НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ, РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ ТА КОМП’ЮТЕРНОГО ЗОРУ

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
_______ Н. М. Куссуль
(підпис) *(ініціали, прізвище)*
“_____” _______________
2021 р.

Диплома робота

освітньо-кваліфікаційного рівня “магістр”

за спеціальністю 113 «Прикладна математика»
на тему «Прикладні можливості застосування мультимножинного випадку теореми Шпернера та часткові випадки теореми»

Виконав студент 6 курсу групи ФІ-01мп
Тарасенко С.А. _______ *(підпис)*
Керівник доценкт, Рибак О.В. _______ *(підпис)*
Рецензент Rank, Name _______ *(підпис)*

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _______

Київ — 2021 року

РЕФЕРАТ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

ABSTRACT

KEYWORDS

РЕФЕРАТ

СЛОВА

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність роботи.

Об'єкт дослідження —

Предмет дослідження —

Мета дослідження.

Завдання наступні:

1) Вивчити;
2) Розробити.

Практичне значення одержаних результатів.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

У цьому розділі буде розглянуто необхідний математичний апарат та теоретичні відомості стосовно проблеми яка лежить в основі даної магістерської дисертації. Розглянемо основне твердження теореми Шпернера та усі супутні визначення та твердження необхідні для вирішення поставленної задачі.

1.1 Постановка задачі

Теорема 1. *Нехай* $M = \{1,...,n\}$ *множина яка складається з елементів натурального ряду,* $M_1,...,M_k$ *- підмножини множини* M *такі, що* $\forall M_i,M_j : M_i \not\subset M_j$*, тоді виконується дуже проста нерівність* $k \le C_n^{[n/2]}$*, де* k *- це кількість множин у наборі* $M_1,...,M_k$*,* n *- загальна кількість елементів множини* M *(тобто потужність множини* M*, далі будемо позначати як* $|M|$*),* $C_n^{[n/2]}$ *- біноміальний коефіцієнт,* $[n/2]$ *- ціла частина від діллення* n *навпіл.*

Розглянемо одне з можливих доведь теореми базуючись на твердженні доведення якого буде представлене нижче.

Твердження 1. *Нехай* $M_1,...,M_k$ *- попарно невкладені одна в одну підмножини множини* $M = \{1,...,n\}$*, нехай* $|M_1| = m_1,...,|M_k| = m_k$*, тоді має місце нерівність:*

$$\frac{1}{C_n^{m_1}} + \frac{1}{C_n^{m_2}} + ... + \frac{1}{C_n^{m_k}} \le 1 \tag{1.1}$$

Доведення. Розглянемо для кожного $M_i, i = 1,..,k$ перестановки множини $\{1,...,n\}$ зроблені по наступному принципу:

a_1	a_2	.	.	a_k	a_{k+1}	.	.	.	.	a_n

Де $a_1,...,a_k \in M_i$, а $a_{k+1},...,a_n$ - всі інші елементи, тоді перша частина такої перестановки, тобто $a_1,...,a_k$ може мати $(m_i)!$ різних варіантів, а права частина, тобто $a_{k+1},...,a_n$, $(n-m_i)!$ різних варіантів, де n - потужність множини $\{1,...,n\}$. Варто зазначити, що для різних множин M_i, M_j відповідні перестановки будуть відрізнятись. Якщо дві перестановки двох множин M_i, M_j співпадають, це означає, що $M_i \subseteq M_j$, або $M_j \subseteq M_i$.

Тому маємо:

$m_1!(n-m_1)! + ... + m_k!(n-m_k)! \leq n!$, де $n!$ - число усіх можливих перестановок множини $\{1,...,n\}$. Розділимо обидві частини отриманої нерівності на $n!$ та отримаємо суму обернених біноміальних коефіцієнтів з лівої частини та одиницю з правої: $\frac{1}{C_n{}^{m_1}} + \frac{1}{C_n{}^{m_2}} + ... + \frac{1}{C_n{}^{m_k}} \leq 1$, що і треба було довести. □

Наслідок 1. *Виходячи з формули (1.1) отримаємо, що кількість різних M_i не перевищує $C_n{}^{[n/2]}$. Так як $C_n{}^{m_i} \leq C_n{}^{[n/2]}$ маємо $\frac{1}{C_n{}^{[n/2]}} + \frac{1}{C_n{}^{[n/2]}} + ... + \frac{1}{C_n{}^{[n/2]}} \leq \frac{1}{C_n{}^{m_1}} + \frac{1}{C_n{}^{m_2}} + ... + \frac{1}{C_n{}^{m_k}} \leq 1$, у найлівішій частині рівняння доданок $\frac{1}{C_n{}^{[n/2]}}$ зустрічається k разів, тобто $\frac{k}{C_n{}^{[n/2]}} \leq 1$, або ж якщо записати у звичному вигляді $k \leq C_n{}^{[n/2]}$.*

Поставлена задача узагальнити дану теорему на випадок коли множина $M = \{1,...,n\}$ може мати кратні входження елементів, тобто математичний об'єкт M набуває мультимножинних властивостей. Дана задача вже була частково розглянута у бакалаврській дипломній роботі. Було розглянуто деякі часткові випадки мультимножин, які задовольняють умовам теореми. У даній роботі буде більш детально розглянуто прикладне застосування теореми, та узагальнення її на більшу кількість окремих випадків мультимножин. Для того, щоб математичні викладки та послідовність дій була зрозумілою унаступному розділі наводяться необхідні теоретичні відомості та означення базуючись на яких було отримано результати, які будуть описані нижче.

1.2 Теорія мультимножин

Над мультимножинами визначені такі основні операції: об'єднання, перетин, арифметичне додавання, арифметичне віднімання, доповнення, симетрична різниця, множення на число, арифметичне множення та зведення в арифметичну ступінь, прямий твір та зведення у прямий ступінь. Ми розглянемо лише деякі основні необхідні для подальших дій операції над мультимножинами.

Визначення 1. *Мультимножина - модифіковане поняття множини, що допускає включення одного і того ж елемента в сукупність по кілька разів. Число елементів у мультимножині, з урахуванням повторюваних елементів, називається його розміром або потужністю.*

Визначення 2. *Об'єднанням мультимножин A та B називається мультимножина, що складається з усіх елементів, які присутні хоча б в одному з мультимножин, і кратність кожного елемента дорівнює максимальній кратності відповідних елементів в мультимножинах, що об'єднуються:*

$$C = A \cup B = \{max(x_i^{k_i}, x_j^{k_j})\}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B$$

Визначення 3. *Перетином мультимножин A та B називається мультимножина, що складається з усіх елементів, які одночасно присутні в кожному з мультимножин, і кратність кожного елемента дорівнює мінімальній кратності відповідних елементів у мультимножинах, що перетинаються:*

$$C = A \cap B = \{min(x_i^{k_i}, x_j^{k_j})\}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B$$

Визначення 4. *Арифметичною сумою мультимножин A та B називається мультимножина, що складається з усіх елементів, які присутні хоча б в одній з мультимножин, і кратність кожного елемента дорівнює сумі кратностей відповідних елементів у мультимножинах, що складаються:*

$$C = A + B = \{x^k | x^k = x_i^{k_i} + x_j^{k_j}\}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B$$

Визначення 5. *Арифметичною різницею мультимножин A та B називається мультимножина, що складається з елементів мультимножини A, кратність яких перевищує кратність відповідних елементів у мультимножині B. Кратність кожного елемента результуючої множини дорівнює різниці кратностей відповідних елементів в мультимножинах, що віднімаються:*

$$C = A - B = \{x^k | x^k = x_i^{k_i} - x_j^{k_j}, k_i > k_j, 0\ otherwise\}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B$$

1.3 Теорія графів

Визначення 6. *Граф — математична абстракція реальної системи будь-якої природи, об'єкти якої мають парні зв'язки. Граф як математичний об'єкт є сукупність двох множин: множина вершин і множина ребер. Елементом множини ребер є пара елементів множини вершин.*

Визначення 7. *Простим графом $G(V,E)$ є сукупність двох множин: непустої множини V та множини E невпорядкованих пар різних елементів множини V. Множина V називається множиною вершин, множина E називається множиною ребер:*

$$G(V,E) = \langle V,E \rangle\,, \quad V \neq \varnothing, \quad E \subseteq V \times V, \quad \{v,v\} \notin E, \quad v \in V$$

Визначення 8. *Дводольний граф або біграф в теорії графів - це граф, множину вершин якого можна розбити на дві долі таким чином, що кожне ребро графу з'єднує кожну вершину з однієї долі з якоюсь вершиною з іншої долі, тобто не існує ребер між вершинами однієї і тієї ж частини долі. Неорієнтований граф $G = (W,E)$ називається дводольним, якщо множину його вершин можна розбити на дві підмножини $W = U \cup V$ так, що:*

- *жодна вершина в U не з'єднана з вершинами в U*

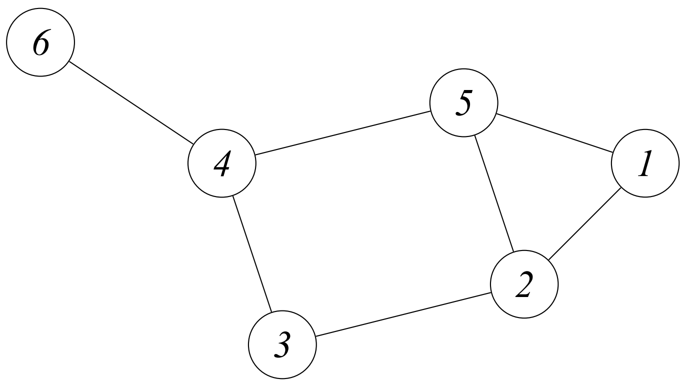
- *жодна вершина в V не з'єднана з вершинами в V*

У цьому випадку підмножини вершин U та V називаються частками дводольного графа G.

Приклад 1. *Розглянемо приклад простого графу:*

$V = \{1,2,3,4,5,6\}$

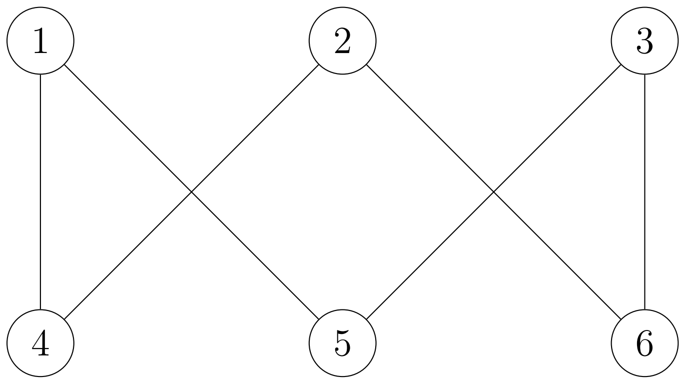
$E = \{(1,2),(1,5),(5,2),(5,4),(2,3),(3,4),(4,6)\}$



Приклад 2. *Розглянемо приклад дводольного графу:*

$V = \{1,2,3,4,5,6\}$

$E = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,6),(3,5),(3,6)\}$

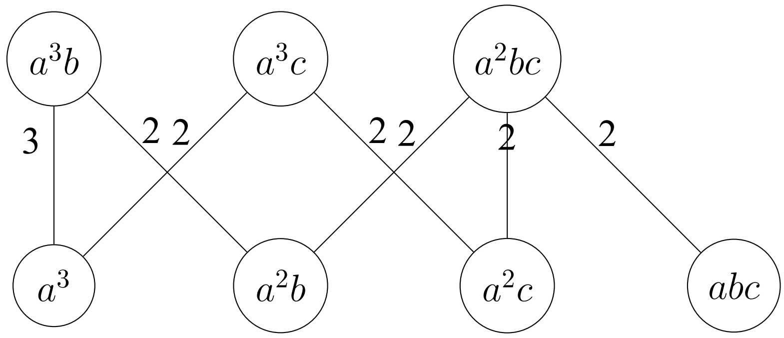


У даному випадку ми можемо розділити множину вершин на дві:

$$V = U \cup P, P = \{1,2,3\} \text{ та } U = \{4,5,6\}.$$

Немає жодного ребра яке пов'язує вершини множин P із вершинами множини P, аналогічно для множини U.

1.4 Постановка задачі



1.4.1 Попередні роботи

1.4.2 Визначення

1.5 Розв’язок

2 ПРАКТИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ

3 ОХОРОНА ПРАЦІ

ВИСНОВКИ

В результаті виконання роботи вдалося.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ