

ABSTRACT

SPERNER'S THEOREM, VOTING THEORY, STRONG AND WEAK GROUPS, BALANCING THE GRAPH SYSTEM

Qualification work contains: 60 pages, 38 figures, 3 sources.

In the course of this work the analysis of the proofs of the simple case of the Sperner's Theorem. There were proposed some main and interesting ways to apply theorem using different partial cases that were proved. The main and the most interesting way to apply theorem was the Voting Theory. In the main scope of the Voting theory families of pairwise disjoint sets, so the estimation of the power of such family was distinguished for partial cases. The next application is balancing the system that could be represented as bipartite graph. Relying on partial cases that were proved, the balancing of such systems could be made. The last but not least, proved partial cases could be used for making strong and weak groups that could be used for different cryptographic problems and also for the Voting Theory.

The way to prove the main theorem of this work was announced and used in my bachelor's work. This method uses the prove of the simple case of the theorem and offers the way to reuse that prove for harder cases. The main algorithm for solving the system of linear equations was the Gauss method, because it is very simple and very easy to program, but any algorithm can be used. Also, the multiset theory was described for better understanding.

There were proved a lot of different partial cases of multisets that are satisfy the conditions of the theorem. Also some of the research described here was announced on the conference that took place on the 5th of November 2021 named "Modeling, control and information technologies: Proceedings of V International scientific and practical conference".

РЕФЕРАТ

ТЕОРЕМА ШПЕРНЕРА, ТЕОРІЯ ГОЛОСУВАННЯ, СИЛЬНІ ТА СЛАБКІ ГРУПИ, БАЛАНСУВАННЯ СИСТЕМИ ГРАФІВ

Кваліфікаційна робота містить: 60 сторінок, 38 рисунків, 3 джерел.

У ході даної роботи проведено аналіз доказів простого випадку теореми Шпернера. Запропоновано основні та цікаві способи застосування теореми з використанням різних часткових випадків, які були доведені. Основним і найцікавішим способом застосування теореми була теорія голосування. В основі теорії Голосування лежать сімейства попарно не перетинаних множин, тому оцінка потужності такої сім'ї важлива, а для часткових випадків теореми, які були доведені, ця оцінка отримана. Наступним прикладним застосуванням є балансування системи, яка може бути представлена у вигляді дводольного графа. Спираючись на часткові доведені випадки, можна провести балансування таких систем. Доведені часткові випадки можуть бути використані для створення сильних і слабких груп, які можна використовувати для різних криптографічних проблем, а також для теорії голосування.

Спосіб доведення основної теореми цієї роботи був показаний і використаний у моїй бакалаврській роботі. Цей метод використовує доказ простого випадку теореми та пропонує спосіб повторного використання цього доказу для більш складних випадків. Основним алгоритмом розв'язування системи лінійних рівнянь був метод Гаусса, оскільки він дуже простий і дуже легко програмується, але можна використовувати будь-який алгоритм. Також для кращого розуміння була описана теорія мультимножин.

Доведено різні часткові випадки мультимножин, які задовольняють умовам теореми. Також деякі з описаних тут досліджень були анонсовані на конференції, що відбулася 5 листопада 2021 року під назвою «Modeling, control and information technologies: Proceedings of V International scientific and practical conference».

ЗМІСТ

Вступ	8
Перелік умовних позначень	10
1 Теоретичні відомості	11
1.1 Огляд математичного апарату	11
1.2 Теорія мультимножин	13
1.3 Теорія графів	14
1.4 Постановка задачі	16
Висновки до розділу 1.	21
2 Часткові випадки теореми	22
2.1 Частковий випадок $A = \{a^m, b, c\}$	22
2.2 Частковий випадок $A = \{a^2, b^2, c\}$	27
2.3 Частковий випадок $A = \{a^2, b^2, c^2\}$	29
2.4 Частковий випадок $A = \{a^3, b, c, d\}$	30
2.5 Частковий випадок $A = \{a^2, b^2, c, d\}$	32
2.6 Частковий випадок $A = \{a^3, b^2, c\}$	34
2.7 Частковий випадок $A = \{a^4, b^2, c\}$	36
2.8 Частковий випадок $A = \{a^5, b^2, c\}$	38
2.9 Частковий випадок $A = \{a^6, b^2, c\}$	40
2.10 Частковий випадок $A = \{a^7, b^2, c\}$	41
2.11 Частковий випадок $A = \{a^8, b^2, c\}$	43
2.12 Частковий випадок $A = \{a^9, b^2, c\}$	45
2.13 Статистичний аналіз розміру антиланцюга	47
Висновки до розділу 2.	51
3 Практичне застосування	52
3.1 Теорія голосування	52
3.2 Потоки у графах	53
3.3 Сильні та слабкі групи	58

Висновки до розділу 3.	58
Висновки	59
Перелік посилань	60

ВСТУП

Актуальність роботи визначається розширенням доведень часткових випадків Теорема Шпернера для мультимножинного випадку, та великого переліку можливих застосувань теореми.

Об'єкт дослідження — теорема німецького математика, яка дає оцінку потужності сімейства нескладених одна в одну множин, яку узагальнюємо на більш широкий спектр математичних об'єктів.

Мета дослідження полягає в тому, щоб отримати можливі шляхи доведення ускладненого випадку теореми для мультимножини в цілому(тобто для будь якої мультимножини). Для цього було розглянуто велику кількість часткових випадків, для того щоб можливо побачити якусь закономірність, або отримати ідеї для подальшого розвитку запропонованого доказу. Наступна мета, дослідити можливості застосування теореми. Було запропоновано три прикладні задачі, у яких теорема відіграє важливу роль: "Теорія Голосувань" "Поділ на сильні та слабкі групи" "Балансування системи графів".

Завдання наступні:

- 1) Дослідити можливості прикладного застосування ускладненого випадку теореми.
- 2) Розробити варіанти доведення ускладненого випадку теореми, на більш загальну кількість частинних випадків, або ж для мультимножини в цілому.
- 3) Довести теорему для частинних випадків, які можуть бути використані у прикладних задачах.
- 4) Показати можливості застосування теореми для частинних випадків теореми.
- 5) Побудувати, або запропонувати можливості комбінаторної оцінки потужності сімейства нескладених одна в одну мультипідмножин.
- 6) Дослідити системи, які можуть бути представлені у вигляді дводольного

графу та потребують балансування.

Практичне значення одержаних результатів полягають в тому, що було отримано доведення теореми для нових частинних випадків, які можуть бути використані, як вже було сказано, у переліку прикладних задач. Прикладні задачі для частинних випадків надають можливість використати математичні об'єкти які задовольняють умовам теореми, тобто бути певним що верхня оцінка потужності сімейства нескладених одна в одну мультимножин обмежена числом $C_n^{n/2}$.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

У цьому розділі буде наведено необхідний перелік умовних позначень, необхідних для тлумачення матеріалів:

a^n — кратність входження елемента у множину

\cup — об'єднання множин

\cap — перетин множин

\cap — перетин множин

$\overline{deg}, \underline{deg}$ — ступінь входження ребер у вершину графа

1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

У цьому розділі буде розглянуто та наведено необхідний математичний апарат та теоретичні відомості стосовно проблеми яка лежить в основі даної магістерської дисертації. Розглянемо основне твердження стосовно теореми Шпернера та усі супутні визначення та твердження необхідні для вирішення поставленої задачі.

1.1 Огляд математичного апарату

Теорема 1. *Нехай $M = \{1, \dots, n\}$ множина яка складається з елементів натурального ряду, M_1, \dots, M_k - набір підмножин множини M такі, що $\forall M_i, M_j : M_i \not\subset M_j$, тоді виконується дуже проста нерівність $k \leq C_n^{[n/2]}$, де k - це кількість множин у наборі M_1, \dots, M_k , n - загальна кількість елементів множини M (тобто потужність множини M , далі будемо позначати як $|M|$) [1], $C_n^{[n/2]}$ - біноміальний коефіцієнт, $[n/2]$ - ціла частина від ділення n навпіл.*

Розглянемо одне з можливих доведень теореми базуючись на твердженні доведення якого буде представлено нижче.

Твердження 1. *Нехай M_1, \dots, M_k - попарно не належать одна в одній підмножини множини $M = \{1, \dots, n\}$, нехай $|M_1| = m_1, \dots, |M_k| = m_k$, тоді має місце нерівність:*

$$\frac{1}{C_n^{m_1}} + \frac{1}{C_n^{m_2}} + \dots + \frac{1}{C_n^{m_k}} \leq 1 \quad (1.1)$$

Доведення. Розглянемо для кожного $M_i, i = 1, \dots, k$ перетасовування множини $\{1, \dots, n\}$ зроблені за наступним принципом:

a_1	a_2	.	.	a_k	a_{k+1}	a_n
-------	-------	---	---	-------	-----------	---	---	---	---	-------

Де $a_1, \dots, a_k \in M_i$, а a_{k+1}, \dots, a_n - всі інші елементи, тоді перша частина такої перетасовування, тобто a_1, \dots, a_k може мати $(m_i)!$ різних варіантів, а права частина, тобто a_{k+1}, \dots, a_n , $(n - m_i)!$ різних варіантів, де n - потужність множини $\{1, \dots, n\}$. Варто зазначити, що для різних множин M_i, M_j відповідні перетасовування будуть відрізнятись. Якщо дві перетасовування двох множин M_i, M_j співпадають, це означає, що $M_i \subseteq M_j$, або $M_j \subseteq M_i$.

Тому маємо:

$m_1!(n - m_1)! + \dots + m_k!(n - m_k)! \leq n!$, де $n!$ - число усіх можливих перетасовувань множини $\{1, \dots, n\}$. Розділимо обидві частини отриманої нерівності на $n!$ та отримаємо суму обернених біноміальних коефіцієнтів з лівої частини та одиницю з правої: $\frac{1}{C_n^{m_1}} + \frac{1}{C_n^{m_2}} + \dots + \frac{1}{C_n^{m_k}} \leq 1$, що і треба було довести. \square

Наслідок 1. Виходячи з формули (1.1) отримаємо, що кількість різних M_i не перевищує $C_n^{[n/2]}$. Так як $C_n^{m_i} \leq C_n^{[n/2]}$ маємо $\frac{1}{C_n^{[n/2]}} + \frac{1}{C_n^{[n/2]}} + \dots + \frac{1}{C_n^{[n/2]}} \leq \frac{1}{C_n^{m_1}} + \frac{1}{C_n^{m_2}} + \dots + \frac{1}{C_n^{m_k}} \leq 1$, у найлівішій частині рівняння доданок $\frac{1}{C_n^{[n/2]}}$ зустрічається k разів, тобто $\frac{k}{C_n^{[n/2]}} \leq 1$, або ж якщо записати у звичному вигляді $k \leq C_n^{[n/2]}$.

Поставлена задача узагальнити дану теорему на випадок коли множина $M = \{1, \dots, n\}$ може мати елементи які належать їй декілька разів $1 \leq$, тобто математичний об'єкт M набуває мультимножинних властивостей. Дана задача вже була частково розглянута у моїй бакалаврській дипломній роботі. Було розглянуто деякі часткові випадки мультимножин, які задовольняють умовам теореми. У даній роботі буде більш детально розглянуто прикладне застосування теореми, та узагальнення її на більшу кількість окремих випадків мультимножин. Для того, щоб математичні викладки та послідовність дій

була зрозумілою унаступному розділі наводяться необхідні теоретичні відомості та означення базуючись на яких було отримано результати, які будуть описані нижче.

1.2 Теорія мультимножин

Над мультимножинами визначені такі основні операції: об'єднання, перетин, арифметичне додавання, арифметичне віднімання, доповнення, симетрична різниця, множення на число, арифметичне множення та зведення в арифметичну ступінь, прямий твір та зведення у прямий ступінь. Ми розглянемо лише деякі основні операції необхідні для подальших дій над мультимножинами.

Визначення 1. *Мультимножина - модифіковане поняття множини, що допускає наявність одного і того ж елемента в ній по кілька разів. Число елементів у мультимножині, з урахуванням елементів які повторюються, називається його розміром або потужністю [2].*

Визначення 2. *Об'єднанням мультимножин [2] A та B називається мультимножина, якій належать з усі елементи, які присутні хоча б в одній з мультимножин, і кількість входжень кожного елемента дорівнює максимальній кількості входжень відповідних елементів в мультимножинах, що об'єднуються:*

$$C = A \cup B = \{\max(x_i^{k_i}, x_j^{k_j})\}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B$$

Визначення 3. *Перетином мультимножин [2] A та B називається мультимножина, що складається з усіх елементів, які присутні у кожній з мультимножин, і кількість входжень кожного елемента дорівнює мінімальній кількості входжень відповідних елементів у мультимножинах, що перетинаються:*

$$C = A \cap B = \{\min(x_i^{k_i}, x_j^{k_j})\}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B$$

Визначення 4. Арифметичною сумою мультимножин [2] A та B називається мультимножина, що складається з усіх елементів, які належать хоча б в одній з мультимножин, і кратність кожного елемента дорівнює сумі кратностей відповідних елементів у мультимножинах, що складаються:

$$C = A + B = \{x^k | x^k = x_i^{k_i} + x_j^{k_j}\}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B$$

Визначення 5. Арифметичною різницею мультимножин [2] A та B називається мультимножина, що складається з елементів мультимножини A , кратність яких перевищує кратність відповідних елементів у мультимножині B . Кратність кожного елемента результуючої множини дорівнює різниці кратностей відповідних елементів в мультимножинах, що віднімаються:

$$C = A - B = \{x^k | x^k = x_i^{k_i} - x_j^{k_j}, k_i > k_j, 0 \text{ otherwise}\}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B$$

1.3 Теорія графів

Визначення 6. Граф — математична абстракція системи будь-якої природи, об'єкти якої мають парні зв'язки. Граф як математичний об'єкт є сукупність двох множин: множина вершин і множина ребер. Елементом множини ребер є пара елементів множини вершин.

Визначення 7. Простим графом $G(V, E)$ є сукупність двох множин: не пустої множини V та множини E невпорядкованих пар різних елементів множини V . Множина V називається множиною вершин, множина E називається множиною ребер:

$$G(V, E) = \langle V, E \rangle, \quad V \neq \emptyset, \quad E \subseteq V \times V, \quad \{v, v\} \notin E, \quad v \in V$$

Визначення 8. Дводольний граф або біграф в теорії графів - це граф, множину вершин якого можна розбити на дві долі таким чином, що кожне ребро

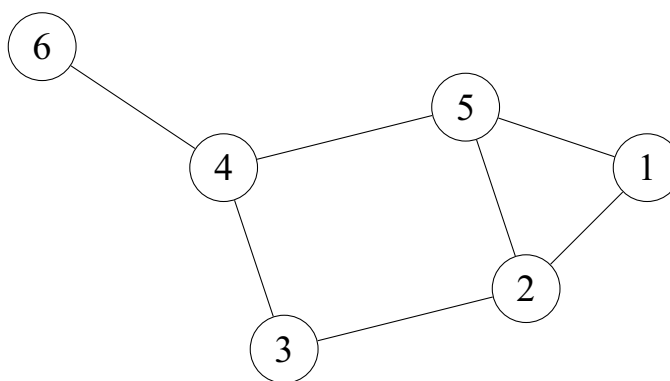


Рисунок 1.1 — приклад простого графу

графу з'єднує кожну вершину з однієї долі з якоюсь вершиною з іншої долі, тобто не існує ребер між вершинами однієї і тієї ж частини долі. Неорієнтований граф $G = (W, E)$ називається дводольним, якщо множину його вершин можна розбити на дві підмножини $W = U \cup V$ так, що:

- жодна вершина в U не з'єднана з вершинами в V
- жодна вершина в V не з'єднана з вершинами в U

У цьому випадку підмножини вершин U та V називаються частками дводольного графа G .

Приклад 1. Розглянемо приклад простого графу:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E = \{(1, 2), (1, 5), (5, 2), (5, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 6)\}$$

Приклад 2. Розглянемо приклад дводольного графу:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$E = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 6), (3, 5), (3, 6)\}$ У даному випадку ми можемо розділити множину вершин на дві:

$$V = U \cup P, P = \{1, 2, 3\} \text{ та } U = \{4, 5, 6\}.$$

Немає жодного ребра яке пов'язує вершини множин P із вершинами множини P , аналогічно для множини U .

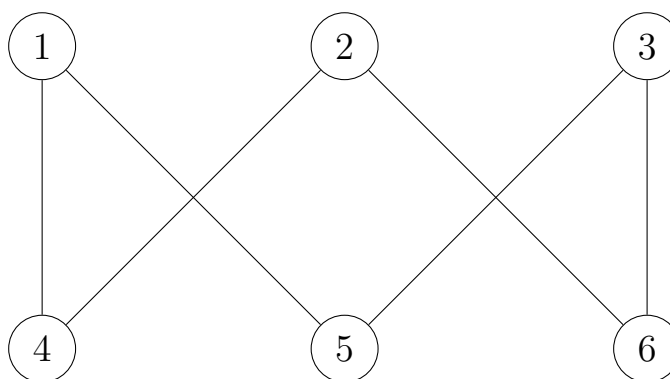


Рисунок 1.2 — приклад дводольного графу

Теорема 2. *В дводольному графі для будь-якого натурального k будь-які вершини однієї долі, де k не перевищує числа вершин долі, пов'язані принаймні з k різними вершинами іншої долі тоді і лише тоді, коли граф розбивається на пари першою часткою.*

1.4 Постановка задачі

Теорема 3. *Довести Теорему 1 у тому вигляді, у якому вона описана, зважаючи лише на те що об'єкт M у твердженні теореми тепер може мати мультимножинну природу [3].*

Доведення. Використаємо підхід, який базується на **Теоремі 2**. У даному доведенні буде описуватись один з можливих підходів рішення та доведення **даної теореми** через навантаження ребер двочасткового графу певними коефіцієнтами. У моїй бакалаврській роботі було розглянуто такі випадки:

$$A = \{z^m, x^m\}, B = \{w_0^2, w_1, \dots, w_n\}$$

Як вже було доведено раніше у **Теоремі 1** для звичайного типу множин завжди існує паросполучення при додаванні до сімейства невикладених множин розміру n одного елемента для того, щоб утворити сімейство невикладених множин якому належать множини розміру $n + 1$. Для звичайного випад-

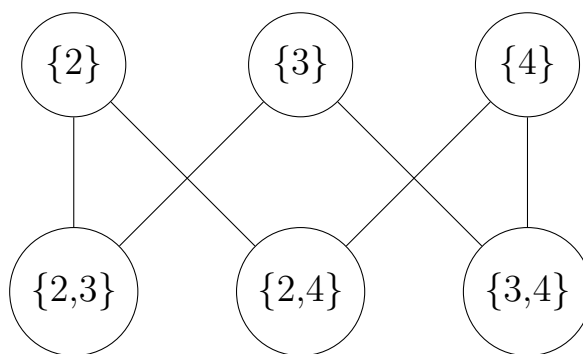


Рисунок 1.3 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{2,3,4\}$

ка теореми це і доводить, що максимально можливий розмір такого сімейства $C_n^{[n/2]}$. Для випадка коли множина має мультимножинну природу використати **Теорему 1** у тому вигляді як описано вище неможливо.

Приклад 3. Розглянемо множину $A = \{2,3,4\}$, збудуємо наповнення одноелементного сімейства невідмінних одна в одну множин, які добудуємо до двоелементного сімейства:

Ідея полягає в тому, щоб перенести підхід паросполучення використовуючи вагові коефіцієнти. Як можна бачити з малюнка:

$$\begin{aligned} \deg &= t \\ \overline{\deg} &= n - t \end{aligned}$$

Але це можливо лише для випадку коли відповідні ребра навантажені вагами. Нижче буде розглянуто декілька прикладів для розуміння повної картини. \square

Приклад 4. Розглянемо множину $A = \{2^3, 3^2\}$, збудуємо наповнення двоелементного сімейства невідмінних одна в одну множин, які добудуємо до триелементного сімейства:

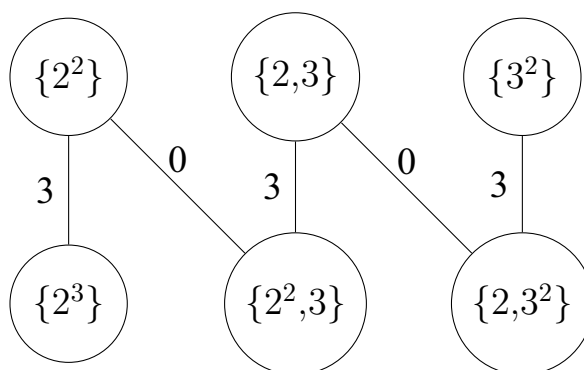


Рисунок 1.4 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{2,3,4\}$

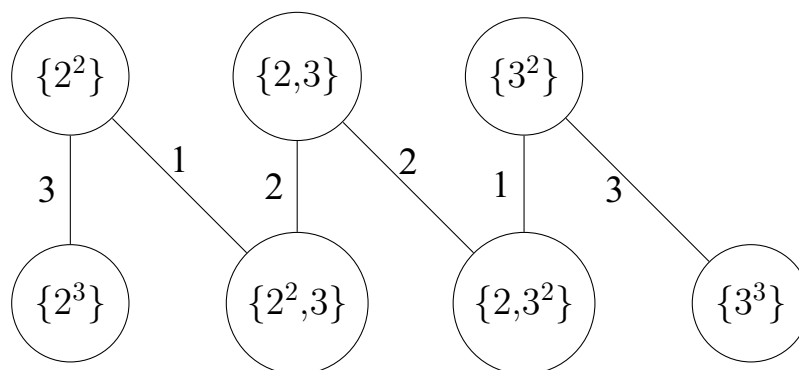


Рисунок 1.5 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{2^3, 3^3\}$

Приклад 5. Розглянемо множину $A = \{2^3, 3^3\}$, також збудуємо наповнення двоелементного сімейства невідношлюваних одна в одну множин, які добудуємо до триелементного сімейства:

Тобто обрахунок ведеться за допомогою формул:

$$\begin{aligned} \underline{deg} &= t \\ \overline{deg} &= n - t \end{aligned}$$

n - мультипотужність множини на основі якої будується сімейство невідношлюваних одна в одну множин

t - мультипотужність множини яка належить сімейству невідношлюваних одна в одну множин (для \underline{deg} , t - це потужність множини яка належить нижній долі, для \overline{deg} , t - це потужність множини яка належить верхній долі)

Тобто для **Прикладу 4**:

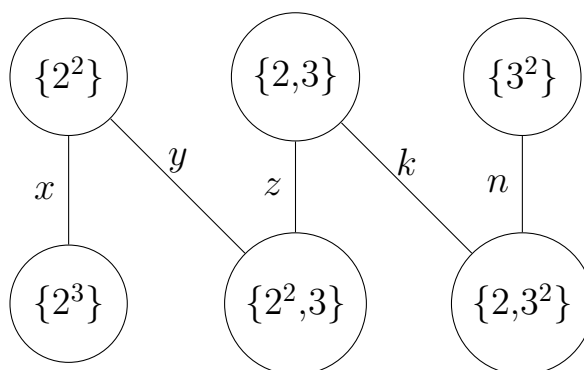


Рисунок 1.6 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{2^3, 3^3\}$

$$\underline{deg} = 3 - \text{оскільки } |\{2^3\}| = |\{2^2, 3\}| = |\{2, 3^2\}|$$

$$\overline{deg} = |A| - 2 = 3 - \text{оскільки } |A| = 5, |\{2^2\}| = |\{2, 3\}| = |\{3^2\}| = 2$$

Далі складається система лінійних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ x + y = 3 \\ y + z = 3 \\ z + k = 3 \\ k + n = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 3 \\ k = 0 \\ n = 3 \end{array} \right.$$

Для **Прикладу 5**:

$$\underline{deg} = 3 - \text{оскільки } |\{2^3\}| = |\{2^2, 3\}| = |\{3^3\}|$$

$$\overline{deg} = |A| - 2 = 4 - \text{оскільки } |A| = 6, |\{2^2\}| = |\{2, 3\}| = |\{3^2\}| = 2$$

Далі складається система лінійних рівнянь:

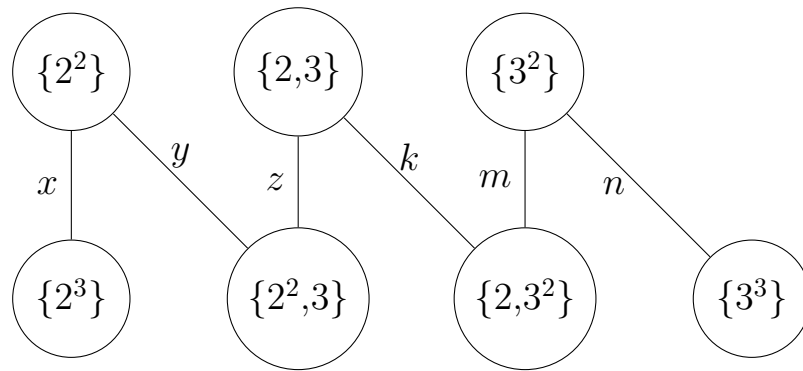


Рисунок 1.7 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{2^3, 3^3\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ x + y = 4 \\ y + z = 3 \\ z + k = 4 \\ k + m = 3 \\ n = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 2 \\ k = 2 \\ m = 1 \\ n = 3 \end{array} \right.$$

Таким способом у бакалаврській роботі було доведено випадки $A = \{z^m, x^m\}$, $B = \{w_0^2, w_1, \dots, w_n\}$. У наступному розділі буде розглянуто декілька інших часткових випадків, для яких буде доведено **Теорему 1**, та будуть записані явні формули обрахунку вагів для графу. За допомогою цих формул можна переконатись, що паросполучення існує і побудувати його явно. Таким чином доводиться для множин мультимножинної природи справедливність **Теорема 1**. Прикладе застосування математичних об'єктів, які задовольняють умови теорема буде описано у роздулах пізніше.

Висновки до розділу 1

Розглянуто необхідний математичний апарат, необхідний для розв'язку поставленої задачі. Сформовано твердження ускладненого випадку теореми. Запропоновано підхід для доведення та показано матеріали, які вже були представлені у моїй бакалаврській роботі.

2 ЧАСТКОВІ ВИПАДКИ ТЕОРЕМИ

2.1 Частковий випадок $A = \{a^m, b, c\}$

Почнемо розглядати новий випадок мультимножини виду $A = \{a^m, b, c\}$, яка задовольняє умови **Теорема 1** [3]. На елемент a^m накладаються деякі обмеження, а саме: $m \geq 3$, оскільки при $m = 1$ висхідна множина втрачає мультимножинні властивості, щодо випадку коли $m = 2$, то цей випадок вже був розглянутий у бакалаврській роботі, та включається у випадок $B = \{w_0^2, w_1, \dots, w_n\}$. Почнемо з частинних випадків коли m набуває конкретних значень, щоб побачити закономірності у зажуванні дводольного графу та формули за допомогою яких будуть обраховуватись ваги [3].

Приклад 6. Розглянемо множини $A = \{a^3, b, c\}$, збудуємо наповнення двоеlementного сімейства невиключних одна в одну множин, які добудуємо до триелементного сімейства:

Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

$$\begin{aligned} \underline{deg} &= 3 - \text{оскільки } |\{a^3\}| = |\{a^2, b\}| = |\{a^2, c\}| = |\{a, b, c\}| \\ \overline{deg} &= |A| - 2 = 3 - \text{оскільки } |A| = 5, |\{a^2\}| = |\{a, b\}| = |\{b, c\}| = |\{a, c\}| = 2 \end{aligned}$$

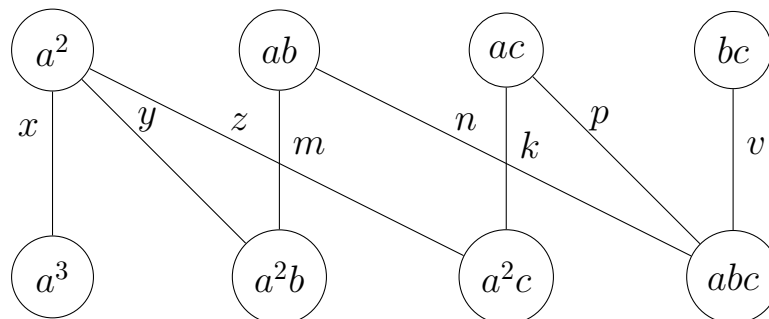


Рисунок 2.1 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^3, b, c\}$

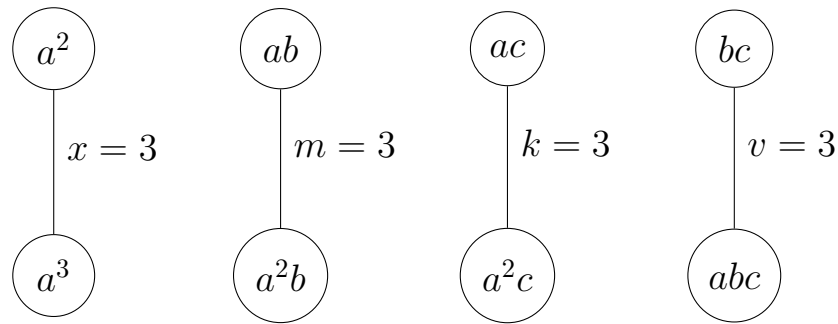


Рисунок 2.2 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^3, b, c\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ x + y + z = 3 \\ m + y = 3 \\ m + n = 3 \\ z + k = 3 \\ k + p = 3 \\ n + p + v = 3 \\ v = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ m = 3 \\ n = 0 \\ k = 3 \\ p = 0 \\ v = 3 \end{array} \right.$$

Для випадку коли вага ребра дорівнює 0, виключаємо таке ребро із графу, тобто отримали повне паросполучення:

Розглянемо множину $A = \{a^4, b, c\}$, так само збудуємо наповнення двоелементного сімейства невідмінних одна в одну множин, які добудуємо до триелементного сімейства:

Так само як для попереднього випадку:

$$\begin{aligned} \underline{deg} &= 3 - \text{оскільки } |\{a^3\}| = |\{a^2, b\}| = |\{a^2, c\}| = |\{a, b, c\}| \\ \overline{deg} &= |A| - 2 = 3 - \text{оскільки } |A| = 5, |\{a^2\}| = |\{a, b\}| = |\{b, c\}| = |\{a, c\}| = 2 \end{aligned}$$

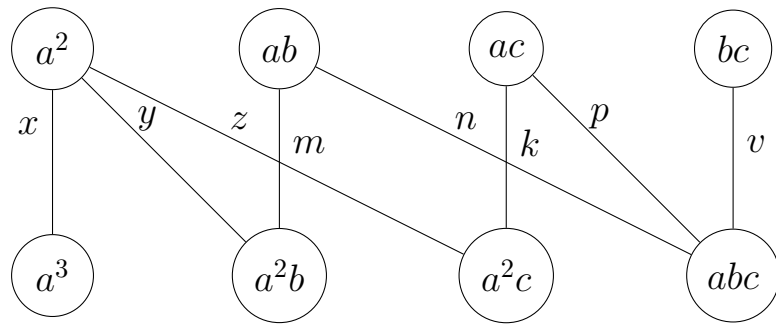


Рисунок 2.3 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^4, b, c\}$

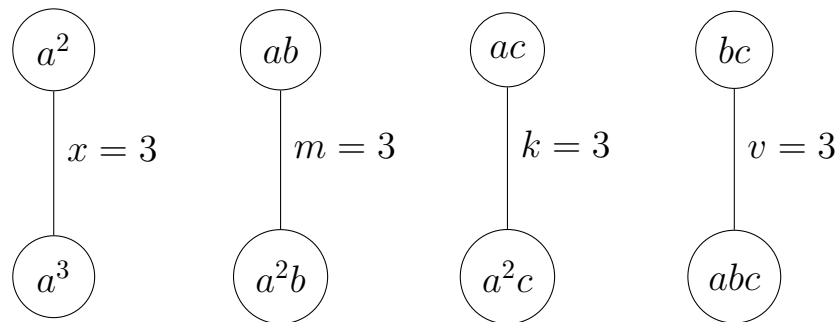


Рисунок 2.4 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^4, b, c\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ x + y + z = 3 \\ m + y = 3 \\ m + n = 3 \\ z + k = 3 \\ k + p = 3 \\ n + p + v = 3 \\ v = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ m = 3 \\ n = 0 \\ k = 3 \\ p = 0 \\ v = 3 \end{array} \right.$$

Для випадку коли вага ребра дорівнює 0, ми виключаємо таке ребро із графу, тобто ми отримали повне паросполучення:

Ми отримали точно такий же граф, як і у попередньому випадку, навіть

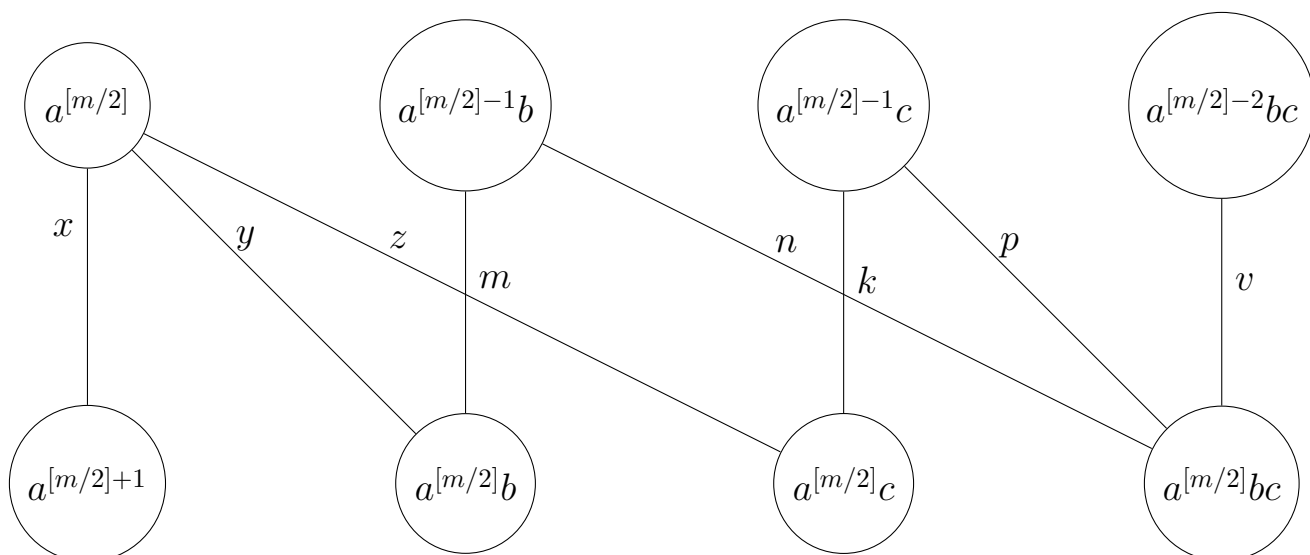


Рисунок 2.5 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^m, b, c\}$

з такими же вагами. Давайте спробуємо узагальнити підхід для випадку коли $A = \{a^m, b, c\}$. Я буду спиратись на твердження, яке було доведене у моїй бакалаврській роботі:

$$C_n^k \leq C_n^{k+1}, \text{ для випадку коли } k < \lfloor n/2 \rfloor, \text{ де } n - \text{це кількість елементів} \\ \text{висхідної множини, } k - \text{потужність підмножини.}$$

Отже, за припущенням найбільше сімейство мультипідмножин, які не включаються одна в одну, тобто максимальна потужність такого сімейства набувається коли потужність кожної окремої множини дорівнює $\lfloor n/2 \rfloor$. $|A| = m+2$, тоді побудуємо перехід від $\lfloor (m+2)/2 - 1 \rfloor$ елементних підмножин до $\lfloor (m+2)/2 \rfloor$:

Приклад 7. Розглянемо множину $A = \{a^m, b, c\}$:

Так само як для попереднього випадку:

$$\underline{\deg} = \lfloor m/2 \rfloor + 1 \\ \overline{\deg} = |A| - \lfloor m/2 \rfloor = m + 2 - \lfloor m/2 \rfloor$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = [m/2] + 1 \\ x + y + z = m + 2 - [m/2] \\ m + y = [m/2] + 1 \\ m + n = m + 2 - [m/2] \\ z + k = [m/2] + 1 \\ k + p = m + 2 - [m/2] \\ n + p + v = [m/2] + 1 \\ v = [m/2] + 1 \end{array} \right.$$

Для випадку коли $A = \{a^m, b, c\}$ ми отримали явні формули підрахунку вагів ребер графу, для заданого m треба розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса, та отримати ваги, які увантажать граф.

Якщо зробити перевірку, та підставити $m = 3$, той випадок, що вже був розглянутий у **Прикладі 6**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = [m/2] + 1 \\ x + y + z = m + 2 - [m/2] \\ m + y = [m/2] + 1 \\ m + n = m + 2 - [m/2] \\ z + k = [m/2] + 1 \\ k + p = m + 2 - [m/2] \\ n + p + v = [m/2] + 1 \\ v = [m/2] + 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = [m/2] + 1 = 2 + 1 = 3 \\ x + y + z = m + 2 - [m/2] = 3 \\ m + y = [m/2] + 1 = 3 \\ m + n = m + 2 - [m/2] = 3 \\ z + k = [m/2] + 1 = 3 \\ k + p = m + 2 - [m/2] = 3 \\ n + p + v = [m/2] + 1 = 3 \\ v = [m/2] + 1 = 3 \end{array} \right. \Rightarrow$$

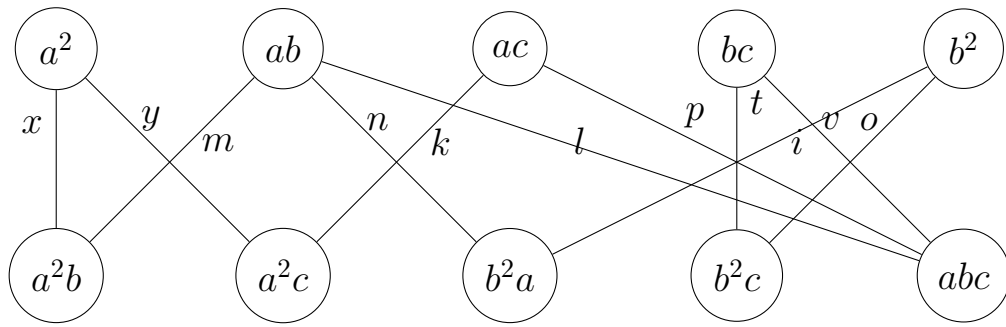


Рисунок 2.6 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^2, b^2, c\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ m = 3 \\ n = 0 \\ k = 3 \\ p = 0 \\ v = 3 \end{array} \right.$$

2.2 Частковий випадок $A = \{a^2, b^2, c\}$

Розглянемо наступний випадок мультимножини виду $A = \{a^2, b^2, c\}$, яка задовольняє умови **Теорема 1**. На елементи накладаються деякі обмеження, а саме потужність усіх елементів рівна, а один єдиний елемент має потужність одиниця.

Приклад 8. Розглянемо множину $A = \{a^2, b^2, c\}$, збудуємо наповнення двоелементного сімейства невиключних одна в одну множин, які добудуємо до триелементного сімейства:

Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

$$\underline{deg} = 3 - \text{оскільки } |\{a^2, b\}| = |\{a^2, c\}| = |\{a, b, c\}| = \dots$$

$$\overline{deg} = |A| - 2 = 3, |A| = 5, |\{a^2\}| = |\{a, b\}| = |\{b, c\}| = |\{a, c\}| = \dots = 2$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь за допомогою метода Гауса, запрограмованого на мові програмування Java. У програму треба ввести коефіцієнти при кожній змінній та рівняння по кожній змінній. Нижче записана система лінійних рівнянь та її розв'язок. Як можна побачити усі коефіцієнти невід'ємні та задовольняють умови **Теорема 1**.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + m = 3 \\ k + y = 3 \\ m + n + l = 3 \\ p + k = 3 \\ n + i = 3 \\ t + v = 3 \\ t + b = 3 \\ p + l + v = 3 \\ i + l = 3 \\ t + o = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ m = 1 \\ p = 1 \\ n = 2 \\ k = 2 \\ v = 2 \\ t = 1 \\ l = 0 \\ i = 1 \\ o = 2 \end{array} \right.$$

Отже отримали зважений граф при переході від двоелементних мультипідмножин до триелементних мультипідмножин:

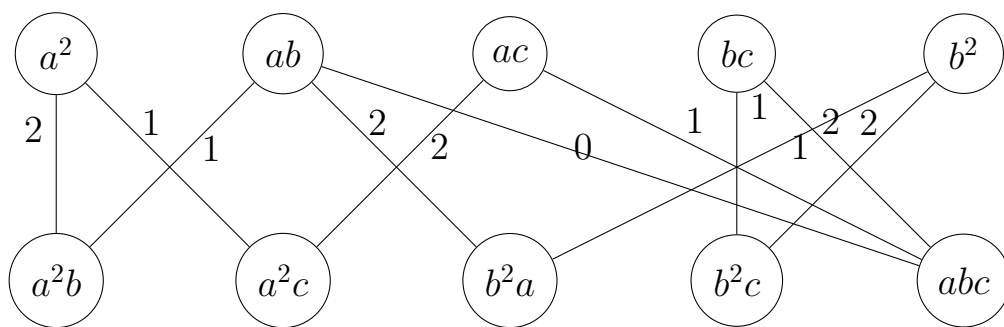


Рисунок 2.7 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^2, b^2, c\}$

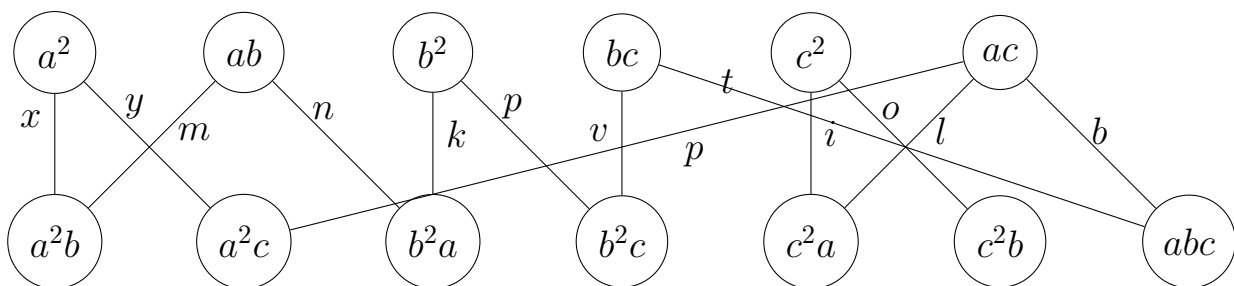


Рисунок 2.8 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^2, b^2, c^2\}$

2.3 Частковий випадок $A = \{a^2, b^2, c^2\}$

Розглянемо наступний випадок мультимножини виду $A = \{a^2, b^2, c^2\}$, яка задовольняє умови **Теорема 1**. На елементи накладаються деякі обмеження, а саме потужність усіх елементів рівна, оскільки при $m = 1$ висхідна множина втрачає мультимножинні властивості.

Приклад 9. Розглянемо множину $A = \{a^2, b^2, c^2\}$, збудуємо наповнення дво-елементного сімейства невиключних одна в одну множин, які добудуємо до триелементного сімейства:

Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

$$\begin{aligned} \underline{deg} &= 3 - \text{оскільки } |\{a^3\}| = |\{a^2, b\}| = |\{a^2, c\}| = |\{a, b, c\}| = \dots \\ \overline{deg} &= |A| - 2 = 4, |A| = 6, |\{a^2\}| = |\{a, b\}| = |\{b, c\}| = |\{a, c\}| = \dots = 2 \end{aligned}$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь за допомогою метода Гауса, запрогра-

мованого на мові програмування Java. У програму треба ввести коефіцієнти при кожній змінній та рівняння по кожній змінній. Нижче записана система лінійних рівнянь та її розв’язок. Як можна побачити усі коефіцієнти невід’ємні та задовольняють умови **Теорема 1**.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 4 \\ x + m = 3 \\ p + y = 3 \\ m + n = 4 \\ p + k = 4 \\ k + p = 4 \\ p + v = 3 \\ t + b = 3 \\ b + l + t = 4 \\ i + l = 3 \\ i + o = 4 \\ y + t = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \\ m = 1 \\ p = 1 \\ n = 3 \\ k = 3 \\ v = 2 \\ t = 1 \\ b = 2 \\ l = 1 \\ i = 2 \\ o = 2 \end{array} \right.$$

Отже отримали зважений граф при переході від двоелементних мультипідмножин до триелементних мультипідмножин:

2.4 Частковий випадок $A = \{a^3, b, c, d\}$

Розглянемо наступний випадок мультимножини виду $A = \{a^3, b, c, d\}$, яка задовольняє умови **Теорема 1**. На елементи накладаються деякі обмеження, а саме потужність усіх елементів рівна, а кратність одного елемента три.

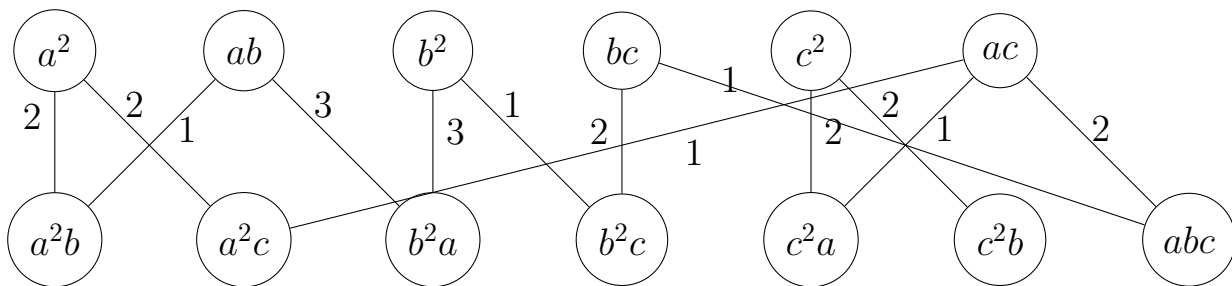


Рисунок 2.9 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^2, b^2, c^2\}$

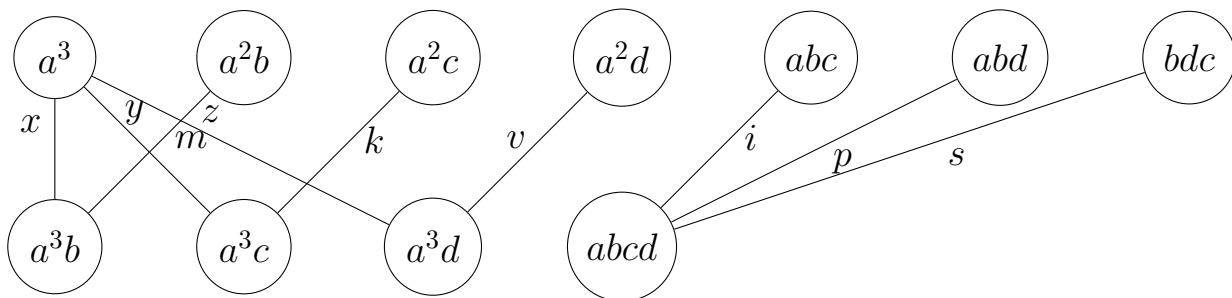


Рисунок 2.10 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^3, b, c, d\}$

Приклад 10. Розглянемо множину $A = \{a^3, b, c, d\}$, збудуємо наповнення триелементного сімейства невід'ємних одна в одну множин, які добудуємо до чотириелементного сімейства:

Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

$$\underline{deg} = 4 - \text{оскільки } |\{a^3b\}| = |\{a^3, c\}| = |\{a^3, d\}| = |\{a, b, c, d\}| = 4$$

$$\overline{deg} = |A| - 3 = 3, |A| = 6, |\{a^3\}| = |\{a^2, b\}| = \dots = 3$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь за допомогою метода Гауса, запрограмованого на мові програмування Java. У програму треба ввести коефіцієнти при кожній змінній та рівняння по кожній змінній. Нижче записана система лінійних рівнянь та її розв'язок. Як можна побачити усі коефіцієнти невід'ємні та задовольняють умови **Теорема 1**.

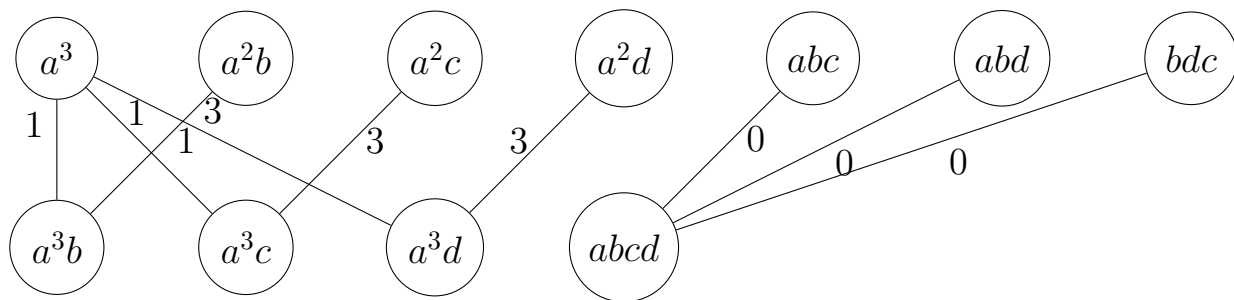


Рисунок 2.11 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^3, b, c, d\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + z = 4 \\ z = 3 \\ x + y + m = 3 \\ y + k = 4 \\ v + m = 4 \\ i + p + s = 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ k = 3 \\ m = 1 \\ v = 3 \\ i = 0 \\ p = 0 \\ s = 0 \\ z = 3 \end{array} \right.$$

Отже отримали зважений граф при переході від двоелементних мультипідмножин до триелементних мультипідмножин:

2.5 Частковий випадок $A = \{a^2, b^2, c, d\}$

Розглянемо наступний випадок мультимножини виду $A = \{a^2, b^2, c, d\}$, яка задовольняє умови **Теорема 1**. На елементи накладаються деякі обмеження, а саме потужність усіх елементів рівна, а кратність одного елемента три.

Приклад 11. Розглянемо множину $A = \{a^2, b^2, c, d\}$, збудуємо наповнення

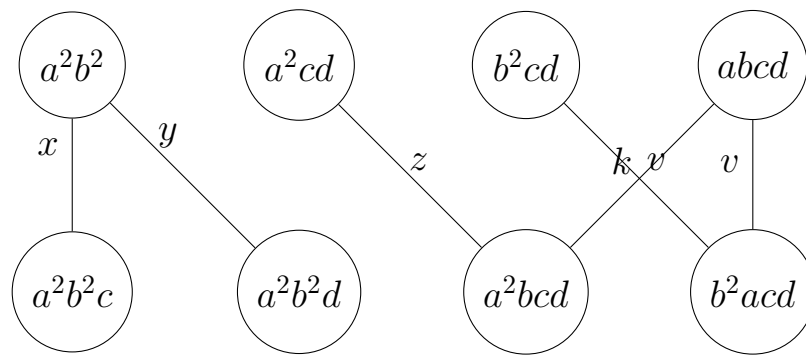


Рисунок 2.12 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^2, b^2, c, d\}$

триелементного сімейства невиключних одна в одну множин, які добудуємо до чотириелементного сімейства:

Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

$$\begin{aligned} \underline{deg} &= 4 - \text{оскільки } |\{a^3b\}| = |\{a^3c\}| = |\{a^3d\}| = |\{a,b,c,d\}| = 4 \\ \overline{deg} &= |A| - 3 = 3, |A| = 6, |\{a^3\}| = |\{a^2,b\}| = \dots = 3 \end{aligned}$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь за допомогою метода Гауса, запрограмованого на мові програмування Java. У програму треба ввести коефіцієнти при кожній змінній та рівняння по кожній змінній. Нижче записана система лінійних рівнянь та її розв'язок. Як можна побачити усі коефіцієнти невід'ємні та задовольняють умови **Теорема 1**.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 \\ x = 5 \\ y = 5 \\ z + k = 5 \\ n + m = 5 \\ z = 2 \\ m = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 5 \\ z = 0 \\ k = 5 \\ n = 5 \\ m = 0 \end{array} \right.$$

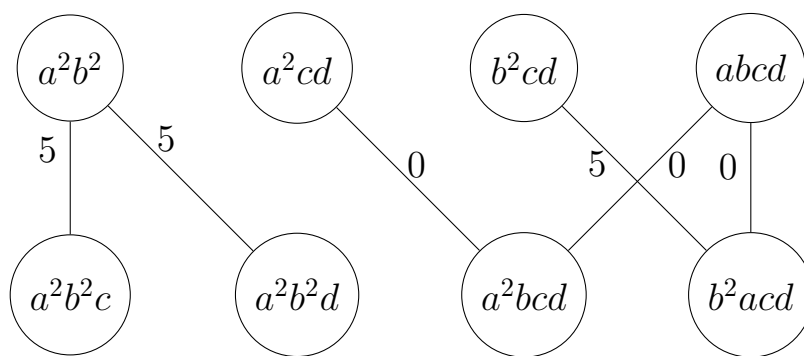


Рисунок 2.13 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^2, b^2, c, d\}$

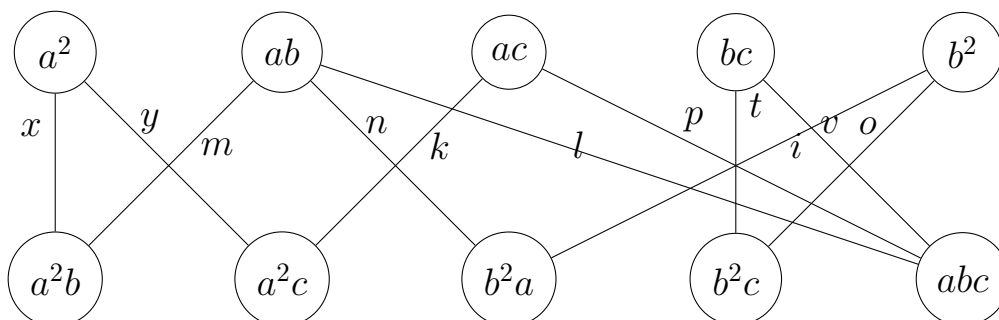


Рисунок 2.14 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^3, b^2, c\}$

Отже отримали зважений граф при переході від двоелементних мультипідмножин до триелементних мультипідмножин:

2.6 Частковий випадок $A = \{a^3, b^2, c\}$

Розглянемо наступний випадок мультимножини виду $A = \{a^3, b^2, c\}$, яка задовольняє умови **Теорема 1**. На елементи накладаються деякі обмеження, а саме потужність елемента $a = 3, b = 2$, а елемент c має потужність одиниця. Для доведення будемо використовувати вже відомий підхід через зважування двочасткового графу.

Приклад 12. Розглянемо множину $A = \{a^3, b^2, c\}$, збудуємо наповнення 2-елементного сімейства невиключних одна в одну множин, які добудуємо до 3-елементного сімейства:

Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

$$\begin{aligned} \underline{deg} &= 3 - \text{оскільки } |\{a^2, b\}| = |\{a^2, c\}| = |\{a, b, c\}| = \dots \\ \overline{deg} &= |A| - 2 = 3, |A| = 5, |\{a^2\}| = |\{a, b\}| = |\{b, c\}| = |\{a, c\}| = \dots = 2 \end{aligned}$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь за допомогою метода Гауса, запрограмованого на мові програмування Java. У програму треба ввести коефіцієнти при кожній змінній та рівняння по кожній змінній. Нижче записана система лінійних рівнянь та її розв'язок. Як можна побачити усі коефіцієнти невід'ємні та задовольняють умови **Теорема 1**. Для розв'язку системи лінійних рівнянь може бути використаний будь-який відомий метод, оскільки у цьому випадку важлива не швидкість розв'язку, а отримані дані. Після отримання вагів для кожного ребра, збудуємо дводольний граф з отриманими вагами для наглядного зображення отриманих результатів. У модулі прикладні застосування буде показано, як можна використовувати підхід зваження у задачах, де ресурси необхідно зрівняти для двох частин системи.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + m = 3 \\ k + y = 3 \\ m + n + l = 3 \\ p + k = 3 \\ n + i = 3 \\ t + v = 3 \\ t + b = 3 \\ p + l + v = 3 \\ i + l = 3 \\ t + o = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ m = 1 \\ p = 1 \\ n = 2 \\ k = 2 \\ v = 2 \\ t = 1 \\ l = 0 \\ i = 1 \\ o = 2 \end{array} \right.$$

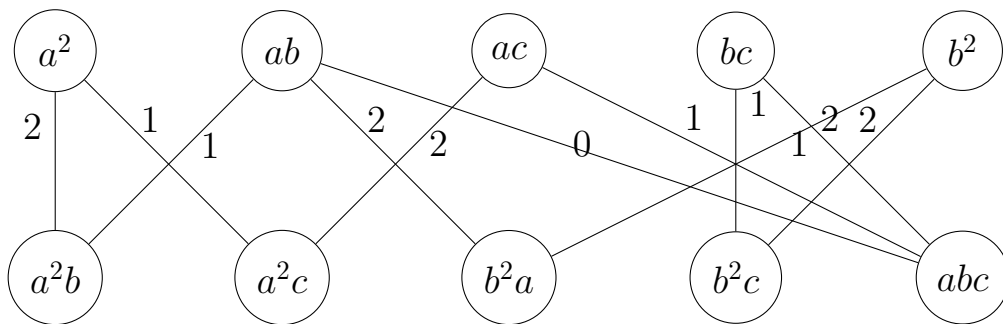


Рисунок 2.15 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^3, b^2, c\}$

Отже отримали зважений граф при переході від двоелементних мультипідмножин до триелементних мультипідмножин:

2.7 Частковий випадок $A = \{a^4, b^2, c\}$

Розглянемо наступний випадок мультимножини виду $A = \{a^4, b^2, c\}$, яка задовольняє умови **Теорема 1**. На елементи накладаються деякі обмеження, а саме потужність $a = 4, b = 2, c = 1$. Розглядаючи наповнення сімейств мультипідмножин від двоелементних до триелементних для декількох випадків множини $A = \{a^n, b^2, c\}$ де n - потужність вхождення елементу a , варіювання потужності елементу a дає змогу дослідити поведження вагів дводольного графу для того, щоб отримати загальну картину, та отримати змогу узагальнити даний підхід доведення на більшу кількість випадків.

Приклад 13. Розглянемо множину $A = \{a^4, b^2, c\}$, збудуємо наповнення 2-елементного сімейства невиключних одна в одну множин, які добудуємо до 3-елементного сімейства:

Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

$$\begin{aligned} \underline{deg} &= 3 - \text{оскільки } |\{a^2, b\}| = |\{a^2, c\}| = |\{a, b, c\}| = \dots \\ \overline{deg} &= |A| - 2 = 3, |A| = 5, |\{a^2\}| = |\{a, b\}| = |\{b, c\}| = |\{a, c\}| = \dots = 2 \end{aligned}$$

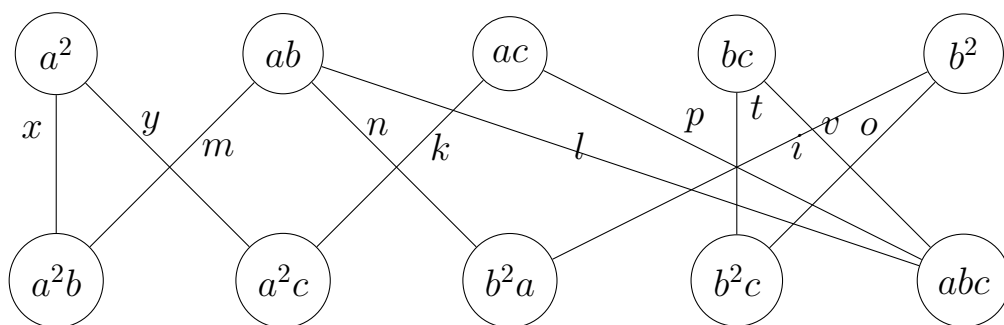


Рисунок 2.16 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^4, b^2, c\}$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь за допомогою метода Гауса, запрограмованого на мові програмування Java. У програму треба ввести коефіцієнти при кожній змінній та рівняння по кожній змінній. Нижче записана система лінійних рівнянь та її розв'язок. Як можна побачити усі коефіцієнти невід'ємні та задовольняють умови **Теорема 1**.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + m = 3 \\ k + y = 3 \\ m + n + l = 3 \\ p + k = 3 \\ n + i = 3 \\ t + v = 3 \\ t + b = 3 \\ p + l + v = 3 \\ i + l = 3 \\ t + o = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ m = 1 \\ p = 1 \\ n = 2 \\ k = 2 \\ v = 2 \\ t = 1 \\ l = 0 \\ i = 1 \\ o = 2 \end{array} \right.$$

Отже отримали зважений граф при переході від двоелементних мультипідмножин до триелементних мультипідмножин:

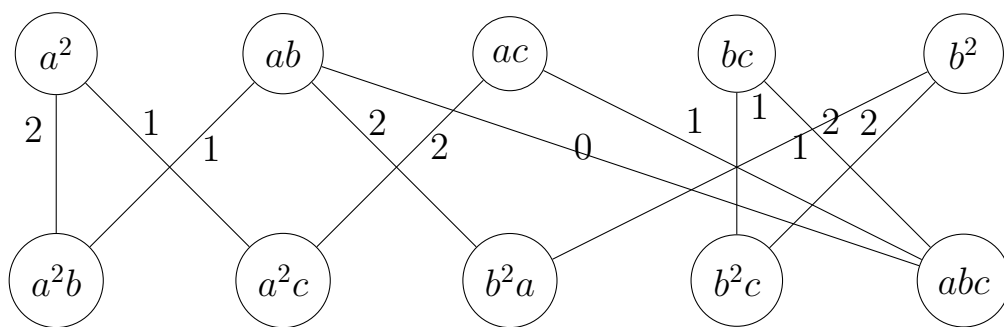


Рисунок 2.17 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^4, b^2, c\}$

2.8 Частковий випадок $A = \{a^5, b^2, c\}$

Розглянемо наступний випадок мультимножини виду $A = \{a^5, b^2, c\}$, яка задовольняє умови **Теорема 1**. На елементи накладаються деякі обмеження, а саме потужність усіх елементів рівна, а один єдиний елемент має потужність одиниця. Оскільки вже була розглянута певна кількість випадків теореми, у частині роботи, де буде розглянуто практичне застосування, є можливість надати явні математичні об'єкти, які можна використовувати у задачі розподілення навантаження. Для "Теорії голосувань" можна отримати верхню оцінку потужності сімейства нескладених одна в одну множин, які мають дуже важливе значення у теорії голосувань.

Приклад 14. Розглянемо множину $A = \{a^5, b^2, c\}$, збудуємо наповнення дво-елементного сімейства нескладених одна в одну множин, які добудуємо до триелементного сімейства:

Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

$$\begin{aligned} \underline{deg} &= 3 - \text{оскільки } |\{a^2, b\}| = |\{a^2, c\}| = |\{a, b, c\}| = \dots \\ \overline{deg} &= |A| - 2 = 3, |A| = 5, |\{a^2\}| = |\{a, b\}| = |\{b, c\}| = |\{a, c\}| = \dots = 2 \end{aligned}$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь за допомогою метода Гауса, запрограмованого на мові програмування Java. У програму треба ввести коефіцієнти

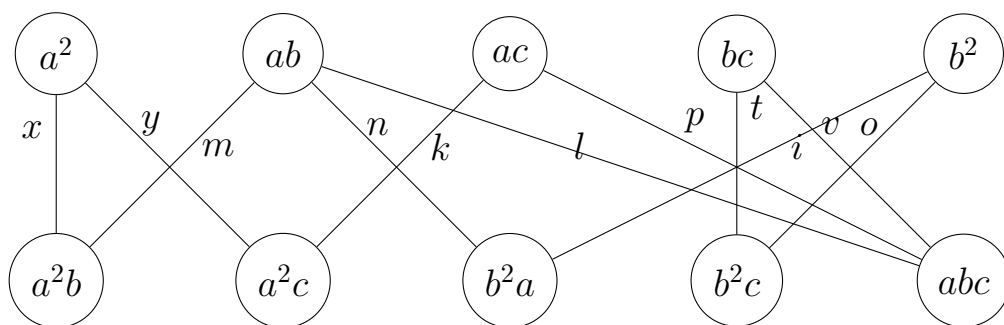


Рисунок 2.18 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^5, b^2, c\}$

при кожній змінній та рівняння по кожній змінній. Нижче записана система лінійних рівнянь та її розв'язок. Як можна побачити усі коефіцієнти невід'ємні та задовольняють умови **Теорема 1**.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + m = 3 \\ k + y = 3 \\ m + n + l = 3 \\ p + k = 3 \\ n + i = 3 \\ t + v = 3 \\ t + b = 3 \\ p + l + v = 3 \\ i + l = 3 \\ t + o = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ m = 1 \\ p = 1 \\ n = 2 \\ k = 2 \\ v = 2 \\ t = 1 \\ l = 0 \\ i = 1 \\ o = 2 \end{array} \right.$$

Отже отримали зважений граф при переході від двоелементних мультипідмножин до триелементних мультипідмножин:

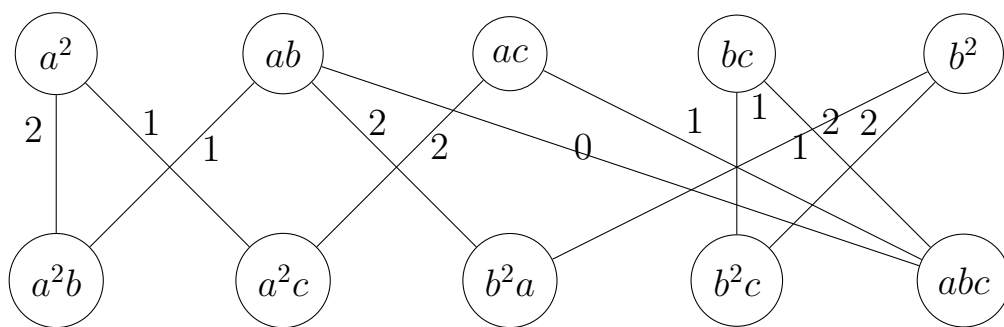


Рисунок 2.19 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^5, b^2, c\}$

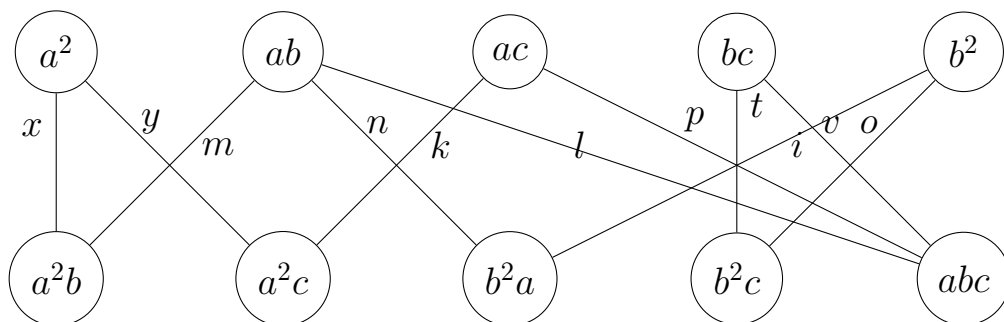


Рисунок 2.20 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^6, b^2, c\}$

2.9 Частковий випадок $A = \{a^6, b^2, c\}$

Розглянемо наступний випадок мультимножини виду $A = \{a^6, b^2, c\}$, яка задовольняє умови **Теорема 1**. На елементи накладаються деякі обмеження, а саме потужність усіх елементів рівна, а один єдиний елемент має потужність одиниця. Провівши декілька ітерацій, та отримавши результати для частинних випадків, можна в майбутньому удосконалити підхід, та розробити програму, яка буде самостійно прораховувати ваги для кожного частинного випадку, тим самим розширюючи кількість частинних випадків, яким задовольняє **Теорема 1**.

Приклад 15. Розглянемо множину $A = \{a^6, b^2, c\}$, збудуємо наповнення 2-елементного сімейства невиключних одна в одну множин, які добудуємо до 3-елементного сімейства:

Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

$$\begin{aligned} \underline{deg} &= 3 - \text{оскільки } |\{a^2, b\}| = |\{a^2, c\}| = |\{a, b, c\}| = \dots \\ \overline{deg} &= |A| - 2 = 3, |A| = 5, |\{a^2\}| = |\{a, b\}| = |\{b, c\}| = |\{a, c\}| = \dots = 2 \end{aligned}$$

Нижче записана система лінійних рівнянь та її розв'язок. Як можна побачити усі коефіцієнти невід'ємні та задовольняють умови **Теорема 1**.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + m = 3 \\ k + y = 3 \\ m + n + l = 3 \\ p + k = 3 \\ n + i = 3 \\ t + v = 3 \\ t + b = 3 \\ p + l + v = 3 \\ i + l = 3 \\ t + o = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ m = 1 \\ p = 1 \\ n = 2 \\ k = 2 \\ v = 2 \\ t = 1 \\ l = 0 \\ i = 1 \\ o = 2 \end{array} \right.$$

Отже отримали зважений граф при переході від 2-елементних мультипідмножин до 3-елементних мультипідмножин:

2.10 Частковий випадок $A = \{a^7, b^2, c\}$

Розглянемо наступний випадок мультимножини виду $A = \{a^7, b^2, c\}$, яка задовольняє умови **Теорема 1**. На елементи накладаються деякі обмеження, а саме потужність усіх елементів рівна, а один єдиний елемент має потужність одиниця.

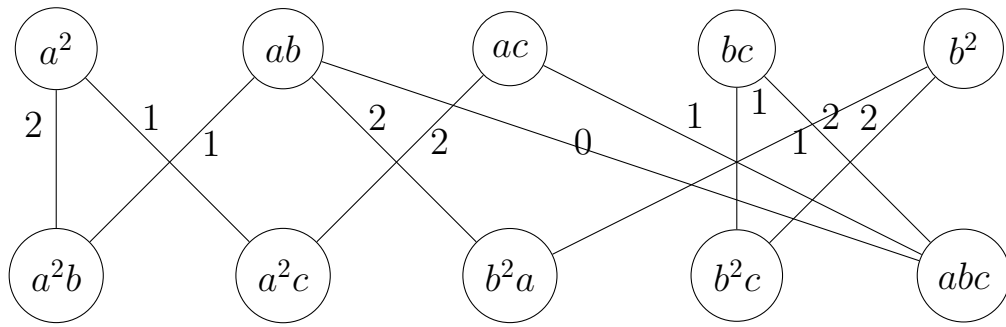


Рисунок 2.21 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^6, b^2, c\}$

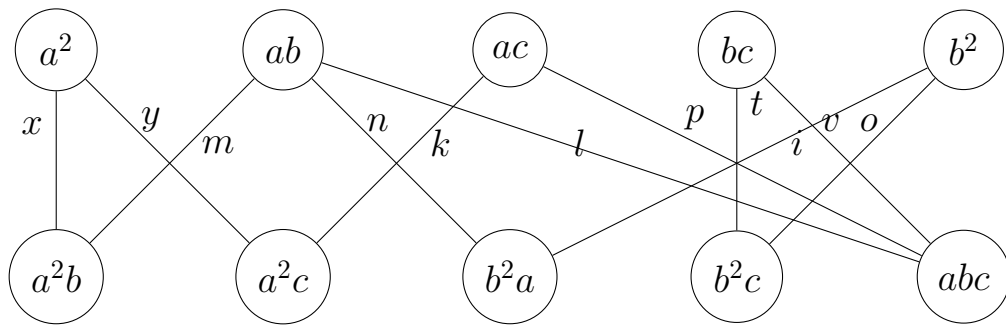


Рисунок 2.22 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^7, b^2, c\}$

Приклад 16. Розглянемо множину $A = \{a^7, b^2, c\}$, збудуємо наповнення 2-елементного сімейства невиключних одна в одну множин, які добудуємо до 3-елементного сімейства:

Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

$$\underline{deg} = 3 \text{ - оскільки } |\{a^2, b\}| = |\{a^2, c\}| = |\{a, b, c\}| = \dots$$

$$\overline{deg} = |A| - 2 = 3, |A| = 5, |\{a^2\}| = |\{a, b\}| = |\{b, c\}| = |\{a, c\}| = \dots = 2$$

Нижче записана система лінійних рівнянь та її розв'язок. Як можна побачити усі коефіцієнти невід'ємні та задовольняють умови **Теорема 1**.

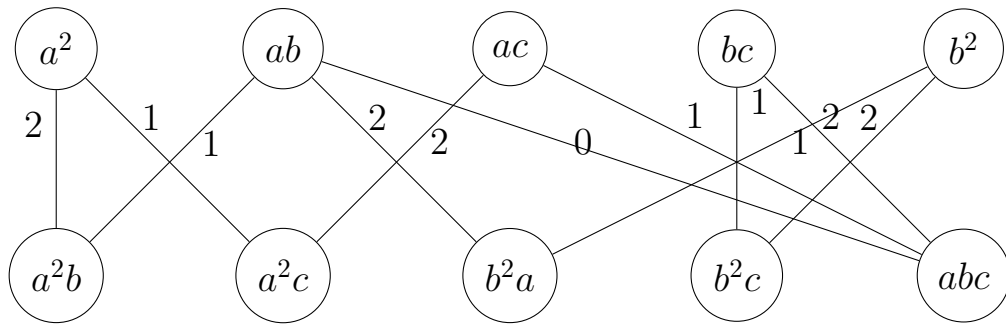


Рисунок 2.23 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^7, b^2, c\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + m = 3 \\ k + y = 3 \\ m + n + l = 3 \\ p + k = 3 \\ n + i = 3 \\ t + v = 3 \\ t + b = 3 \\ p + l + v = 3 \\ i + l = 3 \\ t + o = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ m = 1 \\ p = 1 \\ n = 2 \\ k = 2 \\ v = 2 \\ t = 1 \\ l = 0 \\ i = 1 \\ o = 2 \end{array} \right.$$

Отже отримали зважений граф при переході від двоелементних мультипідмножин до триелементних мультипідмножин:

2.11 Частковий випадок $A = \{a^8, b^2, c\}$

Розглянемо наступний випадок мультимножини виду $A = \{a^8, b^2, c\}$, яка задовольняє умови **Теорема 1**. На елементи накладаються деякі обмеження, а

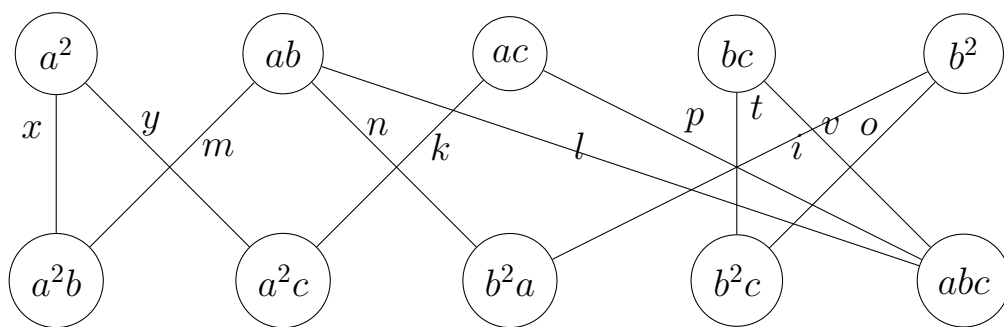


Рисунок 2.24 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^8, b^2, c\}$

саме потужність усіх елементів рівна, а один єдиний елемент має потужність одиниця.

Приклад 17. Розглянемо множину $A = \{a^8, b^2, c\}$, збудуємо наповнення дво-елементного сімейства невідключних одна в одну множин, які добудуємо до триелементного сімейства:

Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

$$\begin{aligned} \underline{deg} &= 3 - \text{оскільки } |\{a^2, b\}| = |\{a^2, c\}| = |\{a, b, c\}| = \dots \\ \overline{deg} &= |A| - 2 = 3, |A| = 5, |\{a^2\}| = |\{a, b\}| = |\{b, c\}| = |\{a, c\}| = \dots = 2 \end{aligned}$$

Нижче записана система лінійних рівнянь та її розв'язок. Як можна побачити усі коефіцієнти невід'ємні та задовольняють умови **Теорема 1**.

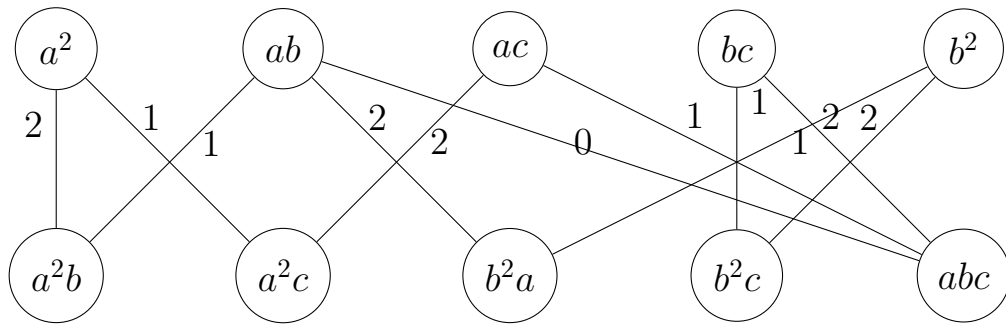


Рисунок 2.25 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^8, b^2, c\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + m = 3 \\ k + y = 3 \\ m + n + l = 3 \\ p + k = 3 \\ n + i = 3 \\ t + v = 3 \\ t + b = 3 \\ p + l + v = 3 \\ i + l = 3 \\ t + o = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ m = 1 \\ p = 1 \\ n = 2 \\ k = 2 \\ v = 2 \\ t = 1 \\ l = 0 \\ i = 1 \\ o = 2 \end{array} \right.$$

Отже отримали зважений граф при переході від двоелементних мультипідмножин до триелементних мультипідмножин:

2.12 Частковий випадок $A = \{a^9, b^2, c\}$

Розглянемо наступний випадок мультимножини виду $A = \{a^9, b^2, c\}$, яка задовольняє умови **Теорема 1**. На елементи накладаються деякі обмеження, а

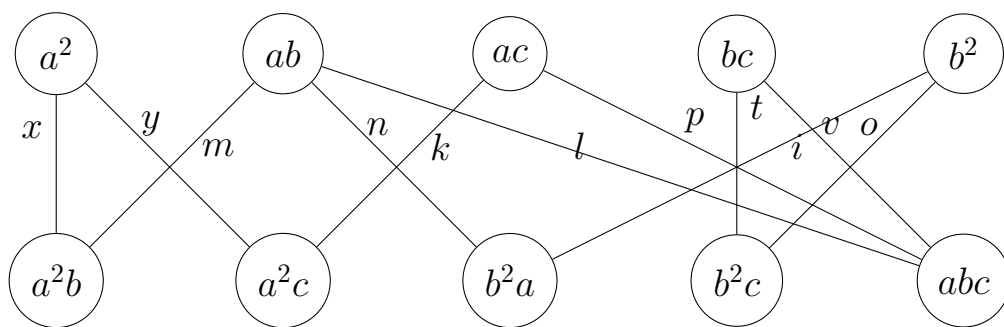


Рисунок 2.26 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^9, b^2, c\}$

саме потужність усіх елементів рівна, а один єдиний елемент має потужність одиниця. Зупинимось на ітерації для якої множина $A = \{a^n, b^2, c\}$, приймає вигляд $A = \{a^9, b^2, c\}$, тобто $n = 9$. Також дуже важливо зазначити, що отримані математичні об'єкти можна використовувати у задачі сильних та слабких груп, яка буде розглянута у розділі практичних застосувань.

Приклад 18. Розглянемо множину $A = \{a^9, b^2, c\}$, збудуємо наповнення дво-елементного сімейства невиключних одна в одну множин, які добудуємо до триелементного сімейства:

Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

$$\begin{aligned} \overline{deg} &= 3 - \text{оскільки } |\{a^2, b\}| = |\{a^2, c\}| = |\{a, b, c\}| = \dots \\ \overline{deg} &= |A| - 2 = 3, |A| = 5, |\{a^2\}| = |\{a, b\}| = |\{b, c\}| = |\{a, c\}| = \dots = 2 \end{aligned}$$

Нижче записана система лінійних рівнянь та її розв'язок. Як можна побачити усі коефіцієнти невід'ємні та задовольняють умови **Теорема 1**.

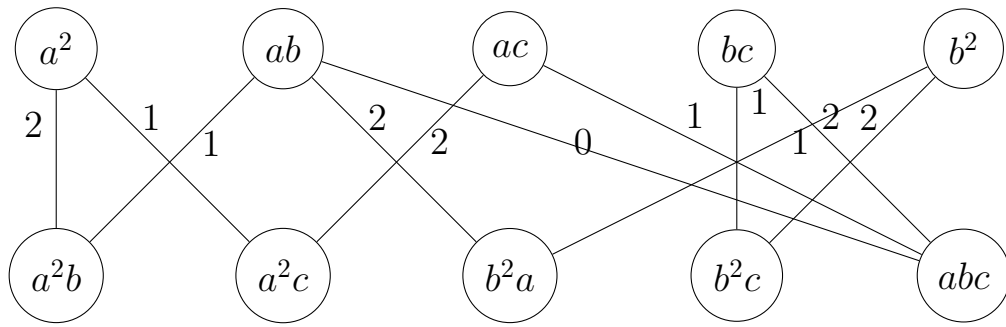


Рисунок 2.27 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^9, b^2, c\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + m = 3 \\ k + y = 3 \\ m + n + l = 3 \\ p + k = 3 \\ n + i = 3 \\ t + v = 3 \\ t + b = 3 \\ p + l + v = 3 \\ i + l = 3 \\ t + o = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ m = 1 \\ p = 1 \\ n = 2 \\ k = 2 \\ v = 2 \\ t = 1 \\ l = 0 \\ i = 1 \\ o = 2 \end{array} \right.$$

Отже отримали зважений граф при переході від двоелементних мультипідмножин до триелементних мультипідмножин:

2.13 Статистичний аналіз розміру антиланцюга

Нехай дана мультимножина $M = \{a_1^{m_1}, \dots, a_n^{m_n}\}$. Підрахуємо кількість усіх можливих підмножин зі зваженою потужністю k :

$$0 \leq k \leq |M| = m_1 + \dots + m_n$$

Тоді будь-якій підмножині $L \subseteq M$ виду $\{a_1^{x_1}, \dots, a_n^{x_n}\}$ ставимо у відповідність вектор:

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \text{ де } 0 \leq x_1 \leq m_1, \dots, 0 \leq x_n \leq m_n.$$

Треба розв'язати підзадачу і знайти кількість векторів $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, які задовольняють умовам (l - деяке число таке, що $0 \leq l \leq n$):

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = k \\ 0 \leq x_1 \leq m_1, \dots, 0 \leq x_l \leq m_l \\ x_{l+1} = \dots = x_n = 0 \end{cases}$$

Нехай D_l^k - відповідь на підзадачу для заданих l та k , тоді очевидно, що:

$$D_0^k = 1, \text{ якщо } k = 0$$

$$D_0^k = 0, \text{ якщо } k \neq 0$$

Також очевидно, що:

$$D_{l+1}^k = D_l^k + D_l^{k-1} + \dots + D_l^{k-m_{l+1}}$$

У формулі наведеній вище кожен доданок виду D_l^{k-l} ставиться у відповідність підмножинам, в яких кратність елемента a_{l+1} дорівнює b ($0 \leq b \leq m_{l+1}$). Розглянемо простий випадок:

$$k \leq m_1, \dots, k \leq m_n$$

Тоді на вектор $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ накладається лише одна умова:

$$x_1 + \dots + x_n = k, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Перепишемо цю умову додавши до кожного x_i одиницю з лівої частини, та додавши n з правої:

$$(x_1 + 1) \dots + (x_n + 1) = k + n$$

$$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

А тепер перепишемо цю формулу зважаючи на нові позначення:

$$y_1 + \dots + y_n = k + n$$

$$y_1 = x_1 + 1, \dots, y_n = x_n + 1$$

$$y_1, \dots, y_n \in \mathbb{N}$$

Представимо розбиття числа $k + n$ у суму $y_1 + \dots + y_n$, як розріз полоски розміром $1 \times (k + n)$ на полоски розмірами $1 \times y_1, \dots, 1 \times y_n$:

Приклад 19. Розглянемо рівняння $y_1 + y_2 + y_3 = 5$:

$$5 = 3 + 1 + 1$$

$$5 = 2 + 2 + 1$$

$$5 = 2 + 1 + 2$$

$$5 = 1 + 3 + 1$$

$$5 = 1 + 2 + 2$$

$$5 = 1 + 1 + 3$$

Кожен переріз - це вибір $(n - 1)$ розрізу з $(k + n - 1)$ можливих, тобто:

$$C_{k+n-1}^{n-1}$$

Як довести, що $D_n^{\lfloor |M|/2 \rfloor}$ - найбільша (нестрога) з усіх D_n^x ($0 \leq x \leq |M|$)?

Використовуючи індукцію по n доведемо, що:

$$D_n^0 \leq D_n^1 \leq \dots \leq D_n^{\lfloor |M|/2 \rfloor}.$$

Очевидний факт, що $D_n^x = D_n^{|M|-x}$ - інверсія множини.

Доведення. Якщо $k \leq \lfloor |M|/2 \rfloor$, то $D_n^k \leq D_n^{k+1}$:

$$k = (n - 1)/2, \text{ тоді } D_n^k \leq D_n^{k+1}$$

$$k \leq n/2 - 1, \text{ тоді } D_n^k = D_{n-1}^k D_{n-1}^{k-1}$$

Використаємо нерівність:

$$D_{n-1}^k + D_{n-1}^{k-1} \leq D_{n-1}^{k+1} + D_{n-1}^k$$

Скоротивши отримаємо:

$$D_{n-1}^{k-1} \leq D_{n-1}^{k+1}$$

Твердження індукції:

$$D_n^0 \leq D_n^1 \leq \dots \leq D_n^{\lfloor |M|/2 \rfloor}$$

Оскільки $k \leq n/2 - 1$, то $k \leq (n-2)/2$, тоді $k < (n-1)/2$.

$$D_{n-1}^k \leq D_{n-1}^{k-1}$$

$$D_{n-1}^k < D_{n-1}^{k-1}$$

Задекларуємо мультимножини:

$$M = \{a_1^{x_1}, \dots, a_n^{x_n}\}$$

$$\overline{M} = \{a_1^{x_1}, \dots, a_{n-1}^{x_{n-1}}\}$$

Нехай $D_{|M|}^k$ кількість k елементних мультिवибірок з M , тоді $D_{|M|}^k = D_{|M|}^k + D_{|M|}^{k-1} + \dots + D_{|M|}^{k-x} = 0$, враховуючи, що $D_{|M|}^k = D_{|M|}^{\overline{M}-k}$.

Доведення по індукції: $D_{|M|}^k = D_{|M|}^{k-b_n} + \dots + D_{|M|}^k$, де $\overline{M} = M \setminus a_n^{b_n}$.

□

Для підрахунку більш складних випадків, коли кількість елементів у мультимножині довільна та потужність кожного елемента теж довільна, можна використати формулу включень та виключень задля вирішення задачі, тобто обрахунок для кожного елемента ведеться для тих мультипідмножин яким він належить та з яких виключається, щоб виключити повтори:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| \right)$$

Висновки до розділу 2

Розглянуто та доведено частинні випадки, які задовольняють умови теореми. Розглянуто та запропоновано можливість статистичного обрахунку потужності сімейства нескладених одна в одну мультипідмножин. Запропоновано нові можливості доведення ускладнених випадків теореми та розширено частинні випадки, які можна використовувати для прикладних задач.

3 ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ

3.1 Теорія голосування

Система голосування на множині виду $M = \{a_1^{x_1}, \dots, a_n^{x_n}\}$ - це така функція:

$$F = B(M) \rightarrow \{0,1\}$$

$$\forall A, B \subseteq M : A \subseteq B, \text{ то } F(A) \leq F(B)$$

Де $B(M)$ - сімейство всіх мультипідмножин $L \subseteq M$

Звернемо увагу, що F взаємно-однозначно задається набором "мінімальних прохідних підмножин":

$$F(L) = 1, L \subseteq M$$

$$\forall K \subset L : F(K) = 0$$

Сімейство некладених одна в одну множин [3] має дуже важливе значення, оскільки представляє собою набір множин які неможливо порівняти між собою у рамках задачі теорії голосувань. Можливість мати на примітку множини, які задовольняють умови **Теорема 1** є дуже важливим прикладним моментом, оскільки в теорії голосувань ми будемо мати безпосередньо мати справу з цими множинами, а отже мати представлення про потужність та структуру таких множин є дуже важливим прикладним нюансом.

Множина $M = \{a_1^{x_1}, \dots, a_n^{x_n}\}$ може представляти партії, а кожен елемент a_i - одиницю партії, тобто людину, яка може віддати свій голос. Кожна людина яка належить одній партії буде розлянута, як еквівалентна в рамках даної партії, тобто голоси таких виборчих одиниць є рівнозначними. Підсумуємо: множина $M = \{a_1^{x_1}, \dots, a_n^{x_n}\}$, складається з партій a_i , а x_i - це кількість виборчих одиниць у партії (людей).

3.2 Потоки у графах

У теорії алгоритмів та дослідженні операцій проблема максимального потоку включають пошук можливого потоку на графі через мережу потоків. Ця задача має дуже важливе значення, оскільки проблеми, які вирішуються за допомогою урівноваження графу, та пошуку найкоротшого та найдешевшого шляху дуже важливі у транспортних задачах.

Проблему максимального потоку можна розглядати як окремий випадок більш складних проблем, таких як проблема циркуляції. Максимальне значення потоку дорівнює мінімальній пропускній здатності розрізу у мережі, як зазначено в мінімальному максимальному потоку. З точки зору задачі, яка розглядається у даній роботі, ми розглянемо частковий випадок транспортної задачі, де роль пунктів заїзду (доставки) товарів відіграють долі двочасткового графу. Задача є виокремленою частиною та є підмножиною загальних транспортних задач.

Розглянемо застосування даного способу балансування графу на прикладі:

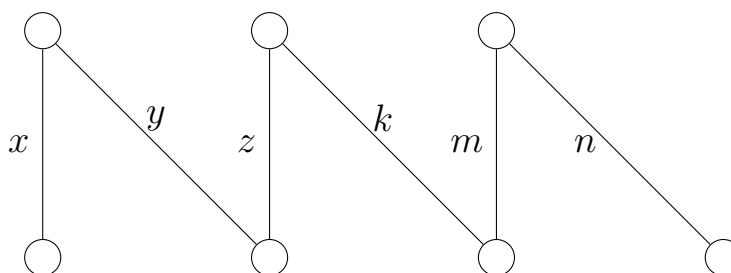


Рисунок 3.1 — приклад системи для балансування

З моєї бакалаврської роботи відомо випадок, який було доведено, а саме $K = \{a^m, b^n\}$, тобто елемент a має потужність m , а елемент b — n . Для цього випадку було отримано явний вид формул, за допомогою яких можна увантахити граф.

Тобто для системи, яка може бути представлена у вигляді двочасткового

графу, де кожна доля представляє собою однотипні рівноважні вузли, іншими словами всі вузли, які належать одній долі графу - еквівалентні та мають одну вагу. Для прикладу це можуть бути джерелами споживання напруги, а ребра - це проводи з відповідними коефіцієнтами опору (дуже грубий приклад). Тоді можна відповідно вирішивши систему рівнянь, перед цим задавши ступені для верхньої та нижньої долі, отримати навантаження для кожного ребра задля балансування графу. Отже, якщо взяти за приклад мультимножину, для якої вже було доведено ускладнений випадок теореми, та обрахувати ступені входження для кожної долі, можна отримати зважену систему. Тож розглянемо приклад:

Нехай $K = \{2, 2, 2, 3, 3\}$, тобто множина $K \subseteq \{a^m, b^n\}$.

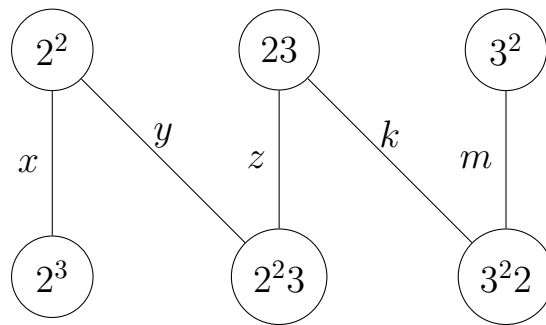


Рисунок 3.2 — приклад системи для балансування

Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

$$\begin{aligned} \underline{deg} &= 3 - \text{оскільки } |\{2^2\}| = |\{2, 3\}| = |\{3^2\}| = 3 \\ \overline{deg} &= |K| - 2 = 3, |K| = 5, |\{3^2, 2\}| = |\{2^2, 3\}| = |\{b, c\}| = |\{2^3\}| = 3 \end{aligned}$$

Як можна бачити отримали $\underline{deg} = \overline{deg} = 3$, задля зручності можна розілити отримані коефіцієнти на 3, тобто потужності ступенів входу у верхню та нижню долі дорівнюють одиниці.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ z + k = 1 \\ k + m = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ k = 0 \\ m = 1 \end{array} \right.$$

Нехай $K = \{2, 2, 2, 3, 3, 3\}$, тобто множина $K \subseteq \{a^m, b^n\}$.

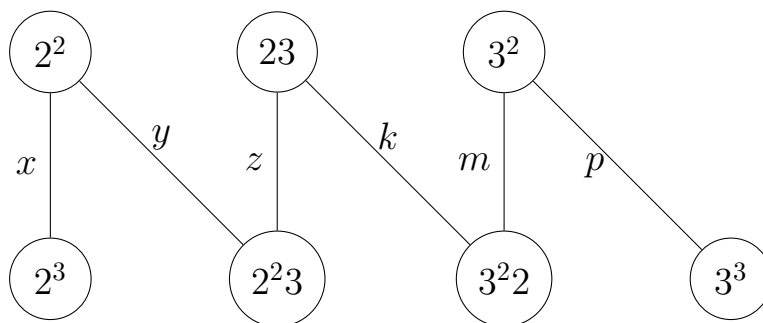


Рисунок 3.3 — приклад системи для балансування

Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

$$\begin{aligned} \underline{deg} &= 3 - \text{оскільки } |\{2^2\}| = |\{2, 3\}| = |\{3^2, 2\}| = 3 \\ \overline{deg} &= |K| - 2 = 4, |K| = 6, |\{3^2, 2\}| = |\{2^2, 3\}| = |\{b, c\}| = |\{2^3\}| = 3 \end{aligned}$$

Як можна бачити отримали $\underline{deg} = 3$, $\overline{deg} = 4$, задля зручності можна розілити отримані коефіцієнти на 3, тобто потужності ступенів входу у верхню та нижню долі дорівнюють одиниці.

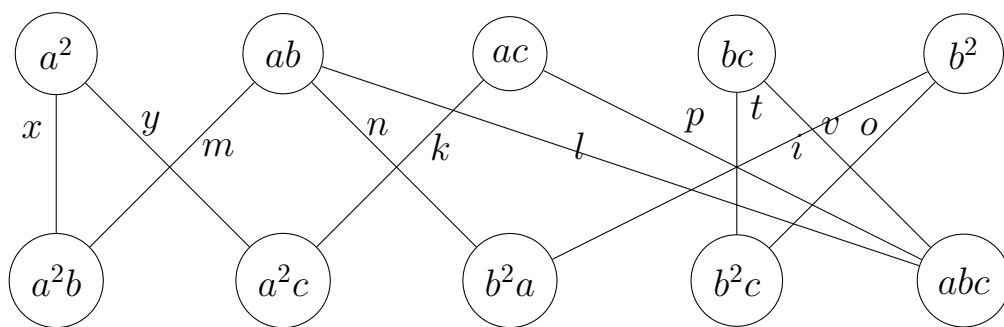


Рисунок 3.4 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^9, b^2, c\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 4 \\ y + z = 3 \\ z + k = 4 \\ k + m = 3 \\ m + p = 4 \\ p = 3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 2 \\ k = 2 \\ m = 1 \\ p = 3 \end{array} \right.$$

Таким же чином можна застосувати даний тип увантаження на часткових випадках, які були доведені вище, наприклад:

Для системи, яка має вигляд, або описується множиною $A = \{a^9, b^2, c\}$, задано граф, який явно можна увантажити:

Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

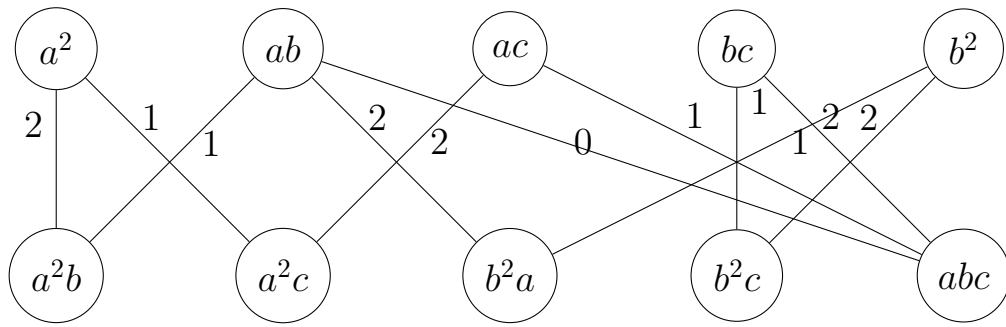


Рисунок 3.5 — граф з вагами, для мультимножини $A = \{a^9, b^2, c\}$

$$\underline{deg} = 3 - \text{оскільки } |\{a^2, b\}| = |\{a^2, c\}| = |\{a, b, c\}| = \dots$$

$$\overline{deg} = |A| - 2 = 3, |A| = 5, |\{a^2\}| = |\{a, b\}| = |\{b, c\}| = |\{a, c\}| = \dots = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + m = 3 \\ k + y = 3 \\ m + n + l = 3 \\ p + k = 3 \\ n + i = 3 \\ t + v = 3 \\ t + b = 3 \\ p + l + v = 3 \\ i + l = 3 \\ t + o = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ m = 1 \\ p = 1 \\ n = 2 \\ k = 2 \\ v = 2 \\ t = 1 \\ l = 0 \\ i = 1 \\ o = 2 \end{array} \right.$$

3.3 Сильні та слабкі групи

Розглянемо булеан множини $A = \{1, \dots, n\}$ та позначимо його як 2^A , тоді цей булеан можна розбити на два класи X та Y , причому:

$$X \cup Y = 2^A$$

$$X \cap Y = \emptyset$$

$$\forall N \in X \forall M \in Y : NM$$

Розглянемо сімейство K тіп сильних підмножин, тобто всіх таких NX , що $Y \nsubseteq N \in X : YX$. Будь-яке розбиття (X, Y) задає набір K . Тобто, за допомогою доведення ускладненого випадку теореми, отримано можливість оцінити розмір сімейства K .

Висновки до розділу 3

Розглянуто прикладні можливості застосування теореми у задачах: "Теорія Голосувань", "Балансування на графі" та "Сильні та Слабкі групи". Приведено приклади застосування теореми для цих задач. Наведено та описано сутність задач та їх важливість у повсякденному світі. Розглянуто застосування доведених частинних випадків для наведених задач.

ВИСНОВКИ

В результаті виконання роботи вдалося довести ускладнений випадок теореми для деякої кількості частинних випадків мультимножини. Тобто отримано математичні об'єкти, які задовольняють умовам теореми та використано ці об'єкти для того, щоб показати прикладні можливості застосування теореми. Розглянуто прикладні можливості застосування ускладненого випадку теореми у таких прикладних задачах: "Теорія Голосувань" Сильні та слабкі групи "Балансування дводольного графу". Запропоновано можливість статистично обрахувати потужність сімейства невідключних одна в одну множин. Приведено рекурентну формулу за допомогою якої можна ітеративно обрахувати кількість різних мультимножин розміру k вибраних із множини потужністю n . Розроблено метод доведення ускладненого випадку теореми, який базується на доведенні звичайного випадку теореми.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

- 1 Липский, В. Комбінаторика для програмістів / В. Липский // Computers & maths. — Москва, "Мир 1988.
- 2 Капітонова, Ю.В. Лекції з дискретної математики / Ю.В. Капітонова // Computers & maths. — БХВ-Петербург, 2004.
- 3 Тарасенко, С.А. Теорема Шпернера / С.А. Тарасенко // *Modeling, Control and Information Technologies: Proceedings of International Scientific and Practical Conference*. — 2021. — Vol. 5, no. 1. — Pp. 87–89.