НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ, РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ ТА КОМП’ЮТЕРНОГО ЗОРУ

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
_______ Н. М. Куссуль
(підпис) (ініціали, прізвище)
“_____” _______________
2021 р.

Дипломна робота

освітньо-кваліфікаційного рівня “магістр”

за спеціальністю 113 «Прикладна математика»
на тему «Прикладні можливості застосування мультимножинного випадку теореми Шпернера та часткові випадки теореми»
Виконав студент 6 курсу групи ФІ-01мп
Тарасенко С.А. _______ (підпис)
Керівник доценкт, Рибак О.В. _______ (підпис)
Рецензент Rank, Name _______ (підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _______

Київ — 2021 року

РЕФЕРАТ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

ABSTRACT

KEYWORDS

РЕФЕРАТ

СЛОВА

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність роботи.

Об’єкт дослідження –

Предмет дослідження –

Мета дослідження.

Завдання наступні:

1) Вивчити;
2) Розробити.

Практичне значення одержаних результатів.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

У цьому розділі буде розглянуто та наведено необхідний математичний апарат та теоретичні відомості стосовно проблеми яка лежить в основі даної магістерської дисертації. Розглянемо основне твердження стосовно теореми Шпернера та усі супутні визначення та твердження необхідні для вирішення поставленної задачі.

1.1 Огяд математичного апарату

Теорема 1. *Нехай* $M = \{1,...,n\}$ *множина яка скаладється з елементів натурального ряду,* $M_1,...,M_k$ *- набір підмножин множини* M *такі, що* $\forall M_i,M_j$: $M_i \not\subset M_j$*, тоді виконується дуже проста нерівність* $k \leq {C_n}^{[n/2]}$*, де* k *- це кількість множин у наборі* $M_1,...,M_k$*,* n *- загальна кількість елементів множини* M *(тобто потужність множини* M*, далі будемо позначати як* $|M|$*),* ${C_n}^{[n/2]}$ *- біноміальний коефіцієнт,* $[n/2]$ *- ціла частина від діллення* n *навпіл.*

Розглянемо одне з можливих доведь теореми базуючись на твердженні доведення якого буде представлене нижче.

Твердження 1. *Нехай* $M_1,...,M_k$ *- попарно не належать одна в одній підмножини множини* $M = \{1,...,n\}$*, нехай* $|M_1| = m_1,...,|M_k| = m_k$*, тоді має місце нерівність:*

$$\frac{1}{{C_n}^{m_1}} + \frac{1}{{C_n}^{m_2}} + ... + \frac{1}{{C_n}^{m_k}} \leq 1 \tag{1.1}$$

Доведення. Розглянемо для кожного $M_i, i = 1,..,k$ перетасовування множини $\{1,...,n\}$ зроблені за наступним принципом:

a_1	a_2	.	.	a_k	a_{k+1}	.	.	.	.	a_n

Де $a_1,...,a_k \in M_i$, а $a_{k+1},...,a_n$ - всі інші елементи, тоді перша частина такої перетасовування, тобто $a_1,...,a_k$ може мати $(m_i)!$ різних варіантів, а права частина, тобто $a_{k+1},...,a_n$, $(n-m_i)!$ різних варіантів, де n - потужність множини $\{1,...,n\}$. Варто зазначити, що для різних множин M_i, M_j відповідні перетасовування будуть відрізнятись. Якщо дві перетасовування двох множин M_i, M_j співпадають, це означає, що $M_i \subseteq M_j$, або $M_j \subseteq M_i$.

Тому маємо:

$m_1!(n-m_1)! + ... + m_k!(n-m_k)! \leq n!$, де $n!$ - число усіх можливих перетасовувань множини $\{1,...,n\}$. Розділимо обидві частини отриманої нерівності на $n!$ та отримаємо суму обернених біноміальних коефіцієнтів з лівої частини та одиницю з правої: $\frac{1}{C_n{}^{m_1}} + \frac{1}{C_n{}^{m_2}} + ... + \frac{1}{C_n{}^{m_k}} \leq 1$, що і треба було довести. $\square$

Наслідок 1. *Виходячи з формули (1.1) отримаємо, що кількість різних M_i не перевищує $C_n{}^{[n/2]}$. Так як $C_n{}^{m_i} \leq C_n{}^{[n/2]}$ маємо $\frac{1}{C_n{}^{[n/2]}} + \frac{1}{C_n{}^{[n/2]}} + ... + \frac{1}{C_n{}^{[n/2]}} \leq \frac{1}{C_n{}^{m_1}} + \frac{1}{C_n{}^{m_2}} + ... + \frac{1}{C_n{}^{m_k}} \leq 1$, у найлівішій частині рівняння доданок $\frac{1}{C_n{}^{[n/2]}}$ зустрічається k разів, тобто $\frac{k}{C_n{}^{[n/2]}} \leq 1$, або ж якщо записати у звичному вигляді $k \leq C_n{}^{[n/2]}$.*

Поставлена задача узагальнити дану теорему на випадок коли множина $M = \{1,...,n\}$ може мати елементи які належать їй декілька разів $1 \leq$, тобто математичний об'єкт M набуває мультимножинних властивостей. Дана задача вже була частково розглянута у моїй бакалаврській дипломній роботі. Було розглянуто деякі часткові випадки мультимножин, які задовольняють умовам теореми. У даній роботі буде більш детально розглянуто прикладне застосування теореми, та узагальнення її на більшу кількість окремих випадків мультимножин. Для того, щоб математичні викладки та послідовність дій була зрозумілою унаступному розділі наводяться необхідні теоретичні відомості та означення базуючись на яких було отримано результати, які будуть описані нижче.

1.2 Теорія мультимножин

Над мультимножинами визначені такі основні операції: об'єднання, перетин, арифметичне додавання, арифметичне віднімання, доповнення, симетрична різниця, множення на число, арифметичне множення та зведення в арифметичну ступінь, прямий твір та зведення у прямий ступінь. Ми розглянемо лише деякі основні операції необхідні для подальших дій над мультимножинами.

Визначення 1. *Мультимножина - модифіковане поняття множини, що допускає наявність одного і того ж елемента в ній по кілька разів. Число елементів у мультимножині, з урахуванням елементів які повторюються, називається його розміром або потужністю.*

Визначення 2. *Об'єднанням мультимножин* A *та* B *називається мультимножина, якій належать з усі елементи, які присутні хоча б в одній з мультимножин, і кількість входжень кожного елемента дорівнює максимальній кількості входжень відповідних елементів в мультимножинах, що об'єднуються:*

$$C = A \cup B = \{max(x_i^{k_i}, x_j^{k_j})\}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B$$

Визначення 3. *Перетином мультимножин* A *та* B *називається мультимножина, що складається з усіх елементів, які присутні у кожній з мультимножин, і кількість входжень кожного елемента дорівнює мінімальній кількості входжень відповідних елементів у мультимножинах, що перетинаються:*

$$C = A \cap B = \{min(x_i^{k_i}, x_j^{k_j})\}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B$$

Визначення 4. *Арифметичною сумою мультимножин* A *та* B *називається мультимножина, що складається з усіх елементів, які належать хоча б в одній з мультимножин, і кратність кожного елемента дорівнює сумі кратностей відповідних елементів у мультимножинах, що складаються:*

$$C = A + B = \{x^k | x^k = x_i^{k_i} + x_j^{k_j}\}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B$$

Визначення 5. *Арифметичною різницею мультимножин A та B називається мультимножина, що складається з елементів мультимножини A, кратність яких перевищує кратність відповідних елементів у мультимножині B. Кратність кожного елемента результуючої множини дорівнює різниці кратностей відповідних елементів в мультимножинах, що віднімаються:*

$$C = A - B = \{x^k | x^k = x_i^{k_i} - x_j^{k_j}, k_i > k_j, 0\ otherwise\}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B$$

1.3 Теорія графів

Визначення 6. *Граф — математична абстракція системи будь-якої природи, об'єкти якої мають парні зв'язки. Граф як математичний об'єкт є сукупність двох множин: множина вершин і множина ребер. Елементом множини ребер є пара елементів множини вершин.*

Визначення 7. *Простим графом $G(V,E)$ є сукупність двох множин: непустої множини V та множини E невпорядкованих пар різних елементів множини V. Множина V називається множиною вершин, множина E називається множиною ребер:*

$$G(V,E) = \langle V,E \rangle, \quad V \neq \varnothing, \quad E \subseteq V \times V, \quad \{v,v\} \notin E, \quad v \in V$$

Визначення 8. *Дводольний граф або біграф в теорії графів - це граф, множину вершин якого можна розбити на дві долі таким чином, що кожне ребро графу з'єднує кожну вершину з однієї долі з якоюсь вершиною з іншої долі, тобто не існує ребер між вершинами однієї і тієї ж частини долі. Неорієнтований граф $G = (W,E)$ називається дводольним, якщо множину його вершин можна розбити на дві підмножини $W = U \cup V$ так, що:*

- *жодна вершина в U не з'єднана з вершинами в U*

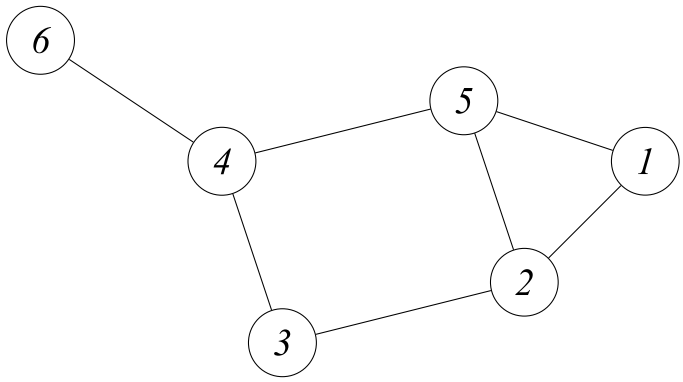
- *жодна вершина в V не з'єднана з вершинами в V*

У цьому випадку підмножини вершин U та V називаються частками двудольного графа G.

Приклад 1. *Розглянемо приклад простого графу:*

$V = \{1,2,3,4,5,6\}$

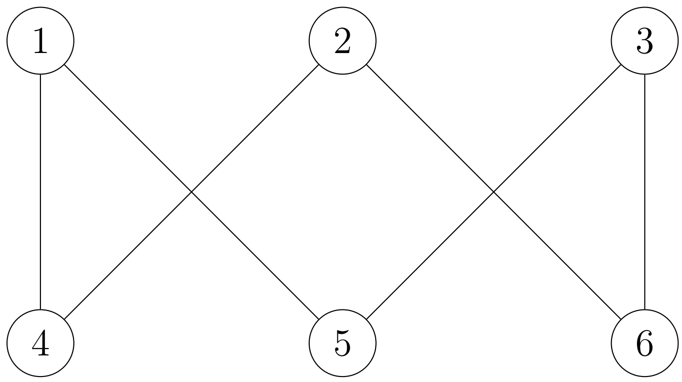
$E = \{(1,2),(1,5),(5,2),(5,4),(2,3),(3,4),(4,6)\}$



Приклад 2. *Розглянемо приклад дводольного графу:*

$V = \{1,2,3,4,5,6\}$

$E = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,6),(3,5),(3,6)\}$



У даному випадку ми можемо розділити множину вершин на дві:

$$V = U \cup P, P = \{1,2,3\} \text{ та } U = \{4,5,6\}.$$

Немає жодного ребра яке пов'язує вершини множин P із вершинами множини P, аналогічно для множини U.

Теорема 2. *В дводольному графі для будь-якого натурального k будь-які вершини однієї долі, де k не перевищує числа вершин доль, пов'язані принаймні з k різними вершинами іншої долі тоді і лише тоді, коли граф розбивається на пари першою часткою.*

1.4 Постановка задачі

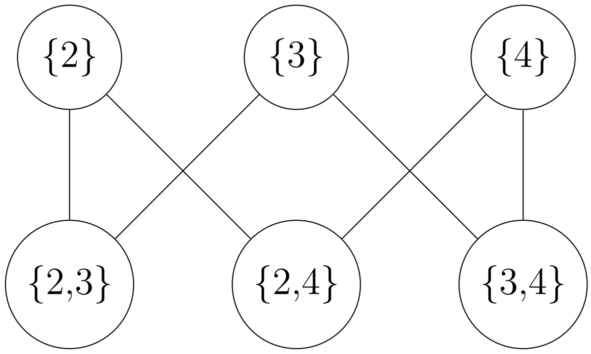
Теорема 3. *Довести* **Теорему 1** *у тому вигляді, у якому вона описана, зважаючи лише на те що об'єкт M у твердженні теореми тепер може мати мультимножинну природу.*

Доведення. Використаємо підхід, який базується на **Теоремі 2**. У даному доведенні буде описуватись один з можливих підходів рішення та доведення **даної теореми** через навантаження ребер двочасткового графу певними коефіцієнтами. У моїй бакалаврській роботі було розглянуто такі випадки:

$$A = \{z^m, x^m\}, B = \{w_0^2, w_1, \ldots, w_n\}$$

Як вже було доведено раніше у **Теоремі 1** для звичайного типу множин завжди існує паросполучення при додаванні до сімейства невкладених множин розміру n одного елемента для того, щоб утворити сімейство невкладених множин якому належать множини розміру $n+1$. Для звичайного випадка теореми це і доводить, що максимально можливий розмір такого сімейства ${C_n}^{[n/2]}$. Для випадка коли множина має мультимножинну природу використати **Теорему 1** у тому вигляді як описано вище неможливо.

Приклад 3. *Розглянемо множину $A = \{2, 3, 4\}$, збудуємо наповнення одноелементного сімейства невключних одна в одну множин, які добудуємо до двоелементного сімейства:*

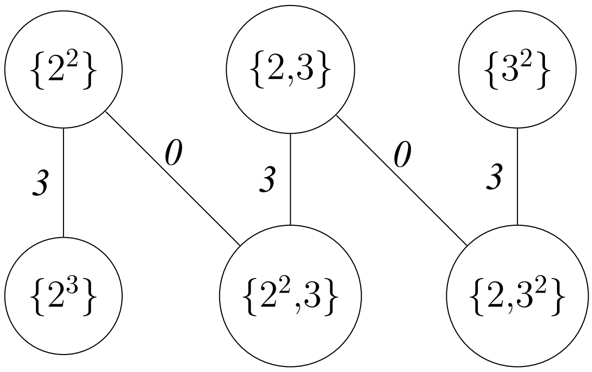


Ідея полягає в тому, щоб перенести підхід паросполучення використовуючи вагові коефіцієнти. Як можна бачити з малюнка:

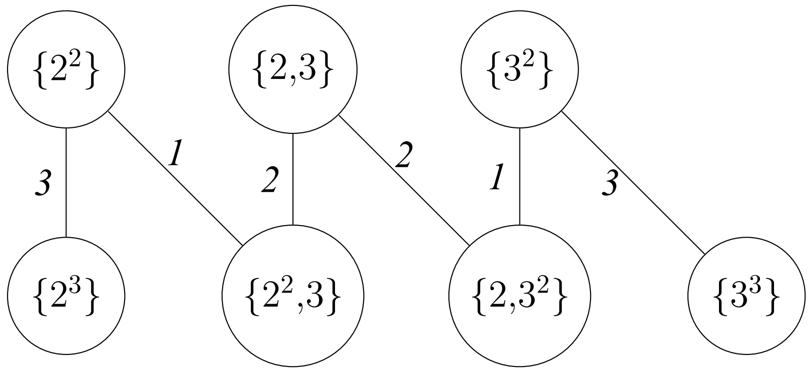
$$\underline{deg} = t$$
$$\overline{deg} = n - t$$

Але це можливо лише для випадку коли відповідні ребра навантажені вагами. Нижче буде розглянуто декілька прикладів для розуміння повної картини. $\square$

Приклад 4. *Розглянемо множину* $A = \{2^3,3^2\}$*, збудуємо наповнення двоелементного сімейства невключних одна в одну множин, які добудуємо до триелементного сімейства:*



Приклад 5. *Розглянемо множину* $A = \{2^3{,}3^3\}$, *також збудуємо наповнення двоелементного сімейства невключних одна в одну множин, які добудуємо до триелементного сімейства:*



Тобто обрахунок ведеться за допомогою формул:

$$\underline{deg} = t$$
$$\overline{deg} = n - t$$

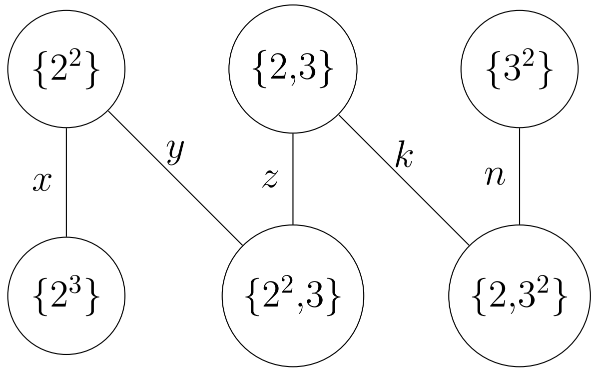
n - мультипотужність множини на основі якої будується сімейство невкладених одна в одну множин

t - мультипотужність множини яка належить сімейству невкладених одна в одну множин (для $\underline{deg}$, t - це потужність множини яка належить нижній долі, для $\overline{deg}$, t - це потужність множини яка належить верхній долі)

Тобто для **Прикладу 4**:

$$\underline{deg} = 3 \text{ - оскільки } |\{2^3\}| = |\{2^2{,}3\}| = |\{2{,}3^2\}|$$
$$\overline{deg} = |A| - 2 = 3 \text{ - оскільки } |A| = 5, |\{2^2\}| = |\{2{,}3\}| = |\{3^2\}| = 2$$

Далі складається система лінійних рівнянь:

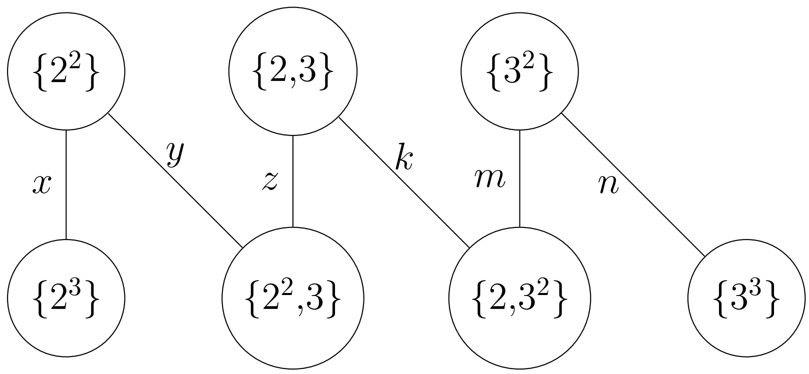


$$\begin{cases} x = 3 \\ x + y = 3 \\ y + z = 3 \\ z + k = 3 \\ k + n = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 3 \\ k = 0 \\ n = 3 \end{cases}$$

Для **Прикладу 5**:

$$\underline{deg} = 3 \text{ - оскільки } |\{2^3\}| = |\{2^2,3\}| = |\{3^3\}|$$
$$\overline{deg} = |A| - 2 = 4 \text{ - оскільки } |A| = 6, |\{2^2\}| = |\{2,3\}| = |\{3^2\}| = 2$$

Далі складається система лінійних рівнянь:



$$\begin{cases} x = 3 \\ x + y = 4 \\ y + z = 3 \\ z + k = 4 \\ k + m = 3 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 2 \\ k = 2 \\ m = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

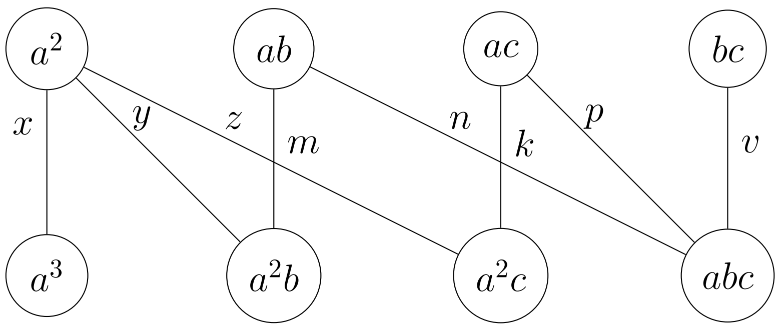
Таким способом у бакалаврській роботі було доведено випадки $A = \{z^m, x^m\}, B = \{w_0^2, w_1, ..., w_n\}$. У наступному розділі буде розглянуто декілька інших часткових випадків, для яких буде доведено **Теорему 1**, та будуть записані явні формули обрахунку вагів для графу. За допомогою цих формул можна переконатись, що паросполучення існує і побудувати його явно. Таким чином доводиться для множин мультимножинної природи справедливість **Теореми 1**. Прикладе застосування математичних об’єктів, які задовольняють умови теореми буде описано у роздулах пізніше.

2 ЧАСТКОВІ ВИПАДКИ ТЕОРЕМИ

2.1 Частковий випадок $A = \{a^m, b, c\}$

Почнемо розглядати новий випадок мультимножини виду $A = \{a^m, b, c\}$, яка задовольняє умови **Теореми 1**. На елемент a^m накладаються деякі обмеження, а саме: $m \geq 3$, оскільки при $m = 1$ висхідна множина втрачає мультимножинні властивості, щодо випадку коли $m = 2$, то цей випадок вже був розглянутий у бакалаврській роботі, та включається у випадок $B = \{w_0^2, w_1,...,w_n\}$. Почнемо з частинних випадків коли m набуває конкретних значень, щоб побачити закономірності у зажуванні дводольного графу та формули за допомогою яких будуть обраховуватись ваги.

Приклад 6. *Розглянемо множину $A = \{a^3, b, c\}$, збудуємо наповнення двоелементного сімейства невключних одна в одну множин, які добудуємо до триелементного сімейства:*

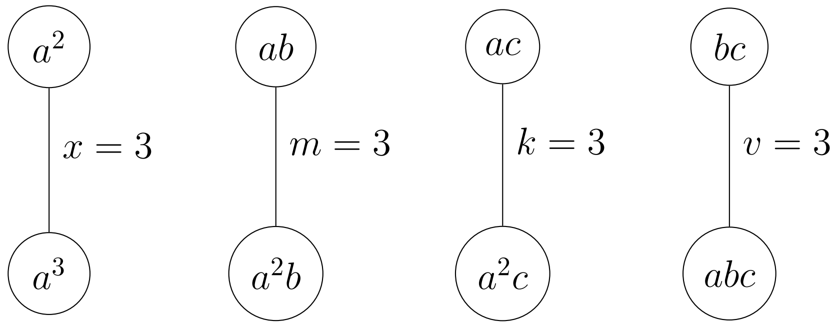


Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

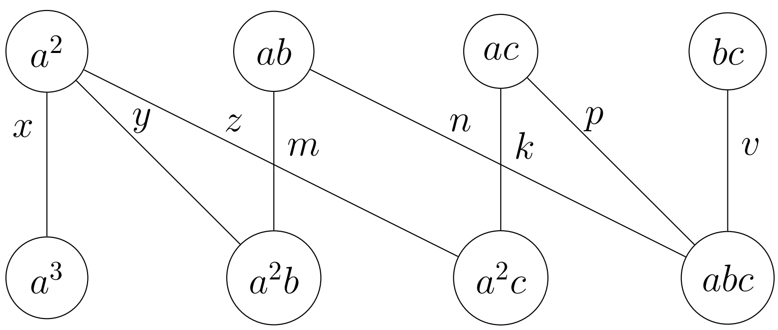
$$\underline{deg} = 3 \text{ - оскільки } |\{a^3\}| = |\{a^2,b\}| = |\{a^2,c\}| = |\{a,b,c\}|$$
$$\overline{deg} = |A| - 2 = 3 \text{ - оскільки } |A| = 5, |\{a^2\}| = |\{a,b\}| = |\{b,c\}| = |\{a,c\}| = 2$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x + y + z = 3 \\ m + y = 3 \\ m + n = 3 \\ z + k = 3 \\ k + p = 3 \\ n + p + v = 3 \\ v = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ m = 3 \\ n = 0 \\ k = 3 \\ p = 0 \\ v = 3 \end{cases}$$

Для випадку коли вага ребра дорівнює 0, виключаємо таке ребро із графу, тобто отримали повне паросполучення:



Розглянемо множину $A = \{a^4, b, c\}$, так само збудуємо наповнення двоелементного сімейства невключних одна в одну множин, які добудуємо до триелементного сімейства:



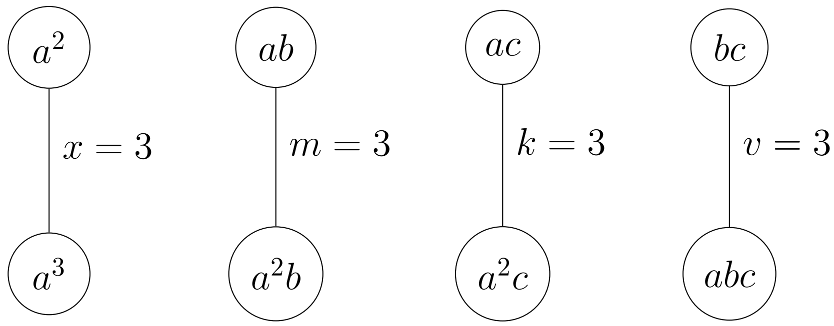
Так само як для попереднього випадку:

$$\underline{deg} = 3 \text{ - оскільки } |\{a^3\}| = |\{a^2,b\}| = |\{a^2,c\}| = |\{a,b,c\}|$$

$$\overline{deg} = |A| - 2 = 3 \text{ - оскільки } |A| = 5, |\{a^2\}| = |\{a,b\}| = |\{b,c\}| = |\{a,c\}| = 2$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x + y + z = 3 \\ m + y = 3 \\ m + n = 3 \\ z + k = 3 \\ k + p = 3 \\ n + p + v = 3 \\ v = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ m = 3 \\ n = 0 \\ k = 3 \\ p = 0 \\ v = 3 \end{cases}$$

Для випадку коли вага ребра дорівнює 0, ми виключаємо таке ребро із графу, тобто ми отримали повне паросполучення:

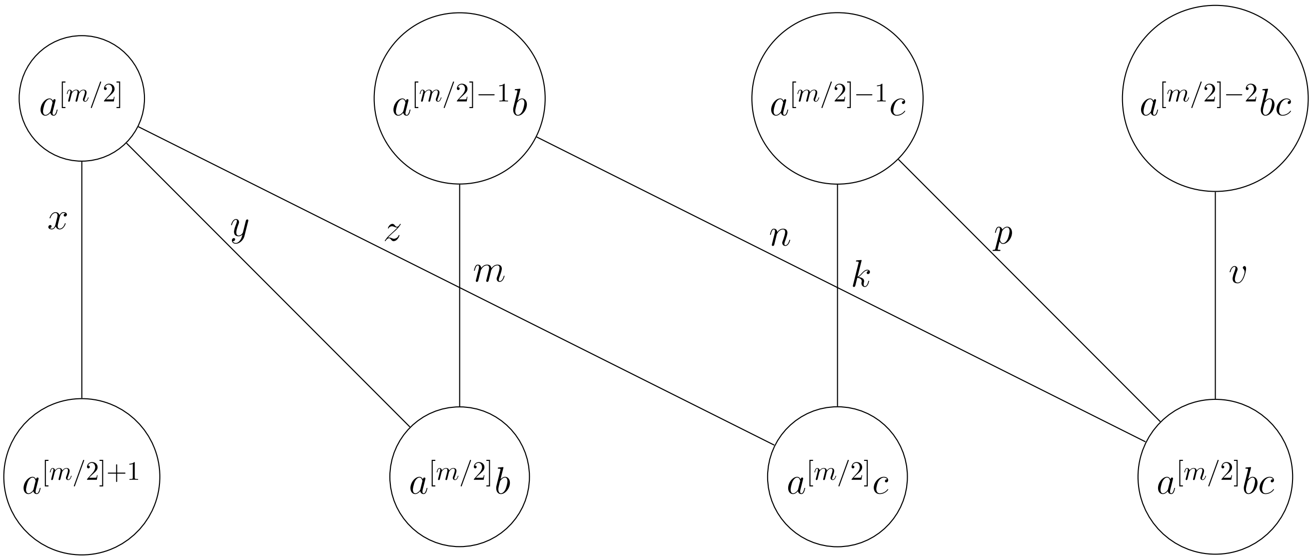


Ми отримали точно такий же граф, як і у попередньому випадку, навіть з такими же вагами. Давайте спробуємо узагальнити підхід для випадку коли $A = \{a^m, b, c\}$. Я буду спиратись на твердження, яке було доведене у моїй бакалаврській роботі:

$C_n^k \leq C_n^{k+1}$, для випадку коли $k < [n/2]$, де n - це кількість елементів висхідної множини, k - потужність підмножини.

Отже, за припущенням найбільше сімейство мультипідможин, які невключаються одна в одну, тобто максимальна потужність такого сімейства набувається коли потужність кожної окремої множини дорівнює $[n/2]$. $|A| = m+2$, тоді побудуємо перехід від $[(m+2)/2-1]$ елементних підмножин до $[(m+2)/2]$:

Приклад 7. *Розглянемо множину* $A = \{a^m, b, c\}$*:*



Так само як для попереднього випадку:

$$\underline{deg} = [m/2] + 1$$
$$\overline{deg} = |A| - [m/2] = m + 2 - [m/2]$$

$$\begin{cases} x = [m/2] + 1 \\ x + y + z = m + 2 - [m/2] \\ m + y = [m/2] + 1 \\ m + n = m + 2 - [m/2] \\ z + k = [m/2] + 1 \\ k + p = m + 2 - [m/2] \\ n + p + v = [m/2] + 1 \\ v = [m/2] + 1 \end{cases}$$

Для випадку коли $A = \{a^m, b, c\}$ ми отримали явні формули підрахунку вагів ребер графу, для заданого m треба розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса, та отримати ваги, які увантажать граф.
Якщо зробити перевірку, та підставити $m = 3$, той випадок, що вже був розглянутий у **Прикладі 6**:

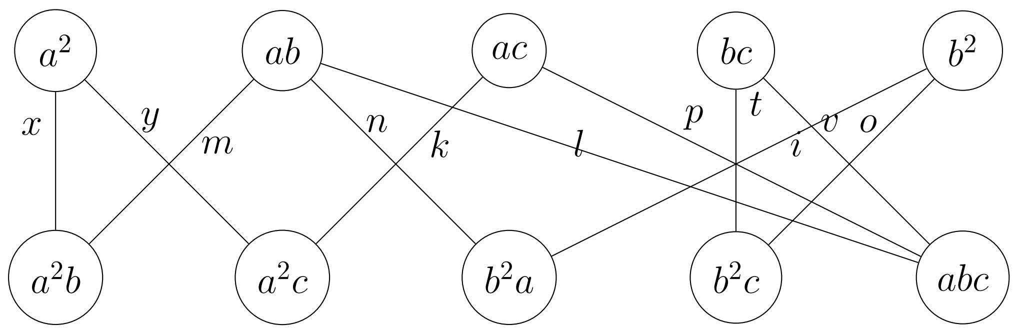
$$\begin{cases} x = [m/2] + 1 \\ x + y + z = m + 2 - [m/2] \\ m + y = [m/2] + 1 \\ m + n = m + 2 - [m/2] \\ z + k = [m/2] + 1 \\ k + p = m + 2 - [m/2] \\ n + p + v = [m/2] + 1 \\ v = [m/2] + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = [m/2] + 1 = 2 + 1 = 3 \\ x + y + z = m + 2 - [m/2] = 3 \\ m + y = [m/2] + 1 = 3 \\ m + n = m + 2 - [m/2] = 3 \\ z + k = [m/2] + 1 = 3 \\ k + p = m + 2 - [m/2] = 3 \\ n + p + v = [m/2] + 1 = 3 \\ v = [m/2] + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ m = 3 \\ n = 0 \\ k = 3 \\ p = 0 \\ v = 3 \end{cases}$$

2.2 Частковий випадок $A = \{a^2, b^2, c\}$

Розглянемо наступний випадок мультимножини виду $A = \{a^2, b^2, c\}$, яка задовольняє умови **Теореми 1**. На елементи накладаються деякі обмеження, а саме потужність усіх елементів рівна, а один єдиний елемент має потужність одиниця.

Приклад 8. *Розглянемо множину $A = \{a^2, b^2, c\}$, збудуємо наповнення двоелементного сімейства невключних одна в одну множин, які добудуємо до триелементного сімейства:*



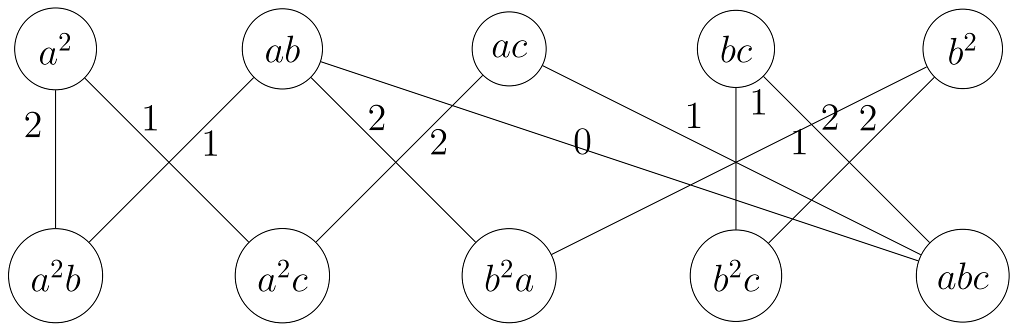
Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

$$\underline{deg} = 3 \text{ - оскільки } |\{a^2,b\}| = |\{a^2,c\}| = |\{a,b,c\}| = ...$$
$$\overline{deg} = |A| - 2 = 3,\ |A| = 5, |\{a^2\}| = |\{a,b\}| = |\{b,c\}| = |\{a,c\}| = ... = 2$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь за допомогою метода Гауса, запрограмованого на мові програмування Java. У програму треба ввести коефіцієнти при кожній змінній та рівняння по кожній змінній. Нижче записана система лінійних рівнянь та її розв'язок. Як можна побачити усі коефіцієнти невід'ємні та задовольняють умови **Теореми 1**.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + m = 3 \\ k + y = 3 \\ m + n + l = 3 \\ p + k = 3 \\ n + i = 3 \\ t + v = 3 \\ t + b = 3 \\ p + l + v = 3 \\ i + l = 3 \\ t + o = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ m = 1 \\ p = 1 \\ n = 2 \\ k = 2 \\ v = 2 \\ t = 1 \\ l = 0 \\ i = 1 \\ o = 2 \end{cases}$$

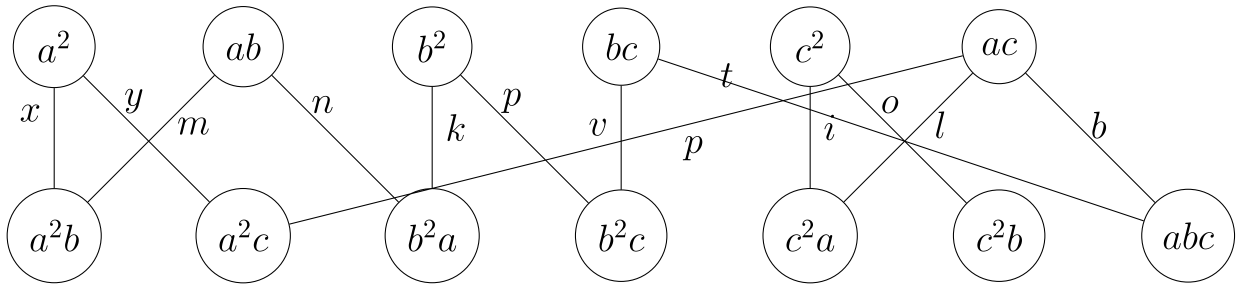
Отже отримали зважений граф при переході від двоелементних мультипідмножин до триелементних мультипідмножин:



2.3 Частковий випадок $A = \{a^2, b^2, c^2\}$

Розглянемо наступний випадок мультимножини виду $A = \{a^2, b^2, c^2\}$, яка задовольняє умови **Теореми 1**. На елементи накладаються деякі обмеження, а саме потужність усіх елементів рівна, оскільки при $m = 1$ висхідна множина втрачає мультимножинні властивості.

Приклад 9. *Розглянемо множину $A = \{a^2, b^2, c^2\}$, збудуємо наповнення двоелементного сімейства невключних одна в одну множин, які добудуємо до триелементного сімейства:*



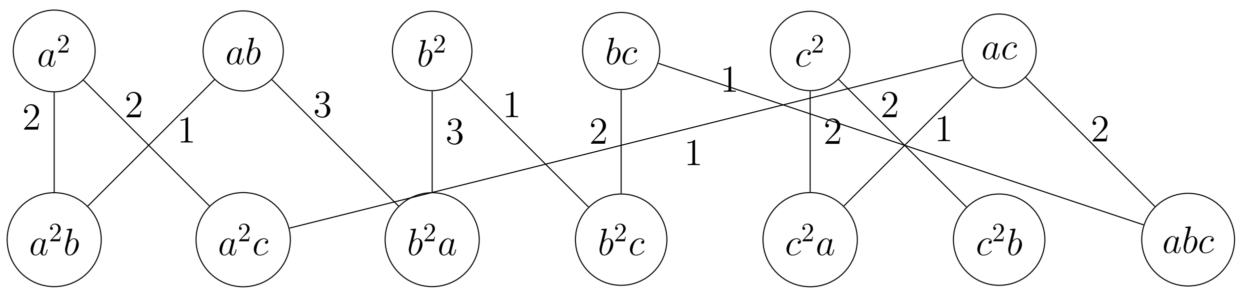
Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

$$\underline{deg} = 3 \text{ - оскільки } |\{a^3\}| = |\{a^2{,}b\}| = |\{a^2{,}c\}| = |\{a{,}b{,}c\}| = ...$$
$$\overline{deg} = |A| - 2 = 4,\ |A| = 6, |\{a^2\}| = |\{a{,}b\}| = |\{b{,}c\}| = |\{a{,}c\}| = ... = 2$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь за допомогою метода Гауса, запрограмованого на мові програмування Java. У програму треба ввести коефіцієнти при кожній змінній та рівняння по кожній змінній. Нижче записана система лінійних рівнянь та її розв'язок. Як можна побачити усі коефіцієнти невід'ємні та задовольняють умови **Теореми 1**.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + m = 3 \\ p + y = 3 \\ m + n = 4 \\ p + k = 4 \\ k + p = 4 \\ p + v = 3 \\ t + b = 3 \\ b + l + t = 4 \\ i + l = 3 \\ i + o = 4 \\ y + t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ m = 1 \\ p = 1 \\ n = 3 \\ k = 3 \\ v = 2 \\ t = 1 \\ b = 2 \\ l = 1 \\ i = 2 \\ o = 2 \end{cases}$$

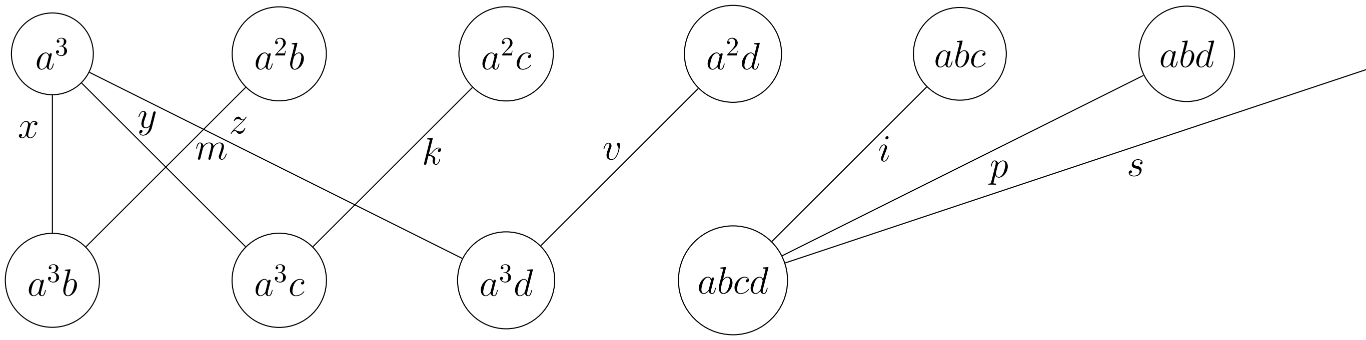
Отже отримали зважений граф при переході від двоелементних мультипідмножин до триелементних мультипідмножин:



2.4 Частковий випадок $A = \{a^3, b, c, d\}$

Розглянемо наступний випадок мультимножини виду $A = \{a^3, b, c, d\}$, яка задовольняє умови **Теореми 1**. На елементи накладаються деякі обмеження, а саме потужність усіх елементів рівна, а кратність одного елемента три.

Приклад 10. *Розглянемо множину $A = \{a^3, b, c, d\}$, збудуємо наповнення триелементного сімейства невключних одна в одну множин, які добудуємо до чотириелементного сімейства:*



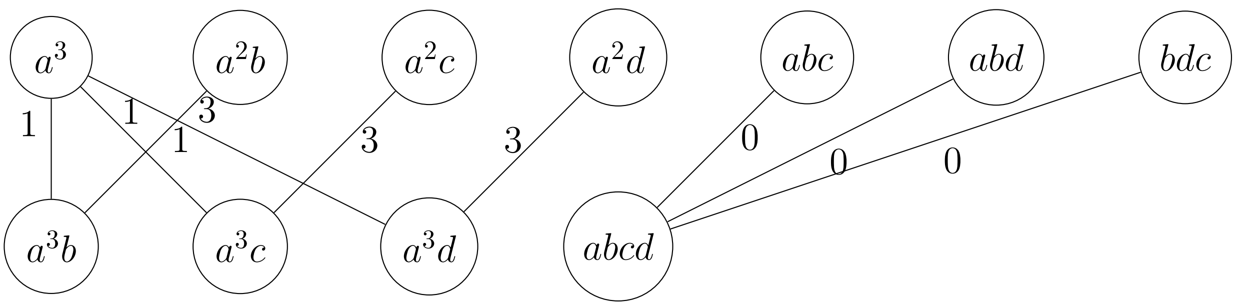
Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

$$\underline{deg} = 4 \text{ - оскільки } |\{a^3b\}| = |\{a^3,c\}| = |\{a^3,d\}| = |\{a,b,c,d\}| = 4$$
$$\overline{deg} = |A| - 3 = 3,\ |A| = 6, |\{a^3\}| = |\{a^2,b\}| = ... = 3$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь за допомогою метода Гауса, запрограмованого на мові програмування Java. У програму треба ввести коефіцієнти при кожній змінній та рівняння по кожній змінній. Нижче записана система лінійних рівнянь та її розв'язок. Як можна побачити усі коефіцієнти невід'ємні та задовольняють умови **Теореми 1**.

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ z = 3 \\ x + y + m = 3 \\ y + k = 4 \\ v + m = 4 \\ i + p + s = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ k = 3 \\ m = 1 \\ v = 3 \\ i = 0 \\ p = 0 \\ s = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

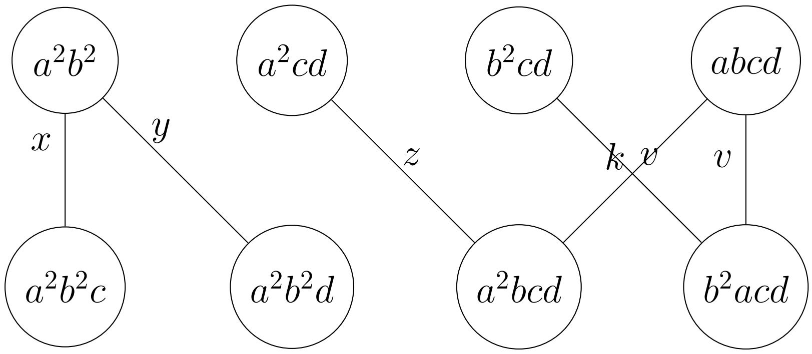
Отже отримали зважений граф при переході від двоелементних мультипідмножин до триелементних мультипідмножин:



2.5 Частковий випадок $A = \{a^2, b^2, c, d\}$

Розглянемо наступний випадок мультимножини виду $A = \{a^2, b^2, c, d\}$, яка задовольняє умови **Теореми 1**. На елементи накладаються деякі обмеження, а саме потужність усіх елементів рівна, а кратність одного елемента три.

Приклад 11. *Розглянемо множину* $A = \{a^2, b^2, c, d\}$*, збудуємо наповнення триелементного сімейства невключних одна в одну множин, які добудуємо до чотириелементного сімейства:*



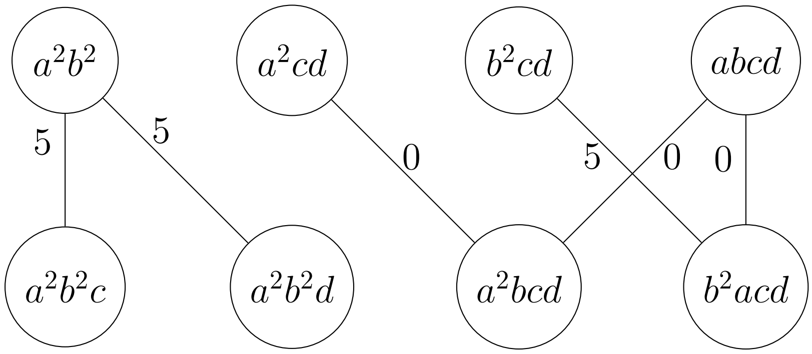
Так само, як і у випадках раніше підрахуємо значення вагів за формулою:

$$\underline{deg} = 4 \text{ - оскільки } |\{a^3b\}| = |\{a^3,c\}| = |\{a^3,d\}| = |\{a,b,c,d\}| = 4$$
$$\overline{deg} = |A| - 3 = 3,\ |A| = 6, |\{a^3\}| = |\{a^2,b\}| = ... = 3$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь за допомогою метода Гауса, запрограмованого на мові програмування Java. У програму треба ввести коефіцієнти при кожній змінній та рівняння по кожній змінній. Нижче записана система лінійних рівнянь та її розв'язок. Як можна побачити усі коефіцієнти невід'ємні та задовольняють умови **Теореми 1**.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x = 5 \\ y = 5 \\ z + k = 5 \\ n + m = 5 \\ z = 2 \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \\ z = 0 \\ k = 5 \\ n = 5 \\ m = 0 \end{cases}$$

Отже отримали зважений граф при переході від двоелементних мультипідмножин до триелементних мультипідмножин:



2.6 Статистичний аналіз розміру антиланцюга

Нехай дана мультимножина $M = \{a_1^{m_1}, ..., a_n^{m_n}\}$. Підрахуємо кількість усіх можливих підмножин зі зваженою потужністю k:

$$0 \leq k \leq |M| = m_1 + ... + m_n$$

Тоді будь-якій підмножині $L \subseteq M$ виду $\{a_1^{x_1}, ..., a_n^{x_n}\}$ ставимо у відповідність вектор:

$$\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n), \text{ де } 0 \leq x_1 \leq m1, ..., 0 \leq x_n \leq m_n.$$

Треба розв'язати підзадачу і знайти кількість векторів $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$, які задовольняють умовам (l - деяке число таке, що $0 \leq l \leq n$):

$$\begin{cases} \text{x}_1 + ... + x_n = k \\ 0 \leq x_1 \leq m1, ..., 0 \leq x_l \leq m_l \\ \text{x}_{l+1} = ... = x_n = 0 \end{cases}$$

Нехай D_l^k - відповідь на підзадачу для заданих l та k, тоді очевидно, що:

$$D_0^k = 1, \text{ якщо } k = 0$$
$$D_0^k = 0, \text{ якщо } k \neq 0$$

Також очевидно, що:

$$D_{l+1}^{k} = D_{l}^{k} + D_{l}^{k-1} + ... + D_{l}^{k-m_{l+1}}$$

У формулі наведеній вижче кожен доданок виду D_l^{k-l} ставиться у відповідність підмножинам, в яких кратність елемента a_{l+1} дорівнює b ($0 \leq b \leq m_{l+1}$). Розглянемо простий випадок:

$$k \leq m_1,..., k \leq m_n$$

Тоді на вектор $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ накладається лише одна умова:

$$x_1 + ... + x_n = k,\ x_1,...,x_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Перепишемо цю умову додавшидо кожного x_i одиницю з лівої частини, та додавши n з правої:

$$(x_1 + 1)... + (x_n + 1) = k + n$$
$$x_1,...,x_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

А тепер перепишемо цю формулу зважаючи на нові позначення:

$$y_1 + ... + y_n = k + n$$
$$y_1 = x_1 + 1, ..., y_n = x_n + 1$$
$$y_1,...,y_n \in \mathbb{N}$$

Представимо розбиття числа $k + n$ у суму $y_1 + ... + y_n$, як розріз полоски розміром $1 \times (k + n)$ на полоски розмірами $1 \times y_1$,...,$1 \times y_n$:

Приклад 12. *Розглянемо рівняння* $y_1 + y_2 + y_3 = 5$*:*

$$5 = 3 + 1 + 1$$
$$5 = 2 + 2 + 1$$
$$5 = 2 + 1 + 2$$
$$5 = 1 + 3 + 1$$
$$5 = 1 + 2 + 2$$
$$5 = 1 + 1 + 3$$

Кожен переріз - це вибір $(n-1)$ розрізу з$(k+n-1)$ можливих, тобто:

$$C_{k+n-1}^{n-1}$$

Як довести, що $D_n^{[|M|/2]}$ - найбільша (нестрого) з усіх $D_n^x(0 \leq x \leq |M|)$? Використовуючи індукцію по n доведемо, що:

$$D_n^0 \leq D_n^1 \leq ... \leq D_n^{[|M|/2]}.$$

Очевидний факт, що $D_n^x = D_n^{|M|-x}$ - інверсія множини.

Доведення. Якщо $k \leq [|M|/2]$, то $D_n^k \leq D_n^{k+1}$:

$$k = (n-1)/2, \text{ тоді } D_n^k \leq D_n^{k+1}$$
$$k \leq n/2 - 1, \text{ тоді } D_n^k = D_{n-1}^k D_{n-1}^{k-1}$$

Використаємо нерівність:

$$D_{n-1}^k + D_{n-1}^{k-1} \leq D_{n-1}^{k+1} + D_{n-1}^k$$

Скоротивши отримаємо:

$$D_{n-1}^{k-1} \leq D_{n-1}^{k+1}$$

Твердження індукції:

$$D_n^0 \leq D_n^1 \leq ... \leq D_n^{[|M|/2]}$$

Оскільки $k \leq n/2 - 1$, то $k \leq (n-2)/2$, тоді $k < (n-1)/2$.

$$D_{n-1}^k \leq D_{n-1}^{k-1}$$
$$D_{n-1}^k < D_{n-1}^{k-1}$$

Задекларуємо мультимножини:

$$M = \{a_1^{x_1}, ..., a_n^{x_n}\}$$
$$\overline{M} = \{a_1^{x_1}, ..., a_{n-1}^{x_{n-1}}\}$$

Нехай $D^k_{|M|}$ кількість k елементних мультивибірок з M, тоді $D^k_{|M|} = D^k_{\overline{|M|}} + D^{k-1}_{\overline{|M|}} + ... + D^{k-x}_{\overline{|M|}} = 0$, враховуючи, що $D^k_{|M|} = D^{\overline{|M|}-k}_{|M|}$.
Доведення по індукції: $D^k_{|M|} = D^{k-b_n}_{\overline{|M|}} + ... + D^k_{\overline{|M|}}$, де $\overline{M} = D \setminus a_n^{b_n}$.

$\square$

3 ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ

3.1 Теорія голосування

Система голосування на множині виду $M = \{a_1^{x_1}, ..., a_n^{x_n}\}$ - це така функція:

$$F = B(M) \to \{0{,}1\}$$
$$\forall A, B \subseteq M : A \subseteq B, \text{ то } F(A) \leq F(B)$$
$$\text{Де } B(M) \text{ - сімейство всіх мультипідмножин } L \subseteq M$$

Звернемо увагу, що F взаємно-однозначно задається набором "мінімальних прохідних підмножин":

$$F(L) = 1, L \subseteq M$$
$$\forall K \subset L : F(K) = 0$$

Сімейство невкладених одна в одну множин має дуже важливе значення, оскільки представляє собою набір множин які неможливо порівняти між собою у рамках задачі теорії голосувань. Можливість мати на примітку множини, які задовольняють умови **Теореми 1** є дуже важливим прикладним моментом, оскільки в теорії голосувань ми будемо безпосередньо мати справу з цими множинами, а отже мати представлення про потужність та структуру таких множин є дуже важливим прикладним нюансом.

Множина $M = \{a_1^{x_1}, ..., a_n^{x_n}\}$ може представляти партії, а кожен елемент a_i - одиницю партії, тобто людину, яка може віддати свій голос. Кожна людина яка належить одній партії буде розлянута, як еквівалентна в рамках даної партії, тобто голоси таких виборчих одиниць є рівнозначними. Підсумуємо: множина $M = \{a_1^{x_1}, ..., a_n^{x_n}\}$, складається з партій a_i, а x_i - це кількість виборчих одиниць у партії (людей).

3.2 Потоки у графах

У теорії алгоритмів та дослідженні операцій проблема максимального потоку включають пошук можливого потоку на графі через мережу потоків. Ця задача має дуже важливе значення, оскільки проблеми, які вирішуються за допомогою урівноваження графу, та пошуку найкоротшого та найдешевшого шляху дуже важливі у транспортних задачах.

Проблему максимального потоку можна розглядати як окремий випадок більш складних проблем, таких як проблема циркуляції. Максимальне значення потоку дорівнює мінімальній пропускній здатності розрізу у мережі, як зазначено в мінімальному максимальному потоку. З точки зору задачі, яка розгядається у даній роботі, ми розглянемо частковий випадок транспортної задачі, де роль пунктів заїзду (доставки) товарів відіграють долі двочасткового графу. Задача є виокремленою чатиною та є підмножиною загальних транспортих задач.

4 ПРАКТИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ

5 ОХОРОНА ПРАЦІ

ВИСНОВКИ

В результаті виконання роботи вдалося.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ