Отчет по лабораторной работе 5

Математическое моделирование

Косолапов Степан Эдуардович

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Создать простейшую модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры.

2 Задание

- Построить график зависимости численности хищников от численности жертв
- Построить графики изменения численности хищников и численности жертв при заданных начальных условиях
- Найти стационарное состояние системы

3 Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - **модель Лотки-Вольтерры**. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

- Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
- В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
- Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
- Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
- Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников (формула [3.1])

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

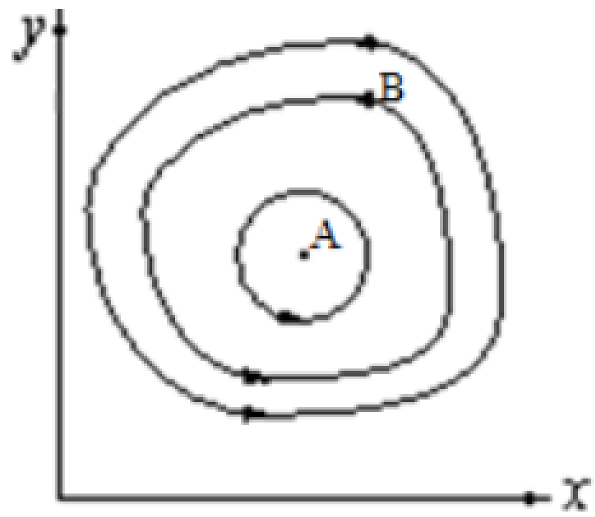

Рис. 3.1: Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры.

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на рис. [3.1]), всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B. Стационарное состояние системы [3.1] (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

При малом изменении модели

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) + \varepsilon f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) + \varepsilon g(x, y), \varepsilon \ll 1 \end{cases}$$

(прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние B), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва». В зависимости от вида малых поправок f и g возможны следующие сценарии 1-3 на рис. [3.2].

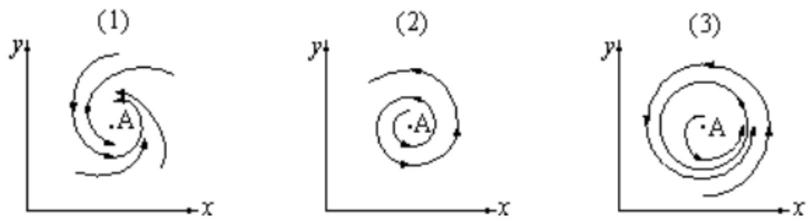

Рис. 3.2: Мягкая модель борьбы за существование

В случае 1 равновесное состояние А устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

В случае 2 система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию. Такая система в конце концов попадает в область столь больших или столь малых значений x и y, что модель перестает быть применимой.

В случае 3 в системе с неустойчивым стационарным состоянием А с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния А приводит не к малым колебаниям около А, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения) амплитуды. Возможны и другие структурно устойчивые сценарии (например, с несколькими периодическими режимами).

Вывод: *жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).*

В случае модели Лотки-Вольтерры для суждения о том, какой же из сценариев 1-3 (или иных возможных) реализуется в данной системе, совершенно необходима дополнительная информация о системе (о виде малых поправок f и g в нашей формуле). Математическая теория мягких моделей указывает, какую именно информацию для этого нужно иметь. Без этой информации жесткая модель может привести к качественно ошибочным предсказаниям. Доверять выводам, сделанным на основании жесткой модели, можно лишь тогда, когда они подтверждаются исследованием их структурной устойчивости[1].

Фазовые кривые формируются (фазовый поток) вокруг положения равновесия (стационарное состояние) (рис. [3.3])[2]:

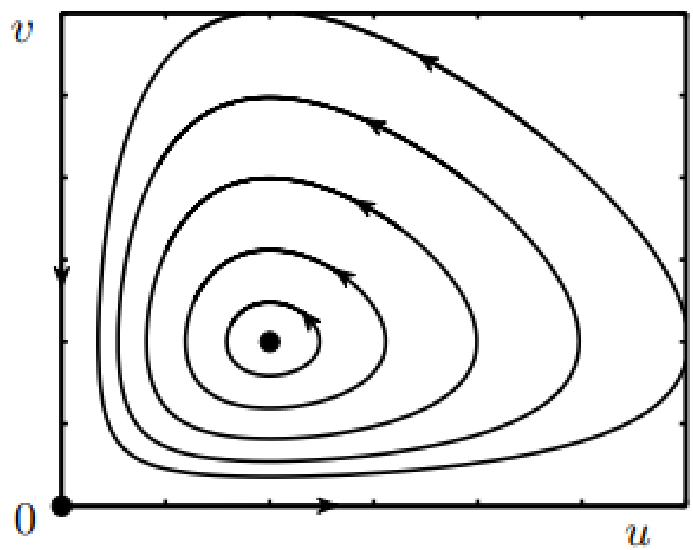

Рис. 3.3: Фазовый портрет системы «хищник–жертва»

4 Выполнение лабораторной работы

1. Задача варианта 16:

Для модели «хищник-жертва»:

$$
\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.59x(t) + 0.058x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.57y(t) - 0.056x(t)y(t) \end{cases} \tag{4.1}
$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв (фазовый портрет[3]), а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 8, y_0 = 18$. Найдите стационарное состояние системы.

3. По коэффициентам видим, что в данном случае y - число жертв, x - число хищников. Тогда, из условия коэффициенты имеют следующие значения: $a = 0.57, b = 0.056, c = 0.59, d = 0.058$.

А уравнение имеет следующий вид:

$$
\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -cx(t) + dx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = ay(t) - bx(t)y(t) \end{cases} \tag{4.2}
$$

4. На языке Julia напишем код моделирующий взаимосвязь между хищниками и жертвами:

```
using Plots
```

```
using DifferentialEquations

"Условия:"
x_0 = 8
y_0 = 18

u_0 = [x_0, y_0]
T = (0.0, 60.0) # отслеживаемый промежуток времени

a = 0.57
b = 0.056
c = 0.59
d = 0.058

function F!(du, u, p, t)
    du[1] = -c * u[1] + d * u[1] * u[2]
    du[2] = a * u[2] - b * u[1] * u[2]
end

prob = ODEProblem(F!, u_0, T)
sol = solve(prob, saveat = 0.05) # обозначили шаг

const X = Float64[]
const Y = Float64[]

for u in sol.u
    x, y = u
    push!(X, x)
    push!(Y, y)
```

```
end

plt = plot(
    dpi = 300,
    size = (800, 600),
    title = "График зависимости численности хищников от численности жертв"
)

plot!(
    plt,
    Y,
    X,
    color = :red,
    label = "Фазовый портрет"
)

savefig(plt, "julia_2.png")

plt_2 = plot(
    dpi = 300,
    size = (800, 600),
    title = "Графики изменения численности хищников и численности жертв"
)

plot!(
    plt_2,
    sol.t,
    X,
    color = :blue,
```

```
    label = "Число жертв"
)

plot!(
    plt_2,
    sol.t,
    Y,
    color = :purple,
    label = "Число хищников"
)

savefig(plt_2, "julia_1.png")
```

В качестве результата у нас графики изменения численности хищников и жертв (рис. [4.1]-[4.2]):

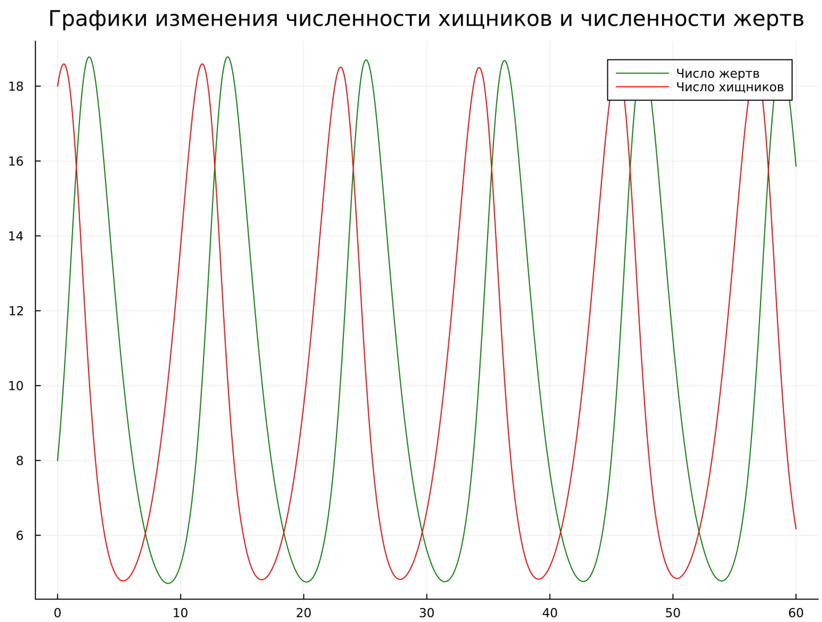

Рис. 4.1: Графики изменения численности хищников и численности жертв - Julia

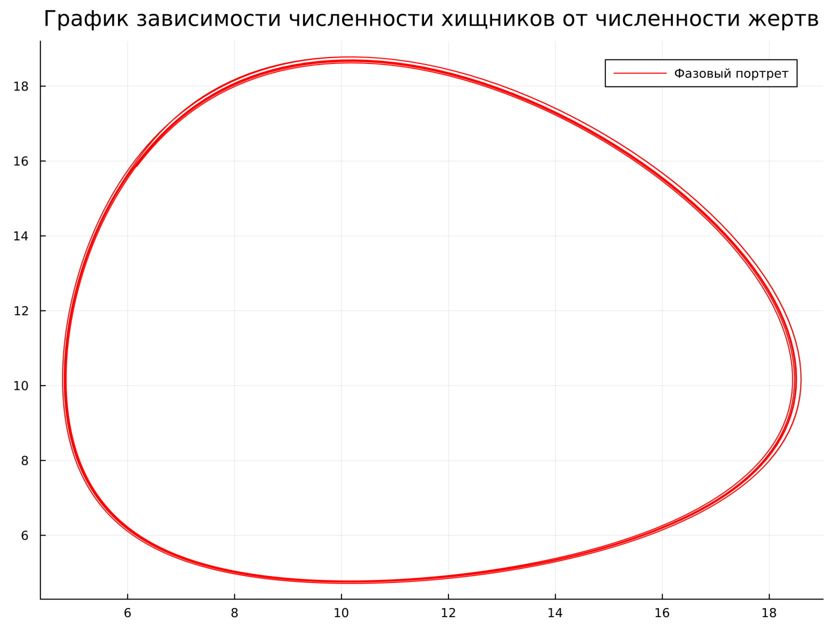

Рис. 4.2: График зависимости численности хищников от численности жертв - Julia

4. Напишем код на OpenModelica:

```
model lab05
  constant Integer x_0 = 8;
  constant Integer y_0 = 18;
  constant Real a = 0.57;
  constant Real b = 0.056;
  constant Real c = 0.59;
  constant Real d = 0.058;
  Real x(start=x_0);
  Real y(start=y_0);
  Real t = time;
equation
  der(x) = -c*x+d*x*y;
  der(y) = a*y-b*x*y;
  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 60.0),
```

```
    Documentation);
end lab05;
```

В качестве результата у нас графики изменения численности хищников и жертв (рис. [4.3]-[4.4]):

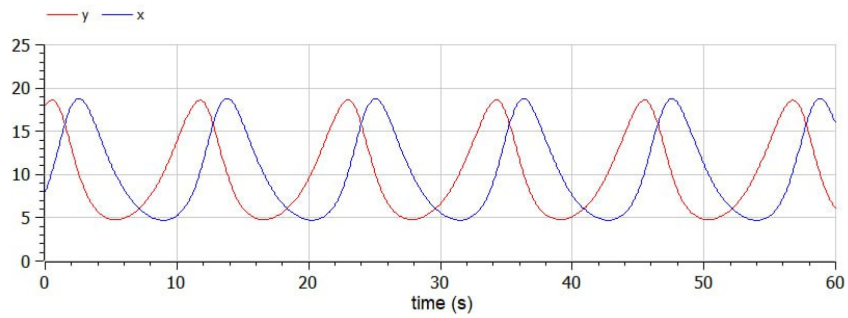

Рис. 4.3: Графики изменения численности хищников и численности жертв - OpenModelica

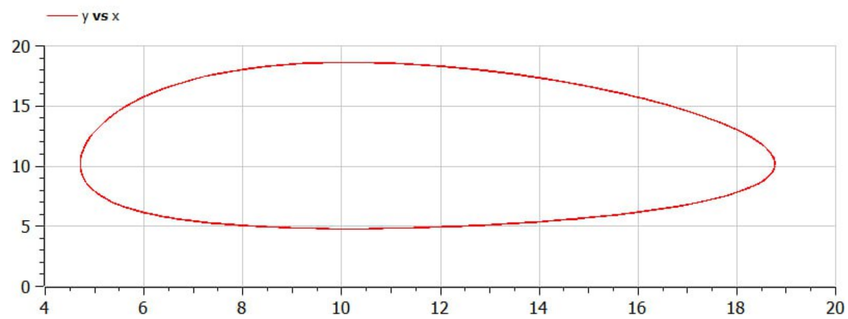

Рис. 4.4: График зависимости численности хищников от численности жертв - OpenModelica

5. Теперь найдем стационарное состояние по формуле: $x_0 = \frac{a}{b}, y_0 = \frac{c}{d}$

Код для нахождения состояния и проверки правильности его обнаружения напишем на Julia. В нем выведем полученные значения и посчитаем его начальным значением численности хищников и жертв.

```
using Plots
```

```
using DifferentialEquations

"Условия:"
a = 0.57
b = 0.056
c = 0.59
d = 0.058

x_0 = a / b
y_0 = c / d

@show x_0
@show y_0

u_0 = [x_0, y_0]
T = (0.0, 60.0) # отслеживаемый промежуток времени

function F!(du, u, p, t)
    du[1] = -c * u[1] + d * u[1] * u[2]
    du[2] = a * u[2] - b * u[1] * u[2]
end

prob = ODEProblem(F!, u_0, T)
sol = solve(prob, saveat = 0.05) # обозначили шаг

const X = Float64[]
const Y = Float64[]

for u in sol.u
```

```
    x, y = u
    push!(X, x)
    push!(Y, y)
end

plt = plot(
    dpi = 300,
    size = (800, 600),
    title = "График зависимости численности хищников от численности жертв"
)

plot!(
    plt,
    Y,
    X,
    color = :red,
    label = "Фазовый портрет"
)

savefig(plt, "julia_2_stat.png")

plt_2 = plot(
    dpi = 300,
    size = (800, 600),
    title = "Графики изменения численности хищников и численности жертв"
)

plot!(
    plt_2,
```

```
    sol.t,
    X,
    color = :blue,
    label = "Число жертв"
)

plot!(
    plt_2,
    sol.t,
    Y,
    color = :purple,
    label = "Число хищников"
)

savefig(plt_2, "julia_1_stat.png")
```

Значения стационарного состояния следующие (рис. [4.5]):

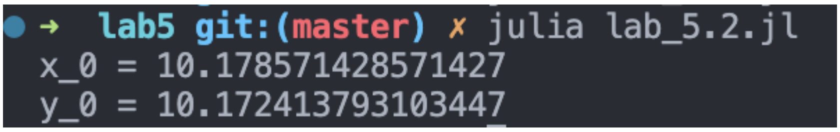

Рис. 4.5: Стационарное состояние

Результаты получены следующие (рис. [4.6]-[4.7]):

Рис. 4.6: Графики изменения численности

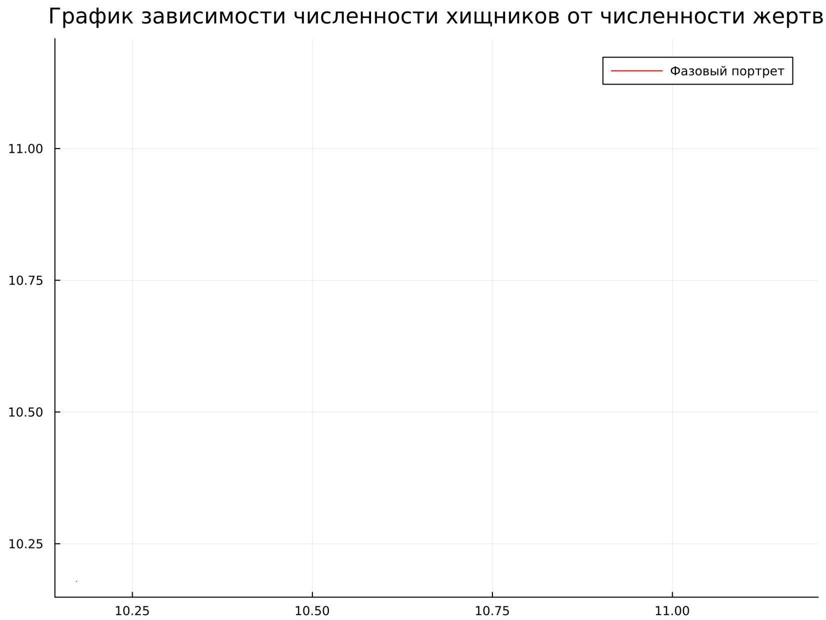

Рис. 4.7: Зависимость численности хищников от числа жертв

Стационарное состояние найдено правильно, поскольку численность не изменяется (рис. [4.6]), а эволюция популяций стоит на месте - точка (рис. [4.7]).

5 Выводы

Создали простейшую модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Нашли стационарное состояние.

Список литературы

1. Модель хищник-жертва [Электронный ресурс]. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971733/mod_resource/content/2/%D0%9B%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B0%20%E2%84%96%204.pdf.
2. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. 2011. 436 с.
3. Фазовые портреты «на пальцах» или что можно узнать о решениях диффура, не решая его [Электронный ресурс]. 2015. URL: https://habr.com/ru/post/268507/.