

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ**  
**“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМ. ІГОРЯ**  
**СІКОРСЬКОГО”**  
**ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**  
**МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ, РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ**  
**ТА КОМП’ЮТЕРНОГО ЗОРУ**

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

Н. М. Куссуль

\_\_\_\_\_  
(підпис)      (ініціали, прізвище)

2021 р.

**Дипломна робота**

освітньо-кваліфікаційного рівня “магістр”

за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему «Прикладні можливості застосування мультимножинного випадку те-  
ореми Шпернера та часткові випадки теореми»

Виконав студент 6 курсу групи ФІ-01мп

Тарасенко С.А.

Керівник доцент, Рибак О.В.

Рецензент Rank, Name

\_\_\_\_\_  
(підпис)

\_\_\_\_\_  
(підпис)

\_\_\_\_\_  
(підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі  
немає запозичень з праць інших авто-  
рів без відповідних посилань.

Студент \_\_\_\_\_

Київ — 2021 року

## **РЕФЕРАТ**

### **КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА**

## **ABSTRACT**

## **KEYWORDS**

## **РЕФЕРАТ**

### **СЛОВА**

## ЗМІСТ

Вступ . . . . .	6
1 Теоретичні відомості . . . . .	7
1.1 Постановка задачі . . . . .	7
1.2 Теорія мультимножин . . . . .	9
1.3 Теорія графів . . . . .	10
1.4 Постановка задачі . . . . .	12
1.5 Розв'язок . . . . .	13
2 Практичні результати . . . . .	14
3 Охорона праці . . . . .	15
Висновки . . . . .	16
Перелік посилань . . . . .	17

## ВСТУП

**Актуальність роботи.**

*Об'єкт дослідження —*

*Предмет дослідження —*

**Мета дослідження.**

Завдання наступні:

- 1) Вивчити;
- 2) Розробити.

**Практичне значення одержаних результатів.**

# 1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

У цьому розділі буде розглянуто необхідний математичний апарат та теоретичні відомості стосовно проблеми яка лежить в основі даної магістерської дисертації. Розглянемо основне твердження теореми Шпернера та усі супутні визначення та твердження необхідні для вирішення поставленої задачі.

## 1.1 Постановка задачі

**Теорема 1.** *Нехай  $M = \{1, \dots, n\}$  множина яка складається з елементів натурального ряду,  $M_1, \dots, M_k$  - підмножини множини  $M$  такі, що  $\forall M_i, M_j : M_i \not\subset M_j$ , тоді виконується дуже проста нерівність  $k \leq C_n^{[n/2]}$ , де  $k$  - це кількість множин у наборі  $M_1, \dots, M_k$ ,  $n$  - загальна кількість елементів множини  $M$  (тобто потужність множини  $M$ , далі будемо позначати як  $|M|$ ),  $C_n^{[n/2]}$  - біноміальний коефіцієнт,  $[n/2]$  - ціла частина від ділення  $n$  навпіл.*

Розглянемо одне з можливих доведень теореми базуючись на твердженні доведення якого буде представлено нижче.

**Твердження 1.** *Нехай  $M_1, \dots, M_k$  - попарно невикладені одна в одну підмножини множини  $M = \{1, \dots, n\}$ , нехай  $|M_1| = m_1, \dots, |M_k| = m_k$ , тоді має місце нерівність:*

$$\frac{1}{C_n^{m_1}} + \frac{1}{C_n^{m_2}} + \dots + \frac{1}{C_n^{m_k}} \leq 1 \quad (1.1)$$

*Доведення.* Розглянемо для кожного  $M_i, i = 1, \dots, k$  перестановки множини  $\{1, \dots, n\}$  зроблені по наступному принципу:

$a_1$	$a_2$	.	.	$a_k$	$a_{k+1}$	.	.	.	.	$a_n$
-------	-------	---	---	-------	-----------	---	---	---	---	-------

Де  $a_1, \dots, a_k \in M_i$ , а  $a_{k+1}, \dots, a_n$  - всі інші елементи, тоді перша частина такої перестановки, тобто  $a_1, \dots, a_k$  може мати  $(m_i)!$  різних варіантів, а права частина, тобто  $a_{k+1}, \dots, a_n$ ,  $(n - m_i)!$  різних варіантів, де  $n$  - потужність множини  $\{1, \dots, n\}$ . Варто зазначити, що для різних множин  $M_i, M_j$  відповідні перестановки будуть відрізнятись. Якщо дві перестановки двох множин  $M_i, M_j$  співпадають, це означає, що  $M_i \subseteq M_j$ , або  $M_j \subseteq M_i$ .

Тому маємо:

$m_1!(n - m_1)! + \dots + m_k!(n - m_k)! \leq n!$ , де  $n!$  - число усіх можливих перестановок множини  $\{1, \dots, n\}$ . Розділимо обидві частини отриманої нерівності на  $n!$  та отримаємо суму обернених біноміальних коефіцієнтів з лівої частини та одиницю з правої:  $\frac{1}{C_n^{m_1}} + \frac{1}{C_n^{m_2}} + \dots + \frac{1}{C_n^{m_k}} \leq 1$ , що і треба було довести.  $\square$

**Наслідок 1.** Виходячи з формули (1.1) отримаємо, що кількість різних  $M_i$  не перевищує  $C_n^{[n/2]}$ . Так як  $C_n^{m_i} \leq C_n^{[n/2]}$  маємо  $\frac{1}{C_n^{[n/2]}} + \frac{1}{C_n^{[n/2]}} + \dots + \frac{1}{C_n^{[n/2]}} \leq \frac{1}{C_n^{m_1}} + \frac{1}{C_n^{m_2}} + \dots + \frac{1}{C_n^{m_k}} \leq 1$ , у найлівішій частині рівняння доданок  $\frac{1}{C_n^{[n/2]}}$  зустрічається  $k$  разів, тобто  $\frac{k}{C_n^{[n/2]}} \leq 1$ , або ж якщо записати у звичному вигляді  $k \leq C_n^{[n/2]}$ .

Поставлена задача узагальнити дану теорему на випадок коли множина  $M = \{1, \dots, n\}$  може мати кратні входження елементів, тобто математичний об'єкт  $M$  набуває мультимножинних властивостей. Дана задача вже була частково розглянута у бакалаврській дипломній роботі. Було розглянуто деякі часткові випадки мультимножин, які задовольняють умовам теореми. У даній роботі буде більш детально розглянуто прикладне застосування теореми, та узагальнення її на більшу кількість окремих випадків мультимножин. Для того, щоб математичні викладки та послідовність дій була зрозумілою унаступному розділі наводяться необхідні теоретичні відомості та означення базуючись на яких було отримано результати, які будуть описані нижче.



## 1.2 Теорія мультимножин

Над мультимножинами визначені такі основні операції: об'єднання, перетин, арифметичне додавання, арифметичне віднімання, доповнення, симетрична різниця, множення на число, арифметичне множення та зведення в арифметичну ступінь, прямий твір та зведення у прямий ступінь. Ми розглянемо лише деякі основні необхідні для подальших дій операції над мультимножинами.

**Визначення 1.** *Мультимножина - модифіковане поняття множини, що допускає включення одного і того ж елемента в сукупність по кілька разів. Число елементів у мультимножині, з урахуванням повторюваних елементів, називається його розміром або потужністю.*

**Визначення 2.** *Об'єднанням мультимножин  $A$  та  $B$  називається мультимножина, що складається з усіх елементів, які присутні хоча б в одному з мультимножин, і кратність кожного елемента дорівнює максимальній кратності відповідних елементів в мультимножинах, що об'єднуються:*

$$C = A \cup B = \{\max(x_i^{k_i}, x_j^{k_j})\}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B$$

**Визначення 3.** *Перетином мультимножин  $A$  та  $B$  називається мультимножина, що складається з усіх елементів, які одночасно присутні в кожному з мультимножин, і кратність кожного елемента дорівнює мінімальній кратності відповідних елементів у мультимножинах, що перетинаються:*

$$C = A \cap B = \{\min(x_i^{k_i}, x_j^{k_j})\}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B$$

**Визначення 4.** *Арифметичною сумою мультимножин  $A$  та  $B$  називається мультимножина, що складається з усіх елементів, які присутні хоча б в одній з мультимножин, і кратність кожного елемента дорівнює сумі кратностей відповідних елементів у мультимножинах, що складаються:*

$$C = A + B = \{x^k | x^k = x_i^{k_i} + x_j^{k_j}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B\}$$

**Визначення 5.** Арифметичною різницею мультимножин  $A$  та  $B$  називається мультимножина, що складається з елементів мультимножини  $A$ , кратність яких перевищує кратність відповідних елементів у мультимножині  $B$ . Кратність кожного елемента результуючої множини дорівнює різниці кратностей відповідних елементів в мультимножинах, що віднімаються:

$$C = A - B = \{x^k | x^k = x_i^{k_i} - x_j^{k_j}, k_i > k_j, 0 \text{ otherwise}\}, x_i^{k_i} \in A, x_j^{k_j} \in B$$

### 1.3 Теорія графів

**Визначення 6.** Граф — математична абстракція реальної системи будь-якої природи, об'єкти якої мають парні зв'язки. Граф як математичний об'єкт є сукупність двох множин: множина вершин і множина ребер. Елементом множини ребер є пара елементів множини вершин.

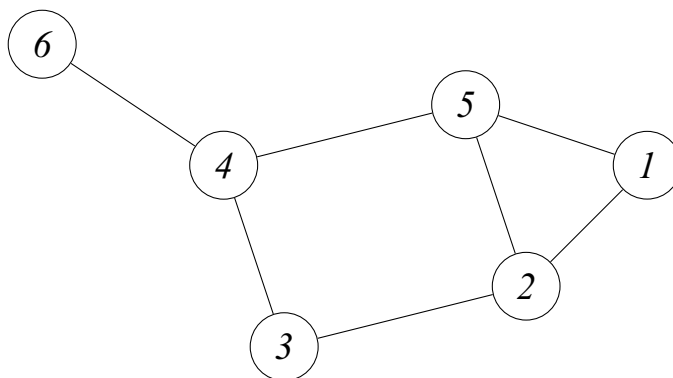
**Визначення 7.** Простим графом  $G(V, E)$  є сукупність двох множин: не пустої множини  $V$  та множини  $E$  невпорядкованих пар різних елементів множини  $V$ . Множина  $V$  називається множиною вершин, множина  $E$  називається множиною ребер:

$$G(V, E) = \langle V, E \rangle, \quad V \neq \emptyset, \quad E \subseteq V \times V, \quad \{v, v\} \notin E, \quad v \in V$$

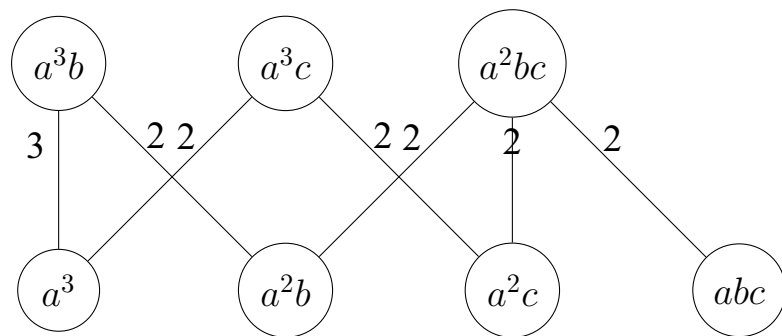
**Приклад 1.** Розглянемо приклад простого графу:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E = \{(1, 2), (1, 5), (5, 2), (5, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 6)\}$$



#### 1.4 Постановка задачі



#### **1.4.1 Попередні роботи**

#### **1.4.2 Визначення**

### **1.5 Розв'язок**

## **2 ПРАКТИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ**

### **3 ОХОРОНА ПРАЦІ**

## **ВИСНОВКИ**

В результаті виконання роботи вдалося.



## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

- 1 Knuth, D.E. The T<sub>E</sub>Xbook / D.E. Knuth // Computers & typesetting. — Addison-Wesley Publishing Company, 1984.