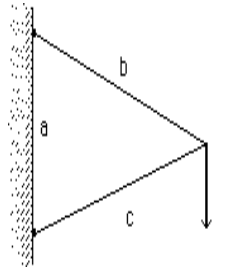
Vilka storheter bestämmer övertrycket p i en vätska? Härled ett uttryck på p med hjälp av dimensionsanalys.

3. Snörkraft.

En partikel med massan m är fäst i ett snöre och rör sig i en cirkulär bana på ett glatt bord. Partikelns fart är v och banans radie är r . Radien är konstant. Härled ett uttryck för den kraft F varmed snöret påverkar partikeln.

4. Fackverk.

Ett fackverk belastas med kraften F . Stängerna med längderna b och c är massfria. Hur stor dragkraft T uppträder i stängen med längd b ?



5. Hur stor blir nedböjningen d , vid kraftens angreppspunkt, för fackverket i problem 4. Stängerna med längderna b och c har tvärsnittsarean A , väggen är stel.

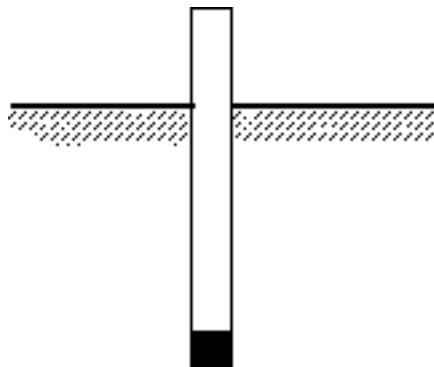
6. Kasthöjd.

En sten kastas rakt uppåt med utgångsfarten v . Bestäm ett uttryck för den högsta höjd h stenen når. Luftmotståndet försummas och kasthöjden bör bero av gravitationen. Diskutera med ledning av resultatet hur högt en bra höjdhoppare kan hoppa på månen.

7. Konisk pendel.

Vilka variabler bestämmer omloppstiden t för en konisk pendel? Härled ett uttryck för t .

8. Guppande boj.



En cylinderformad boj är försedd med en tyngd i nedre änden så att den flyter stående i vatten. Bojen guppar vertikalt med liten amplitud. Bojens diameter är d , dess massa är m vätskans densitet är ρ . Det som håller bojen kvar i vätskan är givetvis gravitationen. Bestäm ett uttryck för den guppande bojens svängningstid.

9. Vattenvågor.

Bestäm ett uttryck för hur våghastigheten v beror på våglängden λ och övriga storheter av betydelse i följande fall. (Eftersom det handlar om ytvågor så måste åtminstone gravitationen vara med.)

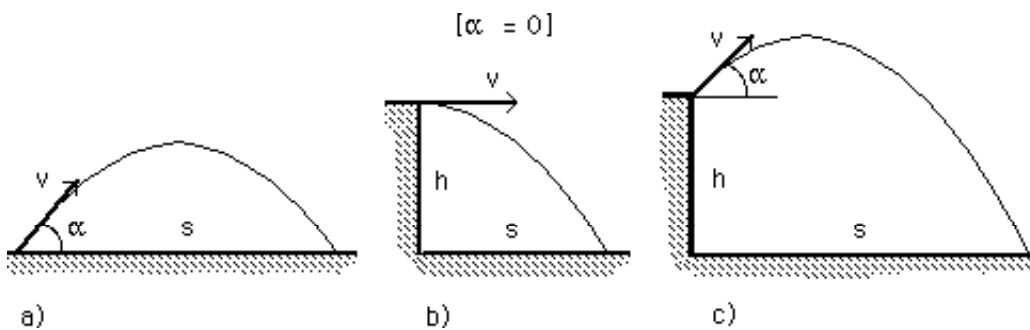
- a) För vågor där man måste ta hänsyn till vattendjupet d .
- b) För vågor på djupt vatten dvs då $\lambda \ll d$.

10. Ljudhastighet.

Ljudhastigheten c i en gas beror bla på gasens tryck och densitet och möjligen på deras viskositet. Bestäm c .

11. Räckvidd för projektiler.

En projektil med massan m avfyras med utgångsfarten v och elevationsvinkeln α . Bestäm, så långt som möjligt, sambandet mellan projektilens räckvidd s och övriga storheter i de fall som illustreras i nedanstående figurer. Luftmotståndet försummas.



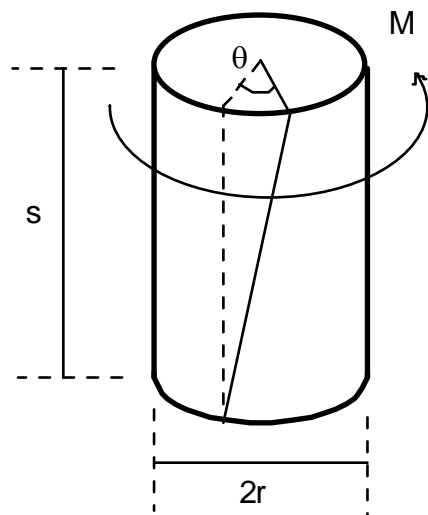
12. El-problem.

En elektrisk fläkt med diametern d kräver ett visst kraftmoment M för att kunna rotera med n varv per minut. Luftens egenskaper och fläktens utformning är av betydelse för M . Bestäm ett dimensionslöst uttryck för M .

13. Torsionssvängning.

En likformig elastisk stav med cirkulärt tvärsnitt vrider sig kring sin axel när den svänger med lägsta ordningens torsionsfrekvens, f . Bestäm f . Stavens längd är s och dess radie är r .

14. Torsion.



Då en homogen rundstav utsätts för ett vridande moment M kommer den att deformeras enligt figur. (Det antas att staven är fast inspänd i den nedre änden.) Ett mått på deformationen utgörs av vinkeln θ varvid den övre änden vrider.

a) Bestäm ett samband mellan θ och M samt övriga storheter av betydelse.

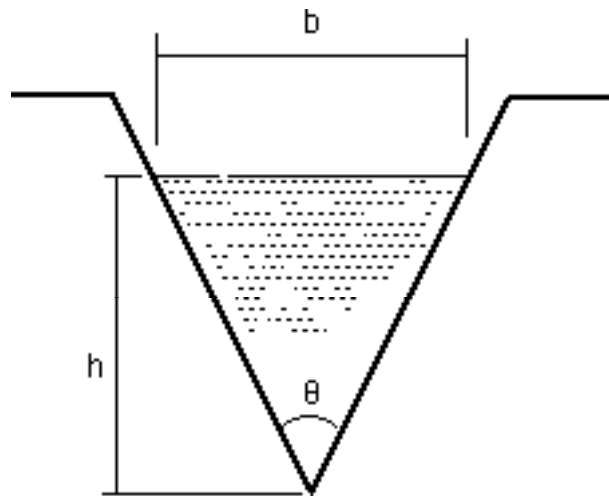
Hur förenklas sambandet av följande information:

b) Eftersom materialet i staven är homogent måste varje längdenhet vridas lika mycket.

c) Vinkeln θ är proportionell mot momentet M .

15a. Ett hydrologiproblem.

En v-formad skåra används för att mäta flödet Q (volym per tidsenhet) för en vätska i en öppen kanal. Tekniken används t.ex. då det gäller att mäta mindre läckageflöden i dammar.



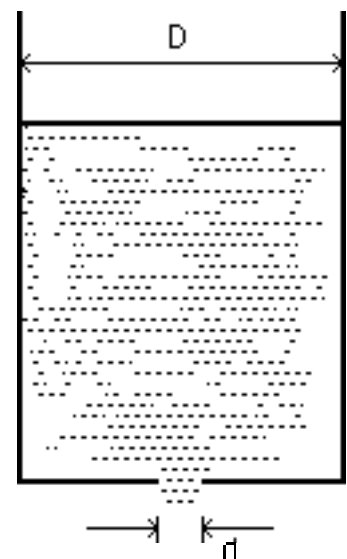
- Q kan förväntas bero på:
 h , vätskenivå
 b , fria vätskeytans bredd
 g , tyngdaccelerationen
 ρ , vätskans densitet
 μ , vätskans dynamiska viskositet

Bestäm Q . Tre π -grupper beskriver detta problem.

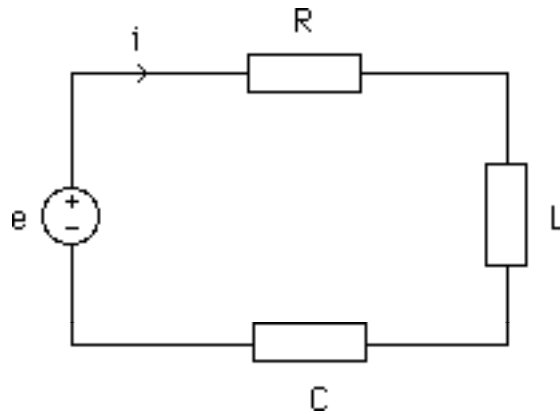
15b. Kalibrering av en skåra med öppningsvinkeln $\theta = 60^\circ$ visar att flödet för vatten är 20 liter/sek om $h = 25$ cm. Samma skåra skall användas för att mäta ett oljeflöde för en olja med den kinematiska viskositeten ($\nu = \mu/\rho$) 10 gånger vattnets kinematiska viskositet. För vilken nivå h är kalibreringen tillämpbar för oljan? Vilket oljeflöde får man för detta h -värde?

16. Tömning.

Ett cylindriskt kärl är fyllt med en vätska som kan tappas genom ett hål i botten. Undersök hur olika variabler påverkar den tid det tar att tömma behållaren.



17. Kretsproblem

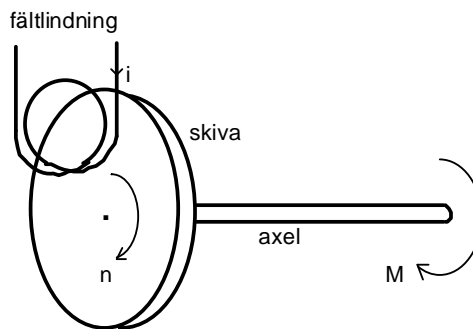


En elektrisk krets innehåller en resistans R , en induktans L , en kapacitans C och en elektromotorisk kraft (emk) e .

emk:n beskrivs av $e = a t^2$, där a är en konstant. Vad är strömmen i vid tiden t ?

18. Virvelströmsbroms

Strömmen i fältlindningen alstrar ett magnetfält som i sin tur alstrar virvelströmmar i den roterande ledande skivan. Växelverkan mellan fältströmmen, i , och virvelströmmarna ger upphov till ett bromsande moment, M . Skivans permeabilitet är μ , resistivitet är ρ och dess diameter är d . Rotationshastigheten är n varv per minut. Bestäm M .



5.7 Svar till övningsuppgifter

I svaren till övningar i kapitel 5 är k en dimensionslös konstant. Det kan noteras att alternativa svar finns till *-märkta uppgifter. Det beror på vilka variabler man valt vid elimineringen (eller som basvariabler).

Övning	Svar
1	$t = k \sqrt{\frac{s}{g}}$
2	$p = k \rho g h$
3	$F = k m v^2 / r$
4*	$\frac{F}{T} = \phi\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$
5*	$\frac{d}{a} = \phi\left(\frac{a^2}{A}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{F}{EA}\right);$ en bättre analys visar att ϕ är oberoende av a^2/A
6	$h = k \frac{v^2}{g}$
7	$t = \sqrt{\sigma/g} \phi(\alpha), \quad \sigma = \text{snörlängd}, \alpha = \text{vinkel mellan snöre och lodlinje}$
8*	$t = \sqrt{d/g} \phi\left(\frac{m}{\rho d^3}\right), \quad d = \text{cylinderdiameter}, \rho = \text{vätskans densitet}$
9a)*	$v = \sqrt{\lambda g} \phi\left(\frac{d}{\lambda}\right)$
9b)	$v = k \sqrt{\lambda g}$

- 10 $v = k \sqrt{P/\rho}$
- 11a) $s = v^2/g \phi(\alpha)$
- 11b)* $s = h \phi(\frac{v}{\sqrt{gh}})$
- 11c) $s = h \phi(\frac{v}{\sqrt{gh}}, \alpha)$ eller $s = \frac{v^2}{g} \phi(\frac{gh}{v^2}, \alpha)$
- 12 $M = \rho d^5 n^2 \phi(R)$, $R =$ kvot mellan längder
- 13* $f^2 s^2 \frac{\rho}{G} = \phi(\frac{s}{r})$, det kan inses att ϕ är konstant
- 14a)* $\theta = \phi(\frac{M}{Gr^3}, \frac{s}{r})$, $G =$ stavens skjuvmodul
- 14b)* $\theta = \frac{s}{r} \phi(\frac{M}{Gr^3})$
- 14c) $\theta = k \frac{Ms}{Gr^4}$
- 15a) $\text{tex } Q = \sqrt{h^5 g} \phi(\frac{b}{h}, \frac{\rho}{\mu} \sqrt{3gh})$
- 15b) $h = 116 \text{ cm}$, $Q = 928 \text{ liter/s}$
- 16 Ut i labbet och jobba !
- 17* $\phi(\frac{t}{\sqrt{LC}}, \frac{R^2 C}{L}, \frac{iR}{a} (R/L)^2) = 0$
- 18* $\phi(\frac{n\mu d^2}{\rho}, \frac{M}{i^2 \mu d}, R) = 0$, $R =$ kvot mellan längder

Kapitel 6

6. Mätfel

Om man mäter något, vad som helst, som tid, längd, temperatur etc. så mäter man alltid mer eller mindre fel. Somliga fel beror på mätmetoden, andra fel beror på mätinstrumentet och vissa fel beror på den som mäter.

6.1 Olika typer av fel

- **GROVA FEL.** Helt enkelt misstag i mätningen, protokollfel, avläsningsfel, glömt dividera med två, eller hållit handen på vågen. Botemedlen mot dessa fel är ordning och reda, prydligt i labbet samt en skvätt kaffe i den sömnige forskaren.
- **SYSTEMATISKA FEL.** Systematiska fel är fel som hela tiden upprepas på samma sätt vid varje mätning. Felet kan vara en linjal med felaktig skala, ett okalibrerat instrument, sned avläsning av skala m.m. Dessa fel är vanligtvis konstanta och är de kända kan de subtraheras från mätvärdena. Är felen inte konstanta, som att temperaturen stadigt ökar under försökets gång, så blir felet svårare att upptäcka och också svårare att kompensera för.
- **SLUMPMÄSSIGA FEL.** Fall då upprepade mätningar ger olika resultat. Felen är ofta små och är lika ofta under medelvärdet som över medelvärdet. Felkällorna kan vara darr på handen, glapp i försöksutrustningen m.m. De slumpmässiga felen är oftast inget att oroa sig för. Botemedlet är att göra många mätningar. Då kommer det slumpmässiga felet att minskas.

Det är sällan så att endast en av feltyperna förekommer vid en mätserie. Oftast är det så att sammanlagda mätfelet beror av en kombination av de tre feltyperna.

6.2 Många mätningar

Gör man många mätningar så kan man reducera det slumpmässiga felet. Är mätfelet slumpmässigt så kan inget av de enskilda mätvärdena sägas vara mer "rätt" än något annat. Den bästa uppskattning vi då kan göra av det sanna (exakta) värdet är medelvärdet,

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x_i .$$

Ovan är $\langle x \rangle$ medelvärdet av n stycken mätta värden. Ju fler mätningar vi gör desto närmare kommer medelvärdet det exakta värdet. För att beskriva mätserien behövs, förutom medelvärdet, också ett mått på hur mycket medelvärdet avviker från det exakta värdet.

Allmänt brukar mätresultatet av en mätt storhet x skrivas som

$$x = \langle x \rangle \pm \delta x ,$$

där

- $\langle x \rangle$ är det approximativa värdet (oftast medelvärde) på x .
- Δx är felgränsen (ofta ett spridningsmått och systematiska fel).
- x är det exakta värdet.

Felgränsen ger en övre gräns på hur avlägset medelvärdet är från det exakta värdet. Allmänt så innehåller felgränsen ofta ett spridningsmått, om man har många mätningar, tillsammans med uppskattade systematiska fel. Spridningsmålet talar om hur stor osäkerhet medelvärdet har på grund av rent slumpmässiga fel. Det systematiska felet talar om hur stor osäkerhet medelvärdet har på grund av tex mätinstrumentets fel (mätinstrumentets onoggrannhet). Spridningsmålet adderas till systematiska felet och bildar felgränsen.

Vid upprepade mätningar finns ett mått på hur mycket vi kan förvänta oss att en *enskild* mätning skall avvika från medelvärdet. Måttet kallas standardavvikelse, s_n ,

$$s_n = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2 \right]^{1/2},$$

där n är antalet mätvärden och x_i är det i :te mätvärdet. Man kan tro att genom att göra fler mätningar så kan standardavvikelsen minskas, men det är inte riktigt så. Det som sker vid ökande antal mätningar är att s_n kommer att närma sig ett fast, speciellt värde som kan sägas vara precisionen hos mätmetoden. s_n kan vara stor eller liten och beror helt på vilken mätmetod som används. För att minska standardavvikelsen bör mätmetoden förändras till en metod med högre precision.

För att få ett relevant spridningsmått till medelvärdet $\langle x \rangle$ räcker det inte med standardavvikelsen utan vi måste gå ett steg längre. Vi antar för enkelhets skull att felet i mätningarna är helt slumpmässiga. Om vi då gör tillräckligt många mätningar så borde medelvärdet bli det exakta värdet och felet i mätningarna reduceras till noll. En god uppskattning på hur mycket medelvärdet avviker från det exakta värdet är standardfelet, S_n ,

$$S_n = \frac{s_n}{\sqrt{n}}$$

där n är antalet mätvärden. Vi ser att oavsett hur dålig precision vi har i vår mätmetod så kan man alltid reducera det slumpmässiga mätfelet till nästintill noll om man gör tillräckligt många mätningar.

Lägg märke till att s_n och S_n är två kvantiteter som uttrycker olika saker. s_n är ett mått på hur mycket mätvärdena i medeltal avviker från medelvärdet och S_n är ett mått på hur mycket medelvärdet avviker från det exakta värdet.

Som spridningsmått vid en mätsituation med många mätningar används standardfelet S_n eftersom det ger en god uppskattning på hur avlägset mätningarnas medelvärde är från det (okända) exakta värdet.

6.3 Få mätningar

Om man endast gör en eller några få mätningar så är det inte mödan värt att räkna fram standardavvikelsen och standardfel. Det man istället kan göra är att beräkna maximal avvikelse från medelvärdet och använda det som ett slags spridningsmått. Vi tar ett exempel.

Exempel 1

Tänk dig att man skall mäta takhöjden i ett rum (om man skulle vilja tapetsera med en otroligt dyr tapet eller något sådant). Man har ett måttband att tillgå och man gör fyra mätningar.

Tabell 6.1: Resultat av takhöjdsättning.

	Takhöjd (m)
h_1	2.153
h_2	2.154
h_3	2.152
h_4	2.150

Medelvärdet blir $\langle h \rangle = 2.15225$ m.

Och maximala avvikelserna från medelvärdet blir

$$2.154 - 2.15225 = 0.00175 \text{ m avvikelse uppåt,}$$

$$2.150 - 2.15225 = -0.00225 \text{ m avvikelse nedåt.}$$

Den *maximala* avvikelsen (till beloppet) får utgöra vår felgräns.

Vi får som takhöjd

$$h = 2.15225 \pm 0.00225 \text{ m.}$$

Till detta det beräknade spridningsmättet lägger vi instrumentfelet. Med ett måttband kan vi tänka oss att onoggrannheten är ca 1 mm (0.001 m). Detta instrumentfel adderas till spridningsmättet. Vi får

$$h = 2.15225 \pm 0.00325 \text{ m,}$$

som avrundas

$$\underline{h = 2.152 \pm 0.004 \text{ m.}}$$

Observera hur avrundningen gick till, först avrundades medelvärdet. Det man "avrundat bort" läggs till felet (alltså 0.00025 läggs till felet som blir 0.00350 som avrundas uppåt till 0.004). Felet avrundas *alltid* uppåt. Skulle vi bara ha gjort en mätning har vi bara ett fel att ta hänsyn till, nämligen instrumentfelet.

6.4 Avrundning

När man avrundar så brukar man göra det efter vissa enkla regler:

- 1, 2, 3, 4 avrundas nedåt
- 6, 7, 8, 9 avrundas uppåt
- 5 avrundas efter behag (uppåt eller nedåt)

Återigen, glöm inte att *fel alltid avrundas uppåt*.

6.5 Indirekta mätningar

Med indirekta mätningar menas att man mäter ett antal storheter för att räkna ut en annan via någon formel. Det formeln ger är alltså ett indirekt mätt värde. Fel i de mätta storheterna påverkar det indirekt mätta värdet. Vi tar ett exempel:

Exempel 2

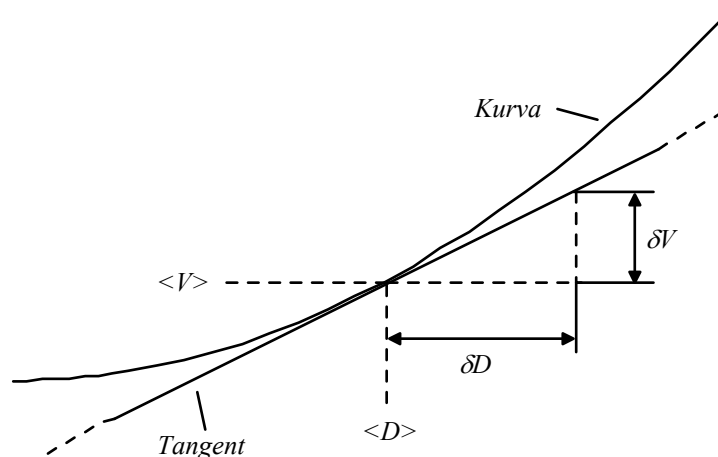
Antag att vi vill ta reda på volymen V hos en sfär genom att mäta dess diameter, D . Vi gör en massa mätningar av D så att vi kan beräkna både medelvärde och felgräns. Hur volym och diameter hör ihop styrs av

$$V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{1}{6} \pi D^3.$$

För att beräkna volymen V används medelvärdet av D ; dvs. $\langle D \rangle$.
Det vi vill ha är

$$V = \langle V \rangle \pm \delta V.$$

Det vi har kvar att bestämma är δV . Vi utnyttjar funktionens derivata i punkten $D = \langle D \rangle$ och ritar ut tangenten till kurvan, se figur 6.1 nedan.



Figur 6.1. Figuren visar hur tangenten till kurvan används för att approximera felet i volym om felet i diameter är känt.

En rätvinklig triangel bildas. Ena sidan är felet i D och den andra sidan är felet i V . Genom att utnyttja att riktningskoefficienten för tangenten är funktionens derivata i punkten så kan man göra såhär,

$$\frac{\delta V}{\delta D} = \frac{dV}{dD}.$$

Högerledet är ju bara derivatan av V , så vi deriverar V med avseende på D .

$$\frac{dV}{dD} = \frac{1}{2} \pi D^2,$$

kombinera och vi får

$$\delta V = \frac{dV}{dD} \delta D,$$

$$\delta V = \frac{1}{2} \pi D^2 \delta D.$$

Men vi är bara intresserade av felets belopp (fel kan för övrigt bara adderas) så vi får

$$\delta V = \left| \frac{1}{2} \pi D^2 \right| \delta D.$$

Notera att $|\pi D^2/2|$ beräknas för $D = \langle D \rangle$.

Då är vi klara att beräkna felet i V , δV , via felet i D , δD .

Om man händelsevis skulle ha fler variabler än en (som i exemplet ovan) så är det bara att addera felet i varje variabel. Om sambandet är

$$G = f(a, b, c, d, \dots)$$

så blir felet i G , formellt,

$$\delta G = \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \delta a + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| \delta b + \left| \frac{\partial f}{\partial c} \right| \delta c + \dots$$

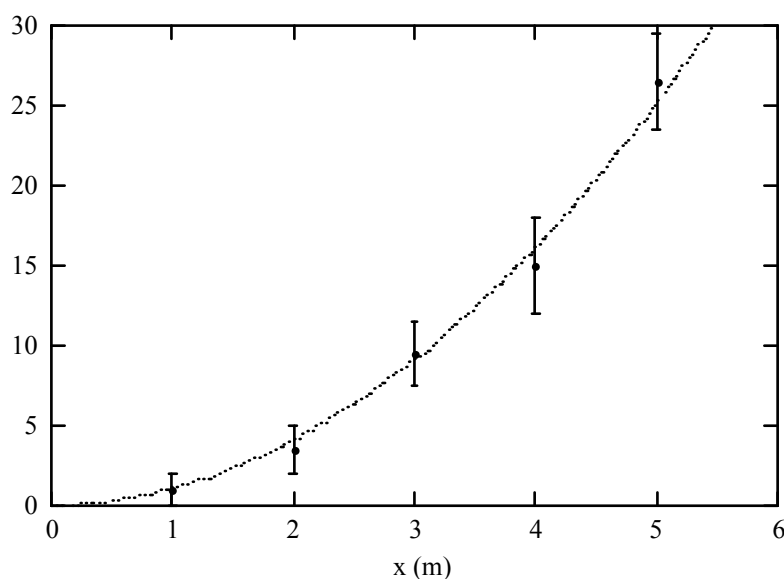
Formeln ovan kallas felfortplantningsformeln och den talar om hur ett fel i mätta storheter sprider sig via ett samband till den indirekt mätta storheten. De "krulliga" derivatorna (∂) fungerar som vanliga derivator. Genom att skriva t.ex. $\partial f / \partial a$ så menas bara att de andra variablerna b, c, \dots hålls konstanta medan man deriverar f med avseende på a .

Felfortplantningsformeln fungerar bra i de flesta fall, men det finns fall där den är olämplig att använda. Om funktionen f skulle ha väldigt brant derivata i någon variabel, samtidigt som felet i den variabeln är stort, kommer den linjära approximationen att ge ett stort gap mellan tangenten och kurvan (se figur 6.1). Detta resulterar i att felet, helt enkelt, blir fel (!) och därmed oanvändbart.

6.6 Presentation av mätdata i diagramform

Mätdata kan presenteras både i form av tabeller och diagram. Om man ritar en graf bör man tänka på att

1. välja rätt skalor på axlarna. Grafen skall "fylla ut" diagrammet och inte bara vara ett litet, litet streck i något hörn. Att välja logaritmiska skalor kan vara bra om mätdata spänner över många tiopotenser. Genom att välja skumma skalor så kan man luras en hel del så undvik det.
2. helst inte kapa axlarna och utelämna origo. Om möjligt, välj annan skala istället.
3. mätvärdena skall alltid markeras med någon tydlig symbol.
4. axlarna alltid skall förses med både symbol och enhet.
5. om mätvärdena är behäftade med signifikanta fel så ritas dessa ut som staplar kring det mätta värdet, se figur 6.2 nedan. Stapelns totalhöjd motsvarar $2\delta v$, för felet är ju lika stort både över som under medelvärdet ($\pm\delta v$).



Figur 6.2. Diagrammet visar ett exempel på hur man använder felstaplar. Stapelns totala höjd motsvarar två gånger felet i v , alltså $2\delta v$.

Antag att punkterna i diagrammet motsvarar mätta värden. Varje värde är behäftat med ett visst mätfel. Mätfelet för respektive värde finns angivna som felstaplar i diagrammet. Med metoden i kapitel 2 och mätpunkterna så finner vi att sambandet mellan x och v är

$$v(t) = k \cdot t^2$$

där $[k] = \text{LT}^{-3}$. I vårt fall finner vi att $k = 1 \text{ m/s}^3$.

Sambandet ritas ut som den streckade kurvan i diagrammet. Det syns att kurvan inte helt ansluter till mätvärdena men den befinner sig klart inom felgränserna för varje mätvärde.

Eftersom kurvan ligger inom felgränserna kan man vara någorlunda säker på att man hittat rätt samband. Vill man ha ökad noggrannhet så måste man givetvis minska mätfelet. Det är självklart att man strävar efter så små mätfel som möjligt inom all experimentell verksamhet.

Appendix

A 1 Exempel på dimensionsfria standardgrupper

Machs tal, M	$M = v/c$	hastighet/ljudhastighet
Grashofs tal, Gr	$Gr = s^3 \rho g \gamma \Delta T / \mu^2$	Tröghetskraft/viskös kraft i fri konvektion
Reynolds tal, Re	$Re = va\rho/\mu$	tröghetskraft/viskös kraft i strömning av gaser och vätskor
Nusselts tal Nu	$Nu = hs/k$	konvektiv värmeöverföring /ledningsvärmeöverföring

A 2 Definition av symboler (mekanik, värme)

Fysikalisk storhet Symbol Dimension SI-enhet

densitet	ρ	$[\rho] = \text{ML}^{-3}$	$\{\rho\} = \text{kg m}^{-3}$
dynamisk viskositet	μ	$[\mu] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$	$\{\mu\} = \text{N s m}^{-2}$
kinematisk viskositet	ν	$[\nu] = \text{L}^2\text{T}^{-1}$	$\nu = \mu/\rho, \{\nu\} = \text{m}^2\text{s}^{-1}$
elasticitetsmodul	E	$[E] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$	$\{E\} = \text{Pa}$ ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$)
flödeshastighet	v	$[v] = \text{LT}^{-1}$	$\{v\} = \text{m s}^{-1}$
ljudhastighet	c	$[c] = \text{LT}^{-1}$	$\{c\} = \text{m s}^{-1}$
längd	a	$[a] = \text{L}$	$\{a\} = \text{m}$
skjuvmodul	G	$[G] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$	$\{G\} = \text{Pa}$ ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$)
temperatur-skillnad	ΔT	$[\Delta T] = \Theta$	$\{\Delta T\} = \text{K}$
termisk värmeledningsförmåga	k	$[k] = \text{MLT}^{-3}\Theta^{-1}$	$\{k\} = \text{W m}^{-1} \text{K}$
tyngdacceleration	g	$[g] = \text{LT}^{-2}$	$\{g\} = \text{m s}^{-2}$
Volymutvidgningkoefficient	γ	$[\gamma] = 1$	$\{\gamma\} = 1$
värmeövergångstal	h	$[h] = \text{MT}^{-3}\Theta^{-1}$	$\{h\} = \text{W m}^{-2} \text{K}$

A 3 Elektriska symboler

c	ljushastigheten i vakuum	$[c] = \text{LT}^{-1}$	$\{c\} = \text{m/s}$
ε_0	dielektricitetskonstanten i vakuum	$[\varepsilon_0] = \text{M}^{-1} \text{L}^{-3} \text{T}^4$	$\{\varepsilon_0\} = \text{As/Vm}$
μ_0	magnetiska permeabiliteten i vakuum	$[\mu_0] = \text{MLT}^{-2}$	$\{\mu_0\} = \text{Vs/Am}$
i	ström	$[i] = \text{I}$	$\{i\} = \text{A, Ampere}$
q	laddning	$[q] = \text{IT}$	$\{q\} = \text{As} = \text{C, Coulomb}$
u	spänning	$[u] = \text{M L}^2 \text{T}^{-3} \text{I}$	$\{u\} = \text{V, Volt}$
R	resistans	$[R] = \text{M L}^2 \text{T}^{-3}$	$\{R\} = \Omega, \text{ Ohm}$
L	induktans	$[L] = \text{M L}^2 \text{T}^{-2}$	$\{L\} = \text{Vs/A}$
C	kapacitans	$[C] = \text{M}^{-1} \text{L}^2 \text{T}^{-2}$	$\{C\} = \text{As/V} = \text{F, Farad}$
E	elektrisk fältstyrka	$[E] = \text{MLT}^{-3} \text{I}$	$\{E\} = \text{V m}^{-1} = \text{Volt/meter}$
B	magnetisk flödestäthet	$[B] = \text{MT}^{-2} \text{I}$	$\{B\} = \text{T} = \text{Tesla} = \text{Vs m}^{-2}$

A 4 Tryck och temperatur

Kraft per ytenhet är detsamma som tryck:

$$p = \frac{F}{A}, \quad (1)$$

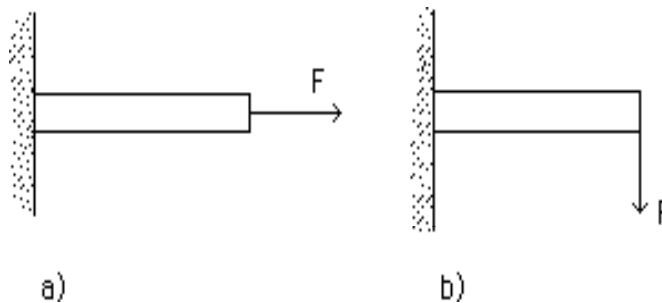
där

p = tryck, F = kraft, A = area.

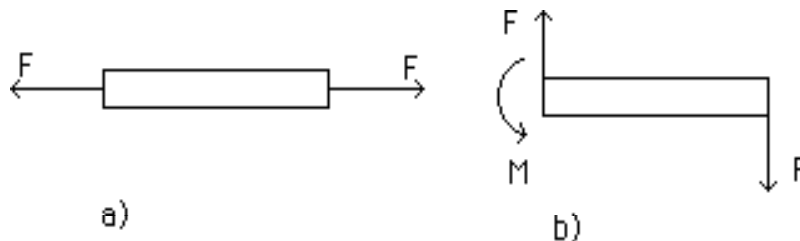
$$[p] = \text{M L}^{-1} \text{T}^{-2} \quad [F] = \text{M L T}^{-2} \quad [A] = \text{L}^2$$

Kraften F tänkes vara fördelad över en yta med arean A .

Låt kraften verka på en balk fast inspänd i en vägg. Balkens tvärsnittsarea är A .

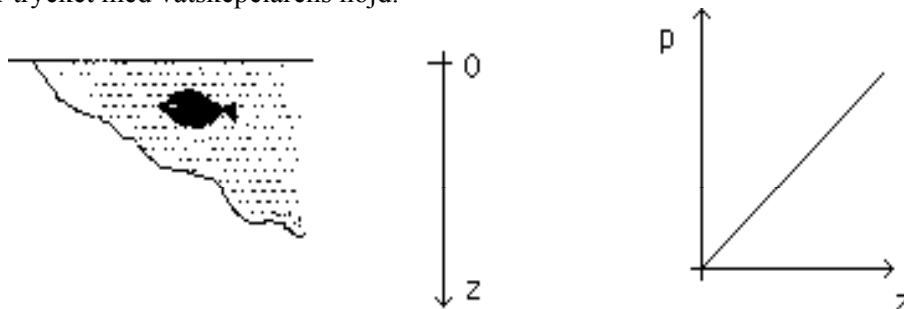


Kraften F sägs i a) vara en normalkraft och i b) en tvärkraft eller skjuvkraft. Antag att balken inte rör sig. Om balkens tyngd mg är mycket mindre än kraften F verkar på varje del av balken också en kraft F från resten av balken.



Dessutom verkar i b) ett moment M från resten av balken. M svarar mot en normalkraft som varierar över tvärsnittet med area A . I fallet a) kallas trycket p för normalspänning och i fallet b) kallas p för skjuvspänning. Vanligen används beteckningen σ för normalspänning och τ för skjuvspänning.

I en vätska ökar trycket med vätskepelarens höjd.



Det gäller:

$$p = \rho g z, \quad (2)$$

där

ρ = vätskans densitet, g = tyngdaccelerationen,
 z = koordinat längs lodlinjen.

Trycket p har satts till noll vid $z = 0$. p är således övertrycket inne i vätskan till följd av vätskans tyngd. p är lika stor åt alla håll i vätskan. Vätskepelaren får dock inte vara hur smal som helst om ekvation (2) skall gälla. Bredden skall vara stor jämfört med vatten- molekylernas karakteristiska längd, men oro dig inte. Även om du skulle ta en liten, liten volym säg... 10^{-9} mm^3 av en tunn gas, som luft vid 20°C och normalt lufttryck, så kommer den att innehålla ca $3 \cdot 10^7$ molekyler. Du inser att ekvation (2) är uppfylld i det allra, allra flesta fall. Ekvation (2) kan tillämpas både för vätskor och gaser. Dock är densiteten för en gas i allmänhet ungefär tusen gånger mindre än densiteten för en vätska. I det allmänna fallet beror vätskans, eller gasens, densitet även av trycket. Gaser har en väsentligt större kompressibilitet än vätskor, som är i det närmaste inkompressibla. En god approximation är då att anta att en vätskas densitet är konstant och oberoende av trycket. Gasers densitet varierar starkt med trycket (hög kompressibilitet). I atmosfäriska sammanhang kan man dock med god approximation anta att luftens densitet är konstant och oberoende av höjd – om höjdskillnaderna är mindre än ca 1000 m.

För en gas gäller med god approximation den allmänna gaslagen

$$p V = N k T \quad (3)$$

där

V = gasens volym,

N = antal gasmolekyler i V ,

k = Boltzmanns konstant,

T = absolut temperatur.

Dessa storheter har dimensionerna

$$[V] = L^3, \quad [N] = 1, \quad [k] = M L^2 T^{-2} \Theta^{-1}, \quad [T] = \Theta.$$

Tryck och temperatur är således proportionella storheter i en gas. Enligt den kinetiska gasteorin är både tryck och temperatur funktioner av gasmolekylernas medelenergi. Antag nu för enkelhets skull att gasen är monoatomisk. Då är ($\langle \dots \rangle$ betecknar medelvärde)

$$p = \frac{2}{3} n \langle mv^2/2 \rangle; \quad n = N/V$$

och

$$\frac{3}{2} k T = \langle mv^2/2 \rangle, \quad \langle v^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle$$

med

v = atomhastighet,

m = atommassa,

n = antal per volymsenhet

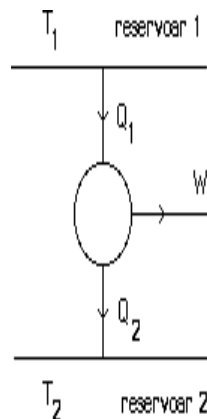
$$[v] = L T^{-1},$$

$$[m] = M,$$

$$[n] = 1.$$

En definition av temperatur som gäller också för fasta ämnen och vätskor är önskvärd. För den sakens skull är det nödvändigt att använda termodynamiska begrepp. Betrakta en reversibel process där en ideal värmemaskin tar värmets Q_1 från en reservoar vars absoluta temperatur är T_1 och avger värmets Q_2 till en reservoar vars temperatur är T_2 . Maskinen uträttar det mekaniska arbetet

$$W = Q_2 - Q_1.$$



Av termodynamikens andra huvudsats följer att

$$Q_1/T_1 = Q_2/T_2 \quad (4)$$

Vidare,

$$[Q_1] = [Q_2] = [W] = [\text{energi}] = M L^2 T^{-2}$$

Verkningsgraden vid en reversibel process är den högsta tänkbara och den är oberoende av värmemaskin och värmereservoarer. Två ideala värmemaskiner kopplade i serie är vidare ekvivalenta med en enda maskin. Med hjälp av dessa fakta är det möjligt att definiera en temperaturskala, den s.k. termodynamiska

eller absoluta temperaturskalan. Denna skala är för en gas ekvivalent med den skala som fås via den kinetiska gasteorin.

Till dimensionen längd hör en grundenhet, och varje längd är en multipel av denna enhet. Längd är en linjär storhet, och endast linjära storheter är användbara inom dimensionsanalysen. Den absoluta temperaturen T med dimension Θ kan också betraktas som en linjär storhet i problem som rör omvandling av värme till arbete och vice versa, värmeledning och termisk utvidgning av fasta kroppar. I värmeläran används således dimensionerna M , L , T och Θ .

A 5 Metoder för planläggning och genomförande av ett experiment

Dessa metoder är exempel på hur man kan utföra ett experiment

Metod 1

1. Vilka variabler påverkar försöket
Beroende variabel y
Oberoende variabler x, z, h, p, q, \dots
2. Gissa ett samband mellan variablerna. Ett bra första utgångsläge är ofta att använda en faktoriell potensfunktion som ansats:
$$y = C \cdot x^\alpha \cdot z^\beta \cdot h^\gamma \cdot p^\delta \cdot q^\epsilon \dots$$
 C ska vara dimensionslös
3. Hur många dimensioner är inblandade, dimensionsanalys.
(Ofta 3 stycken, L, T, M)
Detta betyder att 3 obekanta exponenter kan bestämmas med hjälp av dimensionsanalys, dvs utan att göra något försök. Bra är att bara bestämma 2 exponenter med hjälp av dimensionsanalys för att ha ett samband kvar för kontroll.
4. Håll alla oberoende variabler konstanta utom en. Skriv ansatsen som tex:
$$y = C_1 \cdot x^\alpha, \quad \text{där } C_1 = C \cdot z^\beta \cdot h^\gamma \cdot p^\delta \cdot q^\epsilon \dots$$

Gör mätningar, anteckna i värdetabell, rita diagram, linearisera och bestäm α . Använd minst 4 mätvärden för varje diagram.

OBS! Om mätpunkterna (efter linearisering av $y = C_1 \cdot x^\alpha$) inte ligger på en rät linje så är antagandet $y = C_1 \cdot x^\alpha$ felaktigt. Gör ett nytt antagande med hjälp av de olika graferna. Kanske kurvan är sammansatt av två termer där den ena termen dominerar för små x -värden medan den andra dominerar för stora x -värden; eller går inte kurvan genom origo; eller är det en exponentialfunktion; eller ...

5. Fortsätt att experimentellt bestämma de övriga oberoende variablerna dvs variera en variabel i taget på samma sätt. Om ni tex har $y = C \cdot x^\alpha \cdot z^\beta \cdot h^\gamma \cdot p^\delta \cdot q^\epsilon \dots$ kan ni fortsätta med att bestämma β :
$$y = C_2 \cdot z^\beta, \quad \text{där } C_2 = C \cdot x^\alpha \cdot h^\gamma \cdot p^\delta \cdot q^\epsilon \dots$$

OBS! Här kan man också göra som i "En speciell teknik" på s.11 i kompendiet (speciellt användbart om man inte kan få tillräckligt med mätvärden annars). Eftersom nu α är känd bildar man:

$$\frac{y}{x^\alpha} = C \cdot z^\beta \cdot h^\gamma \cdot p^\delta \cdot q^\epsilon \dots,$$

Skriv då ansatsen som:

$$\frac{y}{x^\alpha} = C_3 \cdot z^\beta, \quad \text{där } C_3 = h^\gamma \cdot p^\delta \cdot q^\epsilon \dots$$

Vid lineariseringen sätter man då $\ln(\frac{y}{x^\alpha})$ på den vertikala axeln och $\ln(z)$ på den horisontella axeln.

Bestäm alla exponenter utom 2 (möjligen 3). Dessa kan ni ju bestämma mha dimensionsanalys.

6. Bestäm slutligen den dimensionslösa konstanten C . Ett bra sätt att göra det på är att plotta y som funktion av $x^\alpha \cdot z^\beta \cdot h^\gamma \cdot p^\delta \cdot q^\epsilon \dots$. Det ger samtidigt en bra kontroll av att det stämmer.

Metod 2, π -gruppsanalys

1. Gör en noggrann skiss över försöksuppställningen. Tänk efter hur försöken skall utföras
2. Tänk efter vilka storheter som kan påverka försöket.
3. Kan någon storhet försummas. Om ni misstänker detta så gör försök för att se om misstanken är korrekt.
4. Bestäm vilken den beroende variabeln är.

5. Välj sedan de oberoende variablerna. Här bör även variabler som inte alltid går att variera ingå t ex g, E, G osv.

Det brukar vara en fördel att välja de oberoende variablerna så enkla som möjligt t ex istället för arean väljer man radien eller längd och bredd.

Inför inte heller en variabel två gånger t ex om man valt massa och volym, så skall man inte dessutom välja densitet ty den är ju då egentligen redan med som variabel.

Gör tabell

Storhet	Symbol	Dimension
---------	--------	-----------

Beroende variabel

Oberoende variabler

.

.

6. Bestäm antalet π -grupper. Antalet blir normalt (Totala antalet variabler, n) - (Totala antalet dimensioner som är inblandade, m) alltså n - m. Under vissa omständigheter kan det bli färre π -grupper, men det går vi inte in på här.
Bestäm vilka π -grupperna blir enligt läroboken (i första hand "strykmetoden"). OBS! π_1 skall innehålla den beroende variabeln.

7. Gissa ett samband mellan π -grupperna. Normalt är att anta

$$\pi_1 = C \cdot \pi_2^\alpha \cdot \pi_3^\beta \cdot \pi_4^\gamma \cdot \pi_5^\delta \dots\dots\dots$$

Håll t ex $\pi_3, \pi_4, \pi_5 \dots$ konstanta. Ni får då

$$\pi_1 = C_1 \cdot \pi_2^\alpha, \quad \text{där} \quad C_1 = C \cdot \pi_3^\beta \cdot \pi_4^\gamma \cdot \pi_5^\delta \dots\dots\dots$$

Gör försök. Rita graf med π_1 på "y-axeln" och π_2 på "x-axeln". Är antagandet $\pi_1 = C_1 \cdot \pi_2^\alpha$ rimligt. Om så är fallet försök bestämma α genom linearisering.

Bestäm de andra exponenterna sedan genom att göra nya försök och sedan linearisera. (Här måste alla exponenter bestämmas genom experiment i motsats till metod 1).

8. Bestäm slutligen konstanten C genom linearisering, och sammanfatta den slutliga formeln.

A 6 Litteraturlista

Listan nedan är tänkt som en introduktion till litteraturen i ämnet. Det finns en stor mängd litteratur att tillgå och nedan listas bara några enstaka böcker. Om du vill veta mer om dimensionsanalys för ett visst problem eller problemområde kan det löna sig att titta i de böcker som handlar just om det området. T.ex. så innehåller kursböcker i strömningsmekanik som regel en del material om dimensionsanalys för strömningsproblem.

Först, två allmänt hållna böcker

- Jönsson, B., Reistad N., *Experimentell fysik*
Andra upplagan, Studentlitteratur, Lund, 1987

En bok som är lätt och kul att läsa. Förutom att den innehåller god fysik så innehåller den en del historia och kuriosas.

- Squires, G.L., *Practical physics*
3:rd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1985

En bra handbok när det gäller fysikaliska experiment, tolkning och behandling av mätdata samt rapportskrivning.

Sedan, några böcker specialiserade på dimensionsanalys. Böckerna tar upp många sidor av dimensionsanalys. De är med våra mått mätt avancerade men är definitivt läsvärda om man vill tränga djupare in i dimensionsanalys, π -grupper och geometrisk och dynamisk likformighet.

- Sedov, L.I., *Similarity and dimensional methods in mechanics*
10:th edition, CRC Press, 1993

- Taylor, E.S., *Dimensional analysis for engineers*
Clarendon Press, Oxford, 1974

- Isaacson, E. de st Q., Isaacson, M. de st Q., *Dimensional methods in engineering and physics*
John Wiley & sons, New York, 1975