Отчет по лабораторной работе 3

Дисциплина: Математическое моделирование

Косолапов Степан Эдуардович

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Создать модель боевых действий по средствам языков Julia и OpenModelica. Построить соответствующие графики двух случаев ведения боевых действий.

2 Задание

- Рассмотреть два случая ведения боевых действий:
  1. Модель боевых действий между регулярными войсками;
  2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов;
- Построить графики изменения численности войск армии X и армии У для соответствующий случаев.

3 Теоретическое введение

К нашему вниманию представлены некоторые простейшие модели боевых действий – модели Ланчестера. В противоборстве могут принимать участие как регулярные войска, так и партизанские отряды. В общем случае главной характеристикой соперников являются численности сторон. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается проигравшей (при условии, что численность другой стороны в данный момент положительна).

Рассмотрим два случая ведения боевых действий:

1. Боевые действия между регулярными войсками;
2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов.

В первом случае численность регулярных войск определяется тремя факторами:

- скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство);
- скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон (что связанно с качеством стратегии, уровнем вооружения, профессионализмом солдат и т.п.);
- скорость поступления подкрепления (задаётся некоторой функцией от времени).

Во втором случае в борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что тем потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан.

4 Выполнение лабораторной работы

1. К выполнению нам предлагается выполнить соответстующий номеру студенчесткого билета вариант: 1032201745 % 70 + 1 = 16

2. Условие задачи является следующим:

Между страной и страной идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями $x(t)$ и $y(t)$. В начальный момент времени страна X имеет армию численностью 39 800 человек, а в распоряжении страны армия численностью в 21 400 человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем, что $P(t)$ и $Q(t)$ - непрерывные функции.

Постройте графики изменения численности войск врмии X и армии Y для следующих случаев:

- Модель боевых действий между регулярными войсками (формула [4.1]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.4x(t) - 0.607y(t) + 2\sin(3t) \\ \frac{dy}{dt} = -0.667x(t) - 0.42y(t) + 2\cos(6t) \end{cases} \tag{4.1}$$

- Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов (формула [4.2]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.337x(t) - 0.733y(t) + \sin(2t) + 1 \\ \frac{dy}{dt} = -0.29x(t)y(t) - 0.8y(t) + 2\cos(t) \end{cases} \tag{4.2}$$

3. Сперва рассмотрим первый случай.

Нам известно, что модель боевых дейтсвий между регулярными войсками описывается следующим образом (формула [4.3]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + R(t) \\ \frac{dy}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases} \tag{4.3}$$

Здесь Потери, не связанные с боевыми действиями, описывают члены $-a(t)x(t)$ и $-h(t)y(t)$, члены $-b(t)y(t)$ и $-c(t)x(t)$ отражают потери на поле боя. Коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ указывают на эффективность боевых действий со стороны и соответственно, $a(t), h(t)$ - величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери. Функции $P(t), Q(t)$ учитывают возможность подхода подкрепления к войскам и в течение одного дня.

В простейшей модели борьбы двух противников коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ являются постоянными. Попросту говоря, предполагается, что каждый солдат армии x убивает за единицу времени c солдат армии y (и, соответственно, каждый солдат армии y убивает b солдат армии x). Также не учитываются потери, не связанные с боевыми действиями, и возможность подхода подкрепления. Состояние системы описывается точкой (x, y) положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки, x и y - это численности противостоящих армий. Тогда модель принимает вид (формула [4.4]):

$$\begin{cases} \dot{x} = -by \\ \dot{y} = -cx \end{cases} \tag{4.4}$$

Это - жесткая модель, которая допускает точное решение ([4.5]):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{by}{cx} \\ cxdx &= bydy \\ cx^2 - by^2 &= C \end{aligned} \tag{4.5}$$

Эволюция численностей армий x и y происходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением (рис. [4.1]). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки.

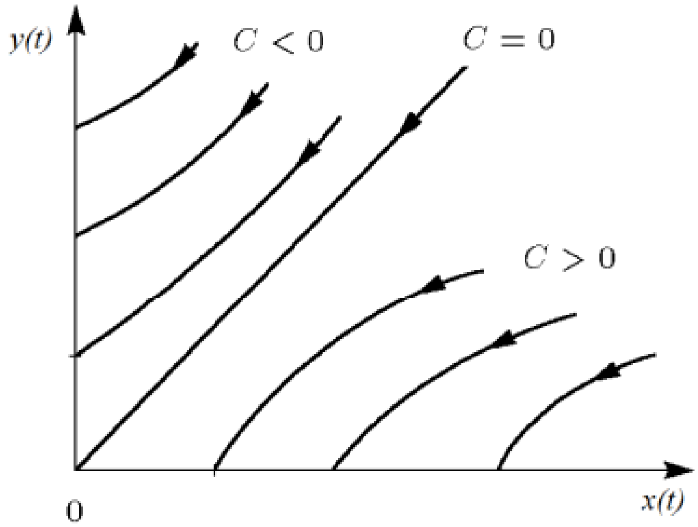

Рис. 4.1: Жесткая модель войны

Эти гиперболы разделены прямой $\sqrt{c}x = \sqrt{b}y$. Если начальная точка лежит выше этой прямой, то гипербола выходит на ось y. Это значит, что в ходе войны численность армии x уменьшается до нуля (за конечное время). Армия y выигрывает, противник уничтожен. Если начальная точка лежит ниже, то выигрывает армия x. В разделяющем эти случаи состоянии (на прямой) война заканчивается истреблением обеих армий. Но на это требуется бесконечно большое время: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены.

4. По условию задачи в первом случае мы меем следующие начальные значения:

- $x_0 = 39800$
- $y_0 = 21400$
- $a = 0.4$

- $b = 0.607$
- $c = 0.667$
- $h = 0.42$

5. Во втором случае в борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что тем потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан. В результате модель принимает вид (формула [4.6]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + R(t) \\ \frac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases} \tag{4.6}$$

В этой системе все величины имею тот же смысл, что и в системе [4.3].

С теми же упрощениями, что и в первом случае, модель [4.6] принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cx(t)y(t) \end{cases} \tag{4.7}$$

Эта система приводится к уравнению:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t)\right) = 0 \tag{4.8}$$

которое при заданных начальных условиях имеет единственное решение:

$$\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t) = \frac{b}{2}x^2(0) - cy(0) = C_1 \tag{4.9}$$

Из рис. [4.2] видно, что при $C_1 > 0$ побеждает регулярная армия, при $C_1 < 0$ побеждают партизаны. Аналогично противоборству регулярных войск, победа обеспечивается не только начальной численностью, но и боевой выучкой и качеством вооружения. При $C_1 > 0$ получаем соотношение $\frac{b}{2}x^2(0) > cy(0)$. Чтобы одержать победу партизанам необходимо увеличить коэффициент c и повысить свою начальную численность на соответствующую величину. Причем это увеличение, с ростом начальной численности регулярных войск ($x(0)$) , должно расти не линейно, а пропорционально второй степени $x(0)$. Таким образом, можно сделать вывод, что регулярные войска находятся в более выгодном положении, так как неравенство для них выполняется прим меньшем росте начальной численности войск.

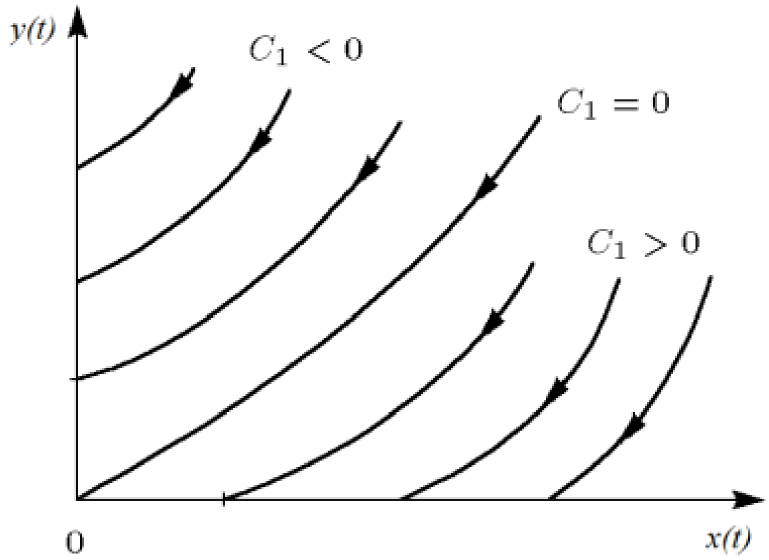

Рис. 4.2: Фазовные траектории системы

6. По условию задачи во втором случае мы меем следующие начальные значения:

- $x_0 = 39800$
- $y_0 = 21400$
- $a = 0.337$
- $b = 0.733$
- $c = 0.229$

- $h = 0.8$

7. Напишем код на Julia [1]:

```
using Plots
using DifferentialEquations

"Начальные условия:"
x_0 = 39800
y_0 = 21400

u_0= [x_0, y_0]
T = (0.0, 3.0)

"Модель боевых действий 1:"
a_1 = 0.4
b_1 = 0.607
c_1 = 0.667
h_1 = 0.42

function P_1(t)
    return 2sin(3t)
end

function Q_1(t)
    return 2cos(6t)
end

function F_1!(du, u, p, t)
    du[1] = -a_1*u[1] - b_1*u[2] + P_1(t)
    du[2] = -c_1*u[1] - h_1*u[2] + Q_1(t)
```

```
end

prob_1 = ODEProblem(F_1!, u_0, T)
sol_1 = solve(prob_1, saveat=0.01)

plt_1 = plot(
    sol_1,
    vars = (0, 1),
    color =:green,
    label = "Численность армии страны X",
    title = "Модель боевых действий 1",
    xlabel = "Время",
    ylabel = "Численность"
)

plot!(
    sol_1,
    vars = (0, 2),
    color =:blue,
    label = "Численность армии страны Y"
)

savefig(plt_1, "julia_case_1.png")

"Модель боевых действий 2:"
a_2 = 0.337
b_2 = 0.733
c_2 = 0.229
h_2 = 0.8
```

```
function P_2(t)
    return sin(2t) + 1
end

function Q_2(t)
    return 2cos(t)
end

function F_2!(du, u, p, t)
    du[1] = -a_2*u[1] - b_2*u[2] + P_2(t)
    du[2] = -c_2*u[1]*u[2] - h_2*u[2] + Q_2(t)
end

prob_2 = ODEProblem(F_2!, u_0, T)
sol_2 = solve(prob_2, saveat=0.01)

plt_2 = plot(
    sol_2,
    vars = (0, 1),
    color =:green,
    label = "Численность армии страны X",
    title = "Модель боевых действий №2",
    xlabel = "Время",
    ylabel = "Численность"
)

plot!(
    sol_2,
```

```
    vars = (0, 2),
    color =:blue,
    label = "Численность армии страны Y"
)

savefig(plt_2, "julia_case_2.png")
```

В качестве результата получили 2 графика (рис. [4.3]-[4.4])

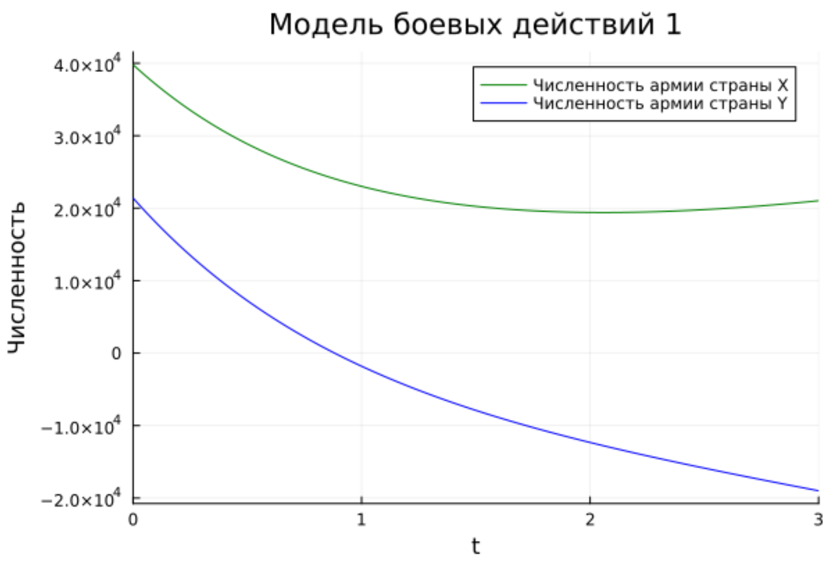

Рис. 4.3: Модель войны №1

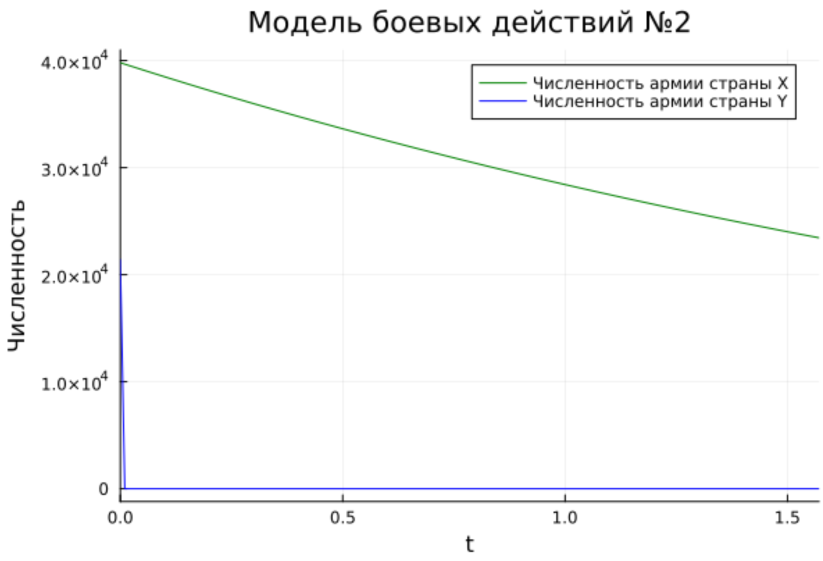

Рис. 4.4: Модель войны №2

В обоих случаях побеждает страна Y.

1. Напишем код на OpenModelica[2].

Для первой модели:

```
model lab3_1
  constant Integer x_0 = 39800;
  constant Integer y_0 = 21400;
  constant Real a = 0.4;
  constant Real b = 0.607;
  constant Real c = 0.667;
  constant Real h = 0.42;
  Real x(start=x_0);
  Real y(start=y_0);
  Real t = time;
equation
  der(x) = -a*x - b*y + 2 * sin(3*t);
```

```
  der(y) = -c*x - h*y + 2 * cos(6*t);
  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 3.0),
    Documentation);
end lab3_1;
```

График имеет следующиу вид (рис. [4.5]):

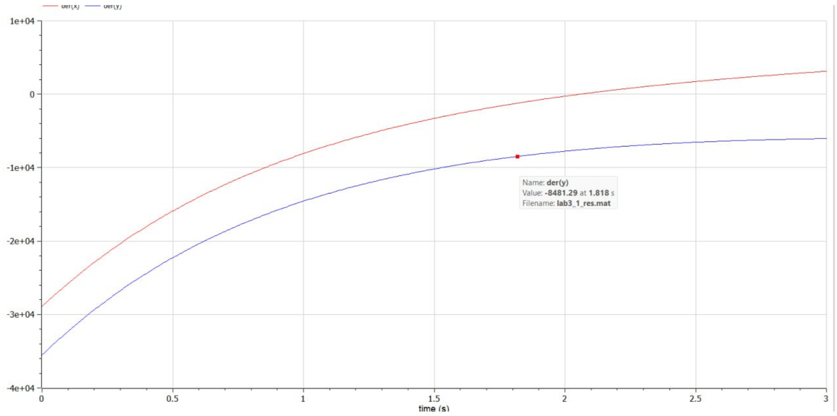

Рис. 4.5: График первой модели OpenModelica

Для второй модели:

```
model lab3_2
  constant Integer x_0 = 39800;
  constant Integer y_0 = 21400;
  constant Real a = 0.337;
  constant Real b = 0.733;
  constant Real c = 0.229;
  constant Real h = 0.8;
  Real x(start=x_0);
  Real y(start=y_0);
  Real t = time;
equation
  der(x) = -a*x - b*y + sin(2*t) + 1;
```

```
  der(y) = -c*x*y - h*y + 2*cos(t);
  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 3.0),
    Documentation);
end lab3_2;
```

График имеет следующий вид (рис. [4.6]):

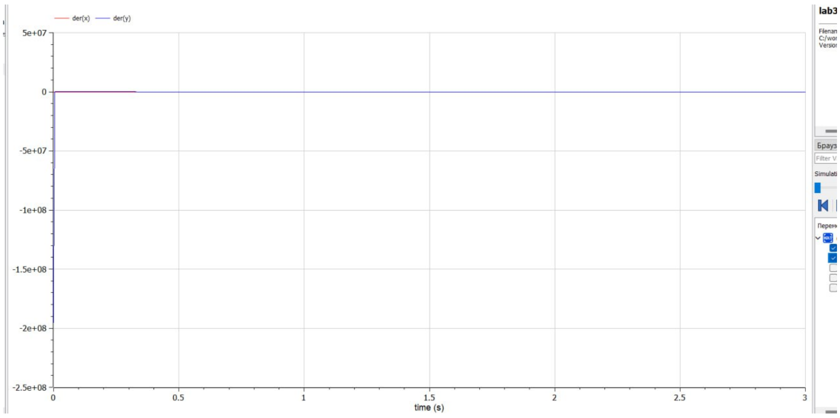

Рис. 4.6: График второй модели OpenModelica

5 Выводы

Создали модель боевых действий по средствам языков Julia и OpenModelica. Построили соответствующие графики двух случаев ведения боевых действий.

Список литературы

1. Solving ODEs in Julia [Электронный ресурс]. 2020. URL: https://nextjournal.com/sosiris-de/ode-diffeq.
2. Solving Modelica Models [Электронный ресурс]. URL: https://openmodelica.org/doc/OpenModelicaUsersGuide/latest/solving.html.