

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ**  
**“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМ. ІГОРЯ**  
**СІКОРСЬКОГО”**  
**ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**  
**МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ, РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ**  
**ТА КОМП’ЮТЕРНОГО ЗОРУ**

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

Н. М. Куссуль

\_\_\_\_\_  
(підпис)      (ініціали, прізвище)

2021 р.

**Дипломна робота**

освітньо-кваліфікаційного рівня “магістр”

за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему «Прикладні можливості застосування мультимножинного випадку те-  
ореми Шпернера та часткові випадки теореми»

Виконав студент 6 курсу групи ФІ-01мп

Тарасенко С.А.

Керівник доцент, Рибак О.В.

Рецензент Rank, Name

\_\_\_\_\_  
(підпис)

\_\_\_\_\_  
(підпис)

\_\_\_\_\_  
(підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі  
немає запозичень з праць інших авто-  
рів без відповідних посилань.

Студент \_\_\_\_\_

Київ — 2021 року

## **РЕФЕРАТ**

### **КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА**

## **ABSTRACT**

## **KEYWORDS**

## **РЕФЕРАТ**

### **СЛОВА**

## ЗМІСТ

Вступ . . . . .	6
1 Теоретичні відомості . . . . .	7
1.1 Огляд математичного апарату . . . . .	7
1.2 Теорія мультимножин . . . . .	9
1.3 Теорія графів . . . . .	10
1.4 Постановка задачі . . . . .	12
2 Часткові випадки <b>Теорема 1</b> . . . . .	17
2.1 Частковий випадок $A = \{a^m, b, c\}$ . . . . .	17
2.2 Розв’язок . . . . .	18
3 Практичні результати . . . . .	19
4 Охорона праці . . . . .	20
Висновки . . . . .	21
Перелік посилань . . . . .	22

## ВСТУП

**Актуальність роботи.**

*Об'єкт дослідження —*

*Предмет дослідження —*

**Мета дослідження.**

Завдання наступні:

- 1) Вивчити;
- 2) Розробити.

**Практичне значення одержаних результатів.**

# 1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

У цьому розділі буде розглянуто та наведено необхідний математичний апарат та теоретичні відомості стосовно проблеми яка лежить в основі даної магістерської дисертації. Розглянемо основне твердження стосовно теореми Шпернера та усі супутні визначення та твердження необхідні для вирішення поставленої задачі.

## 1.1 Огляд математичного апарату

**Теорема 1.** *Нехай  $M = \{1, \dots, n\}$  множина яка складається з елементів натурального ряду,  $M_1, \dots, M_k$  - набір підмножин множини  $M$  такі, що  $\forall M_i, M_j : M_i \not\subseteq M_j$ , тоді виконується дуже проста нерівність  $k \leq C_n^{[n/2]}$ , де  $k$  - це кількість множин у наборі  $M_1, \dots, M_k$ ,  $n$  - загальна кількість елементів множини  $M$  (тобто потужність множини  $M$ , далі будемо позначати як  $|M|$ ),  $C_n^{[n/2]}$  - біноміальний коефіцієнт,  $[n/2]$  - ціла частина від ділення  $n$  навпіл.*

Розглянемо одне з можливих доведень теореми базуючись на твердженні доведення якого буде представлено нижче.

**Твердження 1.** *Нехай  $M_1, \dots, M_k$  - попарно не належать одна в одній підмножини множини  $M = \{1, \dots, n\}$ , нехай  $|M_1| = m_1, \dots, |M_k| = m_k$ , тоді має місце нерівність:*

$$\frac{1}{C_n^{m_1}} + \frac{1}{C_n^{m_2}} + \dots + \frac{1}{C_n^{m_k}} \leq 1 \quad (1.1)$$

*Доведення.* Розглянемо для кожного  $M_i, i = 1, \dots, k$  перетасовування множини  $\{1, \dots, n\}$  зроблені за наступним принципом:

$a_1$	$a_2$	.	.	$a_k$	$a_{k+1}$	.	.	.	.	$a_n$
-------	-------	---	---	-------	-----------	---	---	---	---	-------

Де  $a_1, \dots, a_k \in M_i$ , а  $a_{k+1}, \dots, a_n$  - всі інші елементи, тоді перша частина такої перетасовування, тобто  $a_1, \dots, a_k$  може мати  $(m_i)!$  різних варіантів, а права частина, тобто  $a_{k+1}, \dots, a_n$ ,  $(n - m_i)!$  різних варіантів, де  $n$  - потужність множини  $\{1, \dots, n\}$ . Варто зазначити, що для різних множин  $M_i, M_j$  відповідні перетасовування будуть відрізнятись. Якщо дві перетасовування двох множин  $M_i, M_j$  співпадають, це означає, що  $M_i \subseteq M_j$ , або  $M_j \subseteq M_i$ .

Тому маємо:

$m_1!(n - m_1)! + \dots + m_k!(n - m_k)! \leq n!$ , де  $n!$  - число усіх можливих перетасовувань множини  $\{1, \dots, n\}$ . Розділимо обидві частини отриманої нерівності на  $n!$  та отримаємо суму обернених біноміальних коефіцієнтів з лівої частини та одиницю з правої:  $\frac{1}{C_n^{m_1}} + \frac{1}{C_n^{m_2}} + \dots + \frac{1}{C_n^{m_k}} \leq 1$ , що і треба було довести.  $\square$

**Наслідок 1.** Виходячи з формули (1.1) отримаємо, що кількість різних  $M_i$  не перевищує  $C_n^{[n/2]}$ . Так як  $C_n^{m_i} \leq C_n^{[n/2]}$  маємо  $\frac{1}{C_n^{[n/2]}} + \frac{1}{C_n^{[n/2]}} + \dots + \frac{1}{C_n^{[n/2]}} \leq \frac{1}{C_n^{m_1}} + \frac{1}{C_n^{m_2}} + \dots + \frac{1}{C_n^{m_k}} \leq 1$ , у найлівішій частині рівняння доданок  $\frac{1}{C_n^{[n/2]}}$  зустрічається  $k$  разів, тобто  $\frac{k}{C_n^{[n/2]}} \leq 1$ , або ж якщо записати у звичному вигляді  $k \leq C_n^{[n/2]}$ .

Поставлена задача узагальнити дану теорему на випадок коли множина  $M = \{1, \dots, n\}$  може мати елементи які належать їй декілька разів  $1 \leq$ , тобто математичний об'єкт  $M$  набуває мультимножинних властивостей. Дана задача вже була частково розглянута у моїй бакалаврській дипломній роботі. Було розглянуто деякі часткові випадки мультимножин, які задовольняють умовам теореми. У даній роботі буде більш детально розглянуто прикладне застосування теореми, та узагальнення її на більшу кількість окремих випадків мультимножин. Для того, щоб математичні викладки та послідовність дій була зрозумілою унаступному розділі наводяться необхідні теоретичні відомості та означення базуючись на яких було отримано результати, які будуть описані нижче.



## 1.2 Теорія мультимножин

Над мультимножинами визначені такі основні операції: об'єднання, перетин, арифметичне додавання, арифметичне віднімання, доповнення, симетрична різниця, множення на число, арифметичне множення та зведення в арифметичну ступінь, прямий твір та зведення у прямий ступінь. Ми розглянемо лише деякі основні операції необхідні для подальших дій над мультимножинами.

**Визначення 1.** *Мультимножина - модифіковане поняття множини, що допускає наявність одного і того ж елемента в ній по кілька разів. Число елементів у мультимножині, з урахуванням елементів які повторюються, називається його розміром або потужністю.*

**Визначення 2.** *Об'єднанням мультимножин  $A$  та  $B$  називається мультимножина, якій належать з усі елементи, які присутні хоча б в одній з мультимножин, і кількість входжень кожного елемента дорівнює максимальній кількості входжень відповідних елементів в мультимножинах, що об'єднуються:*

$$C = A \cup B = \{\max(x_i^{k_i}, x_j^{k_j})\}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B$$

**Визначення 3.** *Перетином мультимножин  $A$  та  $B$  називається мультимножина, що складається з усіх елементів, які присутні у кожній з мультимножин, і кількість входжень кожного елемента дорівнює мінімальній кількості входжень відповідних елементів у мультимножинах, що перетинаються:*

$$C = A \cap B = \{\min(x_i^{k_i}, x_j^{k_j})\}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B$$

**Визначення 4.** *Арифметичною сумою мультимножин  $A$  та  $B$  називається мультимножина, що складається з усіх елементів, які належать хоча б в одній з мультимножин, і кратність кожного елемента дорівнює сумі кратностей відповідних елементів у мультимножинах, що складаються:*

$$C = A + B = \{x^k | x^k = x_i^{k_i} + x_j^{k_j}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B\}$$

**Визначення 5.** Арифметичною різницею мультимножин  $A$  та  $B$  називається мультимножина, що складається з елементів мультимножини  $A$ , кратність яких перевищує кратність відповідних елементів у мультимножині  $B$ . Кратність кожного елемента результуючої множини дорівнює різниці кратностей відповідних елементів в мультимножинах, що віднімаються:

$$C = A - B = \{x^k | x^k = x_i^{k_i} - x_j^{k_j}, k_i > k_j, 0 \text{ otherwise}\}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B$$

### 1.3 Теорія графів

**Визначення 6.** Граф — математична абстракція системи будь-якої природи, об'єкти якої мають парні зв'язки. Граф як математичний об'єкт є сукупність двох множин: множина вершин і множина ребер. Елементом множини ребер є пара елементів множини вершин.

**Визначення 7.** Простим графом  $G(V,E)$  є сукупність двох множин: непустої множини  $V$  та множини  $E$  невпорядкованих пар різних елементів множини  $V$ . Множина  $V$  називається множиною вершин, множина  $E$  називається множиною ребер:

$$G(V,E) = \langle V,E \rangle, \quad V \neq \emptyset, \quad E \subseteq V \times V, \quad \{v,v\} \notin E, \quad v \in V$$

**Визначення 8.** Дводольний граф або біграф в теорії графів - це граф, множину вершин якого можна розбити на дві долі таким чином, що кожне ребро графу з'єднує кожну вершину з однієї долі з якоюсь вершиною з іншої долі, тобто не існує ребер між вершинами однієї і тієї ж частини долі. Неорієнтований граф  $G = (W,E)$  називається дводольним, якщо множину його вершин можна розбити на дві підмножини  $W = U \cup V$  так, що:

- жодна вершина в  $U$  не з'єднана з вершинами в  $U$

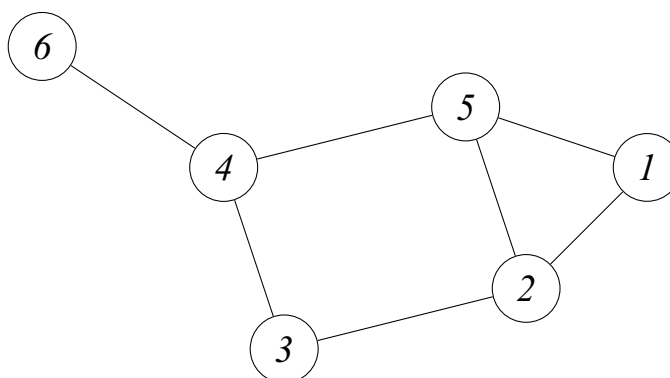
- жодна вершина в  $V$  не з'єднана з вершинами в  $V$

У цьому випадку підмножини вершин  $U$  та  $V$  називаються частками дводольного графа  $G$ .

**Приклад 1.** Розглянемо приклад простого графу:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

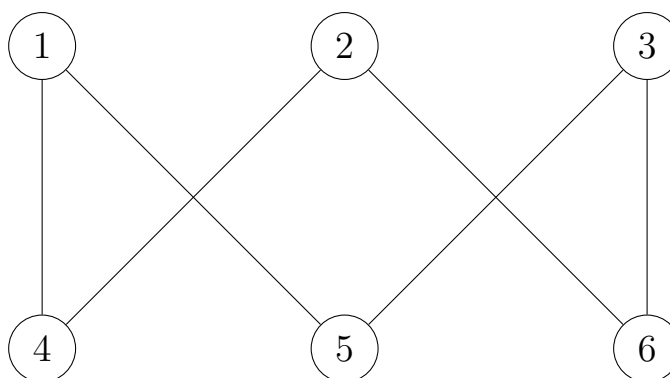
$$E = \{(1, 2), (1, 5), (5, 2), (5, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 6)\}$$



**Приклад 2.** Розглянемо приклад дводольного графу:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 6), (3, 5), (3, 6)\}$$



У даному випадку ми можемо розділити множину вершин на дві:

$$V = U \cup P, P = \{1, 2, 3\} \text{ та } U = \{4, 5, 6\}.$$

Немає жодного ребра яке пов'язує вершини множин  $P$  із вершинами множини  $P$ , аналогічно для множини  $U$ .

**Теорема 2.** *В дводольному графі для будь-якого натурального  $k$  будь-які вершини однієї долі, де  $k$  не перевищує числа вершин долі, пов'язані принаймні з  $k$  різними вершинами іншої долі тоді і лише тоді, коли граф розбивається на пари першою часткою.*

#### 1.4 Постановка задачі

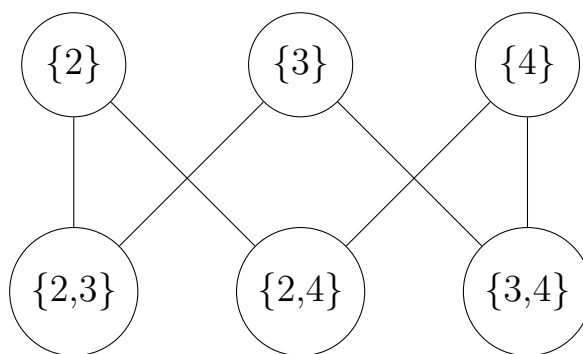
**Теорема 3.** *Довести Теорему 1 у тому вигляді, у якому вона описана, зважаючи лише на те що об'єкт  $M$  у твердженні теореми тепер може мати мультимножинну природу.*

*Доведення.* Використаємо підхід, який базується на **Теоремі 2**. У даному доведенні буде описуватись один з можливих підходів рішення та доведення **даної теореми** через навантаження ребер двочасткового графу певними коефіцієнтами. У моїй бакалаврській роботі було розглянуто такі випадки:

$$A = \{z^m, x^m\}, B = \{w_0^2, w_1, \dots, w_n\}$$

Як вже було доведено раніше у **Теоремі 1** для звичайного типу множин завжди існує паросполучення при додаванні до сімейства невикладених множин розміру  $n$  одного елемента для того, щоб утворити сімейство невикладених множин якому належать множини розміру  $n + 1$ . Для звичайного випадка теореми це і доводить, що максимально можливий розмір такого сімейства  $C_n^{[n/2]}$ . Для випадка коли множина має мультимножинну природу використати **Теорему 1** у тому вигляді як описано вище неможливо.

**Приклад 3.** *Розглянемо множину  $A = \{2,3,4\}$ , збудуємо наповнення одноелементного сімейства невиключних одна в одну множин, які добудуємо до двоелементного сімейства:*

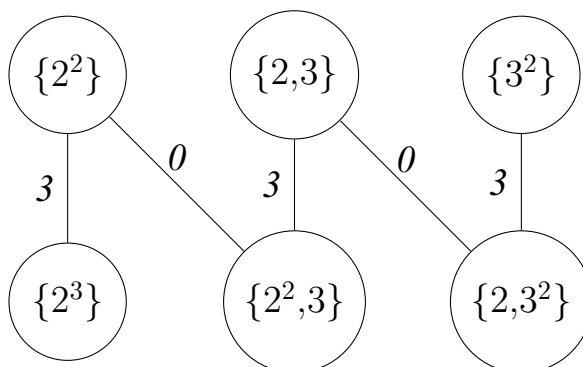


Ідея полягає в тому, щоб перенести підхід паросполучення використовуючи вагові коефіцієнти. Як можна бачити з малюнка:

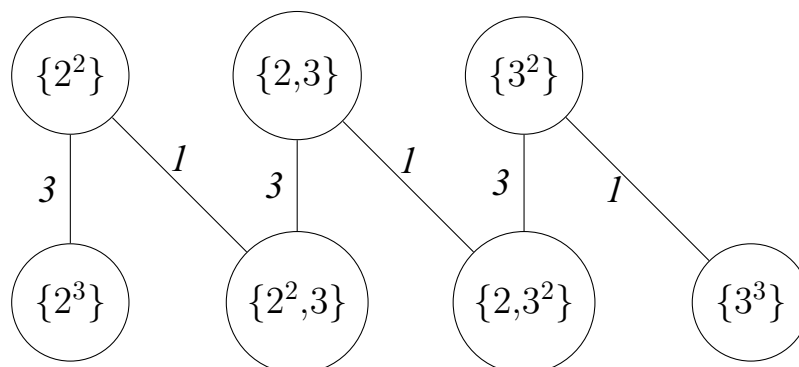
$$\begin{aligned} \deg &= t \\ \overline{\deg} &= n - t \end{aligned}$$

Але це можливо лише для випадку коли відповідні ребра навантажені вагами. Нижче буде розглянуто декілька прикладів для розуміння повної картини.  $\square$

**Приклад 4.** Розглянемо множину  $A = \{2^3, 3^2\}$ , збудуємо наповнення двоелементного сімейства невідключних одна в одну множин, які добудуємо до триелементного сімейства:



**Приклад 5.** Розглянемо множину  $A = \{2^3, 3^3\}$ , також збудуємо наповнення двоелементного сімейства невідключних одна в одну множин, які добудуємо до триелементного сімейства:



Тобто обрахунок ведеться за допомогою формул:

$$\begin{aligned}\underline{deg} &= t \\ \overline{deg} &= n - t\end{aligned}$$

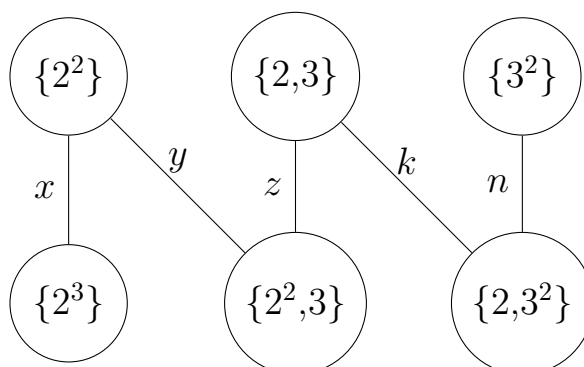
$n$  - мультипотужність множини на основі якої будується сімейство невідкладених одна в одну множин

$t$  - мультипотужність множини яка належить сімейству невідкладених одна в одну множин (для  $\underline{deg}$ ,  $t$  - це потужність множини яка належить нижній долі, для  $\overline{deg}$ ,  $t$  - це потужність множини яка належить верхній долі)

Тобто для **Прикладу 4**:

$$\begin{aligned}\underline{deg} &= 3 - \text{оскільки } |\{2^3\}| = |\{2^2, 3\}| = |\{2, 3^2\}| \\ \overline{deg} &= |A| - 2 = 3 - \text{оскільки } |A| = 5, |\{2^2\}| = |\{2, 3\}| = |\{3^2\}| = 2\end{aligned}$$

Далі складається система лінійних рівнянь:



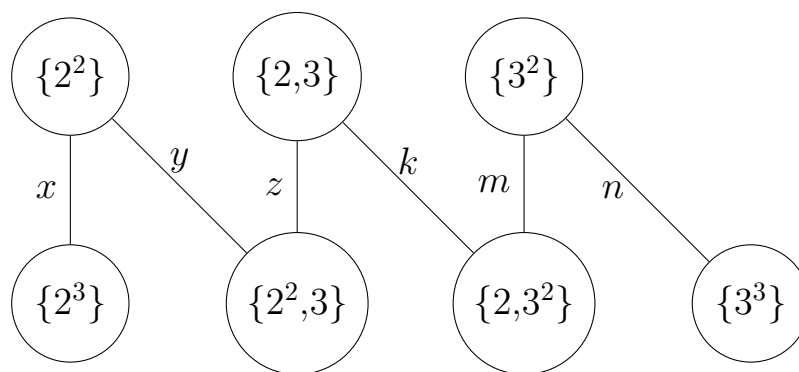
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ x + y = 3 \\ y + z = 3 \\ z + k = 3 \\ k + n = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 3 \\ k = 0 \\ n = 3 \end{array} \right.$$

Для **Прикладу 5**:

$$\underline{deg} = 3 - \text{оскільки } |\{2^3\}| = |\{2^2, 3\}| = |\{3^3\}|$$

$$\overline{deg} = |A| - 2 = 4 - \text{оскільки } |A| = 6, |\{2^2\}| = |\{2, 3\}| = |\{3^2\}| = 2$$

Далі складається система лінійних рівнянь:



$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ x + y = 4 \\ y + z = 3 \\ z + k = 4 \\ k + m = 3 \\ n = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 2 \\ k = 2 \\ m = 1 \\ n = 3 \end{array} \right.$$

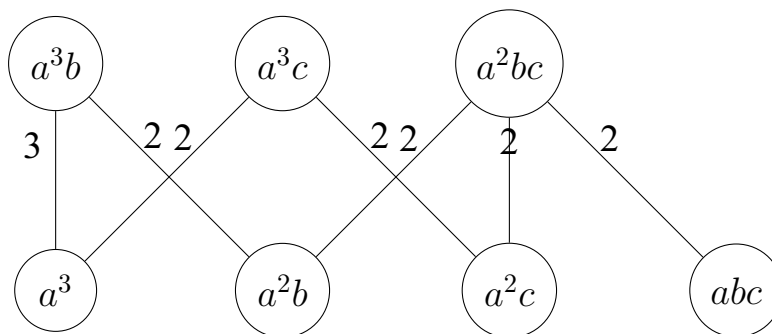
Таким способом у бакалаврській роботі було доведено випадки  $A = \{z^m, x^m\}$ ,  $B = \{w_0^2, w_1, \dots, w_n\}$ . У наступному розділі буде розглянуто декілька інших часткових випадків, для яких буде доведено **Теорему 1**, та будуть

записані явні формули обрахунку вагів для графу. За допомогою цих формул можна переконатись, що паросполучення існує і побудувати його явно. Таким чином доводиться для множин мультимножинної природи справедливність **Теорема 1**. Прикладе застосування математичних об'єктів, які задовольняють умови теореми буде описано у роздулах пізніше.



## 2 ЧАСТКОВІ ВИПАДКИ ТЕОРЕМИ

### 2.1 Частковий випадок $A = \{a^m, b, c\}$



### **2.1.1 Попередні роботи**

### **2.1.2 Визначення**

## **2.2 Розв'язок**

### **3 ПРАКТИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ**

## **4 ОХОРОНА ПРАЦІ**

## **ВИСНОВКИ**

В результаті виконання роботи вдалося.

## **ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ**