VISOKA TEHNIČKA ŠKOLA STRUKOVNIH STUDIJA
SUBOTICA

Čikoš Pajor Gizela

MATEMATIČKA ANALIZA

zbirka zadataka za vežbe

SUBOTICA 2008

Recenzenzija i
tehničko uređenje
elektronskog i
štampanog izdanja: Mr.I.Boroš

Kucanje teksta: Čikoš P. Gizela

Izdaje: **Visoka tehnička škola strukovnih studija u Subotici**

Za izdavača: Dr. Ištvan Matijevič, direktor

Tiraž: 300 primeraka
Štampa:Čikoš – Subotica

PREDGOVOR

Ova zbirka zadataka obuhvata gradivo koje je predviđeno za vežbe iz predmeta matematička analiza na svim akreditovanim programima strukovnih studija Visoke tehničke škole strukovnih studija u Subotici.

Na početku svakog poglavlja navedene su najbitnije definicije i teoreme bez dokaza, koje su potrebne za rešavanje zadataka iz date oblasti. U svakom poglavlju možete naći detaljno izrađene zadatke koje ćemo i na vežbama obraditi, i tu po potrebi dati dodatna objašnjenja.

Na kraju svakog poglavlja možete naći zadatke koji nisu izrađeni, predlažu se za samostalnu vežbu. Ovi zadaci su birani iz poznatih zbirki zadataka više matematike (kao npr. Uščumlić–Miličić, Demidovič i drugi).

Pojedine oblasti se nadovezuju jedna na drugu, zato predlažem da vežbate zadatke po utvrđenom redosledu.

Ovu zbirku zadataka možete koristiti za pripremanje pismenog dela ispita, ali gradivo usmenog ispita ovde nije u dovoljnoj meri obrađeno.

Naše dosadašnje iskustvo je pokazalo da studenti iz različitih srednjih škola stižu sa jako različitim predznanjem. Zato svim studentima, koji iz ove skripte ne mogu da prate gradivo predlažem, da jednostavnije zadatke uvežbaju iz neke srednjoškolske zbirke zadataka.

Autor

SADRŽAJ

1. Brojni nizovi

Definicija: *Preslikavanje skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva zovemo brojni niz. Niz je znači preslikavanje* $a: N \to R$.

Obično koristimo skraćeno označavanje:

$$a(1) = a_1$$
$$a(2) = a_2$$
$$\vdots$$
$$a(n) = a_n$$

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ su članovi niza, dok je a_n opšti član niza.

Definicija: *Niz* $\{a_n\}$ *zovemo rastućim ako je* $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le \ldots$;
a ako je $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots$, *tada je niz opadajući.*
Rastuće i opadajuće nizove zajedničkim imenom nazivamo monotonim nizovima.

Niz $\{a_n\}$ je:
- monotono rastući ako je za $\forall n \in N$: $a_{n+1} - a_n \ge 0$
- strogo monotono rastući ako je za $\forall n \in N$: $a_{n+1} - a_n > 0$
- monotono opadajući ako je za $\forall n \in N$: $a_{n+1} - a_n \le 0$
- strogo monotono opadajući ako je za $\forall n \in N$: $a_{n+1} - a_n < 0$

Kod nizova sa pozitivnim članovima možemo koristiti i kriterijum količnika za određivanje monotonosti :
- monotono rastući, ako je za $\forall n \in N$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$
- strogo monotono rastući, ako je za $\forall n \in N$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$
- monotono opadajući, ako je za $\forall n \in N$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$
- strogo monotono opadajući, ako je za $\forall n \in N$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

Definicija: *Broj* k *je donja granica niza* $\{a_n\}$ *ako niz nema manjeg člana od broja k:* $k \le a_n$.
Broj K *je gornja granica niza* $\{a_n\}$ *ako niz nema većeg člana od broja K:* $a_n \le K$.

Definicija: *Niz* $\{a_n\}$ *je ograničen, ako se može zadati broj* M *takav da je* $|a_n| \le M$.

Definicija: *Broj A je granica niza $\{a_n\}$, ako za bilo koje pozitivno ε postoji prag indeks (prirodan broj n_0 koji zavisi od ε) takav, da za sve prirodne brojeve $n \geq n_0$, važi da je $|a_n - A| < \varepsilon$.*

Logičkim simbolima napisano:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)\ |a_n - A| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, n \in N$.

1. Primer: **Odrediti opšti član niza** $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$.

Rešenje:

$$1 = a_1 = a(1) = \frac{1}{1^2}$$
$$\frac{1}{4} = a_2 = a(2) = \frac{1}{2^2}$$
$$\frac{1}{9} = a_3 = a(3) = \frac{1}{3^2}$$
$$\vdots$$
$$a_n = a(n) = \frac{1}{n^2}.$$

2. *Primer:* **Odrediti opšti član niza** $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$.

Rešenje:

$$\frac{2}{3} = a_1 = a(1) = \frac{1+1}{1+2}$$
$$\frac{3}{4} = a_2 = a(2) = \frac{2+1}{2+2}$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{n+1}{n+2}.$$

3. *Primer:* **Odrediti opšti član niza** $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{10}{13}, \frac{17}{18}, \frac{26}{23}, \ldots$.

Rešenje:

$$\frac{2}{3} = a_1 = a(1) = \frac{1^2+1}{5\cdot 1-2}$$
$$\frac{5}{8} = a_2 = a(2) = \frac{2^2+1}{5\cdot 2-2}$$
$$\frac{10}{13} = a_3 = a(3) = \frac{3^2+1}{5\cdot 3-2}$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{n^2+1}{5\cdot n-2}.$$

4. Primer: **Napisati prvih pet članova niza** $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ **.**

Rešenje:

$$a_1 = a(1) = \frac{1-1}{1+1} = 0$$
$$a_2 = a(2) = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$
$$a_3 = a(3) = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$$
$$a_4 = a(4) = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$$
$$a_5 = a(5) = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3}$$

Traženi niz je znači $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \ldots$.

5. Primer: **Napisati prva četiri člana niza datog rekurzijom** $a_n = 3a_{n-1} + 1$ **ako je** $a_1 = 2$.

Rešenje:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 3a_1 + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$
$$a_3 = 3a_2 + 1 = 3 \cdot 7 + 1 = 22$$
$$a_4 = 3a_3 + 1 = 3 \cdot 22 + 1 = 67$$

Traženi niz je znači 2,7,22,67,... .

6. Primer: **Ispitati monotonost niza** $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ **.**

Rešenje: Ako koristimo kriterijum razlike, tada je :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2+1} - \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+2n+1+1} - \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+2n+2} - \frac{1}{n^2+1} =$$

$$= \frac{n^2+1-n^2-2n-2}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} = \frac{-(2n+1)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} < 0$$

jer je $n \in N$, znači da je niz strogo monotono opadajući. Pošto niz ima samo pozitivne članove možemo primeniti i kriterijum količnika:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2+1}}{\dfrac{1}{n^2+1}} = \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} < 1$$

jer je brojilac za svako $n \in N$ manji od imenioca. Znači da i na osnovu količničkog kriterijuma možemo konstatovati da je niz strogo monotono opadajući.

7. Primer: **Ispitati monotonost niza** $a_n = \dfrac{2n+1}{3n+2}$.

Rešenje: Primenimo kriterijum razlike:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)+2} - \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2n+3}{3n+5} - \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{(2n+3)(3n+2)-(2n+1)(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)} =$$

$$= \frac{6n^2+4n+9n+6-6n^2-10n-3n-5}{(3n+5)(3n+2)} = \frac{1}{(3n+5)(3n+2)} > 0$$

znači da je posmatrani niz strogo monotono rastući.

8. Primer: **Ispitati ograničenost niza** $a_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Rešenje: Pošto je

$$a_n = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1,$$

niz je ograničen sa donje strane i donja granica (infimum) je $k = 1$. Istovremeno je

$$a_n = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \le 2,$$

pa je niz ograničen i sa gornje strane i gornja granica (supremum) je $K = 2$.

9. Primer: **Dokazati da je niz** $a_n = \dfrac{5n}{n+1}$ **konvergentan, i da je granica broj** $A = 5$.

Rešenje: Niz je konvergentan ako je $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)\ |a_n - A| < \varepsilon \quad \forall n > n_0, n \in N$.

Konkretno: $\left|\dfrac{5n}{n+1} - 5\right| < \varepsilon \quad \forall n > n_0, n \in N$

$$\left|\frac{5n-5n-5}{n+1}\right| < \varepsilon \quad \forall n > n_0, n \in N$$

$$\frac{5}{n+1} < \varepsilon \qquad \forall n > n_0, n \in N$$

$$\frac{5}{\varepsilon} < n+1 \qquad \forall n > n_0, n \in N$$

$$n > \frac{5}{\varepsilon} - 1$$

$$n_0 \geq \frac{5}{\varepsilon} - 1$$

znači za $\forall \varepsilon > 0$ može se odrediti prag indeks $n_0 \geq \frac{5}{\varepsilon} - 1$ za koji važi, da svi članovi niza koji slede iza tog člana pripadaju $(5-\varepsilon, 5+\varepsilon)$ okolini broja 5, odnosno broj 5 je granica posmatranog niza.

10. Primer: **Pokazati da je broj $A = \frac{3}{5}$ granica niza $a_n = \frac{3n^2+1}{5n^2-1}$, i odrediti prag indeks počev od kojeg svi članovi niza pripadaju $\varepsilon = 10^{-3}$ okolini granice.**

Rešenje:

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3n^2+1}{5n^2-1} - \frac{3}{5}\right| < 10^{-3}$$

$$\left|\frac{15n^2+5-15n^2+3}{5(5n^2-1)}\right| < 10^{-3}$$

$$\left|\frac{8}{5(5n^2-1)}\right| < 10^{-3}$$

$$\frac{8}{5(5n^2-1)} < \frac{1}{1000}$$

$$5n^2 - 1 > \frac{8000}{5}$$

$$n^2 > \frac{1601}{5}$$

$$n > \sqrt{320{,}2}$$

$$n > 17{,}89$$

$$n_0 \geq 18$$

znači da počev od a_{18} svi članovi niza pripadaju $\varepsilon = 10^{-3}$ okolini broja $\frac{3}{5}$, a to ujedno znači da je niz konvergentan i da je granica broj $\frac{3}{5}$, odnosno da $a_n \to \frac{3}{5}$ ili drugačije pisano:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{5}.$$

11. Primer: **Dati su nizovi $a_n = 3 + \frac{5}{n}$ i $b_n = -2 + \frac{7}{n}$. Odrediti graničnu vrednost $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$.**

Rešenje: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(-2+\frac{7}{n}\right)=$

$\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}(-2)+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n}=3+0-2+0=1$.

12. Primer: **Izračunati graničnu vrednost $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$ ako su $a_n=5+\frac{1}{n}$ i $b_n=8+\frac{1}{n^2}$.**

Rešenje: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(8+\frac{1}{n^2}\right)=5\cdot 8=40$.

13. Primer: **Ispitati konvergenciju niza** $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & , n=2k-1\\ \dfrac{n}{n+2} & , n=2k\end{cases}$.

Rešenje: Moramo posebno ispitati kako se ponašaju članovi niza sa parnim i sa neparnim indeksima. Ako je :

$$n=2k-1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{\infty}=0 \ ,$$

znači da članovi sa neparnim indeksima nagomilavaju se oko tačke 0. Ako je:

$$n=2k \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2k}{2k+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{k}{k+1}=1 \ ,$$

znači da se članovi sa parnim indeksima nagomilavaju oko tačke 1. Niz u ovom slučaju ima dve tačke nagomilavanja, 0 i 1. U okolini obe tačke nagomilavanja niz ima beskonačno puno članova, ali i van jedne okoline ima beskonačno puno članova. U takvom slučaju granica niza ne postoji, znači da je niz a_n divergentan.

14. Primer: **Ispitati konvergenciju niza $a_n=3n+1$, i $b_n=7n-1$, a zatim konvergenciju niza $\frac{a_n}{b_n}$.**

Rešenje: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(3n+1)=3\cdot\infty+1=\infty$ znači da je niz a_n divergentan.

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(7n-1)=7\cdot\infty-1=\infty$ i niz b_n je divergentan.

Zbog divergencije ovih nizova granicu niza $\frac{a_n}{b_n}$ ne možemo računati kao $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$, jer izraz $\frac{\infty}{\infty}$ nije određen. U ovakvim slučajevima rešenje možemo odrediti na sledeći način:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{7n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(7-\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{7-\frac{1}{n}}=\frac{3+0}{7-0}=\frac{3}{7}$$

jer se izraz može skratiti sa n, i $\frac{1}{n}\to 0$, u slučaju kada $n\to\infty$. Rezultat pokazuje da je niz $\frac{a_n}{b_n}$ konvergentan, i da je granica $\frac{3}{7}$.

15. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-4}{3n^2-4n+1}$**, i odrediti konvergenciju niza.**

Rešenje: $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-4}{3n^2-4n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{3-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{3}.$

Niz je konvergentan, članovi konvergiraju ka broju $\frac{2}{3}$.

16. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim_{n\to\infty}\frac{1-n}{n^2+n+1}$**, i odrediti konvergenciju niza.**

Rešenje: $\lim_{n\to\infty}\frac{1-n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{1}{n}-1\right)}{n\left(n+1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n+1}=\frac{-1}{\infty}=0.$

Niz je konvergentan, članovi konvergiraju ka broju 0.

17 Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n-1}{2n+3}$**, i ispitati konvergenciju niza.**

Rešenje: $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n-1}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3n+5-\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{2}=\frac{3\cdot\infty+5}{2}=\frac{\infty}{2}=\infty.$

Niz je divergentan.

18. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{2n+3}$**, i odrediti konvergenciju niza.**

Rešenje: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}=\dfrac{\sqrt{1}+1}{2}=\dfrac{2}{2}=1$.

Niz je konvergentan, članovi konvergiraju broju 1.

19. *Primer:* Izračunati graničnu vrednost $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3$, i odrediti konvergenciju niza.

Rešenje: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2\left(3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}\right)^3=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}$.

Niz je konvergentan.

20. *Primer:* Izračunati graničnu vrednost $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n}$, ako znamo da za $a>0$ važi $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Rešenje: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}\cdot\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\cdot 1=1$.

21. *Primer:* Izračunati graničnu vrednost $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6n+5}$.

Rešenje: $6n\le 6n+5\le 6n+n=7n \quad ako \quad n\to\infty$,

tada je $\sqrt[n]{6n}\le\sqrt[n]{6n+5}\le\sqrt[n]{7n}$

znači i $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6n}\le\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6n+5}\le\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7n}$

na osnovu prethodnog zadatka

$$1\le\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{6n+6}\le 1$$

odakle sledi da je

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{6n+6}=1.$$

22. *Primer:* Izračunati graničnu vrednost $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$.

Rešenje: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)\dfrac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\dfrac{3}{\infty}=0$.

23. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n-2}-\sqrt[3]{n}\right)$.

Rešenje:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n-2}-\sqrt[3]{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n-2}-\sqrt[3]{n}\right)\frac{\sqrt[3]{(n-2)^2}+\sqrt[3]{n(n-2)}+\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{(n-2)^2}+\sqrt[3]{n(n-2)}+\sqrt[3]{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-2-n}{\sqrt[3]{(n-2)^2}+\sqrt[3]{n(n-2)}+\sqrt[3]{n^2}}=\frac{-2}{\infty}=0.$$

24. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$**, ako znamo da je** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$.

Rešenje:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{n\frac{-(n+1)}{-(n+1)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)\frac{n}{-(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)}\right]^{\frac{n}{-(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n}{-(n+1)}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{-(n+1)}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

25. Primer: **Izračunati graničnu vrednost a** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{2n+1}\right)^{2n+1}$.

Rešenje: U brojiocu i imeniocu opšteg člana niza koeficijenti uz n nisu jednaki, pa prvo to moramo da postignemo, a zatim ponavljamo postupak koji smo primenili u prethodnom zadatku:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+4}{2n+1}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\left(\frac{2n+1+3}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\left(1+\frac{3}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{3}}\right)^{\frac{2n+1}{3}\cdot 3}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2^{2n+1}}\cdot\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{3}}\right)^{\frac{2n+1}{3}}\right)^3\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{2n+1}}\cdot e^3\right)=\frac{1}{\infty}\cdot e^3=0\ .$$

26. *Primer:* **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\ln(n+1)-\ln n\right]$.

Rešenje: Zadatak možemo rešiti ako primenimo osnovna pravila logaritmovanja, na sledeći način:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\ln(n+1)-\ln n\right]=\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ln e=1$$

ZADACI ZA VEŽBU:

1. *Zadatak:* **Izračunati prvih pet članova niza** $a_n=\dfrac{n^2+2}{2n^2-3}$.

2. *Zadatak:* **Izračunati prvih pet članova niza** $a_n=\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}$.

3. *Zadatak:* **Odrediti opšti član niza** $1,\frac{1}{5},\frac{1}{25},\frac{1}{125},\ldots$.

4. *Zadatak:* **Odrediti opšti član niza** $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32}\ldots$.

5. *Zadatak:* **Ispitati monotonost niza** $a_n=\dfrac{3}{2n+3}$.

6. *Zadatak:* **Ispitati monotonost niza** $a_n=\dfrac{1}{1+n^2}$.

7. Zadatak: **Ispitati ograničenost niza** $a_n = \dfrac{7n+1}{4n-2}$.

8. Zadatak: **Ispitati ograničenost niza** $a_n = \dfrac{n^2+2}{n-3}$.

9. Zadatak: **Pokazati da je granica niza** $a_n = \dfrac{2n+12}{n-6}$ **broj** $A = 2$**, zatim naći prag indeks za** $\varepsilon = 10^{-2}$ **okolinu granice.**

10. Zadatak: **Dokazati da je niz** $a_n = \dfrac{n^2-3}{n-3}$ **divergentan.**

11. Zadatak: **Dati su nizovi** $a_n = \dfrac{3n+2}{7n-6}$ **i** $b_n = \dfrac{6n-6}{3n-2}$. **Izračunati granične vrednosti** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ **i** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$.

12. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^5}{3n^5}$.

13. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{2n+1} - \dfrac{3n^2}{6n+1}\right)$.

14. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+9n+1}$.

15. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

16. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{2n+3}$.

17. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-1}\right)$.

18. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{2n+1} - \sqrt[3]{2n+9}\right)$.

19. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$.

20. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}$.

21. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n+8}$.

22. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$.

23. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^n$.

24. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{5n}$.

25. Zadatak: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{2n}$.

2. Funkcije

U centru ispitivanja matematičke analize stoji funkcija. Pojam funkcije se razvio iz opštih principa uzročnih zavisnosti. Pri ispitivanju zavisnosti između nekih veličina nalazimo takve odnose, u kojima jednoj ili više vrednosti neke veličine pripada određena vrednost neke druge veličine. Tada ovu drugu veličinu nazivamo *funkcijom* prve ili prvih veličina.

U funkcijskom odnosu veličinu koju biramo nazivamo *nezavisnom promenljivom*, dok veličinu koja se računa nazivamo *zavisnom promenljivom*.

U zavisnosti od toga da li je zavisna promenljiva funkcija samo jedne ili više nezavisnih promenljivih razlikujemo *funkcije jedne promenljive* i *funkcije više promenljivih*. Mi ćemo se za sada zadržati na funkcijama jedne realne promenljive i ispitivaćemo njihove osobine.

Funkcija se može zadati na više načina, ali sa matematičkog aspekta najvažniji način je zadavanje funkcije *formulom*. Tada se zadaje veza $y = f(x)$ koja sem zavisne promenljive y i nezavisne promenljive x može da sadrži samo neke brojeve. Ako želimo da izračunamo one vrednosti funkcije y koje pripadaju vrednostima $x = x_0$ nezavisne promenljive, tada u zadatu formulu umesto promenljive x uvrštavamo vrednost x_0.

Nedostatak zadavanja funkcije formulom je u tome da nije dovoljno očigledna. Zato se trudimo da ispitivanjem njenih osobina nacrtamo *krivu* ili *grafik funkcije*, koji ima baš tu prednost očiglednosti.

Definicija: *Grafik funkcije je skup onih tačaka u ravni, čije su apscise (x-kordinate) vrednosti nezavisne promenljive, a ordinate (y-kordinate) su odgovarajuće vrednosti zavisne promenljive.*

2.1. Oblast definisanosti funkcije

Definicija: *Funkcija $y = f(x)$ je definisana u tački x_0 ako za x_0 postoji vrednost funkcije, a ako se za x_0 ne može izračunati vrednost funkcije tada kažemo da funkcija nije definisana u tački x_0.*

Definicija: *Skup svih tačaka u kojima je funkcija $y = f(x)$ definisana naziva se oblast definisanosti (ili domen) funkcije i označava se sa D_f.*

Definicija: *Skup svih mogućih vrednosti zavisne promenljive y koji pripadaju svim mogućim vrednostima nezavisne promenljive iz oblasti definisanosti, naziva se skup vrednosti (ili kodomen) funkcije i označava se sa CD_f.*

27. Primer: **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\dfrac{x^3+7}{x^2-5x+6}$.

Rešenje: Imenilac racionalne funkcije ne sme biti nula, zato:

$$f(x)=\frac{x^3+7}{(x-2)(x-3)}$$

$$\begin{aligned} D_f:\ & x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2 \\ & x-3\neq 0 \Rightarrow x\neq 3 \end{aligned}$$

$D_f=R\setminus\{2,3\}$ je oblast definisanosti funkcije.

28. Primer: **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}+e^{\frac{1}{x}}$.

Rešenje: Iracionalna funkcija sa parnim korenom je definisana samo za nenegativne vrednosti pod korenom, a kod eksponencijalne funkcije izložilac treba da bude definisan, zato:

$$\begin{aligned} D_f:\ & x+1\geq 0 \\ & 3-x\geq 0 \\ & x\neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_f:\ & x\geq -1 \\ & x\leq 3 \\ & x\neq 0 \end{aligned}$$

$D_f: x\in[-1,0)\cup(0,3]$ je oblast definisanosti funkcije.

29. Primer: **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\ln(1-x)}$.

Rešenje: Logaritamska funkcija je definisana samo za pozitivne argumente, zato:

$$\begin{aligned} D_f:\ & x+1\geq 0 \\ & 1-x>0 \\ & \ln(1-x)\neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_f:\ & x\geq -1 \\ & x<1 \\ & 1-x\neq 1 \Rightarrow x\neq 0 \end{aligned}$$

$D_f: x\in[-1,0)\cup(0,1)$ je oblast definisanosti funkcije.

30. *Primer:* Odrediti oblast definisanosti funkcije $f(x)=\arcsin(3+2^x)$.

Rešenje: Funkcije $\arcsin x$ i $\arccos x$ su definisane u zatvorenom intervalu $[-1,1]$, zato:

$$D_f:\ -1 \le 3+2^x \le 1$$

$$-4 \le 2^x \le -2 \quad \text{što je nemoguće , jer } 2^x > 0 \text{ za svako } x \in R$$

$D_f : x \in \varnothing$, funkcija nije definisana ni za jednu vrednost promenljive x.

31. *Primer:* Odrediti oblast definisanosti funkcije $f(x)=\ln\left(\arcsin\dfrac{x+2}{5-x}\right)$.

Rešenje: Ako uzmemo u obzir oblasti definisanosti svih elementarnih funkcija koji su sastavni delovi date složene funkcije, tada je:

$$D_f:\ 5-x \ne 0$$

$$-1 \le \frac{x+2}{5-x} \le 1$$

$$\arcsin\frac{x+2}{5-x} > 0$$

$$D_f:\ x \ne 5$$

$$-1 \le \frac{x+2}{5-x} \le 1$$

$$0 < \frac{x+2}{5-x} \le 1$$

$$D_f:\ x \ne 5$$

$$0 < \frac{x+2}{5-x} \le 1$$

D_f :

$$\frac{x+2}{5-x} > 0 \quad \wedge \quad \frac{x+2}{5-x} \le 1$$

$$\frac{x+2}{5-x} - 1 \le 0$$

$$\frac{x+2-5+x}{5-x} \le 0$$

$$\frac{2x-3}{5-x} \le 0$$

$$D_1 : x \in (-2,5)$$

$$D_2 : x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup (5,\infty)$$

$$D_f = D_1 \cap D_2$$

$D_f : x \in \left(-2, \dfrac{3}{2}\right]$ je oblast definisanosti funkcije.

ZADACI ZA VEŽBU:

26. Zadatak: **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

27. Zadatak: **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

28. Zadatak: **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\sqrt{x^2+x+5}$.

29. Zadatak: **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\sqrt{x^2-2}$.

30. Zadatak: **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$.

31. Zadatak: **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\ln\left(x^2-5x+4\right)$.

32. Zadatak: **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$.

33. Zadatak: **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\sqrt{\cos 3x}$.

34. Zadatak: **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$.

35. Zadatak: **Odrediti oblast definisanosti funkcije** $f(x)=\sqrt{\ln\dfrac{x-4}{x+2}}+\sqrt{4-3x-x^2}$.

2.2. Parnost i neparnost funkcije

Definicija: *Funkcija* $y=f(x)$ *je parna ako za* $\forall x\in D_f$ *važi da je* $f(-x)=f(x)$.

Grafik parne funkcije je simetričan u odnosu na y-osu.

Definicija: *Funkcija* $y=f(x)$ *je neparna ako za* $\forall x\in D_f$ *važi da je* $f(-x)=-f(x)$.

Grafik neparne funkcije je simetričan u odnosu na kordinatni početak.

32. Primer: **Ispitati parnost konstantne funkcije** $f(x)=\frac{3}{2}$.

Rešenje: Da bismo utvrdili parnost ili neparnost neke funkcije, treba da ispitamo $f(-x)$. U ovom slučaju je:

$$f(-x)=\frac{3}{2}=f(x)$$

u svakoj tački x oblasti definisanosti, a to znači da je funkcija:

$$f(x)=\frac{3}{2}$$

parna funkcija.

33. Primer: **Ispitati parnost polinomne funkcije** $f(x)=x^5-5x^3+x$.

Rešenje: Takođe ispitujemo $f(-x)$:

$$f(-x)=(-x)^5-5(-x)^3+(-x)$$

$$f(-x)=-x^5+5x^3-x$$

$$f(-x)=-(x^5-5x^3+x)$$

$$f(-x)=-f(x)$$

za svaku tačku x oblasti definisanosti, a to znači da je funkcija :

$$f(x)=x^5-5x^3+x$$

neparna.

34. Primer: **Ispitati parnost logaritamske funkcije** $f(x)=\ln x$.

Rešenje: Logaritamska funkcija $f(x)=\ln x$ definisana je za vrednosti $x>0$, zato :

$$f(-x)=\ln(-x)$$

nije ni definisano, naime za $x>0$ sledi $-x<0$, a logaritam negativnih brojeva nije definisan. To znači da funkcija:

$$f(x)=\ln x$$

nije ni parna ni neparna .

35. Primer: **Ispitati parnost eksponencijalne funkcije** $f(x)=\frac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$.

Rešenje: $$f(-x)=\frac{1}{2}\left(a^{-x}+a^x\right)$$

$$f(-x)=f(x)$$

u svakoj tački oblasti definisanosti, a to znači da je funkcija:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$$

parna.

36. Primer: **Ispitati parnost iracionalne funkcije** $f(x)=\sqrt[5]{(x-1)^2}+\sqrt[5]{(x+1)^2}$.

Rešenje:

$$f(-x)=\sqrt[5]{(-x-1)^2}+\sqrt[5]{(-x+1)^2}$$

$$f(-x)=\sqrt[5]{(x+1)^2}+\sqrt[5]{(x-1)^2}$$

$$f(-x)=f(x)$$

u svakoj tački oblasti definisanosti, a to znači da je funkcija:

$$f(x)=\sqrt[5]{(x-1)^2}+\sqrt[5]{(x+1)^2}$$

parna.

37. Primer: **Ispitati parnost logaritamske funkcije** $f(x)=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Rešenje:

$$f(-x)=\log_a\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)$$

$$f(-x)=\log_a\left[\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]$$

$$f(-x)=\log_a\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$f(-x)=\log_a\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$f(-x)=\log_a 1-\log_a\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

$$f(-x)=0-\log_a\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

$$f(-x)=-\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$f(-x)=-f(x)$$

u svakoj tački oblasti definisanosti, a to znači da je funkcija:

$$f(x)=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

neparna.

ZADACI ZA VEŽBU:

36. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=e^x+e^{-x}$.

37. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=a^x-a^{-x}$.

38. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$.

39. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=x^3-4x$.

40. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=\frac{10x}{1+x^2}$.

41. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$.

42. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

43. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=2^x$.

44. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=\sin\left(x^5-x^3+1\right)$.

45. Zadatak: **Ispitati parnost funkcije** $f(x)=\cos\left(\frac{6}{x^4+4}\right)$.

2.3. Periodičnost funkcije

Definicija: *Funkcija* $y=f(x)$ *je periodična ako postoji pozitivan realan broj* ω *takav, da za svaku tačku* x *oblasti definisanosti važi* $f(x+\omega)=f(x)$. *Svaki broj* ω *koji zadovoljava ovaj uslov je period funkcije* $y=f(x)$, *dok je najmanji takav broj* ω_0 *osnovni period.*

38. Primer: **Ispitati periodičnost funkcije** $f(x)=\sin\frac{x}{3}$ **, zatim odrediti osnovni period.**

Rešenje: $f(x)=\sin\frac{x}{3}=\sin\left(\frac{x}{3}+2k\pi\right)$, $k\in Z$ jer je funkcija $\sin x$ periodična po 2π. Ako je funkcija $f(x)=\sin\frac{x}{3}$ periodična, onda mora da postoji broj ω takav, da je:

$$f(x+\omega)=f(x)$$

$$\sin\frac{x+\omega}{3}=\sin\left(\frac{x}{3}+2k\pi\right)$$

$$\frac{x}{3}+\frac{\omega}{3}=\frac{x}{3}+2k\pi$$

$$\frac{\omega}{3}=2k\pi$$

$\omega=6k\pi$ je pozitivan broj za $k\in Z^{+}$, znači da je funkcija:

$$f(x)=\sin\frac{x}{3}$$

periodična po $\omega=6k\pi$. Osnovni period se dobija za $k=1$, u ovom slučaju $\omega_0=6\pi$.

39. Primer: **Ispitati periodičnost funkcije $f(x)=\cos\frac{3x-2}{5}$, i odrediti osnovni period.**

Rešenje: $f(x)=\cos\frac{3x-2}{5}=\cos\left(\frac{3x-2}{5}+2k\pi\right)$

$$f(x+\omega)=f(x)$$

$$\cos\frac{3(x+\omega)-2}{5}=\cos\left(\frac{3x-2}{5}+2k\pi\right)$$

$$\frac{3x+3\omega-2}{5}=\frac{3x-2}{5}+2k\pi$$

$$\frac{3\omega}{5}=2k\pi$$

$\omega=\frac{10k\pi}{3}$ je period, a osnovni period je :

$$\omega_0=\frac{10\pi}{3}.$$

40. Primer: **Ispitati periodičnost funkcije $f(x)=1+\cos\frac{\pi}{2}x$, i odrediti osnovni period.**

Rešenje: $f(x)=1+\cos\frac{\pi}{2}x=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}x+2k\pi\right)$

$$f(x+\omega)=f(x)$$

$$1+\cos\frac{\pi}{2}(x+\omega)=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}x+2k\pi\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\omega\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x+2k\pi\right)$$

$$\frac{\pi}{2}\omega=2k\pi$$

$\omega=4k$ je period, a osnovni period je:

$\omega_0=4$.

41. Primer: **Ispitati period funkcije $f(x)=\cos^2 x$, zatim odrediti osnovni period.**

Rešenje: Primenom trigonometrijskog identiteta $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ zamenimom kvadratnu trigonometrijsku funkciju sa linearnom:

$$f(x)=\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x+2k\pi)$$

$$f(x+\omega)=f(x)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2(x+\omega)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x+2k\pi)$$

$$\cos(2x+2\omega)=\cos(2x+2k\pi)$$

$$2\omega=2k\pi$$

$\omega=k\pi$ je period, a osnovni period je :

$\omega_0=\pi$.

42. Primer: **Ispitati periodičnost funkcije $f(x)=\sin\sqrt{x}$.**

Rešenje:

$$f(x)=\sin\sqrt{x}=\sin\left(\sqrt{x}+2k\pi\right)$$

$$f(x+\omega)=f(x)$$

$$\sin\sqrt{x+\omega}=\sin\left(\sqrt{x}+2k\pi\right)$$

$$\sqrt{x+\omega}=\sqrt{x}+2k\pi$$

$$x+\omega=x+4k\pi\sqrt{x}+4k^2\pi^2$$

$$\omega=4k\pi\sqrt{x}+4k^2\pi^2\neq const.$$

pošto dobijeno ω sadrži x, znači da ne postoji pozitivna konstanta ω za koje je $f(x+\omega)=f(x)$, a to znači da funkcija $f(x)=\sin\sqrt{x}$ nije periodična.

ZADACI ZA VEŽBU:

46. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period funkcije** $f(x)=\sin\dfrac{3x+1}{4}$.

47. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period funkcije** $f(x)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\sin 4x$.

48. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period funkcije** $f(x)=\dfrac{1}{3}-\sin\sqrt{2x}$.

49. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period funkcije** $f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

50. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period funkcije** $f(x)=\cos^2(3x)$.

51. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period funkcije** $f(x)=10\sin 3x$.

52. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period funkcije** $f(x)=\sin^2 x$.

53. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti** ω_0 **za funkciju** $f(x)=2\sin 2x+3\cos 2x$.

54. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period funkcije** $f(x)=\tan\dfrac{3x}{2}$.

55. Zadatak: **Ispitati periodičnost i odrediti osnovni period funkcije** $f(x)=\sqrt{\tan x}$.

2.4. Inverzna funkcija

Definicija: *Ako je funkcija $y=f(x)$ bijekivna (zavisnost između promenljivih x i y je takva, da zadavanje bilo koje promenljive jednoznačno određuje drugu), tada pod njenom inverznom funkcijom podrazumevamo onu funkciju $y=f^{-1}(x)$, čija je oblast definisanosti skup vrednosti funkcije $f(x)$, i ako je $f(x_0)=y_0$ tada je $f^{-1}(y_0)=x_0$ za svaku tačku x_0 oblasti definisanosti, odnosno inverzna funkcija funkcije $f(x)$ je takva funkcija $f^{-1}(x)$ za koju važi da je:*
$f^{-1}(f(x))=x$ ili $f^{-1}(y)=x$, i ako je $f:D_f\to CD_f$ tada je $f^{-1}:CD_f\to D_f$.

Iz same definicije sledi da kod funkcije f i njene inverzne funkcije f^{-1} menjaju ulogu nezavisna i zavisna promenljiva (x i y), oblast definisanosti i skup vrednosti (D_f i CD_f).

Kod određivanja inverzne funkcije iskoristićemo tačno ovu osobinu.

43. Primer: **Za funkciju $f(x)=x+1$ odrediti inverznu funkciju $f^{-1}(x)$, i oblast definisanosti inverzne funkcije $D_{f^{-1}}$.**

Rešenje: $f \;: y=x+1$

kod inverzne funkcije menjaju ulogu nezavisna i zavisna promenljiva,

$$f^{-1}: x=y+1$$

iz ove formule treba izraziti zavisnu promenljivu y funkcije f^{-1},

$$f^{-1}: y=x-1$$

pa je tražena inverzna funkcija

$$f^{-1}(x)=x-1$$

a oblast definisanosti ove funkcije je $D_{f^{-1}} : x \in R$.

44. Primer: **Za funkciju $f(x)=\ln\frac{x}{2}$ odrediti inverznu funkciju $f^{-1}(x)$, i oblast definisanosti inverzne funkcije $D_{f^{-1}}$.**

Rešenje:

$$f \;: y=\ln\frac{x}{2}$$

$$f^{-1}: x=\ln\frac{y}{2}$$

$$e^x=\frac{y}{2}$$

$$y=2e^x$$

$$f^{-1}(x)=2e^x$$

je tražena inverzna funkcija, a oblast definisanosti ove funkcije je $D_{f^{-1}} : x \in R$.

45. Primer: **Odrediti inverznu funkciju za $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$, a zatim oblast definisanosti dobijene inverzne funkcije.**

Rešenje:

$$f \;: y=\sqrt[3]{x^2+1}$$

$$f^{-1}: x=\sqrt[3]{y^2+1}$$

$$x^3=y^2+1$$

$$y^2=x^3-1$$

$$y=\pm\sqrt{x^3-1}$$

$$f^{-1}(x)=\pm\sqrt{x^3-1}$$

je tražena inverzna funkcija, a oblast definisanosti ove funkcije je:

$$D_{f^{-1}}: x^3-1\geq 0$$
$$(x-1)(x^2+x+1)\geq 0$$
$$x-1\geq 0$$
$$x\geq 1$$
$$D_{f^{-1}}: x\in[1,+\infty).$$

46. *Primer:* **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za** $f(x)=\mathrm{arctg}3x$.

Rešenje:

$$f\ : y=\mathrm{arctg}3x$$
$$f^{-1}: x=\mathrm{arctg}3y$$
$$\mathrm{tg}x=3y$$
$$y=\frac{1}{3}\mathrm{tg}x$$
$$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}\mathrm{tg}x$$

je tražena inverzna funkcija, a oblast definisanosti ove funkcije je $D_{f^{-1}}: x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

47. *Primer:* **Odrediti inverznu funkciju za** $f(x)=\frac{e^{\cos x}-1}{2+e^{\cos x}}$ **i oblast definisanosti dobijene inverzne funkcije.**

Rešenje:

$$f\ : y=\frac{e^{\cos x}-1}{2+e^{\cos x}}$$

$$f^{-1}: x=\frac{e^{\cos y}-1}{2+e^{\cos y}}$$

$$x\left(2+e^{\cos y}\right)=e^{\cos y}-1$$

$$xe^{\cos y}-e^{\cos y}=-1-2x$$

$$e^{\cos y}(1-x)=1+2x$$

$$e^{\cos y}=\frac{1+2x}{1-x}$$

$$\cos y=\ln\frac{1+2x}{1-x}$$

$$y=\arccos\left(\ln\frac{1+2x}{1-x}\right)$$

$$f^{-1}(x)=\arccos\left(\ln\frac{1+2x}{1-x}\right)$$

je tražena inverzna funkcija, a oblast definisanosti je:

$$D_{f^{-1}}:1-x\neq 0$$

$$\frac{1+2x}{1-x}>0$$

$$-1\leq\ln\frac{1+2x}{1-x}\leq 1$$

$$D_{f^{-1}}:x\neq 1$$

$$\frac{1+2x}{1-x}>0$$

$$\frac{1}{e}\leq\frac{1+2x}{1-x}\leq e$$

$$D_{f^{-1}}:\frac{1}{e}\leq\frac{1+2x}{1-x}\leq e$$

$$\frac{1+2x}{1-x}\geq\frac{1}{e}\qquad\wedge\qquad\frac{1+2x}{1-x}\leq e$$

$$\frac{1+2x}{1-x}-\frac{1}{e}\geq 0\qquad\qquad\frac{1+2x}{1-x}-e\leq 0$$

$$\frac{e+2ex-1+x}{e(1-x)}\geq 0\qquad\qquad\frac{1+2x-e+ex}{1-x}\leq 0$$

$$\frac{(2e+1)x+e-1}{e(1-x)}\geq 0\qquad\qquad\frac{(2+e)x+1-e}{1-x}\leq 0$$

$$x\in\left[\frac{1-e}{2e+1},1\right)\qquad\qquad x\in\left(-\infty,\frac{e-1}{2+e}\right]\cup(1,+\infty)$$

oblast definisanosti inverzne funkcije je presek ovih oblasti, $D_{f^{-1}}:x\in\left[\frac{1-e}{2e+1},\frac{e-1}{2+e}\right]$.

ZADACI ZA VEŽBU:

56. Primer: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za**

$f(x) = 2x + 3$.

57. Primer: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za**

$f(x) = x^2 - 1$.

58. Primer: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za**

$f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

59. Primer: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za**

$f(x) = \log \frac{x+2}{5}$.

60. Primer: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za**

$f(x) = \cos x - \sin x + 1$.

61. Primer: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za**

$f(x) = \ln\left(\arcsin \frac{x}{x+1}\right)$.

62. Primer: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za**

$f(x) = 2\arctan\left(\ln \frac{x+1}{x-1}\right)$.

63. Primer: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za**

$e^x(2\cos y - 1) = 2\sin y - 1$.

64. Primer: **Odrediti inverznu funkciju i oblast definisanosti inverzne funkcije za**

$2e^x \sin y + 2\cos y = e^x - 1$.

2.5. Granična vrednost i neprekidnost funkcije

Definicija: *Funkcija* $y = f(x)$ *ima graničnu vrednost* A *u tački* $\underline{a}$, *ako za svaki niz tačaka koji* $x \to a$ *i* $x \neq a$, *važi da* $f(x) \to A$, *i to obeležavamo na sledeći način:* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Definicija: *Ako je* $x < a$ *i* $x \to a$ *tada po dogovoru kažemo da* $x \to a-0$, *a broj* $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ *zovemo: leva granična vrednost funkcije* $f(x)$ *u tački* $\underline{a}$.

Definicija: *Ako je* $x > a$ *i* $x \to a$ *tada po dogovoru kažemo da* $x \to a+0$, *a broj* $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$ *zovemo: desna granična vrednost funkcije* $f(x)$ *u tački* $\underline{a}$.

Definicija: *Funkcija* $y = f(x)$ *je neprekidna u tački* $\underline{a}$, *ako u toj tački postoje leva i desna granična vrednost, i ako su one jednake sa vrednošću funkcije u toj tački:* $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ *odnosno* $f(a-0) = f(a) = f(a+0)$.

Prilikom izračunavanja granične vrednosti funkcije u nekoj tački $\underline{a}$ često dobijamo *neodređen izraz.* U ovakvim slučajevima pomoću različitih algebraskih transformacija oslobađamo se od neodređenosti u izrazu. Neodređeni izrazi se mogu pojaviti u sedam različitih oblika, koje možemo uvrstiti u tri grupe.

Neodređeni izrazi:

1. $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$

2. $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

3. 1^{∞}, 0^0, ∞^0

Ako računamo graničnu vrednost oblika $\lim\limits_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ ***i*** $P(a) = Q(a) = 0$, ***tada imamo neodređen izraz oblika*** $\frac{0}{0}$, ***koji treba skratiti sa binomom*** $x - a$.

48. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - 2x + 1}$.

Rešenje: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - 2x + 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x^2+x+1)}{(x^2+x-1)} = \frac{1+1+1}{1+1-1} = \frac{3}{1} = 3$.

49. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$.

Rešenje: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x^2-1}=\dfrac{2-3}{4-1}=-\dfrac{1}{3}$.

50. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-25}$

Rešenje: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)^2}{(x-5)(x+5)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x+5}=\dfrac{0}{10}=0$.

Granične vrednosti oblika $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ***najčešće su neodređeni izrazi oblika*** $\dfrac{\infty}{\infty}$***, koje rešavamo tako da izvlačimo pred zagradu i skartimo sa najvećim stepenom promenljive*** x.

51. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+5x-3}{2x^3-x+12}$.

Rešenje: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+5x-3}{2x^3-x+12}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3\left(3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{12}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{12}{x^3}}=\dfrac{3}{2}$,

skratili smo izraz sa x^3, i kada $x\to\infty$, tada $\dfrac{2}{x}\to 0$, $\dfrac{5}{x^2}\to 0$ itd.

52. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+10}{5x^2-x-1}$.

Rešenje: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+10}{5x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(3x-\dfrac{2}{x}+\dfrac{10}{x^2}\right)}{x^2\left(5-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-\dfrac{2}{x}+\dfrac{10}{x^2}}{5-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{5}=\dfrac{\infty}{5}=\infty$.

53. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+5}{x^2+2x+1}$.

Rešenje: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+5}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{x\left(x+2+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{x+2+\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x+2}=\frac{4}{\infty}=0$.

Granične vrednosti neodređenog oblika kod iracionalnih izraza najčešće možemo rešavati racionalizacijom brojilaca ili imenilaca.

54. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$.

Rešenje:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)\frac{\sqrt{9x^2+1}+3x}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=\frac{1}{\infty}=0\ .$$

55. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Rešenje: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\ .$$

56. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}{\sin 2x}$.

Rešenje:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}{\sin 2x}\cdot\frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\mathrm{tg}x-1-\mathrm{tg}x}{2\sin x\cos x\left(\sqrt{1-\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\mathrm{tg}x}\right)}=\lim_{x\to\pi}\frac{-2\mathrm{tg}x}{2\sin x\cos x\left(\sqrt{1-\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\mathrm{tg}x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x\cos x\left(\sqrt{1-\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\mathrm{tg}x}\right)}=\lim_{x\to\pi}\frac{-1}{\cos^2 x\left(\sqrt{1-\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\mathrm{tg}x}\right)}=$$

$$=\frac{-1}{(-1)^2(1+1)}=-\frac{1}{2}\ .$$

Kod računanja graničnih vrednosti trigonometrijskih funkcija najčešće možemo rešiti zadatak primenom osnovnog limesa $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ***i*** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=1$.

57. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Rešenje: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=1\cdot 3=3$.

58. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Rešenje: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$.

59. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

Rešenje: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}\cdot\frac{x^2}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\ .$$

60. Primer: **Izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$.

Rešenje: $\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x+\sin^2 x}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm 0}\sqrt{2}\cdot\frac{|\sin x|}{x}=$

$$=\sqrt{2}\cdot\lim_{x\to\pm 0}\frac{|\sin x|}{x}\cdot\frac{|x|}{|x|}=\sqrt{2}\cdot\lim_{x\to\pm 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\cdot\frac{|x|}{x}=\sqrt{2}\cdot 1\cdot\lim_{x\to\pm 0}\frac{|x|}{x}=$$

$$=\begin{cases}\sqrt{2}\cdot\lim\limits_{x\to+0}\frac{|x|}{x}\\ \sqrt{2}\cdot\lim\limits_{x\to-0}\frac{|x|}{x}\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{2}\cdot 1 & ha\ x\to+0\\ \sqrt{2}\cdot(-1) & ha\ x\to-0\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{2} & ha\ x\to+0\\ -\sqrt{2} & ha\ x\to-0\end{cases}.$$

Kod graničnih vrednosti u kojima se i u osnovi i u izložiocu pojavljuje promenljiva x, i izraz je neodređen oblika 1^{∞}, primenjujemo osnovni limes $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$, gde je broj $e=2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ldots$ iracionalna konstanta, Neperov (ili Ojlerov) broj.

61. Primer: **Izračunati graničnu vrednost $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)^{x}$.**

Rešenje: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1+1}{2x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{x\frac{2x+1}{2x+1}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{(2x+1)\frac{x}{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{2x+1}\right]^{\frac{x}{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x}{2x+1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}\ .$$

62. Primer: **Izračunati graničnu vrednost $\lim_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}$.**

Rešenje: $\lim_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\mathrm{ctg}x}\right)^{\mathrm{ctg}x}=\left|\begin{array}{c}\mathrm{ctg}x=t\\ x\to 0\\ t\to\infty\end{array}\right|=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e\ .$

63. Primer: **Izračunati graničnu vrednost $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.**

Rešenje: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\left|\begin{array}{c}\frac{1}{x}=t\\ x\to 0\\ t\to\infty\end{array}\right|=$

$$=\ln\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]=\ln e=1\ .$$

64. Primer: **Odrediti vrednost konstante A tako, da funkcija $f(x)=\begin{cases}1-x^{2} & ,\ x<0\\ A & ,\ x=0\\ 1+x & ,\ x>0\end{cases}$**

bude neprekidna.

Rešenje: Funkcija $1-x^{2}$ (parabola) je neprekidna za vrednosti $x<0$, isto tako je funkcija $1+x$ (prava) neprekidna za vrednosti $x>0$. Da bi data funkcija $f(x)$ bila neprekidna, vrednost funkcije u $x=0$ treba definisati tako da ona bude neprekidna i u tački spajanja, odnosno treba da je:

$$\lim_{x\to -0} f(x) = f(0) = \lim_{x\to +0} f(x)$$

$$\lim_{x\to -0}\left(1-x^2\right) = A = \lim_{x\to +0}(1+x)$$

$$1 = A = 1$$

znači

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & , \quad x<0 \\ 1 & , \quad x=0 \\ 1+x & , \quad x>0 \end{cases}.$$

65. Primer: **Odrediti vrednost parametra λ tako, da funkcija $f(x) = \begin{cases} e^{-x}+1 & , \quad x\ge 0 \\ x+\lambda & , \quad x<0 \end{cases}$ bude neprekidna.**

Rešenje: Slično rešavanju prethodnog zadatka:

$$\lim_{x\to -0} f(x) = f(0) = \lim_{x\to +0} f(x)$$

$$\lim_{x\to -0}(x+\lambda) = e^{-0}+1 = \lim_{x\to +0}\left(e^{-x}+1\right)$$

$$0+\lambda = 1+1 = 1+1$$

$$\lambda = 2 = 2$$

znači funkcija $f(x)$ je neprekidna ako je $\lambda = 2$, odnosno

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}+1 & , \quad x\ge 0 \\ x+2 & , \quad x<0 \end{cases}.$$

66. Primer: **Odrediti vrednost parametra A tako da je funkcija $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , \quad x\ne 2 \\ A & , \quad x=2 \end{cases}$ neprekidna.**

Rešenje:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = f(2) = \lim_{x\to 2+0} f(x)$$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^2-4}{x-2} = A = \lim_{x\to 2+0} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = A = \lim_{x\to 2+0} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2-0}(x+2) = A = \lim_{x\to 2+0}(x+2)$$

$$4 = A = 4$$

znači da je funkcija $f(x)$ neprekidna za $A=4$, odnosno

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , \quad x\ne 2 \\ 4 & , \quad x=2 \end{cases}.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

65. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}$.

66. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 2}\left(5x^3-6x^2+x-5\right)$.

67. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2-7x-2}{3x^2-4x-4}$.

68. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6}$.

69. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+2x-x^2}{2x^2-x}$.

70. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

71. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

72. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

73. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

74. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-1}$.

75. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{\sqrt{x^2}}{x}$.

76. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{|x|-x}{x}$.

77. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\pm 0}f(x)$ **za funkciju** $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & , \quad x>0\\ x+1 & , \quad x\le 0\end{cases}$.

78. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

79. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

80. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

81. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x-\sin x}{x}$.

82. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-3x^2}{\sin x}$.

83. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$.

84. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{-x}$.

85. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{x}$.

86. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

87. Zadatak: **Odrediti garničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.

88. Zadatak: **Odrediti vrednost parametra** A **tako da funkcija**

$$f(x)=\begin{cases}(2-x)\dfrac{\sin x}{3x} & , \ x\neq 0\\ A & , \ x=0\end{cases}$$ **bude neprekidna.**

89. Zadatak: **Odrediti vrednost parametra** A **tako da funkcija**

$$f(x)=\begin{cases}e^{x}\dfrac{\sin 5x}{x} & , \ x\neq 0\\ A & , \ x=0\end{cases}$$ **bude neprekidna.**

90. Zadatak: **Odrediti vrednost parametra** A **tako da funkcija**

$$f(x)=\begin{cases}(x^2+1)\dfrac{\sin x}{x} & , \ x\neq 0\\ A & , \ x=0\end{cases}$$ **bude neprekidna.**

3. Diferencijalni račun

3.1. Izvod i diferencijal funkcije

Definicija: *Diferencijalni količnik (ili prvi izvod)* $y' = \frac{dy}{dx}$ *funkcije* $y = f(x)$ *u tački* x_0 *je granična vrednost količnika* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *kada* $\Delta x \to 0$, *odnosno:*

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Definicija: *Ako je funkcija* $y = f(x)$ *diferencijabilna u tački* x_0, *tada prava sa koeficijentom pravca* $y'(x_0)$ *koja prolazi kroz tačku* (x_0, y_0) *je tangenta funkcije* $y = f(x)$ *u tački* x_0. *Jednačina tangente je:* $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Prema tome geometrijsko značenje prvog izvoda je: *prvi izvod funkcije u tački* x_0 *je koeficijent pravca tangente povučene na krivu u tački* x_0.

Nalaženje diferencijalnog količnika (prvog izvoda) zovemo *diferenciranjem.*

Definicija: *Ako je funkcija* $y = f(x)$ *diferencijabilna, tada je* $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, *a odavde se dobija prvi diferencijal funkcije:* $dy = f'(x)\,dx$.

Pravila diferenciranja

Ako je c konstanta, $u = u(x)$ i $v = v(x)$ su diferencijabilne funkcije, tada važe sledeća pravila diferenciranja:

1. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Izvod složene funkcije

Ako su $y=f(u)$ i $u=g(x)$ diferencijabilne funkcije, tada izvod složene funkcije $y=f(u)=f(g(x))$ dobija se po formuli: $y'=f'(g(x))\cdot g'(x)=y'_u\cdot u'_x$ ili $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

Tablica izvoda elementarnih funkcija

1. $(const)'=0$
2. $(x)'=1$
3. $(x^n)'=n\,x^{n-1}$
4. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(\sin x)'=\cos x$
6. $(\cos x)'=-\sin x$
7. $(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
8. $(\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad(|x|<1)$
10. $(\arccos)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad(|x|<1)$
11. $(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$
12. $(\mathrm{arcctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}$
13. $(a^x)'=a^x\ln a$
14. $(e^x)'=e^x$
15. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$
16. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}=\frac{\log_a e}{x}$
17. $(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$
18. $(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$
19. $(\mathrm{th}x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
20. $(\mathrm{cth}x)'=-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$
21. $(\mathrm{Arsh}x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
22. $(\mathrm{Arch}x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad(|x|>1)$
23. $(\mathrm{Arth}x)'=\frac{1}{1-x^2}$ $\quad(|x|<1)$
24. $(\mathrm{Arcth}x)'=-\frac{1}{x^2-1}$ $\quad(|x|>1)$

67. Primer: **Po definiciji naći prvi izvod funkcije** $y = x^2 + 1$.

Rešenje: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x,$$

prvi izvod funkcije $y = x^2 + 1$ je znači $y' = 2x$.

68. Primer: **Po definiciji naći prvi izvod funkcije** $y = \sqrt{x+2}$.

Rešenje: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+\Delta x+2} - \sqrt{x+2}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+\Delta x+2} - \sqrt{x+2}}{\Delta x} \cdot \dfrac{\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x + 2 - x - 2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}} = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}.$$

69. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y = x^7$.

Rešenje: Primenom tablice izvoda elementarnih funkcija i pravila diferenciranja, dobićemo da je: $y' = 7x^6$.

70. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y = \sqrt[3]{x}$.

Rešenje:

$$y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} .$$

71. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$.

Rešenje:

$$y = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} = 2x^{-\frac{3}{4}}$$

$$y' = 2\left(-\frac{3}{4}\right)x^{-\frac{3}{4}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{2\sqrt[4]{x^7}} = \frac{3}{2x\sqrt[4]{x^3}} .$$

72. Prime: **Naći prvi izvod funkcije** $y = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[6]{x}}}$.

Rešenje: $y=\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[6]{x}}}=\sqrt[36]{x}=x^{\frac{1}{36}}$

$$y'=\frac{1}{36}x^{\frac{1}{36}-1}=\frac{1}{36}x^{-\frac{35}{36}}=\frac{1}{36\sqrt[36]{x^{35}}}$$

73. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y=\sqrt{x}\left(5x-x^3\right)$.

Rešenje: $y=\sqrt{x}\left(5x-x^3\right)$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(5x-x^3\right)+\sqrt{x}\left(5-3x^2\right)=\frac{5x-x^3+10x-6x^3}{2\sqrt{x}}=\frac{15x-7x^3}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{15}{2}\sqrt{x}-\frac{7}{2}x^2\sqrt{x}\ .$$

74. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y=\dfrac{2x^2+3x}{4x-6}$.

Rešenje: $y=\dfrac{2x^2+3x}{4x-6}=\dfrac{u}{v}$

$$y'=\frac{(4x+3)(4x-6)-\left(2x^2+3x\right)4}{(4x-6)^2}=\frac{16x^2-24x+12x-18-8x^2-12x}{(4x-6)^2}=$$

$$=\frac{8x^2-24x-18}{(4x-6)^2}=\frac{2\left(4x^2-12x-9\right)}{(4x-6)^2}.$$

75. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y=2\sin x-3\cos x$.

Rešenje: $y'=2\cos x-3(-\sin x)=2\cos x+3\sin x$.

76. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y=\sqrt{x}\cdot\sin x$.

Rešenje: $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin x+\sqrt{x}\cos x$.

77. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y=(3x+7)^2$.

Rešenje: Funkcija $y=(3x+7)^2$ je složena funkcija, na osnovu pravila diferenciranja složene funkcije dobijamo: $y'=2(3x+7)^{2-1}\cdot(3x+7)'=2(3x+7)3=6(3x+7)$.

78. Primer: **Naći prvi izvod funkcije** $y=\sin\sqrt{5x}$.

Rešenje: $y'=\cos\sqrt{5x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{5x}}\cdot 5=\dfrac{5\cos\sqrt{5x}}{2\sqrt{5x}}$.

Matematička analiza Diferencijalni račun

79. Primer: Naći prvi izvod funkcije $y = \mathrm{tg}(\sin 5x)$.

Rešenje: $y' = \dfrac{1}{\cos^2(\sin 5x)} \cdot \cos 5x \cdot 5 = \dfrac{5\cos 5x}{\cos^2(\sin 5x)}$.

...mer: Naći prvi izvod funkcije $y = 5e^x - 3e^{2x}$.

Rešenje: $y' = 5e^x - 3e^{2x} \cdot 2 = 5e^x - 6e^{2x}$.

83. ...aći prvi izvod funkcije $y = a^x + \dfrac{1}{2}a^{-x} + a^{2x}$.

$y' = a^x \ln a + \dfrac{1}{2}a^{-x} \ln a \cdot (-1) + a^{2x} \ln a \cdot 2 = \ln a\left(a^x - \dfrac{1}{2}a^{-x} + 2a^{2x}\right)$.

...aći prvi izvod funkcije $y = 3^{\frac{1}{x+1}}$.

9..5. Primer

Rešenje: $y = 3^{\frac{1}{x+1}} \cdot \ln 3 \cdot \left(\dfrac{1}{x+1}\right)' = 3^{\frac{1}{x+1}} \cdot \ln 3 \cdot \dfrac{0-1}{(x+1)^2} = \dfrac{-\ln 3}{(x+1)^2} \cdot 3^{\frac{1}{x+1}}$.

Primer: Naći prvi izvod funkcije $y = e^{e^{2x}}$.

Rešenje: $y' = e^{e^{2x}} \cdot \left(e^{2x}\right)' = e^{e^{2x}} \cdot e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}e^{e^{2x}}$.

84. Primer: Naći prvi izvod funkcije $y = \sin e^{x^2}$.

Rešenje: $y' = \cos e^{x^2} \cdot \left(e^{x^2}\right)' = \cos e^{x^2} \cdot e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2} \cos e^{x^2}$.

85. Primer: Naći prvi izvod funkcije $y = 5\ln x + 3\ln 2x$.

Rešenje: $y' = 5 \cdot \dfrac{1}{x} + 3 \cdot \dfrac{1}{2x} \cdot 2 = \dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{x} = \dfrac{8}{x}$.

86. Primer: Naći prvi izvod funkcije $y = \ln(3x+4)$.

Rešenje: $y' = \dfrac{1}{(3x+4)} \cdot 3 = \dfrac{3}{3x+4}$.

87. Primer: Naći prvi izvod i prvi diferencijal funkcije $y = \ln(\sin^2 x)$.

Rešenje: $y' = \dfrac{1}{\sin^2 x} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot (\sin x)' = \dfrac{2}{\sin x} \cdot \cos x = 2\mathrm{ctg}x$

je prvi izvod funkcije, dok je $dy = 2\mathrm{ctg}x\,dx$ prvi diferencijal.

115. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost**

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}.$$

116. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost**

$$\lim_{x\to 0}(\arcsin x\operatorname{ctg}x).$$

117. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost**

$$\lim_{x\to 1}\ln x\ln(x-1).$$

118. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost**

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6}\right).$$

119. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost**

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\frac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right].$$

120. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$$

121. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg}x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right).$$

122. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to +0}x^x$.

123. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to +0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

124. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

125. Zadatak: **Primenom Lopitalovog pravila izračunati graničnu vrednost** $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$.

4. Ispitivanje funkcija

Cilj ispitivanja funkcije je crtanje njenog grafika. Zato ispitujemo njene najvažnije osobine, razne asimpote, ekstremne vrednosti, intervale monotonosti, tačke prevoja, konveksne i konkavne lukove. Poznavajući ove osobine možemo da utvrdimo kako se menja funkcija, i ako je potrebno možemo izračunati vrednosti funkcije još u nekim tačkama. Grafik funkcije crtamo spajajući obeležene tačke, uzevši u obzir ispitane osobine.

Ispitivanje funkcija ćemo izvoditi na osnovu sledećih tačaka u datom redosledu:

1. *Oblast definisanosti:* D_f.

2. *Parnost:* $f(-x) = \pm f(x)$ *i*
Periodičnost: $f(x+\omega) = f(x)$ *(samo kod trigonometrijskih funkcija).*

3. *Nule:* $y = 0$.

4. *Znak:* $y > 0$ *ili* $y < 0$.

5. *Asimptote: vertikalna: VA, horizontalna: HA, kosa: KA.*

6. *Ekstremne vrednosti (stacionarne tačke):* $y' = 0$.

7. *Tok (rast i opadanje):* $y' > 0$ *ili* $y' < 0$.

8. *Prevojne tačke:* $y'' = 0$.

9. *Konveksnost, konkavnost:* $y'' > 0$ *ili* $y'' < 0$.

10. *Grafik.*

Obilnije o nekim tačkama:

1. Ispitivanje funkcije uvek počinjemo sa utvrđivanjem njene oblasti definisanosti, naime u onim tačkama ili intervalima u kojima funkcija nije definisana ni ne vršimo ispitivanje osobina.

2. Parnost ili neparnost ispitujemo kod svih funkcija, maime kod parnih i neparnih funkcija dovoljno je ispitivati osobine na polovini oblasti definisanosti, zbog simetričnosti grafik se može u celosti crtati.
Periodičnost se ispituje samo kod trigonometrijskih funkcija.

3. Nule funkcije su one tačke u kojima grafik seče x-osu. Ordinate ovih tačaka su 0, znači da se mogu odrediti rešavanjem jednačine $y = 0$.

4. Kod crtanja grafika funkcije bitno je nad kojim intervalima će grafik biti iznad x-ose (tu je funkcija $y > 0$) i nad kojim će intervalima biti ispod x-ose (tu je funkcija $y < 0$).

5. Razlikujemo tri vrste asimptota, u zavisnosti od toga kakvog je položaja prava kojoj funkcija teži:

VA: vertikalna asimptota je prava $x = a$, ako je $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, gde je a tačka prekida funkcije ili je konačan kraj oblasti definisanosti.

HA: horizontalna asimptota je prava $y = b$, ako je $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.

FA: kosa asimptota je prava $y = kx + n$ kosog položaja, gde je $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ i $n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - kx\right)$ gde je $k \neq 0$ i $k \neq \infty$.

6. Stacionarne tačke ili mogući ekstremi su one tačke u kojima je $y' = 0$. Da li su te tačke stvarno ekstremi i koje su vrste (maksimumi ili minimumi), određuje se na osnovu 7. tačke, gde se iz odgovarajuće tablice mugu pročitati vrste ekstrema.

7. Tok ili monotonost funkcije ispitujemo pomoću predznaka prvog izvoda. Ako je u nekom intervalu $f'(x) > 0$ tada je u tom intervalu $f(x)\uparrow$ (rastuća), a ako je u nekom intervalu $f'(x) < 0$ tada je u tom intervalu $f(x)\downarrow$ (opadajuća). Funkcija dostiže lokalni maksimum u tački u kojoj prelazi iz rastuće u opadajuću, a lokalni minimum u tački, u kojoj iz opadajuće funkcije prelazi u rastuću.

8. Tačkama prevoja nazivamo one tačke u kojima konveksni luk krive prelazi u konkavni luk, ili obrnuto. U tačkama prevoja važi da je $y'' = 0$. Moguće prevojne tačke zato dobijamo rešavanjem jednačine $y'' = 0$. Koje su tačke od svih rešenja ove jednačine stvarni prevoji, lako se može pročitati iz tablice koju ispitujemo pod tačkom 9. za konveksnost funkcije.

9. Luk krive na nekom intervalu može biti konveksan ili konkavan. Ova osobina zavisi od predznaka drugog izvoda na posmatranom intervalu. Ako je na nekom intervalu $f''(x) > 0$ tada je na tom intervalu $f(x)\cup$ (konveksna), a ako je na nekom intervalu $f''(x) < 0$ tada je na tom intervalu $f(x)\cap$ (konkavna).

10. Na osnovu ispitanih osobina i određenih karakterističnih tačaka crtamo grafik funkcije.

118. Primer: **Ispitati tok i nacrtati grafik racionalne funkcije** $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

Rešenje: Ispitaćemo funkciju na osnovu prethodnih tačaka.

1.) Oblast definisanosti:

$x-1\neq 0$

$x\neq 1$

$D_f=R\setminus\{1\}$.

2.) Parnost:

$f(-x)=\dfrac{-2x-1}{(-x-1)^2}=-\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}\neq \pm f(x)$, funkcija nije ni parna ni neparna.

3.) Nule:

$y=0$

$\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=0$

$2x-1=0$

$x=\dfrac{1}{2}$, funkcija ima jednu nulu u tački $N\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

4.) Znak:

$y>0$ ili $y<0$

$\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}>0$ ili $\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}<0$

x	$-\infty$ *0.5*	*0.5* *1*	*1* $+\infty$
2x-1	-	+	+
y	-	+	+

5.) Asimptote:

VA: $x=1$

$\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{(1-0-1)^2}=\dfrac{1}{+0}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{(1+0-1)^2}=\dfrac{1}{+0}=+\infty$

HA: $y=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{\infty}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{-\infty}=0$

KA: nema

jer ima horizontalnu asimptotu.

6.) Ekstremne vrednosti:

$$y' = 0$$

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - (2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1) - 2(2x-1)}{(x-1)^3} = \frac{2x-2-4x+2}{(x-1)^3} = \frac{-2x}{(x-1)^3} = 0$$

odavde je

$$-2x = 0$$

sledi

$x = 0$ je stacionarna tačka (mogući ekstrem).

7.) Tok:

$y' > 0$ ili $y' < 0$

$\frac{-2x}{(x-1)^3} > 0$ ili $\frac{-2x}{(x-1)^3} < 0$

x	$-\infty$ 0	0 1	1 $+\infty$
$-2x$	+	-	-
$(x-1)^3$	-	-	+
y'	-	+	-
y	↓	↑	↓

Iz tablice možemo pročitati da funkcija ima lokalni minimum u tački $x = 0$, a minimalna vrednost je

$y_{\min}(0) = -1$.

$Min(0,1)$.

Funkcija u tački $x = 1$ ima prekid.

8.) Prevojne tačke:

$$y'' = 0$$

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 2x \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{-2(x-1) + 6x}{(x-1)^4} = \frac{-2x+2+6x}{(x-1)^4} = \frac{4x+2}{(x-1)^4} = 0$$

$4x + 2 = 0$

$x = -\frac{1}{2}$ je moguća prevojna tačka.

9.) Konveksnost i konkavnost:

$y'' > 0$ ili $y'' < 0$

$4x + 2 > 0$ ili $4x + 2 < 0$

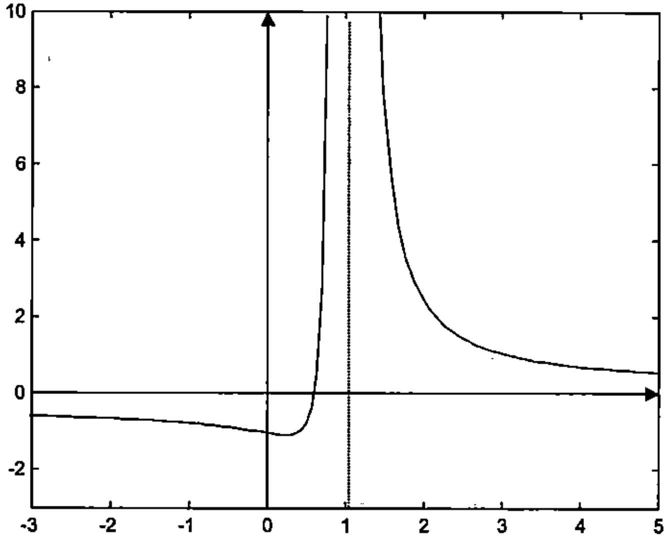
x	$-\infty$ -0.5	-0.5 1	1 $+\infty$
$4x+2$	-	+	+
$(x-1)^4$	+	+	+
y''	-	+	+
y	∩	∪	∪

Iz tablice čitamo da funkcija ima prevoj u tački $x=-\frac{1}{2}$ čija je druga kordinata

$$y_{prevoj}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-1-1}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=\frac{-2}{\frac{9}{4}}=-\frac{8}{9}.$$

Sledi da je $P(-\frac{1}{2},-\frac{8}{9})$ prevojna tačka.

10.)Grafikon:



119. Primer: **Ispitati tok i nacrtati grafik iracionalne funkcije** $y=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$ **.**

Rešenje: Ispitivanje funkcije radićemo po utvrđenim tačkama.

1.) Oblast definisanosti:

Izložilac korena je neparan broj, prema tome potkorena veličina može biti bilo kog znaka. Potkorena veličina je polinom trećeg reda koji je definisan za sve realne brojeve, prema tome:

$$D_f=R.$$

2.) Parnost:

$$f(-x)=\sqrt[3]{2x^2-(-x)^3}=\sqrt[3]{2x^2+x^3}\neq\pm f(x)$$ funkcija nije ni parna ni neparna.

3.) Nule:

$$y=0$$

$$\sqrt[3]{2x^2-x^3}=0$$
$$2x^2-x^3=0$$
$$x^2(2-x)=0$$
$$x^2=0 \quad \vee \quad 2-x=0$$
$$x_{1/2}=0 \quad \vee \quad x_3=2 \quad ,$$

funkcija znači ima dve nule, tačke $N_1(0,0)$ i $N_2(2,0)$.

4.) Znak:

$$y>0 \text{ ili } y<0$$
$$\sqrt[3]{x^2(2-x)}>0 \text{ ili } \sqrt[3]{x^2(2-x)}<0$$

predznak funkcije zavisi samo od faktora $2-x$:

x	$-\infty \quad 0$	$0 \quad 2$	$2 \quad +\infty$
2-x	+	+	–
y	+	+	–

5.) Asimptote:

VA: nema
jer funkcija nema prekidnu tačku, niti su krajevi oblasti definisanosti konačni.

***HA:** nema*

jer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2(2-x)}=\sqrt[3]{+\infty\cdot(-\infty)}=\sqrt[3]{-\infty}=-\infty$

i $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2(2-x)}=\sqrt[3]{+\infty\cdot(+\infty)}=\sqrt[3]{+\infty}=+\infty$

FA: $y=-x+\dfrac{2}{3}$,

jer $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{2}{x}-1}=\sqrt[3]{0-1}=-1$

i $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x\right)=(-\infty+\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}+\sqrt[3]{x^3}\right)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}+\sqrt[3]{x^3}\right)\frac{\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^2}-\sqrt[3]{x^3(2x^2-x^3)}+\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^2}-\sqrt[3]{x^3(2x^2-x^3)}+\sqrt[3]{x^6}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{4x^4-4x^5+x^6}-\sqrt[3]{2x^5-x^6}+\sqrt[3]{x^6}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x}+1}-\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+\sqrt[3]{1}\right)}=$$

$$=\frac{2}{1-(-1)+1}=\frac{2}{3} \quad .$$

6. Ekstremne vrednosti:

$$y' = 0$$

$$y' = \frac{1}{3}\left(2x^2 - x^3\right)^{-2/3}\left(4x - 3x^2\right) = \frac{x(4-3x)}{3\cdot\sqrt[3]{\left(2x^2-x^3\right)^2}} = \frac{x(4-3x)}{3x\sqrt[3]{x(2-x)^2}} = \frac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}} = 0$$

$$4 - 3x = 0$$

$x = \dfrac{4}{3}$ je stacionarna tačka.

Za prvi izvod moramo konstatovati da nije definisan u tačkama $x = 0$ i $x = 2$, mada je sama funkcija bila definisana na celom skupu realnih brojeva R.

7.) Tok i monotonost:

$y' > 0$ ili $y' < 0$

$\dfrac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}} > 0$ ili $\dfrac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}} < 0$

x	$-\infty$ 0	0 4/3	4/3 $+\infty$
$\sqrt[3]{x}$	-	+	+
4-3x	+	+	-
y'	-	+	-
y	↓	↑	↓

Iz tablice možemo čitati da u stacionarnoj tački $x = \dfrac{4}{3}$ funkcija ima lokalni maksimum, dok u tački $x = 0$ funkcija ima minimum oblika špic, naime u toj tački prvi izvod nije definisan ali menja znak.

$$y_{\max}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2\sqrt[3]{4}}{3} \approx 1.06$$

$$Max\left(\frac{4}{3};1.06\right).$$

8.) Prevojne tačke:

$$y'' = 0$$

$$y' = \frac{1}{3}(4-3x)\left(4x - 4x^2 + x^3\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$y'' = \frac{1}{3}\left[-3\left(4x-4x^2+x^3\right)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(4-3x)\left(4x-4x^2+x^3\right)^{-\frac{4}{3}}\left(4-8x+3x^2\right)\right]$$

$$y'' = \frac{1}{3}\left[\frac{-3}{\sqrt[3]{4x-4x^2+x^3}} - \frac{(4-3x)\left(4-8x+3x^2\right)}{3\left(4x-4x^2+x^3\right)\sqrt[3]{4x-4x^2+x^3}}\right]$$

$$y'' = \frac{1}{3}\cdot\frac{-9\left(4x-4x^2+x^3\right) - (4-3x)\left(4-8x+3x^2\right)}{3\left(4x-4x^2+x^3\right)\sqrt[3]{4x-4x^2+x^3}}$$

$$y''=\frac{1}{9}\cdot\frac{-36x+36x^2-9x^3-16+32x-12x^2+12x-24x^2+9x^3}{\left(4x-4x^2+x^3\right)\sqrt[3]{4x-4x^2+x^3}}$$

$$y''=\frac{1}{9}\cdot\frac{8x-16}{\left(4x-4x^2+x^3\right)\sqrt[3]{4x-4x^2+x^3}}=\frac{-8(2-x)}{9x(2-x)^2\sqrt[3]{x(2-x)^2}}$$

$$y''=\frac{8}{9(x-2)\sqrt[3]{x^4(2-x)^2}}\neq 0$$

a to znači da funkcija nema prevojnu tačku. Ni drugi izvod funkcije nije definisan u $x=0$ i $x=2$, a to znači da y'' u tim tačkama može da menja svoj predznak, odnosno funkcija može da menja konveksnost.

9.) Konveksnost:

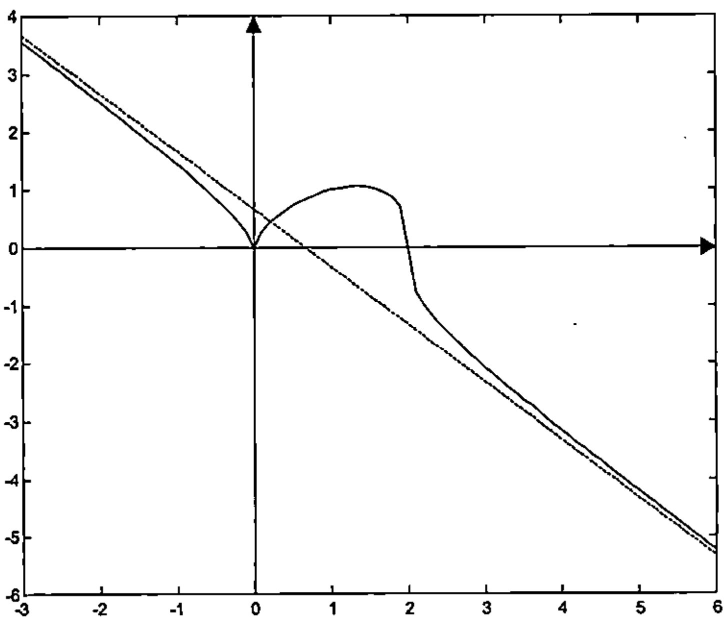
$y''>0$ ili $y''<0$

$$\frac{8}{9(x-2)\sqrt[3]{x^4(2-x)^2}}>0 \quad \text{ili} \quad \frac{8}{9(x-2)\sqrt[3]{x^4(2-x)^2}}<0$$

x	$-\infty$ 0	0 2	2 $+\infty$
$x-2$	-	-	+
y''	-	-	+
y	$\cap$	$\cap$	$\cup$

Znači da funkcija menja konveksnost u tački $(2,0)$, mada u toj tački drugi izvod nije definisan.

10.)Grafikon:



120. Primer: **Ispitati tok i nacrtati grafik eksponencijalne funkcije** $y=e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}$.

Rešenje: Ispitivanje ćemo raditi po utvrđenim tačkama.

1.) Oblast definisanosti:
Eksponencijalna funkcija je definisana ako je izložilac definisan, zato:

$$x^2-3x-4\neq 0$$
$$x_1=-1 \lor x_2=4$$
$$D_f=R\setminus\{-1,4\}$$

2.) Parnost:

$f(-x)=e^{\frac{1}{x^2+3x-4}}\neq \pm f(x)$, funkcija nije ni parna ni neparna.

3.) Nule:

$$y=0$$

$e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}\neq 0$, funkcija nema nule.

4.) Znakl:

$y>0$ ili $y<0$

$e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}>0$, $\forall x\in D_f$,

$y>0$, $\forall x\in D_f$, funkcija je pozitivna u svakoj tački oblasti definisanosti.

5.) Asimptote:

VA: $x=-1$ i $x=4$

$$\lim_{x\to -1-0} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}=e^{\frac{1}{1+2\cdot 0+0^2+3+3\cdot 0-4}}=e^{\frac{1}{+0}}=e^{+\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1+0} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}=e^{\frac{1}{1-2\cdot 0+0^2+3-3\cdot 0-4}}=e^{\frac{1}{-0}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 4-0} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}=e^{\frac{1}{16-8\cdot 0+0^2-12+3\cdot 0-4}}=e^{\frac{1}{-0}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 4+0} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}=e^{\frac{1}{16+8\cdot 0+0^2+12+3\cdot 0-4}}=e^{\frac{1}{+0}}=e^{+\infty}=+\infty$$

HA: $y=1$

$$\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}=e^{\frac{1}{+\infty}}=e^0=1$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}=e^{\frac{1}{+\infty}}=e^0=1$$

FA: nema
jer ima horizontalnu asimptotu.

6.) Ekstremne vrednosti:

$$y' = 0$$

$$y' = e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} \cdot \frac{-(2x-3)}{(x^2-3x-4)^2} = 0$$

$$2x - 3 = 0$$

$x = \dfrac{3}{2}$ je stacionarna tačka..

7.) Tok:

$y' > 0$ ili $y' < 0$

$$e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} \cdot \frac{3-2x}{(x^2-3x-4)^2} > 0 \quad \text{ili} \quad e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} \cdot \frac{3-2x}{(x^2-3x-4)^2} < 0$$

x	$-\infty$ -1	-1 3/2	3/2 4	4 $+\infty$
$3-2x$	+	+	-	-
y'	+	+	-	-
y	↑	↑	↓	↓

Iz tablice čitamo da funkcija u stacionarnoj tački $x = \dfrac{3}{2}$ ima lokalni minimum:

$$y_{\max}\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{-4}{25}} = \frac{1}{\sqrt[25]{e^4}} \approx 0.85$$

$$Max\left(\frac{3}{2}\,;\,0.85\right)$$

8.) Prevojne tačke:

$$y'' = 0$$

$$y'' = e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}\left(\frac{3-2x}{(x^2-3x-4)^2}\right)^2 + e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}\frac{-2(x^2-3x-4)^2-(3-2x)2(x^2-3x-4)(2x-3)}{(x^2-3x-4)^4}$$

$$y'' = e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} \cdot \left(\frac{(3-2x)^2}{(x^2-3x-4)^4} + \frac{-2(x^2-3x-4)^2+2(3-2x)^2(x^2-3x-4)}{(x^2-3x-4)^4}\right)$$

$$y'' = e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} \cdot \left(\frac{(3-2x)^2(1+2x^2-6x-8)-2(x^2-3x-4)^2}{(x^2-3x-4)^4}\right)$$

$$y'' = e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} \cdot \frac{(3-2x)^2(2x^2-6x-7)-2(x^2-3x-4)^2}{(x^2-3x-4)^4}$$

$$(3-2x)^2(2x^2-6x-7)-2(x^2-3x-4)^2 = 0$$

$$6x^4 - 36x^3 + 60x^2 - 18x - 95 = 0$$

$x_1 \approx -0.9$, $x_2 = 3.9$ (ostala dva korena su kompleksna).

9.)Konveksnost:

$y'' > 0$ ili $y'' < 0$

$6x^4 - 36x^3 + 60x^2 - 18x - 95 > 0$ ili $6x^4 - 36x^3 + 60x^2 - 18x - 95 < 0$

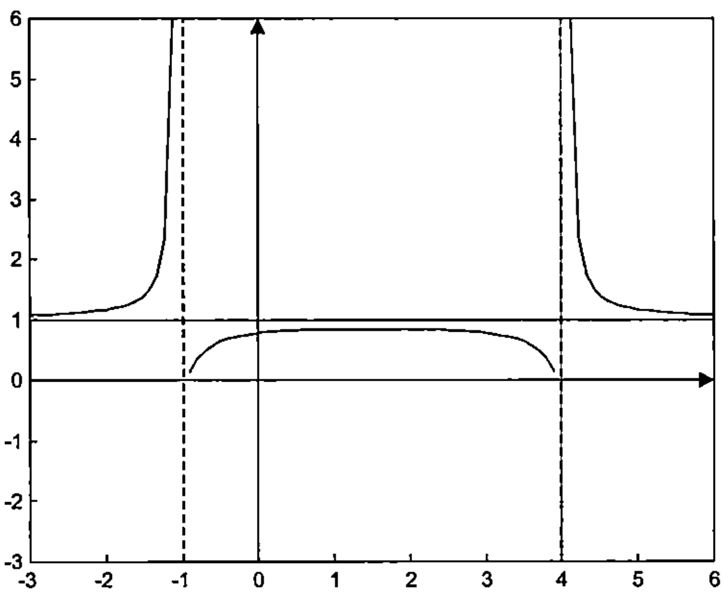
x	$-\infty$ -1	-1 -0.9	-0.9 3.9	3.9 4	4 $+\infty$
$6x^4 - 36x^3 + 60x^2 - 18x - 95$	+	+	−	+	+
y''	+	+	−	+	+
y	$\cup$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cup$

Prema tome funkcija ima dve prevojne tačke:

$y_{prevoj}(-0.9) \approx 0.13$, $y_{prevoj}(3.9) \approx 0.13$

Prevojne tačke su znači: $P_1(-0.9\,;\ 0.13)$ i $P_2(3.9\,;\ 0.13)$.

10.)Grafikon:



121. Primer: **Ispitati tok i nacrtati grafik logaritamske funkcije** $y = x^4 \ln\dfrac{1}{x}$.

Rešenje: Ispitivanje funkcije radimo po utvrđenim tačkama.

1.) Oblast definisanosti:

Logaritamska funkcija je definisana samo za pozitivne argumente, pa mora biti:

$\frac{1}{x} > 0$ odavde je

$x > 0$ oblast definisanosti je znači:

$D_f : x \in (0, +\infty)$

2.) Parnost:

$$f(-x) = (-x)^4 \ln\left(\frac{1}{-x}\right) = x^4 \ln\left(-\frac{1}{x}\right) \text{ nije ni definisano,}$$

jer $-\frac{1}{x} < 0$, a logaritam negativnog broja nije definisan. Funkcija nije ni parna ni neparna.

3.) Nule:

$$y = 0$$

$$x^4 \ln\frac{1}{x} = 0$$

$$x^4 = 0 \quad \vee \quad \ln\frac{1}{x} = 0 \text{ odavde je}$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{x} = 1 \quad \text{odnosno}$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 1$$

Funkcija ima dve nule, tačke $N_1(0,0)$ i $N_2(1,0)$.

4.) Znak:

$$y > 0 \text{ ili } y < 0$$

$$x^4 \ln\frac{1}{x} > 0 \text{ ili } x^4 \ln\frac{1}{x} < 0$$

x	$0 \quad 1$	$1 \quad +\infty$
$\ln\frac{1}{x}$	+	-
y	+	-

5.) Asimptote:

VA: nema

$$\text{jer je } \lim_{x\to+0} x^4 \ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to+0} \frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to+0} \frac{x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{4}{x^5}} = \lim_{x\to+0} \frac{x^5}{4x} = \lim_{x\to+0} \frac{x^4}{4} = 0$$

HA: nema

$$\text{jer je } \lim_{x\to+\infty} x^4 \ln\frac{1}{x} = \infty \cdot \ln 0 = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

FA: nema

$$\text{jer je } k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} x^3 \ln\frac{1}{x} = -\infty,$$

u ovom slučaju ne postoji kosa asimptota (zbog ∞), pa se n ni ne računa.

6.) Ekstremne vrednosti:

$y' = 0$

$y' = 4x^3 \ln\frac{1}{x} + x^4 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4x^3 \ln\frac{1}{x} - x^3 = x^3\left(4\ln\frac{1}{x} - 1\right) = 0$

$x^3 = 0 \quad \vee \quad 4\ln\frac{1}{x} - 1 = 0$ odavde je

$x_1 = 0 \quad \vee \quad \ln\frac{1}{x} = \frac{1}{4}$

$x_1 = 0 \notin D_f$, ali iz $\frac{1}{x} = e^{\frac{1}{4}}$ sledi da je

$x = \frac{1}{\sqrt[4]{e}} \approx 0.78$ stacionarna tačka funkcije.

7.) Tok:

$y' > 0$ ili $y' < 0$

$x^3\left(4\ln\frac{1}{x} - 1\right) > 0$ ili $x^3\left(4\ln\frac{1}{x} - 1\right) < 0$

x	$0 \quad e^{-1/4}$	$e^{-1/4} \quad +\infty$
x^3	+	+
$4\ln\frac{1}{x} - 1$	+	−
y'	+	−
y	↑	↓

Iz tablice čitamo da u stacionarnoj zački $x = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ funkcija ima lokalni maksimum:

$y_{max}(e^{-\frac{1}{4}}) = \left(e^{-\frac{1}{4}}\right)^4 \cdot \ln\frac{1}{e^{-\frac{1}{4}}} = e^{-1} \cdot \ln e^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4e} \approx 0.09$

$Max\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}, 0.09\right)$

8.) Prevojne tačke:

$y'' = 0$

$y'' = 3x^2\left(4\ln\frac{1}{x} - 1\right) + x^3 \cdot 4 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$y'' = 12x^2 \ln\frac{1}{x} - 3x^2 - 4x^2$

$y'' = 12x^2 \ln\frac{1}{x} - 7x^2$

$y'' = x^2\left(12\ln\frac{1}{x} - 7\right) = 0$ ako je

$x^2 = 0$ ili $12\ln\frac{1}{x} - 7 = 0$ odavde je

$x=0 \notin D_f$, i $\ln\frac{1}{x}=\frac{7}{12}$ odnosno

$\frac{1}{x}=e^{\frac{7}{12}}$ znači

$x=\frac{1}{e^{\frac{7}{12}}}=\frac{1}{\sqrt[12]{e^7}}\approx 0.56$ je stacionarna tačka funkcije.

9.) Konveksnost:

$y''>0$ ili $y''<0$

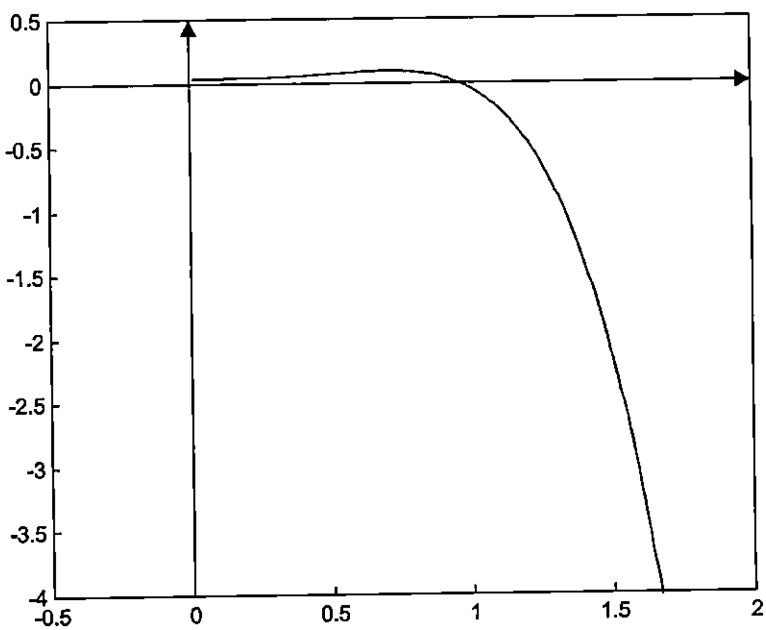
$x^2\left(12\ln\frac{1}{x}-7\right)>0$ ili $x^2\left(12\ln\frac{1}{x}-7\right)<0$

x	0 $\quad e^{-7/12}$	$e^{-7/12}$ $\quad +\infty$
$12\ln\frac{1}{x}-7$	$+$	$-$
y''	$+$	$-$
y	$\cup$	$\cap$

Iz tablice čitamo da je $x=\frac{1}{\sqrt[12]{e^7}}$ prevojna tačka funkcije, jer u ovoj tački kriva menja konveksnost: $y_{\inf}\left(\frac{1}{\sqrt[12]{e^7}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt[12]{e^7}}\right)^4\ln\sqrt[12]{e^7}=\frac{1}{\sqrt[3]{e^7}}\cdot\frac{7}{12}\approx 0.056$.

Prevojna tačka je $P(0.56\,;0.056)$.

10.)Grafikon:



122. Primer: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y=\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

Rešenje: Ispitivaćemo funkciju po predviđenim tačkama.

1.) Oblast definisanosti:
Funkcija *arctgx* je definisana za sve argumente, zato postavljamo samo jedan uslov za određivanje oblasti definisanosti:

$x\neq 0$

$D_f=R\setminus\{0\}$.

2.) Parnost:

$f(-x)=arctg\left(1-\frac{1}{x}\right)\neq \pm f(x)$, funkcija nije ni parna ni neparna.

3.) Nule:

$y=0$

$\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$ za

$1+\frac{1}{x}=0$ odavde je

$\frac{1}{x}=-1$ odnosno

$x=-1$, funkcija znači ima jednu nulu, tačku $N(-1,0)$.

4.) Znakl:

$y>0$ ili $y<0$

$\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)>0$ ili $\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)<0$

x	$-\infty$ -1	-1 0	0 $+\infty$
y	$+$	$-$	$+$

5.) Asimptote:

VA: nema

$\lim\limits_{x\to -0}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\operatorname{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to +0}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\operatorname{arctg}(\infty)=\frac{\pi}{2}$

HA: $y=\frac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{x\to \infty}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$

FA: nema
jer ima horizontalnu.

6.) Ekstremne vrednosti:

$$y' = 0$$

$$y' = \frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{x^2+(x+1)^2} \neq 0,$$

a to znači da funkcija nema lokalne ekstreme.

7.) Tok:

$$y' > 0 \quad \text{ili} \quad y' < 0$$

$$\frac{-1}{x^2+(x+1)^2} > 0 \quad \text{ili} \quad \frac{-1}{x^2+(x+1)^2} < 0$$

x	$-\infty$ 0	0 $+\infty$
y'	$-$	$-$
y	$\downarrow$	$\downarrow$

Iz tablice čitamo da je funkcija u čitavoj oblasti definisanosti opadajuća i nema ekstreme.

8.) Prevojne tačke:

$$y'' = 0$$

$$y'' = \frac{2x+2(x+1)}{\left(x^2+x^2+2x+1\right)^2} = \frac{4x+2}{\left(2x^2+2x+1\right)^2} = 0 \quad \text{ako je}$$

$4x+2=0$ odnosno

$x = -\frac{1}{2}$ je moguća prevojna tačka.

9.) Konveksnost:

$$y'' > 0 \quad \text{ili} \quad y'' < 0$$

$$\frac{4x+2}{\left(2x^2+2x+1\right)^2} > 0 \quad \text{ili} \quad \frac{4x+2}{\left(2x^2+2x+1\right)^2} 0$$

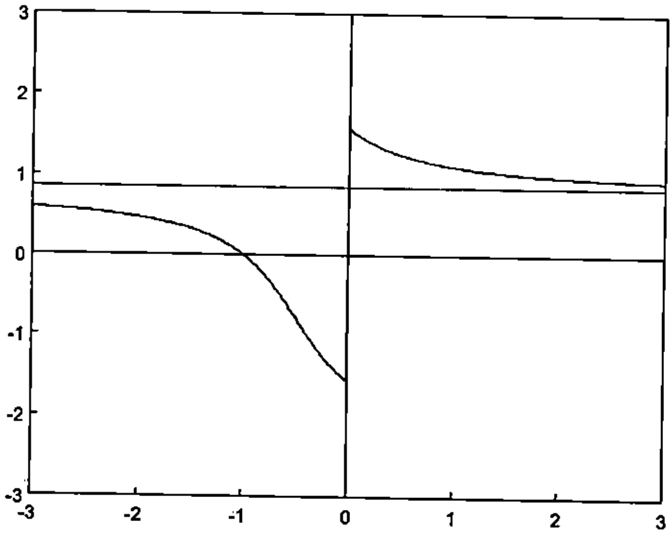
x	$-\infty$ $-1/2$	$-1/2$ 0	0 $+\infty$
$4x+2$	-	+	+
y''	-	+	+
y	$\cap$	$\cup$	$\cup$

Iz tablice čitamo da je $x = -\frac{1}{2}$ prevojna tačka funkcije, i:

$$y_{\inf}\left(-\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arctg}(1-2) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Prevojna tačka je znači $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$.

10.)Grafikon:



ZADACI ZA VEŽBU:

126. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = x^3 - 3x^2$.

127. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = \left|x - x^2\right| - x$.

128. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$.

129. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = x + \dfrac{1}{x}$.

130. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$.

131. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$.

132. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y=\sqrt[3]{1-x^2}$.

133. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y=\dfrac{4}{\sqrt{4-x^2}}$.

134. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

135. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y=x\cdot e^{-x}$.

136. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y=e^{8x-x^2-14}$.

137. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y=(2+x^2)e^{-x^2}$.

138. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

139. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

140. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y=(x+1)\ln^2(x+1)$.

141. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y=\ln(1+e^{-x})$.

142. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y=x\cdot \operatorname{arctg} x$.

143. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y=x+2\operatorname{arctg} x$.

144. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y=\dfrac{x}{2}+\operatorname{arctg} x$.

145. Zadatak: **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije** $y=x^x$.

5. Neodređeni integrali

Definicija: *Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna nad nekim intervalom, i u svakoj tački tog intervala važi da je $F'(x)=f(x)$, tada je $\int f(x)\,dx=F(x)+c$, gde je c nepoznata konstanta, a $F(x)$ je primitivna funkcija od funkcije $f(x)$. Primitivnu funkciju drugačije zovemo i neodređenim integralom podintegralne funkcije, a postupak nalaženja svih primitivnih funkcija postupkom integraljenja.*

Neodređeni integral je inverzna operacija od diferenciranja, znači da pravila integraljenja možemo da izvedemo iz pravila diferenciranja. Najednostavnija pravila su:

Pravila integraljenja:

1. $d\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)\,dx$

2. $\int df(x)\,dx=f(x)+c$

3. $\int c\cdot f(x)\,dx=c\cdot\int f(x)\,dx\quad,\qquad c=const.$

4. $\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$

Bez obzira da je integraljenje obrnuta operacija od diferenciranja, postupak integraljenja se ipak ne može tako "šablonski" izvoditi kao postupak diferenciranja. Podintegralnu funkciju uvek treba dovesti na takav oblik, na koji se može primeniti neka formula ili smena. Baš zbog toga, da bismo naučili "integraliti" moramo jako puno zadataka da vežbamo. Nikad ne treba zaboraviti da se rezultat integrala može kontrolisati, naime izvod primitivne funkcije uvek mora biti podintegralna funkcija.

Kod integraljenja složenih funkcija podintegralnu funkciju treba svesti na integral neke jednostavnije funkcije. To se može postići odgovarajućim smenama. Najednostavnije integrale, takozvane tablične integrale, dobijamo iz tablice izvoda elementarnih funkcija, tako da izvode elementarnih funkcija uzimamo za podintegralne funkcije:

Tablica osnovnih integrala

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \quad n \neq -1$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$

4. $\int e^x\,dx = e^x + c$

5. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \quad , \quad (a > 0\ ,\ a \neq 1)$

6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

7. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + c$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + c$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + c$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c$

13. $\int \mathrm{sh}x\,dx = \mathrm{ch}x + c$

14. $\int \mathrm{ch}x\,dx = \mathrm{sh}x + c$

15. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}x + c$

16. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}x + c$

Prvo ćemo rešiti nekoliko integrala u kojima treba primeniti samo pravila i tablične integrale:

123. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int 5a^2x^6dx$.

Rešenje: $$\int 5a^2x^6dx = 5a^2\int x^6dx = 5a^2\frac{x^7}{7}+c = \frac{5a^2}{7}x^7+c\ .$$

124. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int\sqrt{2px}dx$.

Rešenje: $$\int\sqrt{2px}dx = \sqrt{2p}\int\sqrt{x}dx = \sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{2p}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c =$$

$$= \frac{2\sqrt{2p}}{3}\sqrt[2]{x^3}+c = \frac{2\sqrt{2p}}{3}x\sqrt{x}+c.$$

125. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int(6x^2+8x+3)dx$.

Rešenje: $$\int(6x^2+8x+3)dx = 6\int x^2dx+8\int x\,dx+3\int dx = 6\frac{x^3}{3}+8\frac{x^2}{2}+3x+c =$$

$$= 2x^3+4x^2+3x+c.$$

126. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$.

Rešenje: $$\int\frac{dx}{\sqrt[n]{x}} = \int x^{-\frac{1}{n}}dx = \frac{x^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}+c = \frac{n}{n-1}x^{\frac{n-1}{n}}+c = \frac{n}{n-1}\sqrt[n]{x^{n-1}}+c.$$

127. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int 3^xe^xdx$.

Rešenje: $$\int 3^xe^xdx = \int(3e)^xdx = \frac{(3e)^x}{\ln(3e)}+c = \frac{(3e)^x}{\ln 3+\ln e}+c = \frac{3^xe^x}{1+\ln 3}+c.$$

128. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

Rešenje: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = \frac{-2}{\sqrt{x}} + c$.

5.1. Integraljenje metodom smene promenljivih

Neka je $x = \varphi(t)$, gde je t nova promenljiva. Pretpostavimo da je diferencijalni količnik funkcije $x = \varphi(t)$, funkcija $\varphi'(t)$ neprekidna na nekom zatvorenom intervalu, i da je $\varphi'(t) \neq 0$ .Tada važi da je:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt .$$

Pomoću ove formule možemo rešavati neodređene integrale metodom smene promenljivih. Funkciju φ treba birati tako, da desna strana formule bude što jednostavnija.

129. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int (1+x)^6 dx$.

Rešenje: $\int (1+x)^6 dx = \begin{vmatrix} 1+x=t \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int t^6 dt = \frac{t^7}{7} + c = \frac{1}{7}(1+x)^7 + c$.

130. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{(x-2)^3}$.

Rešenje: $\int \frac{dx}{(x-2)^3} = \begin{vmatrix} x-2=t \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2(x-2)^2} + c$.

131. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{x^2+9}$.

Rešenje: $\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{x^2}{9}+1} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} = \begin{vmatrix} \frac{x}{3}=t \\ dx=3dt \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\int \frac{3dt}{t^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} =$

$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + c$.

132. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \sin(2x+3)dx$.

Rešenje: $\int \sin(2x+3)dx = \left| \begin{array}{l} 2x+3=t \\ 2dx=dt \\ dx=\frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}(-\cos t)+c = -\frac{1}{2}\cos(2x+3)+c$.

133. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

Rešenje: $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{2}=t \\ dx=2dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{2dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} =$

$= \operatorname{tg} t + c = \operatorname{tg}\frac{x}{2}+c$.

134. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{xdx}{3-2x^2}$.

Rešenje: $\int \frac{xdx}{3-2x^2} = \left| \begin{array}{l} 3-2x^2=t \\ -4xdx=dt \\ xdx=-\frac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{dt}{4}}{t} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{4}\ln|t|+c = -\frac{1}{4}\ln\left|3-2x^2\right|+c$.

135. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int x^2\sqrt{x^3-9}\,dx$.

Rešenje: $\int x^2\sqrt{x^3-9}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^3-9=t \\ 3x^2dx=dt \\ x^2dx=\frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{9}\sqrt{t^3}+c =$

$= \frac{2}{9}t\sqrt{t}+c = \frac{2}{9}(x^3-9)\sqrt{x^3-9}+c$.

136. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Rešenje: $\int \frac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \left| \begin{array}{l} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c =$

$= \frac{-1}{\sqrt{t}} + c = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} + c.$

137. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{e^x+1}{e^x+x}dx$.

Rešenje: $\int \frac{e^x+1}{e^x+x}dx = \left| \begin{array}{c} e^x+x=t \\ (e^x+1)dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|e^x+x| + c.$

138. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{\ln x}{x}dx$.

Rešenje: $\int \frac{\ln x}{x}dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right| = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2}\ln^2 x + c.$

139. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \sin^5 x \cos x\,dx$.

Rešenje: $\int \sin^5 x \cos x\,dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + c = \frac{1}{6}\sin^6 x + c.$

140. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sin^2 x + 3}$.

Rešenje: $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sin^2 x+3} = \left| \begin{array}{c} \sin^2 x + 3 = t \\ 2\sin x \cos x\,dx = dt \\ \sin 2x\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\sin^2 x + 3| + c =$

$= \ln(\sin^2 x + 3) + c.$

ZADACI ZA VEŽBU:

Metodom smene promenljivih rešiti sledeće intgerale:

146. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int x\sqrt{x-1}\,dx$ **smenom** $\sqrt{x-1}=t$.

147. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$ **smenom** $5x-2=t$.

148. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ **smenom** $\sqrt{x+1}=t$.

149. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ **smenom** $\sin x=t$.

150. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

151. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int(a+bx)^n\,dx$.

152. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{\sqrt{a-x^2}}$ **ako je** $a>0$.

153. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$.

154. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int(a+bx^2)^n\,x\,dx$.

155. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ **ako je** $a>0$.

156. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\sin^n x\cos x\,dx$.

157. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{xdx}{(x^2+1)^n}$ **ako je** $n\neq 1$.

158. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \mathrm{tg}x\,dx$.

159. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \mathrm{ctg}x\,dx$.

160. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int a^{6x}dx$ **ako je** $a>0$.

161. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int e^{ax+b}dx$.

162. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int x\sin(x^2+1)dx$.

163. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{x(\ln x)^5}$.

164. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{\mathrm{tg}x+3\mathrm{tg}^2x+5\mathrm{tg}^3x}{\cos^2 x}dx$.

165. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$ **smenom** $x^2=t$.

5.2. Parcijalna integracija

Ako funkcije $u=f(x)$ i $v=g(x)$ imaju neprekidne izvode nad nekim intervalom, tada u tom intervalu važi formula za parcijalnu integraciju: $\int u\,dv=u\,v-\int v\,du$.

Primenom ove formule računamo neodređene integrale nekih proizvoda, naime integral $\int u\,dv$ svodi se na integral $\int v\,du$, za koji se pretpostavlja da se može lakše rešiti od prethodnog integrala. Formula se primenjuje tako, da podintegralnu funkciju uzimamo kao jedan proizvod, gde se jedan faktor bira za u a drugi za dv. Iz faktora u diferenciranjem dobijamo faktor du, a integraljenjem faktora dv računamo v, koji se posle uvrštavaju u formulu za parcijalnu integraciju. Za faktor u po mogućnosti treba birati takav faktor, koji se diferenciranjem pojednostavljuje, a za dv faktor koji se može integraliti.

141. Primer: **Parcijalnom integracijom rešiti neodređeni integral** $\int xe^x dx$.

Rešenje:

$$\int xe^x dx=\left|\begin{array}{ll} u=x & dv=e^x dx \\ du=dx & v=\int e^x dx=e^x \end{array}\right|=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+c=e^x(x-1)+c .$$

142. Primer: **Parcijalnom integracijom rešiti neodređeni integral** $\int \ln x\,dx$.

Rešenje:

$$\int \ln x\,dx = \begin{vmatrix} u=\ln x & dv=dx \\ du=\dfrac{dx}{x} & v=\int dx = x \end{vmatrix} = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c =$$

$$= x(\ln x - 1) + c .$$

143. Primer: **Parcijalnom integracijom rešiti neodređeni integral** $\int x\,\mathrm{sh}x\,dx$.

Rešenje:

$$\int x\,\mathrm{sh}x\,dx = \begin{vmatrix} u=x & dv=\mathrm{sh}x\,dx \\ du=dx & v=\int \mathrm{sh}x\,dx = \mathrm{ch}x \end{vmatrix} = x\,\mathrm{ch}x - \int \mathrm{ch}x\,dx = x\,\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x + c .$$

144. Primer: **Parcijalnom integracijom rešiti neodređeni integral** $\int \frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Rešenje:

$$\int \frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \begin{vmatrix} u=x & dv=\dfrac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2} \\ du=dx & v=\int \dfrac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2} = \begin{vmatrix} 1+x^2=t \\ xdx=\dfrac{dt}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dt}{t^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-1}{t} = \dfrac{-1}{2\left(1+x^2\right)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}x - \frac{x}{1+x^2}\right) + c .$$

145. Primer: **Parcijalnom integracijom rešiti neodređeni integral** $\int e^x \sin x\,dx$.

Rešenje: $$\int e^x \sin x\,dx = \begin{vmatrix} u=\sin x & dv=e^x dx \\ du=\cos x\,dx & v=\int e^x dx = e^x \end{vmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u=\cos x & dv=e^x dx \\ du=-\sin x\,dx & v=\int e^x\,dx = e^x \end{vmatrix} = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx\right)$$

ako napišemo samo početak i kraj, tada dobijamo da je

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx + c$$

a odavde je

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) + c$$

rešenje početnog integrala je prema tome:

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

Metodom parcijalne integracije rešiti sledeće neodređene integrale:

166. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

167. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \arcsin x\,dx$.

168. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int x \cdot 2^{-x}\,dx$.

169. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \frac{x}{e^x}\,dx$.

170. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int x^2 \ln x\,dx$.

171. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \ln^2 x\,dx$.

172. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int x \cos 3x\,dx$.

173. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int e^x \cos x\,dx$.

174. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int 3^x \sin x\,dx$.

175. Primer: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)dx$.

5.3. Integral racionalne funkcije

Racionalne funkcije se mogu predstaviti kao količnik dva polinoma: $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. *Ako je* $Q(x)=const.$ *tada je funkcija* $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *u stvari samo jedan polinom, čije integraljenje ne predstavlja nikakvu teškoću. Ako jepolinom* $Q(x)$ *nižeg reda od polinoma* $P(x)$, *tada funkcija* $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *nije prava racionalna funkcija (već je neprava). U ovom slučaju polinom* $P(x)$ *treba podeliti sa polinomom* $Q(x)$, *i na taj način izdvojiti celi deo i pravi razlomljeni deo:* $f(x)=P_1(x)+\dfrac{P_2(x)}{Q(x)}$. *Prema tome integraljenje bilo koje racionalne funkcije* $f(x)$ *možemo da svedemo na integral jednog polinoma i na integral jedne prave racionalne funkcije. Integral prave racionalne funkcije najčešće možemo integraliti ako prethodno datu funkciju rastavimo na parcijalne sabirke, zatim ih integralimo član po član.*

146. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int\dfrac{dx}{x^2+5x}$.

Rešenje: Podintegralna funkcija $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x}$ je parava racionalna funkcijaum kojem se imenilac može faktorisati, pa je:

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{x^2+5x}=\int\frac{dx}{x(x+5)}.$$

Prema uputsvu, rastavimo podintegralnu funkciju na zbir parcijalnih sabiraka:

$$\frac{1}{x(x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+5}$$

$$1=A(x+5)+Bx$$

$$1=Ax+5A+Bx$$

$$1=(A+B)x+5A$$

dva polinoma su jednaka ako su jednaki odgovarajući koeficijenti:

$$\begin{aligned} A+B&=0\\ 5A\quad&=1 \end{aligned}$$

a rešenja ovog sistema su:

$$A=\frac{1}{5}$$

$$B=-\frac{1}{5}$$

znači da funkciju $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x}$ možemo rastaviti na zbir parcijalnih sabiraka na sledeći način: $f(x)=\dfrac{1}{5x}-\dfrac{1}{5(x+5)}$. Nastavljamo postupak integraljenja:

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{5x}-\int\frac{dx}{5(x+5)}$$

$$\mathbf{I}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+5}=\begin{vmatrix}x+5=t\\ dx=dt\end{vmatrix}$$

smena se odnosi samo na drugi integral,

$$\mathbf{I}=\frac{1}{5}\ln|x|-\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t}$$

$$\mathbf{I}=\frac{1}{5}\ln|x|-\frac{1}{5}\ln|t|+c=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x}{t}\right|+c=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x}{x+5}\right|+c$$

$$\int\frac{dx}{x(x+5)}=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x}{x+5}\right|+c\,.$$

147. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int\dfrac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx$.

Rešenje: Podintegralna funkcija je neprava racionalna funkcija $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-3x+2}$, zato deljenjem brojioca sa imeniocem izdvajamo celi deo i pravi razlomljeni deo:

$$\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}=x+3+\frac{7x-5}{x^2-3x+2}$$

$$\int\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx=\int x\,dx+\int 3\,dx+\int\frac{7x-5}{x^2-3x+2}dx$$

$$\int\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx=\frac{x^2}{2}+3x+\int\frac{7x-5}{x^2-3x+2}dx=\frac{x^2}{2}+3x+\mathbf{I}$$

gde je

$$\mathbf{I}=\int\frac{7x-5}{x^2-3x+2}dx$$

integral prave racionalne funkcije, a podintegralnu funkciju razbijamo na zbir parcijalnih sabiraka:

$$\frac{7x-5}{x^2-3x+2}=\frac{7x-5}{(x-2)(x-1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}$$

$$7x-5=A(x-1)+B(x-2)$$

$$7x-5=Ax-A+Bx-2B$$

$$7x-5=(A+B)x-A-2B$$

odavde izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata dobijamo sistem jednačina:

$$\begin{array}{l} A+\ \ B=7 \\ \underline{-A-2B=-5} \\ -B=2 \ \Rightarrow\ B=-2 \\ \qquad\qquad\ \ A=9 \end{array}$$

znači

$$\mathrm{I}=\int\frac{7x-5}{x^2-3x+2}dx=\int\frac{9dx}{x-2}-\int\frac{2dx}{x-1}=9\int\frac{dx}{x-2}-2\int\frac{dx}{x-1}$$

neka je smena u prvom integralu $\begin{vmatrix} x-2=t \\ dx=dt \end{vmatrix}$,

a smena u drugom integralu $\begin{vmatrix} x-1=z \\ dx=dz \end{vmatrix}$,

tada je

$$\mathrm{I}=9\int\frac{dt}{t}-2\int\frac{dz}{z}=9\ln|t|-2\ln|z|+c$$

odnosno

$$\mathrm{I}=9\ln|x-2|-2\ln|x-1|+c$$

a rešenje integrala je:

$$\int\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx=\frac{x^2}{2}+3x+9\ln|x-2|-2\ln|x-1|+c\,.$$

148. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{1-3x}{2x^2-4x+2}dx$ **.**

Rešenje: $\int\frac{1-3x}{2x^2-4x+2}dx=\int\frac{1-3x}{2(x^2-2x+1)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1-3x}{(x-1)^2}dx$

Podintegralna funkcija je prava racionalna funkcija, odmah rastavljamo na zbir parcijalnih sabiraka:

$$\frac{1-3x}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}$$
$$1-3x=A(x-1)+B$$
$$1-3x=Ax-A+B$$

odavde izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata računamo vrednosti nepoznatih A i B,

$$\begin{array}{l} A \quad =-3 \\ \underline{-A+B=1} \\ B=-2 \\ A=-3 \end{array}$$

Posle rastavljanja na zbir parcijalnih sabiraka treba da rešimo sledeće neodređene integrale:

$$\int\frac{1-3x}{2x^2-4x+2}dx=\frac{1}{2}\left(\int\frac{-3}{x-1}dx+\int\frac{-2}{(x-1)^2}dx\right)$$

$$\int\frac{1-3x}{2x^2-4x+2}dx=\frac{-3}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\begin{vmatrix}x-1=t\\dx=dt\end{vmatrix}$$

$$\int\frac{1-3x}{2x^2-4x+2}dx=-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{3}{2}\ln|t|-\frac{t^{-1}}{-1}+c=-\frac{3}{2}\ln|t|+\frac{1}{t}+c$$

$$\int\frac{1-3x}{2x^2-4x+2}dx=\frac{1}{x-1}-\frac{3}{2}\ln|x-1|+c.$$

149. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{x+3}{x^2-2x+5}dx$.

Rešenje: Imenilac podintegralne funkcije ne možemo rastaviti na linearne faktore jer diskriminanta kvadratne jednačine $x^2-2x+5=0$ je negativna: $D=-16<0$, pa jednačina nema realne korene. U ovakvim slučajevima imenilac treba svesti na kanonički oblik, posle čega odgovorajućom smenom možemo rešiti dati integral.

$$\int\frac{x+3}{x^2-2x+5}dx=\int\frac{x+3}{(x^2-2x+1)-1+5}dx=\int\frac{x+3}{(x-1)^2+4}dx=\begin{vmatrix}x-1=t\\x=t+1\\dx=dt\end{vmatrix}=$$

$$=\int\frac{t+4}{t^2+4}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2t+8}{t^2+4}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+4}+4\int\frac{dt}{t^2+4}=\begin{vmatrix}t^2+4=z\\2tdt=dz\end{vmatrix}=$$

navedenu smenu ćemo primeniti u prvom integralu, a drugi integral možemo svesti na tablični integral,

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}+\frac{4}{4}\int\frac{dt}{\frac{t^2}{4}+1}=\frac{1}{2}\ln|z|+\int\frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}=\left|\begin{matrix}\frac{t}{2}=s\\ dt=2ds\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+4\right|+\int\frac{2ds}{s^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+4\right|+2\operatorname{arctg}s+c=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+4\right|+2\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+c=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|(x-1)^2+4\right|+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+c$$

rešenje je znači

$$\int\frac{x+3}{x^2-2x+5}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right|+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+c.$$

150. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{1}{2x^2-3x+11}dx$.

Rešenje: Imenilac podintegralne funkcije nema realne korene, jer kvadratna jednačina $2x^2-3x+11=0$ ima negativnu diskriminantu $D=-79<0$. Zbog toga podintegralnu funkciju ne možemo rastaviti na zbir parcijalnih sabiraka, postupamo slično kao u prethodnom zadatku.

$$\int\frac{1}{2x^2-3x+11}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{11}{2}}=\left|\begin{matrix}x-\frac{3}{4}=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{79}{16}}=\frac{1}{2\cdot\frac{79}{16}}\int\frac{dt}{\frac{16t^2}{79}+1}=\frac{8}{79}\int\frac{dt}{\left(\frac{4t}{\sqrt{79}}\right)^2+1}=\left|\begin{matrix}\frac{4t}{\sqrt{79}}=z\\ dt=\frac{\sqrt{79}}{4}dz\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{8}{79}\cdot\frac{\sqrt{79}}{4}\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}z+c=\frac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}\frac{4t}{\sqrt{79}}+c=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}\frac{4\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{79}}+c=\frac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}\frac{4x-3}{\sqrt{79}}+c$$

rešenje je znači

$$\int\frac{1}{2x^2-3x+11}dx=\frac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{\sqrt{79}}x-\frac{3}{\sqrt{79}}\right)+c.$$

151. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{4x^4+15x^3+30x^2+25x+9}{(x+1)\left(x^2+2x+2\right)^2}dx$.

Rešenje: Podintegralna funkcija je prava racionalna funkcija, jer je brojilac polinom četvrtog stepena a imenilac polinom petog stepena. Polinom x^2+2x+2 u imeniocu se ne može rastaviti na linearne faktore, znači da funkciju rastavljamo na parcijalne sabirke u obliku u kojem je i zadat:

$$\frac{4x^4+15x^3+30x^2+25x+9}{(x+1)(x^2+2x+2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$4x^4+15x^3+30x^2+25x+9=A(x^2+2x+2)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+2x+2)+$$
$$+(Dx+E)(x+1)$$

$$4x^4+15x^3+30x^2+25x+9=A(x^4+4x^2+4+4x^3+4x^2+8x)+$$
$$+(Bx+C)(x^3+2x^2+2x+x^2+2x+2)+(Dx+E)(x+1)$$

$$4x^4+15x^3+30x^2+25x+9=A(x^4+4x^3+8x^2+8x+4)+(Bx+C)(x^3+3x^2+4x+2)+$$
$$+(Dx+E)(x+1)$$

$$4x^4+15x^3+30x^2+25x+9=A(x^4+4x^3+8x^2+8x+4)+B(x^4+3x^3+4x^2+2x)+$$
$$+C(x^3+3x^2+4x+2)+D(x^2+x)+E(x+1)$$

$$4x^4+15x^3+30x^2+25x+9=(A+B)x^4+(4A+3B+C)x^3+(8A+4B+3C+D)x^2+$$
$$+(8A+2B+4C+D+E)x+(4A+2C+E)$$

izjednačavanjem koeficijenata kod odgovarajućih stepena dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
&A+B &&=4 \quad \Rightarrow B=4-A\\
&4A+3B+C &&=15\\
&8A+4B+3C+D &&=30\\
&8A+2B+4C+D+E &&=25\\
&4A+2C \quad +E &&=9 \quad \Rightarrow E=9-4A-2C
\end{aligned}$$

uvrštavajući B i E u ostale tri jednačine:

$$\begin{aligned}
&4A+12-3A+C=15\\
&8A+16-4A+3C+D=30\\
&8A+8-2A+4C+D+9-4A-2C=25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A+C=3 \qquad \Rightarrow C=3-A\\
&4A+3C+D=14\\
&2A+2C+D=8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&4A+9-3A+D=14\\
&2A+6-2A+D=8
\end{aligned}$$

Neodređeni integrali Matematička analiza

$A+D=5$

$D=2$

odavde je $D=2$, $A=3$, $C=0$, $B=1$, $E=-3$. Podintegralna funkcija astavljena na parcijalne sabirka ima oblik:

$$\frac{4x^4+15x^3+30x^2+25x+9}{(x+1)(x^2+2x+2)^2}=\frac{3}{x+1}+\frac{x}{x^2+2x+2}+\frac{2x-3}{(x^2+2x+2)^2}$$

a traženi integral je

$$\mathbf{I}=\int\frac{4x^4+15x^3+30x^2+25x+9}{(x+1)(x^2+2x+2)^2}dx$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{3}{x+1}dx+\int\frac{x}{x^2+2x+2}dx+\int\frac{2x-3}{(x^2+2x+2)^2}dx$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{4x^4+15x^3+30x^2+25x+9}{(x+1)(x^2+2x+2)^2}dx=\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2+\mathbf{I}_3$$

gde smo sa $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ redom označili integrale parcijalnih sabiraka. Rešavajmo ih:

$$\mathbf{I}_1=\int\frac{3}{x+1}dx=3\ln|x+1|+c_1$$

$$\mathbf{I}_2=\int\frac{x}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2-2}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx-\int\frac{dx}{x^2+2x+2}$$

uvedimo smenu $\begin{vmatrix}x^2+2x+2=t\\(2x+2)dx=dt\end{vmatrix}$ u prvom integralu, tada je

$$\mathbf{I}_2=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\begin{vmatrix}x+1=z\\dx=dz\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\ln|t|-\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{2}\ln|t|-\operatorname{arctg}z+c_2$$

$$\mathbf{I}_2=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|-\operatorname{arctg}(x+1)+c_2$$

$$\mathbf{I}_3=\int\frac{2x-3}{(x^2+2x+2)^2}dx=\int\frac{2x+2-5}{(x^2+2x+2)^2}dx=\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}dx-5\int\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

u prvom integralu uvedimo istu smenu kao u integralu $\mathbf{I}_2$, tada je

$$\mathbf{I}_1 = \int\frac{dt}{t^2} - 5\int\frac{dx}{\left((x+1)^2+1\right)^2} = \begin{vmatrix} x+1=z \\ dx=dz \end{vmatrix} = \frac{t^{-1}}{-1} - 5\int\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2} = -\frac{1}{t} - 5\int\frac{1+z^2-z^2}{\left(z^2+1\right)^2}dz$$

$$\mathbf{I}_3 = -\frac{1}{x^2+2x+2} - 5\int\frac{dz}{z^2+1} + 5\int\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}dz = \frac{-1}{x^2+2x+2} - 5\,\mathrm{arctg}z + 5\int\frac{z\cdot zdz}{\left(z^2+1\right)^2}$$

poslednji integral se rešava metodom parcijalne integracije (rešen je u 144. primeru):

$$\mathbf{I}_3 = \frac{-1}{x^2+2x+2} - 5\mathrm{arctg}(x+1) + 5\cdot\frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}z - \frac{z}{1+z^2}\right) + c_3$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{-1}{x^2+2x+2} - 5\mathrm{arctg}(x+1) + \frac{5}{2}\mathrm{arctg}(x+1) - \frac{5(x+1)}{2\left(x^2+2x+2\right)} + c_3$$

$$\mathbf{I}_3 = -\frac{5}{2}\mathrm{arctg}(x+1) - \frac{5x+7}{2\left(x^2+2x+2\right)} + c_3$$

Ako ove rezultate uvrstimo u originalni integral, dobijamo da je:

$$\mathbf{I} = 3\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - \mathrm{arctg}(x+1) - \frac{5}{2}\mathrm{arctg}(x+1) - \frac{5x+7}{2\left(x^2+2x+2\right)} + c_1 + c_2 + c_3$$

a posle sređivanja izraza rezultat je:

$$\mathbf{I} = 3\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - \frac{7}{2}\mathrm{arctg}(x+1) - \frac{5x+7}{2\left(x^2+2x+2\right)} + c\,.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

176. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

177. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$.

178. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$.

179. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$.

180. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$.

181. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{x^3+x+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$.

182. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

183. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)^2}$.

184. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$.

185. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{x^3+1}{\left(x^2-4x+5\right)^2}dx$.

5.4. Integrali iracionalnih funkcija

Integrale iracionalnih funkcija odgovarajućim smenama možemo svesti na integrale racionalnih funkcija. Razne tipove iracionalnih integrala rešavamo različitim smenama. Obradićemo ih po tipovima podintegralnih funkcija i u svakom slučaju ćemo zadati odgovarajuće smene, pomoću kojih se dati integrali svode na integrale racionalnih funkcija. Za svaki tip ćemo detaljno izraditi po jedan ili dva primera.

Iracionalni integral tipa $\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},\ldots\right]dx$***, gde je*** R ***racionalna funkcija a*** $p_1,q_1,p_2,q_2,\ldots$ ***su celi brojevi, rešavaju se smenom*** $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$***, gde je*** n ***najmanji zajednički sadržalac brojeva*** $q_1,q_2,\ldots$.

152. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int x\cdot\sqrt[3]{4+3x}\,dx$.

Rešenje: Podintegralna iracionalna funkcija je navedenog tipa, pa možemo uvesti pre smenu:

$$\mathbf{I}=\int x\cdot\sqrt[3]{4+3x}\,dx=\left|\begin{array}{c}4+3x=t^3\ \Rightarrow\ x=\dfrac{t^3-4}{3}\\ 3dx=3t^2dt\\ dx=t^2dt\end{array}\right|=\int\frac{t^3-4}{3}\cdot\sqrt[3]{t^3}\cdot t^2dt=\frac{1}{3}\int t^3\left(t^3-4\right)dt=$$

$$=\frac{1}{3}\int t^6dt-\frac{4}{3}\int t^3dt=\frac{1}{3}\frac{t^7}{7}-\frac{4}{3}\frac{t^4}{4}+c=\frac{t^7}{21}-\frac{t^4}{3}+c=\frac{t^4}{3}\left(\frac{t^3}{7}-1\right)+c=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(4+3x)^4}}{3}\left(\frac{4+3x}{7}-1\right)+c=\frac{(4+3x)\sqrt[3]{4+3x}}{3}\left(\frac{3x-3}{7}\right)+c$$

rešenje je:

$$\mathbf{I}=\int x\cdot\sqrt[3]{4+3x}\,dx=\frac{(x-1)(4+3x)\sqrt[3]{4+3x}}{7}+c.$$

153. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$.

Rešenje: $\displaystyle\mathbf{I}=\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}=\int\frac{dx}{(2x-1)^{\frac{1}{2}}-(2x-1)^{\frac{1}{4}}}$,

Iz ovog načina zapisivanja podintegralne funkcije vidimo da se ona može uvrstiti u dat iracionalnog integrala. Primenimo zato predloženu smenu:

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}=\int\frac{dx}{(2x-1)^{\frac{1}{2}}-(2x-1)^{\frac{1}{4}}}=\left|\begin{array}{l}2x-1=t^4\\ 2dx=4t^3dt\\ dx=2t^3dt\end{array}\right|=\int\frac{2t^3dt}{t^2-t}=2\int\frac{t^2dt}{t-1}$$

znači da smo dati integral smenom sveli na integral racionalne funkcije, koji rešavamo način kako smo to pokazali kod integrala racionalnih funkcija. Rastavimo podintegral funkciju na celi deo i na prvi razlomljeni deo:

$$\frac{t^2}{t-1}=\frac{t^2-1+1}{t-1}=t+1+\frac{1}{t-1}$$

tada je:

$$\mathbf{I}=2\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=2\int t\,dt+2\int dt+2\int\frac{dt}{t-1}=\left|\begin{array}{l}t-1=z\\ dt=dz\end{array}\right|$$

navedenu smenu treba primeniti u poslednjem integralu. Posle smene:

$$\mathbf{I}=2\frac{t^2}{2}+2t+2\int\frac{dz}{z}=t^2+2t+2\ln|z|+c=t^2+2t+2\ln|t-1|+c$$

Vratimo se na promenljivu x :

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}=\sqrt[4]{(2x-1)^2}+2\sqrt[4]{2x-1}+2\ln\left|\sqrt[4]{2x-1}-1\right|+c$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}=\sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+\ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2+c\,.$$

154. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$.

Rešenje: Primenimo predloženu smenu:

$$\mathbf{I}=\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx=\int x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}dx=\left|\begin{array}{c}\frac{x-1}{x+1}=t^2\\ x=\frac{t^2+1}{1-t^2}\\ dx=\frac{4tdt}{\left(1-t^2\right)^2}\end{array}\right|=\int\frac{t^2+1}{1-t^2}\cdot\sqrt{t^2}\cdot\frac{4tdt}{\left(1-t^2\right)^2}$$

$$\mathbf{I}=4\int\frac{t^4+t^2}{\left(1-t^2\right)^3}dt=4\int\frac{t^4+t^2}{(1-t)^3(1+t)^3}dt$$

Dobili smo integral prave racionalne funkcije, pa podintegralnu funkciju rastavljamo na zbir parcijalnih sabiraka:

$$\frac{t^4+t^2}{(1-t)^3(1+t)^3}=\frac{A}{(1-t)}+\frac{B}{(1-t)^2}+\frac{C}{(1-t)^3}+\frac{D}{(1+t)}+\frac{E}{(1+t)^2}+\frac{F}{(1+t)^3}$$

$$t^4+t^2=A(1-t)^2(1+t)^3+B(1-t)(1+t)^3+C(1+t)^3+D(1+t)^2(1-t)^3+E(1+t)(1-t)^3+F(1-t)^3$$

Jednakost važi za svako $t\in R$, pa:

ako je $t=1$ tada je

$$2=8C\quad\Rightarrow\quad C=\frac{1}{4}$$

ako je $t=-1$ rada je

$$2=8F\quad\Rightarrow\quad F=\frac{1}{4}$$

ako je $t=0$ tada

$$0=A+B+\frac{1}{4}+D+E+\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad A+B+D+E=-\frac{1}{2}$$

ako je $t=2$ tada je

$$16+4=27A-27B+\frac{27}{4}-9D-3E-\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 27A-27B-9D-3E=\frac{27}{2}$$

ako je $t=-2$ tada je

$$16+4=-9A-3B-\frac{1}{4}+27D-27E+\frac{27}{4} \quad \Rightarrow \quad -9A-3B+27D-27E=\frac{27}{2}$$

ako je $t=3$ tada je

$$81+9=256A-128B+16-128D-32E-2 \quad \Rightarrow \quad 256A-128B-128D-32E=76$$

iz dobijeni je dnačina sastavljamo sistem

$$\begin{aligned}
&A+B+D+E=-\frac{1}{2}\\
&27A-27B-9D-3E=\frac{27}{2}\\
&-9A-3B+27D-27E=\frac{27}{2}\\
&\underline{256A-128B-128D-32E=76}
\end{aligned}$$

koji za rešenje ima brojeve: $A=D=\frac{1}{8}$, $B=E=-\frac{3}{8}$, $C=F=\frac{1}{4}$. Rastavimo sada racionalnu funkciju na zbir parcijalnih sabiraka:

$$\frac{t^4+t^2}{(1-t)^3(1+t)^3}=\frac{1}{8(1-t)}-\frac{3}{8(1-t)^2}+\frac{1}{4(1-t)^3}+\frac{1}{8(1+t)}-\frac{3}{8(1+t)^2}+\frac{1}{4(1+t)^3}$$

a integral je:

$$\mathbf{I}'=\int\frac{t^4+t^2}{(1-t)^3(1+t)^3}dt=\int\frac{dt}{8(1-t)}-\int\frac{3dt}{8(1-t)^2}+\int\frac{dt}{4(1-t)^3}+\int\frac{dt}{8(1+t)}-\int\frac{3dt}{8(1+t)^2}+\int\frac{dt}{4(1+t)^3}$$

$$\mathbf{I}'=\mathbf{I}_1-\mathbf{I}_2+\mathbf{I}_3+\mathbf{I}_4-\mathbf{I}_5+\mathbf{I}_6$$

gde je

$$\mathbf{I}_1=\frac{1}{8}\int\frac{dt}{1-t}=-\frac{1}{8}\ln|1-t|+c_1$$

$$\mathbf{I}_2=\frac{3}{8}\int\frac{dt}{(1-t)^2}=\begin{vmatrix}1-t=z\\ dt=-dz\end{vmatrix}=-\frac{3}{8}\int\frac{dz}{z^2}=-\frac{3}{8}\cdot\frac{z^{-1}}{-1}+c_2=\frac{3}{8z}+c_2=\frac{3}{8(1-t)}+c_2$$

$$\mathbf{I}_3=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1-t)^3}=\begin{vmatrix}1-t=z\\ dt=-dz\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z^3}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{z^{-2}}{-2}+c_3=\frac{1}{8z^2}+c_3=\frac{1}{8(1-t)^2}+c_3$$

$$\mathbf{I}_4=\frac{1}{8}\int\frac{dt}{1+t}=\frac{1}{8}\ln|1+t|+c_4$$

$$\mathbf{I}_5=\frac{3}{8}\int\frac{dt}{(1+t)^2}=\begin{vmatrix}1+t=z\\ dt=dz\end{vmatrix}=\frac{3}{8}\int\frac{dz}{z^2}=\frac{3}{8}\cdot\frac{z^{-1}}{-1}+c_5=-\frac{3}{8z}+c_5=-\frac{3}{8(1+t)}+c_5$$

$$\mathbf{I}_6=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1+t)^3}=\begin{vmatrix}1+t=z\\ dt=dz\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z^3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{z^{-2}}{-2}+c_6=-\frac{1}{8z^2}+c_6=-\frac{1}{8(1+t)^2}+c_6$$

saberimo sada dobijene integrale:

$$\mathbf{I}'=-\frac{1}{8}\ln|1-t|+c_1-\frac{3}{8(1-t)}-c_2+\frac{1}{8(1-t)^2}+c_3+\frac{1}{8}\ln|1+t|+c_4+\frac{3}{8(1+t)}-c_5-\frac{1}{8(1+t)^2}+c_6$$

$$\mathbf{I}'=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1-t}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{1}{(1+t)^2}\right)+c$$

$$\mathbf{I}'=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{3}{8}\cdot\frac{1-t-1-t}{1-t^2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{(1+t)^2-(1-t)^2}{(1-t^2)^2}+c$$

$$\mathbf{I}'=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{3}{8}\cdot\frac{-2t}{1-t^2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1+2t+t^2-1+2t-t^2}{(1-t^2)^2}+c$$

$$\mathbf{I}=4\mathbf{I}'$$

$$\mathbf{I}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-3\cdot\frac{t}{1-t^2}+2\cdot\frac{t}{(1-t^2)^2}+c$$

vratimo se na početnu promenljivu x:

$$\mathbf{I}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right|-3\cdot\frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\frac{x-1}{x+1}}+2\cdot\frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{\left(1-\frac{x-1}{x+1}\right)^2}+c$$

i sredimo dobijeni izraz. Tada dobijamo rešenje početnog integrala:

$$\mathbf{I}=\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\frac{3\sqrt{x^2-1}}{2}+\frac{(x+1)\sqrt{x^2-1}}{2}+c$$

$$I=\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x+1-3)+c$$

$$I=\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+\frac{(x-2)\sqrt{x^2-1}}{2}+c.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

186. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$.

187. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

188. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$.

189. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$.

190. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{ax+b}}$.

Iracionalne integrale tipa $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$***, gde su*** m,n,p ***racionalni (razlomljeni) brojevi, zovemo binomnim integralima, i možemo ih rešavati u sledeća tri slučaja:***

1. *za* $p\in Z$ *integral se svodi na prethodni tip*
2. *za* $\frac{m+1}{n}\in Z$ *treba primeniti smenu* $a+bx^n=t^s$, *gde je* s *imenilac razlomka* p
3. *za* $\frac{m+1}{n}+p\in Z$ *primenjujemo smenu* $ax^{-n}+b=t^s$, *gde je* s *imenilac razlomka* p.

155. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Rešenje: $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$, znači $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{3}$.

Proverimo sada koji od tri uslova zadovoljavaju ovi brojevi:

1. $p=\frac{1}{3}\notin Z$, prvi uslov se ne može primeniti

2. $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2\in Z$, drugi uslov se može primeniti:

$$\mathbf{I}=\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\left|\begin{array}{c} 1+x^{\frac{1}{4}}=t^3 \\ x=\left(t^3-1\right)^4 \\ dx=12\left(t^3-1\right)^3t^2dt \end{array}\right|=\int \frac{\sqrt[3]{t^3}}{\left(t^3-1\right)^2}12\left(t^3-1\right)^3t^2dt=12\int t^3\left(t^3-1\right)dt$$

$$\mathbf{I}=12\int t^6dt-12\int t^3dt=12\frac{t^7}{7}-12\frac{t^4}{4}+c=t^4\left(\frac{12}{7}t^3-3\right)+c$$

vratimo se na početnu promenljivu x :

$$\mathbf{I}=\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^4\left(\frac{12}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)-3\right)+c=\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,\frac{12+12\sqrt[4]{x}-21}{7}+c$$

$$\mathbf{I}=\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,\frac{12\sqrt[4]{x}-9}{7}+c=\frac{3}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\left(4\sqrt[4]{x}-3\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+c\,.$$

156. Primer: **Rešiti neoređeni integral** $\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}}$.

Rešenje: $\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}}=\int x^{-2}\left(2+x^3\right)^{-\frac{5}{3}}dx$, znači $m=-2$, $n=3$, $p=-\frac{5}{3}$.

Proverimo sada koji je od tri uslova zadovoljen za ove brojeve:

1. $p=-\frac{5}{3}\notin Z$, prvi slučaj se ne može primeniti,

2. $\frac{m+1}{n}=\frac{-2+1}{3}=-\frac{1}{3}\notin Z$, ni drugi slučaj ne možemo primeniti,

3. $\frac{m+1}{n}+p=-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}=-\frac{6}{3}=-2\in Z$, treći slučaj je zadovoljen:

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}}=\left|\begin{array}{c}2x^{-3}+1=t^3\\ x=\sqrt[3]{\dfrac{2}{t^3-1}}\\ dx=-\dfrac{t^2}{\left(t^3-1\right)}\sqrt[3]{\dfrac{2}{t^3-1}}dt\end{array}\right|=\int\frac{-\dfrac{t^2}{\left(t^3-1\right)}\sqrt[3]{\dfrac{2}{t^3-1}}dt}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{t^3-1}\right)^2}\left(2+\dfrac{2}{t^3-1}\right)^{\frac{5}{3}}}.$$

$$\mathbf{I}=-\int\frac{\dfrac{t^2}{t^3-1}dt}{\sqrt[3]{\dfrac{2}{t^3-1}}\left(\dfrac{2t^3}{t^3-1}\right)^{\frac{5}{3}}}=-\int\frac{\dfrac{t^2}{t^3-1}dt}{\dfrac{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^5}\,t^5}{\sqrt[3]{t^3-1}\sqrt[3]{\left(t^3-1\right)^5}}}=-\int\frac{\dfrac{t^2}{t^3-1}dt}{\dfrac{4t^5}{\left(t^3-1\right)^2}}=-\frac{1}{4}\int\frac{t^3-1}{t^3}dt$$

$$\mathbf{I}=-\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1}{t^3}\right)dt=-\frac{1}{4}\int dt+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+c=-\frac{t}{4}-\frac{1}{8t^2}+c$$

vratimo se na početnu promenljivu x, tada je:

$$\mathbf{I}=-\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{2}{x^3}+1}-\frac{1}{8\cdot\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{x^3}+1\right)^2}}+c=-\frac{1}{4}\frac{\sqrt[3]{2+x^3}}{x}-\frac{x^2}{8\cdot\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}+c$$

$$\mathbf{I}=-\frac{2\left(2+x^3\right)+x^3}{8x\cdot\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}+c=-\frac{4+3x^3}{8x\cdot\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}+c.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

191. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int x^3\left(1+2x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx$.

192. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

193. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{x^4\cdot\sqrt{1+x^2}}$.

194. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{1+x^5}}$.

195. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$.

Iracionalne integrale tipa $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, ***gde je*** $P_n(x)$***polinom n-tog reda, rešavamo formulom:*** $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Koeficijente polinoma $Q_{n-1}(x)$ ***i broj*** λ ***možemo odrediti ako diferenciramo datu jednakost i izjednačimo odgovarajuće koeficijente ispred odgovarajućih stepena nepoznate x.***

Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx$.

Rešenje: Podintegralnu funkciju treba dovesti na oblik koji je dat u opštem obliku ovog tipa iracionalnog integrala:

$$\mathbf{I} = \int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx = \int x^2\sqrt{x^2+4}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int\frac{x^2(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$$

$$\mathbf{I} = \int\frac{P_4(x)}{\sqrt{x^2+4}}dx = Q_3(x)\sqrt{x^2+4}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\mathbf{I} = \int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx = (ax^3+bx^2+cx+d)\sqrt{x^2+4}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

diferencirajmo sada gornju jednačinu po nepoznazoj x, tada je:

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} = (3ax^2+2bx+c)\sqrt{x^2+4}+(ax^3+bx^2+cx+d)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}+\lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$$

pomnožimo datu jednačinu sa $\sqrt{x^2+4}$:

$$x^4+4x^2 = (3ax^2+2bx+c)(x^2+4)+x(ax^3+bx^2+cx+d)+\lambda$$

$$x^4+4x^2 = 3ax^4+12ax^2+2bx^3+8bx+cx^2+4c+ax^4+bx^3+cx^2+dx+\lambda$$

$$x^4+4x^2 = 4ax^4+3bx^3+(12a+2c)x^2+(8b+d)x+4c+\lambda$$

izjednačavanjem odgorajućih koeficijenata dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{array}{lll} 4a=1 & \Rightarrow & a=\frac{1}{4} \\ 3b=0 & \Rightarrow & b=0 \\ 12a+2c=4 & \Rightarrow & c=\frac{1}{2} \\ 8b+d=0 & \Rightarrow & d=0 \\ 4c+\lambda=0 & \Rightarrow & \lambda=-2 \end{array}$$

vratimo se u integral:

$$\mathbf{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)\sqrt{x^2+4}-2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)\sqrt{x^2+4}-\frac{2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}}=\left|\begin{array}{l}\frac{x}{2}=t\\ dx=2dt\end{array}\right|$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x\left(x^2+2\right)}{4}\sqrt{x^2+4}-\int\frac{2dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x\left(x^2+2\right)}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+c$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x\left(x^2+2\right)}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left|\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}\right|+c$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x\left(x^2+2\right)}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right|+c$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x\left(x^2+2\right)}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+2\ln 2+c$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+c_1$$

ZADACI ZA VEŽBU:

196. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \frac{x^2 dxx}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

197. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

198. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

199. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int x\sqrt{x^2+9}\,dx$.

200. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Iracionalne integrale tipa $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ***smenom*** $\frac{1}{x-\alpha}=t$ ***možemo dovesti na integrale prethodnog oblika.***

158. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$.

Rešenje: Ako primenimo smenu predloženu za ovaj tip integrala, dobićemo:

$$\mathrm{I}=\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}=\left|\begin{array}{c}\frac{1}{x}=t\\ x=\frac{1}{t}\\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\end{array}\right|=\int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^5}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}=-\int \frac{dt}{\frac{1}{t^3}\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}}=-\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

slično prethodnom zadatku:

$$\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt=\left(at^3+bt^2+ct+d\right)\sqrt{1-t^2}+\lambda\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

diferencirajmo sada ovu jednačinu:

$$\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}=\left(3at^2+2bt+c\right)\sqrt{1-t^2}+\left(at^3+bt^2+ct+d\right)\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1-t^2}}$$

pomnožimo jednačinu sa $\sqrt{1-t^2}$:

$$t^4=\left(3at^2+2bt+c\right)\left(1-t^2\right)-t\left(at^3+bt^2+ct+d\right)+\lambda$$

$$t^4=3at^2+2bt+c-3at^4-2bt^3-ct^2-at^4-bt^3-ct^2-dt+\lambda$$

$$t^4=-4at^4-3bt^3+(3a-2c)t^2+(2b-d)t+c+\lambda$$

ako izjednačimo odgovarajuće koeficijente, dobićemo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
-4a=1 &\quad\Rightarrow\quad a=-\frac{1}{4}\\
-3b=0 &\quad\Rightarrow\quad b=0\\
3a-2c=0 &\quad\Rightarrow\quad c=-\frac{3}{8}\\
2b-d=0 &\quad\Rightarrow\quad d=0\\
c+\lambda=0 &\quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

vratimo se u integral:

$$\int\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt=\left(-\frac{1}{4}t^3-\frac{3}{8}t\right)\sqrt{1-t^2}+\frac{3}{8}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\int\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt=-\frac{t}{4}\left(2t^2+3\right)\sqrt{1-t^2}+\frac{3}{8}\arcsin t+c$$

tada je originalni integral:

$$\mathbf{I}=-\int\frac{t^4\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{2t^3+3t}{8}\sqrt{1-t^2}-\frac{3}{8}\arcsin t+c$$

vratimo se na početnu promenljivu:

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{8}\left(\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x}\right)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x}+c$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}=\frac{2+3x^2}{8x^3}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x}+c$$

$$\mathbf{I}=\int\frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}=\frac{2+3x^2}{8x^4}\sqrt{x^2-1}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x}+c.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

201. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$.

202. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx$.

203. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

204. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

205. Zadatak: **Rešiti neodređeni intgeral** $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$.

Iracionalne integrale tipa $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ ***možemo rešavati i pomoću trigonometrijskih ili hiperboličnih smena, ako potkorenu veličinu*** ax^2+bx+c ***napišemo u obliku razlike ili zbira kvadrata. Tada se dati integral može svesti na jedan od sledeća tri oblika, koje rešavamo sa datim smenama:***

1) $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ *smena* $x=a\sin t$ *ili:* $x=a\,\mathrm{th}\,t$

2) $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ *smena:* $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ *ili:* $x=a\,\mathrm{sh}\,t$

3) $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ *smena:* $x=a\sec t$ *ili:* $x=a\,\mathrm{ch}\,t$

159. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Rešenje: $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$, dobili smo znači drugi oblik, primenimo zato smenu $x=a\,\mathrm{tg}\,t$:

$$\mathrm{I}=\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}=\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{(x+1)^2+1}}=\begin{vmatrix} x+1=\mathrm{tg}\,t \\ \mathrm{dx}=\dfrac{\mathrm{dt}}{\cos^2 t}\end{vmatrix}=\int \frac{dt}{\mathrm{tg}^2 t\cos^2 t\sqrt{\mathrm{tg}^2 t+1}}=$$

$$=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=\begin{vmatrix}\sin t=z\\ \cos t dt=dz\end{vmatrix}=\int\frac{dz}{z^2}=\frac{z^{-1}}{-1}+c=\frac{-1}{z}+c=\frac{-1}{\sin t}+c=\frac{-1}{\sin(\mathrm{arctg}(x+1))}+c=$$

$$=\frac{-1}{\frac{\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}(x+1))}{\sqrt{\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}(x+1))+1}}}+c=-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+c\ .$$

160. Primer: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}$.

Rešenje: Dati integral je prvi oblik od moguća tri oblika, zato je:

$$\mathrm{I}=\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}=\begin{vmatrix}x=\sin t\\ dx=\cos t\,dt\end{vmatrix}=\int\frac{\cos t\,dt}{(\sin^2 t-1)\sqrt{1-\sin^2 t}}=\int\frac{\cos t\,dt}{-\cos^2 t\cos t}=$$

$$-\int\frac{dt}{\cos^2 t}=-\mathrm{tg}t+c=-\mathrm{tg}(\arcsin x)+c=-\frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)}+c=$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}+c=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c$$

ZADACI ZA VEŽBU:

206. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}}$.

207. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$.

208. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

209. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

210. Zadatak: **Rešiti neodređeni integral** $\int\sqrt{2+x^2}dx$.

Iracionalne integrale tipa $\int R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ ***možemo rešavati i sa Ojlerovim smenama:***

1) ako kavdratni trinom ax^2+bx+c ***nema realne korene,***

a) i $a>0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}+t$

b) i $c>0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$

2) ako je $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, ***gde su*** x_1,x_2 ***realni koreni kvadratnog trinoma, tada je:***

$$a(x-x_1)=(x-x_2)t^2.$$

161. Primer: **Ojlerovim smenama rešiti iracionalni intgeral** $\int\sqrt{2+x^2}\,dx$.

Megoldás: Potkorena kvadratna veličina x^2+2 nema realne korene i $a=1>0$, zato primenjujemo smenu 1) a) :

$$\sqrt{2+x^2}=x+t \quad /^2$$

$$2+x^2=x^2+2xt+t^2$$

$$2xt=2-t^2$$

$$x=\frac{2-t^2}{2t}$$

$$dx=-\frac{t^2+2}{2t^2}dt$$

$$\mathrm{I}=-\int\left(\frac{2-t^2}{2t}+t\right)\frac{t^2+2}{2t^2}dt=-\int\frac{2-t^2+2t^2}{2t}\frac{t^2+2}{2t^2}dt=-\int\frac{\left(t^2+2\right)^2}{4t^3}dt=-\int\frac{t^4+4t^2+4}{4t^3}dt=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\left(t+\frac{4}{t}+\frac{4}{t^3}\right)dt=-\frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}+4\ln|t|+4\frac{t^{-2}}{-2}\right)+c=-\frac{t^2}{8}-\ln|t|+\frac{1}{2t^2}+c=$$

$$=-\frac{1}{8}\left(\sqrt{2+x^2}-x\right)^2-\ln\left|\sqrt{2+x^2}-x\right|+\frac{1}{2\left(\sqrt{2+x^2}-x\right)^2}+c=$$

kvadrirajmo izraze u zagradama, tada je:

$$\mathrm{I}=\frac{1}{4\left(1+x^2-x\sqrt{2+x^2}\right)}-\frac{1+x^2-x\sqrt{2+x^2}}{4}-\ln\left|\sqrt{2+x^2}-x\right|+c\,.$$

162. Primer: **Ojlerovim smenama rešiti iracionalni intgeral** $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx$.

Rešenje: Kvadratni trinom pod korenom ima realne korene, pa se može napisati da je $-x^2-2x+3=-(x+3)(x-1)$, primenjujemo znači smenu pod 2) :

$$-(x+3)=(x-1)t^2 \quad /\cdot(x-1)$$

$$-(x+3)(x-1)=(x-1)^2t^2$$

$$3-2x-x^2=(x-1)^2t^2$$

a iz druge jednačine sledi:

$$x+3=t^2-xt$$

$$x+xt^2=t^2-3$$

$$x=\frac{t^2-3}{1+t^2}$$

$$dx=\frac{8t\,dt}{\left(1+t^2\right)^2}.$$

Tada se dati integral formira na sledeći način:

$$\mathrm{I}=\int\sqrt{\left(\frac{t^2-3}{1+t^2}-1\right)^2t^2}\,\frac{8t\,dt}{\left(1+t^2\right)^2}=\int\frac{t^2-3-1-t^2}{1+t^2}t\frac{8t\,dt}{\left(1+t^2\right)^2}=-32\int\frac{t^2dt}{\left(1+t^2\right)^3}=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=t & dv=\dfrac{t\,dt}{\left(1+t^2\right)^3} \\ du=dt & v=\displaystyle\int\frac{t\,dt}{\left(1+t^2\right)^3}=\frac{-1}{4\left(1+t^2\right)^2}\end{array}\right|=-32\left(\frac{-t}{4\left(1+t^2\right)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{8t}{\left(1+t^2\right)^2}-8\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}\cdot\frac{t}{t}=\left|\begin{array}{ll} u=\dfrac{1}{t} & dv=\dfrac{t\,dt}{\left(1+t^2\right)^2} \\ du=-\dfrac{dt}{t^2} & v=\displaystyle\int\frac{t\,dt}{\left(1+t^2\right)^2}=\frac{-1}{2\left(1+t^2\right)}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{8t}{\left(1+t^2\right)^2}-8\left(\frac{-1}{2t\left(1+t^2\right)}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2\left(1+t^2\right)}\right)=\frac{8t}{\left(1+t^2\right)^2}+\frac{4}{t\left(1+t^2\right)}+4\int\frac{dt}{t^2\left(1+t^2\right)}=$$

poslednji integral je integral racionalne funkcije, rešavamo ga rastavljanjem na parcijalne sabirke:

$$=\frac{8t}{\left(1+t^2\right)^2}+\frac{4}{t\left(1+t^2\right)}+4\int\frac{dt}{t^2}-4\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{8t}{\left(1+t^2\right)^2}+\frac{4}{t\left(1+t^2\right)}+4\frac{t^{-1}}{-1}-4\operatorname{arctg}t+c=$$

$$=\frac{8t}{\left(1+t^2\right)^2}+\frac{4}{t\left(1+t^2\right)}-\frac{4}{t}-4\operatorname{arctg}t+c=$$

$$=\frac{8\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}}{\left(1+\frac{x+3}{1-x}\right)^2}+\frac{4}{\left(1+\frac{x+3}{1-x}\right)\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}}-\frac{4}{\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}}+4\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}+c=$$

sređivanjem ovog izraza dobijamo konačno rešenje, a to je:

$$=\frac{(1-x)^2}{2}\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}-\sqrt{3-2x-x^2}-4\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}+c.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

211. Primer: **Ojlerovim smenama rešiti neodređeni integral** $\int\sqrt{x^2+5x+6}\,dx$.

212. Primer: **Ojlerovim smenama rešiti neodređeni integral** $\int\sqrt{4x^2+6x+1}\,dx$.

213. Primer: **Ojlerovim smenama rešiti neodređeni integral** $\int\sqrt{x^2-5x+6}\,dx$.

214. Primer: **Ojlerovim smenama rešiti neodređeni integral** $\int\sqrt{4x^2+1}\,dx$.

215. Primer: **Ojlerovim smenama rešiti neodređeni integral** $\int\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

5.5. Integrali trigonometrijskih funkcija

Neodređene trigonometrijske integrale oblika $\int R(\sin x, \cos x)dx$ *smenama:*

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

svodimo na integrale racionalnih funkcija. Ako je $R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$ *tada umesto datih, možemo primeniti i sledeće smene:*

$$\mathrm{tg}x = t$$

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad .$$

163. Primer: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{dx}{1+\sin x + \cos x}$.

Rešenje: Primenimo date smene. Tada je:

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + c = \ln\left|1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + c .$$

164. Primer: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$.

Rešenje: Primenimo smenu $tg\frac{x}{2} = t$. Tada je:

$$\mathrm{I} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{4t}{1+t^2}+3}dt = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+4t+3+3t^2}{1+t^2}}dt = \int \frac{2dt}{2\left(t^2+2t+2\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = \mathrm{arctg}(t+1) + c = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1\right) + c \ .$$

165. Primer: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

Rešenje: Primenimo trigonometrijske smene:

$$\mathbf{I}=\int \frac{dx}{3+5\cos x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int \frac{dt}{8-2t^2}=\int \frac{dt}{4-t^2}=\int \frac{dt}{(2-t)(2+t)}=$$

posle rastavljanja na parcijalne sabirke

$$=\frac{1}{4}\int \frac{dt}{2+t}+\frac{1}{4}\int \frac{dt}{2-t}=\frac{1}{4}\ln|2+t|-\frac{1}{4}\ln|2-t|+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right|+c.$$

166. Primer: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Rešenje: U ovom slučaju važi da je $\frac{1}{1+(-\sin x)^2}\equiv\frac{1}{1+\sin^2 x}$, pa možemo da primenimo drugu smenu. Tada je:

$$\mathbf{I}=\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{1+2t^2}=\int \frac{dt}{1+\left(t\sqrt{2}\right)^2}=\left|\begin{array}{l} t\sqrt{2}=z \\ dt=\frac{dz}{\sqrt{2}}\end{array}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{1+z^2}=\frac{\operatorname{arctg} z}{\sqrt{2}}+c=$$

$$=\frac{\operatorname{arctg} t\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+c=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}x\right)+c.$$

167. Primer: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}dx$.

Rešenje: I u ovom slučaju možemo primeniti smenu $\mathrm{tg}x=t$:

$$\mathbf{I}=\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}dx=\int \frac{tgx-1}{tgx+2}dx=\int \frac{t-1}{t+2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int \frac{t-1}{(t+2)(t^2+1)}dt$$

Rastavimo podintegralnu funkciju na parcijalne sabirke:

$$\frac{t-1}{(t+2)(1+t^2)}=\frac{A}{t+2}+\frac{Bt+C}{t^2+1}=\frac{At^2+A+Bt^2+Ct+2Bt+2C}{(t+2)(1+t^2)}$$

Odavde je: $t-1=A(t^2+1)+(Bt+C)(t+2)$

$$A+B=0$$

$$2B+C=1$$

$$A+2C=-1$$

Ako je $t=-2$ tada iz prve jednačine dobijamo da je $A=-\frac{3}{5}$,

a iz sistema jednačina dalje računamo $B=\frac{3}{5}$, $C=-\frac{1}{5}$.

Integraljenje nastavljamo na sledeći način:

$$\mathbf{I}=-\frac{3}{5}\int\frac{dt}{t+2}+\frac{1}{5}\int\frac{3t-1}{t^2+1}dt=-\frac{3}{5}\ln|t+2|+\frac{3}{10}\int\frac{2tdt}{t^2+1}-\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

ako u drugom sabirku uvedemo smenu $t^2+1=z$, tada je $2tdt=dz$ i tako je:

$$\mathbf{I}=-\frac{3}{5}\ln|t+2|+\frac{3}{10}\ln(t^2+1)-\frac{1}{5}\mathrm{arctg}t+c=-\frac{3}{5}\ln|\mathrm{tg}x+2|+\frac{3}{10}\ln(\mathrm{tg}^2x+1)-\frac{1}{5}\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x)+c$$

$$\mathbf{I}=-\frac{3}{5}\ln|\mathrm{tg}x+2|+\frac{3}{10}\ln(\mathrm{tg}^2x+1)-\frac{1}{5}x+c.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

216. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

217. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

218. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$.

219. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$.

220. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

221. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$.

222. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}dx$.

223. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$.

224. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$.

225. Zadatak: **Rešiti trigonometrijski integral** $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+5}dx$.

5.6. Integral eksponencijalne funkcije

Integral eksponencijalne funkcije tipa $\int R(e^x)\,dx$, smenom:

$$e^x = t$$
$$e^x dx = dt$$
$$dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

svodimo na integral racionalne funkcije.

168. Primer: **Rešiti eksponencijalni integral** $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}dx$.

Rešenje: Neka je: $e^{\frac{x}{2}} = t$,

Tada je: $\frac{x}{2} = \ln t$

$$x = 2\ln t$$

$$dx = \frac{2}{t}dt$$

ovim smenama dati integral se svodi na integral:

$$\mathrm{I} = 2\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t\left(1+t^2\right)}\cdot\frac{dt}{t} = 2\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2\left(1+t^2\right)}dt$$

Ovaj integral rešavamo metodom parcijalne integracije:

$$\mathrm{u} = \operatorname{arctg} t \qquad , \; dv = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$dv = \frac{dt}{t^2\left(t^2+1\right)} \;, \; v = \int \frac{dt}{t^2\left(t^2+1\right)} = \int \frac{1+t^2-t^2}{t^2\left(t^2+1\right)}dt = \int t^{-2}dt - \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t$$

Tada je:

$$\mathrm{I} = 2\left(-\frac{1}{t}\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg}^2 t + \int \frac{dt}{t\left(1+t^2\right)} + \int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2}dt\right) = 2\left(-\frac{1}{t}\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg}^2 t + \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2\right)$$

gde je

$$\mathbf{I}_1=\int\frac{dt}{t\left(1+t^2\right)}=\int\frac{1+t^2-t^2}{t\left(1+t^2\right)}dt=\int\frac{dt}{t}-\int\frac{tdt}{1+t^2}=\ln|t|-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)$$

i

$$\mathbf{I}_2=\int\frac{\operatorname{arctg}t}{1+t^2}dt=\left|\begin{array}{l}\operatorname{arctg}t=z\\ \dfrac{dt}{1+t^2}=dz\end{array}\right|=\int zdz=\frac{z^2}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2t$$

Na kraju:

$$\mathbf{I}=2\left(-\frac{1}{t}\operatorname{arctg}t-\operatorname{arctg}^2t+\ln|t|-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2t\right)+c$$

$$\mathbf{I}=-\frac{2\operatorname{arctg}t}{t}-2\operatorname{arctg}^2t+2\ln|t|-\ln\left(1+t^2\right)+\operatorname{arctg}^2t+c$$

$$\mathbf{I}=-\frac{2\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}}-\operatorname{arctg}^2e^{\frac{x}{2}}+\ln\frac{e^x}{1+e^x}+c.$$

169. Primer: **Rešiti eksponencijalni integral** $\int\frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}dx$.

Rešenje: Smena je sada: $e^x=t$

$$x=\ln t$$

$$dx=\frac{dt}{t}$$

Dati integral posle uvođenja ovih smena biće:

$$\mathbf{I}=\int\frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}dx=\int\frac{t^3-t}{t^2+1}\cdot\frac{dt}{t}=\int\frac{t^2-1}{t^2+1}dt=\int\frac{t^2+1-2}{t^2+1}dt=\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=t-2\operatorname{arctg}t+c$$

$$\mathbf{I}=e^x-2\operatorname{arctg}e^x+c.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

226. Zadatak: **Rešiti eksponencijalni integral** $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$.

227. Zadatak: **Rešiti eksponencijalni integral** $\int \frac{dx}{e^x \sqrt{(1+e^x)^3}}$.

228. Zadatak: **Rešiti eksponencijalni integral** $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$.

6. Određeni integrali

Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na zatvorenom intervalu $[a,b]$, i na tom intervalu primitivna funkcija joj je funkcija $F(x)$, tada na osnovu Njuton-Lajbnicove formule određeni integral na intervalu $[a,b]$ može se izračunati po formuli:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

170. Primer: **Izračunati određeni integral** $\int_{-1}^{2} x^2 dx$ **.**

Rešenje: Prema Njutn–Lajbnicovoj formuli:

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3 .$$

171. Primer: **Izračunati određeni integral** $\int_{1}^{e} \ln x dx$ **.**

Rešenje: Prema Njutn–Lajbnicovoj formuli:

$$\int_1^e \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = x \end{vmatrix} = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} = (e\ln e - 1\ln 1) - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e =$$

$$= e - (e-1) = 1 .$$

172. Primer: **Izračunati određeni integral** $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ **.**

Rešenje: Funkcija $\frac{1}{x^2}$ u intervalu $[-1,1]$ ima jednu tačku prekida, tačku $x=0$. Zato dati integral treba rasraviti na zbir dva integrala:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{-0}\frac{dx}{x^2}+\int_{+0}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{-\varepsilon}-1\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=\infty-2=\infty.$$

173. Primer: **Izračunati nesvojstveni integral** $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Rešenje: Ako je granica integrala beskonačna, tada se određeni integral rešava uvođenjem granične vrednosti (lim), na sledeći način:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{T\to\infty}\int_0^{T}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{T\to\infty}\operatorname{arctg}t\Bigg|_0^{T}=\lim_{T\to\infty}(\operatorname{arctg}T-\operatorname{arctg}0)=\lim_{T\to\infty}\operatorname{arctg}T=\frac{\pi}{2}\ .$$

174. Primer: **Izračunati određeni integral** $\int_1^3\sqrt{x+1}\,dx$.

Rešenje: Dati integral se može rešiti uvođenje smene, a to znači da kod određenog integrala paralelno treba da promenimo i granice:

$$\int_1^3\sqrt{x+1}\,dx=\left|\begin{matrix}x+1=t^2\\ dx=2tdt\end{matrix}\right|=\int_{\sqrt{2}}^{2}t\cdot 2tdt=2\int_{\sqrt{2}}^{2}t^2dt=2\frac{t^3}{3}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}=\frac{2}{3}\left(8-2\sqrt{2}\right)=\frac{4}{3}\left(4-\sqrt{2}\right).$$

ZADACI ZA VEŽBU:

229. Zadatak: **Rešiti određeni integral** $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

230. Zadatak: **Rešiti određeni integral** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx$.

231. Zadatak: **Rešiti određeni integral** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

232. Zadatak: **Rešiti određeni integral** $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.

232. Zadatak: **Rešiti određeni integral** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

234. Zadatak: **Rešiti određeni integral** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ctgx\, dx$.

235. Zadatak: **Rešiti određeni integral** $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$.

6.1. Površina ravnih likova

Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a,b]$, i na tom intervalu je nenegativna: $f(x) \geq 0$ $(a \leq x \leq b)$, tada

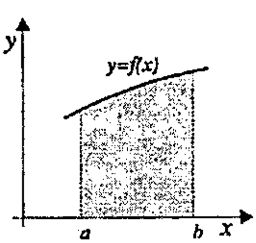
$$\int_a^b f(x)dx$$

predstavlja površinu krivolinijskog trapeza kojeg određuju luk funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a,b]$. x-osa i prave $x=a$ i i $x=b$. Ako je funkcija na posmatranom intervalu $[a,b]$ negativna $f(x) \leq 0$, tada je površina jednaka vrednosti određenog integrala uzet sa negativnim predznakom. Iz ovoga i iz osobine aditivnosti integrala sledi, da ako je funkcija $f(x)$ na nekom intervalu $[a,b]$ i pozitivna i negativna, tada površinu dobijamo kao razliku integrala dela funkcije koji se nalazi iznad i ispod x-ose.

Polazeći od površine krivolinijskog trapeza, možemo izračunati površine različitih ravnih likova.

6.1.1. Površina ravnih likova u pravouglom kordinatnom sistemu

Ako je $y = f(x) \geq 0$ i neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$, tada se površina krivolinijskog trapeza koji je ograničen sa datom krivom, sa x-osom i sa pravama $x = a$ i $x = b$, može se izračunati po formuli:



$$\mathbf{T} = \int_a^b f(x)dx.$$

175. Primer: **Odrediti površinu kojeg zatvaraju parabola $y=x^2$ i prava $y=x+2$.**

Rešenje: Presek prave i parabole su tačke $A(-1,1)$ i $B(2,4)$, zato je:

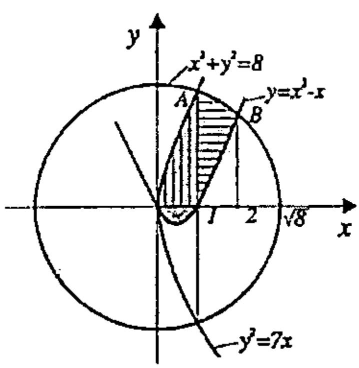
$$T=\int_{-1}^{2}(x+2)dx-\int_{-1}^{2}x^2dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\left(\frac{4}{2}+4-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)=4.5\ .$$

176. Primer: **Odrediti površinu kojeg zatvaraju parabole $y=x^2$ i $y^2=x$.**

Rešenje: Presečne tačke parabole $y=x^2$ i $y=\pm\sqrt{x}$ su tačke $A(0,0)$ i $B(1,1)$. Površinu kojeg zatvaraju ove parabole dobićemo ako iz površine ispod parabole $y=+\sqrt{x}$ oduzmemo površinu ispod parabole $y=x^2$. Tada je:

$$T=\int_{0}^{1}\sqrt{x}dx-\int_{0}^{1}x^2dx=\left(\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\ .$$

177. Primer: **Odrediti površinu kojeg zatvaraju kružnica $x^2+y^2=8$, i parabole $y^2=7x$ i $y=x^2-x$.**



Rešenje: Presečne tačke kružnice $x^2+y^2=8$ i parabole $y^2=7x$ su:

$$x^2+7x-8=0$$

$$x_{1/2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+32}}{2}=\frac{-7\pm 9}{2}$$

$$x=1$$

Presečne tačke kružnice $x^2+y^2=8$ i parabole $y=x^2-x$ su:

$$x^2+x^4-2x^3+x^2=8$$

$$x^4-2x^3+2x^2=8$$

$$x=2$$

Traženu površinu treba odrediti iz tri dela:

$$\mathrm{T}=\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_2+\mathrm{T}_3$$

$$\mathrm{T}_1=\int_0^1\sqrt{7x}dx=\sqrt{7}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{2\sqrt{7}}{3}(1-0)=\frac{2\sqrt{7}}{3},$$

$$\mathrm{T}_2=\int_0^1(x^2-x)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6},$$

$$\mathrm{T}_3=\int_1^2\sqrt{8-x^2}dx-\int_1^2(x^2-x)dx=\left(\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2}+\frac{8}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{8}}\right)\Bigg|_1^2-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=2+4\arcsin\frac{2}{\sqrt{8}}-\frac{1}{2}\sqrt{7}-4\arcsin\frac{1}{\sqrt{8}}-\left(\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=2+4\arcsin\frac{2}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{7}-4\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{7}{3}+\frac{3}{2}=2+4\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{7}}{2}-4\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{5}{6}.$$

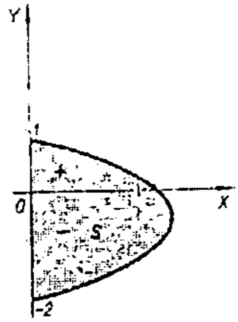
Tada je:

$$\mathrm{T}=\frac{2\sqrt{7}}{3}+\frac{1}{6}+2+\pi-\frac{\sqrt{7}}{2}-4\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{5}{6}$$

odnosno

$$T=\frac{2\sqrt{7}}{3}-\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{4}{3}+\pi-4\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}\ .$$

178. Primer: **Odrediti površinu kojeg zatvaraju kriva $x=2-y-y^2$ i ordinatna osa (y-osa) .**



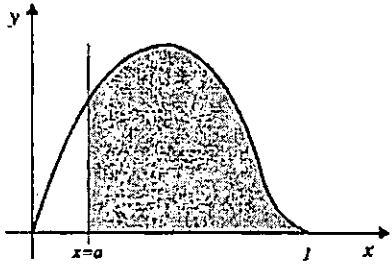
Rešenje: Promenile su se uloge promenljivih i osa x i y, pa traženu površinu možemo da izračunamo kao $T=\int_a^b f(y)dy$. Presečne tačke parabole i y-ose su:

$$x=0$$
$$-y^2-y+2=0$$
$$y_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\frac{1\pm 3}{-2}$$
$$y_1=-2$$
$$y_2=1$$

Tada je tražena površina:

$$T=\int_{-2}^{1}\left(2-y-y^2\right)dy=\left(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-4-2+\frac{8}{3}\right)=\frac{9}{2}=4.5\ .$$

179. Primer: **Odrediti površinu kojeg zaklapaju krive $y=\sqrt{x}\ln^2 x$, prave $x=a$ $(0<a<1)$, $x=1$ i $y=0$.**



Rešenje: Površina ispod tražene krive od a do 1:

$$T=\int_a^1\sqrt{x}\ln^2 x\,dx=\left|\begin{matrix}u=\ln^2 x & dv=x^{\frac{1}{2}}dx\\ du=2\ln x\dfrac{dx}{x} & v=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}dx\end{matrix}\right|=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln^2 x\right)\Bigg|_a^1-\frac{4}{3}\int_a^1\sqrt{x}\ln x\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=\ln x & dv=x^{\frac{1}{2}}dx\\ du=\dfrac{dx}{x} & v=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\end{matrix}\right|=\left(0-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\ln^2 a\right)-\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x\Bigg|_a^1-\frac{2}{3}\int_a^1\sqrt{x}dx\right)=$$

$$=-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\ln^2 a-\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\left(0-a\sqrt{a}\ln a\right)-\frac{4}{9}x\sqrt{x}\Bigg|_a^1\right)=-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\ln^2 a+\frac{8}{9}a\sqrt{a}\ln a+\frac{16}{27}\left(1-a\sqrt{a}\right)=$$

$$=-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\ln^2 a+\frac{8}{9}a\sqrt{a}\ln a+\frac{16}{27}-\frac{16}{27}a\sqrt{a}=-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\ln a\left(\ln a-\frac{4}{3}\right)+\frac{16}{27}\left(1-a\sqrt{a}\right).$$

ZADACI ZA VEŽBU:

236. *Zadatak:* **Odrediti površinu kojeg zatvaraju parabola $y=4x-x^2$ i apscisna osa.**

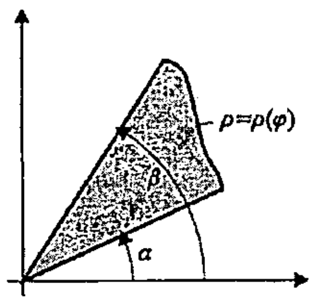
237. *Zadatak:* **Odrediti površinu kojeg zatvaraju kriva $y=\ln x$, prava $x=e$ i osa x.**

238. *Zadatak:* **Odrediti površinu kojeg zaklapaju kriva $y^3=x$ i prave $y=1$ i $x=8$.**

239. Zadatak: **Odrediti površinu kojeg zaklapaju parabole** $y=\frac{x^2}{3}$ i $y=4-\frac{2}{3}x^2$.

240. Zadatak: **Odrediti merne brojeve onih površina, na koje parabola** $y^2=2x$ **deli kružnicu** $x^2+y^2=8$.

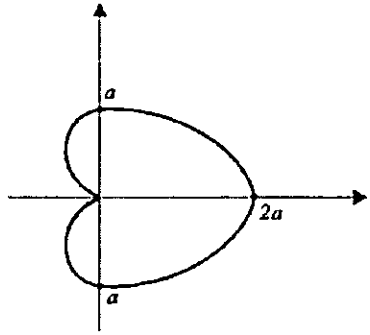
6.1.2. Površina ravnih likova u polarnom kordinatnom sistemu



Neka je data kriva $\rho=\rho(\varphi)$ *u polarnom kordinatnom sistemu, gde je* $\alpha\le\varphi\le\beta$, $[\beta-\alpha]\le 2\pi$, *i* $\rho=\rho(\varphi)$ *je neprekidna kriva. Površinu krivolinijskog trougla OAB kojge zaokružuju krive* $\rho=\rho(\varphi)$ *i poluprave* $\varphi=\alpha$ *i* $\varphi=\beta$ *možemo da izračunamo sledećom formulom:*

$$T=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$$

180. Primer: **Odrediti površinu kojeg zatvara kadioid** $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $a>0$.



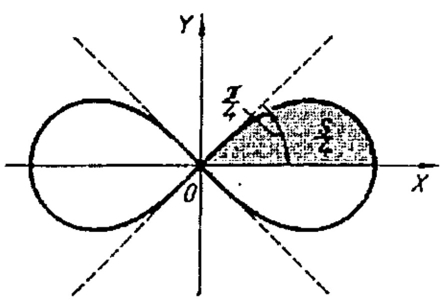
Rešenje: Jednačina kardioide je data sa polarnim kordinatama, zato koristimo gornju formulu za izračunavanje površine koju ona zatvara:

$$T = 2T_1 = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{\pi} d\varphi + 2a^2\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi + a^2\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= a^2\varphi\Big|_0^{\pi} + 2a^2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2}\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} = a^2\pi + \frac{a^2}{2}\pi = \frac{3}{2}a^2\pi \ .$$

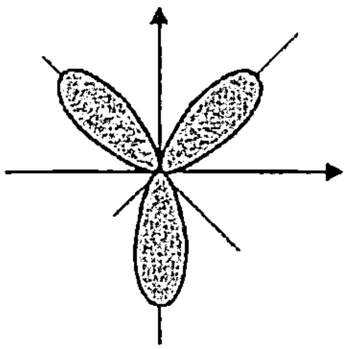
181. Primer: **Odrediti površinu kojeg zatvara Bernulijeva lemniskata, ako je njena jednačina:** $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$.



Rešenje: Zbog simetričnosti krive dovoljno je računati četvrtinu tražene površine:

$$T = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi d\varphi = 2a^2\,\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2\left(\sin\frac{\pi}{2} - 0\right) = a^2 \ .$$

182. Primer: **Odrediti površinu kojeg zatvara trolisnata ruža** $\rho = a\sin 3\varphi \ , a\in R$.



Rešenje: Zbog simetričnosti ovih listova, i zbog $\sin 3\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0 \ , \varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ tražena površina se može računati kao:

$$T = 3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2\sin^2 3\varphi d\varphi = \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 6\varphi}{2}d\varphi = \frac{3a^2}{4}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{3a^2}{4}\cdot\frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{3a^2}{4}\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) - \frac{a^2}{8}(\sin 2\pi - \sin 0) = \frac{a^2\pi}{4} - \frac{a^2}{8}\cdot 0 = \frac{a^2\pi}{4} .$$

ZADACI ZA VEŽBU:

241. Zadatak: **Odrediti površinu kojeg zatvara jedan list krive** $\rho = a\cos 2\varphi$.

242. Zadatak: **Odrediti površinu kojeg zatvara kriva** $\rho^2 = a^2\sin 4\varphi$.

243. Zadatak: **Odrediti površinu kojeg zatvara kriva** $\rho = a\sin 3\varphi$.

***244. Zadatak:*:** **Odrediti površinu kojeg zatvara kriva** $\rho = 2 + \cos\varphi$.

245. Zadatak: **Odrediti površinu kojeg zatvara elipsa** $\rho = \dfrac{2}{1+\varepsilon\cos\varphi}$, $0 \le \varepsilon < 1$.

6.1.3. Površina ravnih likova u parametarskom obliku

Ako je funkcija $y = f(x)$ *zadata u parametarskom obliku sistemom jednačina* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, *gde* $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *zadovoljavaju uslove:*

a) $\varphi(t)$ *je neprekidna i diferencijabilna na zatvorenom intervalu* $[t_1, t_2]$

b) $\varphi(t)$ *je monotono rastuća na zatvorenom intervalu* $[t_1, t_2]$

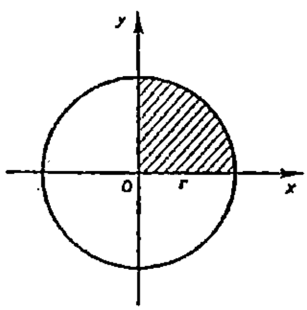
c) $\psi(t)$ *neprekidna na zatvorenom intervalu* $[t_1, t_2]$

d) $\psi(t) \geq 0$ *za svako* $t \in [t_1, t_2]$

tada površinu koju zatvara ova kriva (zadata u parametarskom obliku) možemo izračunati formulom:

$$T = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} y \cdot x_t' dt .$$

183. Primer: **Parametarske jednačine kružnice** $x^2 + y^2 = r^2$ **glase:** $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$. **Pomoću određenog integrala izračunati četvrtinu površine kružnice.**

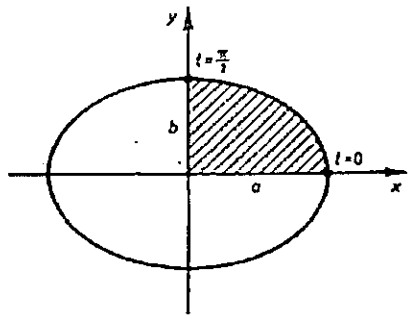


Rešenje: U slučaju četvrtine kržnice $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$, pa je:

$$P = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} r\sin t \cdot r(-\sin t)dt = -r^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t dt = r^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{r^2}{2} t \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{r^2}{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt =$$

$$=\left|\begin{matrix}2t=z\\ dt=\dfrac{dz}{2}\end{matrix}\right|=\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{r^2}{4}\int_0^{\pi}\cos z dz=\frac{r^2\pi}{4}-\frac{r^2}{4}\sin z\Big|_0^{\pi}=\frac{r^2\pi}{4}-0=\frac{r^2\pi}{4}\ .$$

184. Primer: **Parametarske jednačine elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ su $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$, za $0\le t\le 2\pi$. Odrediti površinu koju zatvara ova elipsa.**



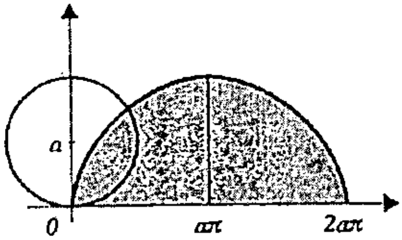
Rešenje: Dovoljno je izračunati površinu četvrtine elipse. Tada su granice parametara $t_1=0$ i $t_2=\dfrac{\pi}{2}$, a površina elipse je:

$$P=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}b\sin t a(-\sin t)dt=-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t dt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=2ab\cdot t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t dt=$$

$$=2ab\frac{\pi}{2}-2ab\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=ab\pi-ab(\sin\pi-\sin 0)=ab\pi\ .$$

185. Primer: **Izračunati površinu koju cikloida $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$, $0\le t\le 2\pi$, $a\in R$ zatvara sa x-osom.**

$a \in R$.



Rešenje: Granice možemo odrediti na sledeći način:

$t_1 : x = 0,\ y = 0 \Rightarrow t_1 = 0$
$t_2 : x = 2a\pi,\ y = 0 \Rightarrow t_2 = 2\pi$

Tražena površina je tada:

$$P = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt =$$

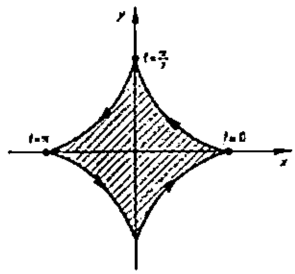
$$= a^2 t\Big|_0^{2\pi} - 2a^2 \sin t\Big|_0^{2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = a^2 2\pi - 2a^2 \cdot 0 + \frac{a^2}{2} t\Big|_0^{2\pi} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2t\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 2a^2\pi + \frac{a^2}{2} 2\pi + 0 = 3a^2\pi\ .$$

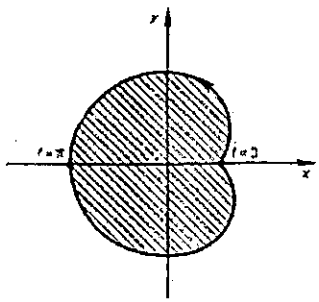
ZADACI ZA VEŽBU:

246. Zadatak: **Izračunati površinu jedne grane Dekartovog lista** $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$.

247. Zadatak: **Izračunati površinu koju zatvara astroida** $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$.



248. ***Zadatak:*** **Izračunati površinu koju zatvara kardioida** $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = b(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$.



249. ***Zadatak:*** **Izračunati površinu koju kriva** $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ **zatvara sa** x**-osom.**

250. ***Zadatak:*** **Izračunati površinu koju kriva** $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - t^2 \end{cases}$ **zatvara sa** x**-osom.**

6.2. Izračunavanje dužine luka krive

Druga važna primena određenog integrala je izračunavanje dužine luka krive. Ako funkcija $y = f(x)$ ima neprekidne izvode $y' = f'(x)$ na zatvorenom intervalu $[a,b]$, tada se može izračunati dužina luka krive koja pripada inetrvalu $[a,b]$.

6.2.1. Dužina luka krive u pravouglom kordinatnom sistemu

Uz gore navedene uslove u pravouglom kordinatnom sistemu, dužinu luka krive koja pripada intervalu $[a,b]$, možemo izračunati sledećom formulom::

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx .$$

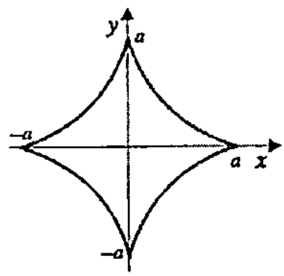
186. Primer: **Izračunati dužinu luka krive hiperbolične funkcije $y = \mathrm{ch}x$ na intervalu $[0,3]$.**

Rešenje: Ako je $y = \mathrm{ch}x \Rightarrow y' = \mathrm{sh}x$, pa na osnovu date formule sledi:

$$l = \int_0^3 \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 x}\,dx = \int_0^3 \sqrt{ch^2 x}\,dx = \int_0^3 \mathrm{ch}x\,dx = \mathrm{sh}x\Big|_0^3 = \mathrm{sh}3 - \mathrm{sh}0 = \mathrm{sh}3 = \frac{e^3 - e^{-3}}{2} \approx 10 .$$

187. Primer: **Izračunati celu dužinu astroide date formulom $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.**

Rešenje: Zbog simetričnosti dovoljno je računati četvrtinu cele dužine.



Diferenciranjem jednačine $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ dobijamo jednačinu $\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{\frac{1}{3}}y'=0$. Ako iz nje izrazimo y' dobićemo : $y'=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$. Tada je dužina luka krive:

$$l=4\int_0^a\sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}dx=4\int_0^a\sqrt{\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{x^{2/3}}}dx=4\int_0^a\sqrt{\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}}dx=4a^{1/3}\int_0^a x^{-1/3}dx=4a^{1/3}\left.\frac{x^{2/3}}{\frac{2}{3}}\right|_0^a=$$

$$=6a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}-0\right)=6a.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

251. Zadatak: **Izračunati dužinu luka krive $y=\sqrt{x}$ na intervalu $0\le x\le 1$.**

252. Zadatak: **Izračunati dužinu luka krive $y=\ln x$ na intervalu $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.**

253. Zadatak: **Izračunati dužinu luka krive $y=1-\ln\cos x$ na intervalu $0\le x\le\frac{\pi}{4}$.**

254. Zadatak: **Izračunati dužinu luka krive $y=2\ln\cos\frac{x}{2}$ na intervalu $0\le x\le 3$.**

255. Zadatak: **Izračunati dužinu luka krive $y=e^x$ od tačke $(0,1)$ do tačke $(1,e)$.**

256. Zadatak: **Izračunati dužinu luka krive** $y = \ln\sin(x-1)$ **na intervalu od** $x = 1+\frac{\pi}{3}$ **do** $x = 1+\frac{2\pi}{3}$.

257. Zadatak: **Pokazati da je dužina luka elipse** $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ **jednaka dužini jedne periode krive** $y=\sin x$ **.**

258. Zadatak: **Izračunati dužinu luka krive** $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ **na intervalu od** $y=1$ **do** $y=e$.

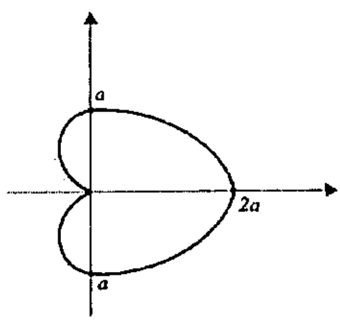
259. Zadatak: **Izračunati dužinu luka krive** $y^2=x^3$ **od kordinatnog početka do tačke** $(4,8)$.

6.2.2. Dužina luka krive u polarnom kordinatnom sistemu

Neka je $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$ *data kriva u polarnom kordinatnom sistemu, koja na datom intervalu ima neprekidne izvode.Tada dužinu luka krive na posmatranom intervalu računamo po formuli:*

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi\ .$$

188. Primer: **Izračunati dužinu luka kardioide** $\rho=a(1+\cos\varphi)$, $a>0$.



Rešenje: Za $\rho=a(1+\cos\varphi) \Rightarrow \rho'=-a\sin\varphi$, pa na osnovu date formule i zbog simetričnosti grafika sledi:

$$l=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}\,d\varphi=$$

$$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi=2a\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi=2a\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2\frac{1+\cos\varphi}{2}}\,d\varphi=$$

$$=4a\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=\left|\begin{matrix}\frac{\varphi}{2}=t\\ d\varphi=2dt\end{matrix}\right|=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot 2dt=8a\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=8a(1-0)=8a.$$

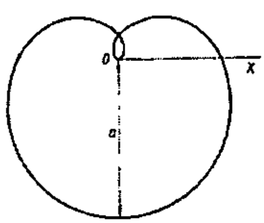
189.Primer: **Odrediti dužinu logaritamske spirale date jednačinom $\rho=e^{a\varphi}$, $a>0$, od kordinatnog početka do tačke $A(\rho=1,\varphi=0)$.**

Rešenje: Za $\rho=0 \Rightarrow \varphi=-\infty$ i za $\rho=e^{a\varphi} \Rightarrow \rho'=ae^{a\varphi}$. Tada je:

$$l=\int_{-\infty}^{0}\sqrt{e^{2a\varphi}+a^2e^{2a\varphi}}\,d\varphi=\lim_{T\to-\infty}\sqrt{1+a^2}\int_T^0 e^{a\varphi}\,d\varphi=\left|\begin{matrix}a\varphi=t\\ d\varphi=\frac{dt}{a}\end{matrix}\right|=\sqrt{1+a^2}\lim_{T\to-\infty}\int_{aT}^{0}e^t\frac{dt}{a}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\lim_{T\to-\infty}e^t\Big|_{aT}^{0}=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\lim_{T\to-\infty}\left(e^0-e^{aT}\right)=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\left(1-e^{-\infty}\right)=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}.$$

190. Primer: **Odrediti dužinu cele krive date polarnom jednačinom $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.**



Rešenje: Kriva opisuje svoju celu dužinu ako φ varira od 0 do 3π. Zbog $\rho' = 3a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3} = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$ sledi:

$$l = \int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3} + a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi = a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{3}+\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi =$$

$$= a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi = a\int_0^{3\pi}\frac{1-\cos\frac{2\varphi}{3}}{2}d\varphi = \frac{a}{2}\varphi\Big|_0^{3\pi} - \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\cos\frac{2\varphi}{3}d\varphi = \frac{a}{2}3\pi - \frac{3a}{4}\sin\frac{2\varphi}{3}\Big|_0^{3\pi} =$$

$$= \frac{3a\pi}{2} - \frac{3a}{4}(\sin 2\pi - \sin 0) = \frac{3a\pi}{2}.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

260. Zadatak: **Izračunati dužinu prvog luka Arhimedove spirale $\rho = a\varphi$.**

261. Zadatak: **Izračunati dužinu luka hiperbolične spirale date jednačinom $\rho = \frac{1}{\varphi}$ od tačke $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ do tačke $\left(\frac{1}{2},2\right)$.**

262. Zadatak: **Izračunati dužinu luka krive $\varphi = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$ od $\rho = 1$ do $\rho = 3$.**

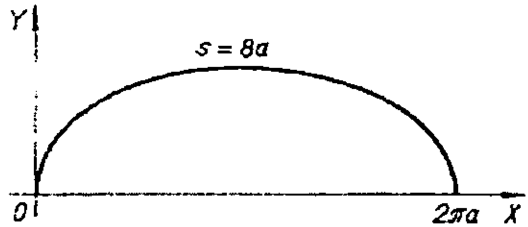
6.2.3. Dužina luka krive u parametarskom obliku

Ako je funkcija data parametrskim jednačinama $x=\varphi(t)$ *i* $y=\psi(t)$ *gde* $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *imaju neprekidne izvode na intervalu* $[t_1,t_2]$, *tada je dužina luka krive:*

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$$

gde su t_1, t_2 *odgovarajuće parametarske vrednosti krajnjih tačaka posmatranog luka, i* $t_1<t_2$.

191. Primer: **Izračunati dužinu jednog luka cikloide** $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$.



Rešenje: Odredimo izvode parametarskih jednačina po promenljivoj t:

$$x=a(t-\sin t)\Rightarrow x_t'=a(1-\cos t)$$
$$y=a(1-\cos t)\Rightarrow y_t'=a\sin t$$

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}=$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=4a\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=-4a(-1-1)=8a\ .$$

192. Primer: **Odrediti dužinu luka krive date u parametarskom obliku sa jednačinama** $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$, **za** $0 \le t \le 2$, $a > 0$.

Rešenje: Odredimo prvo izvode po parametru t:

$x_t' = at\cos t$

$y_t' = at\sin t$

a dužina luka krive je:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi} t\,dt = a\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{a}{2}\left(4\pi^2 - 0\right) = 2a\pi^2.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

263. Zadatak: **Izračunati dužinu luka krive date u parametarskom obliku sa jednačinama** $\begin{cases} x = 3\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\right) \\ y = 3\sin t \end{cases}$, **od** $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$ **do** $t_2 = \dfrac{2\pi}{3}$.

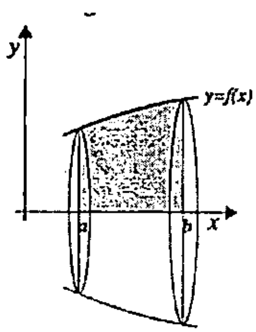
264. Zadatak: **Izračunati dužinu luka krive date u parametarskom obliku sa jednačinama** $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$ **od** $t_1 = 0$ **do** $t_2 = \pi$.

265. Zadatak: **Izračunati dužinu luka krive date u parametarskom obliku sa jednačinama** $\begin{cases} x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t \\ y = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t \end{cases}$ **ako je** $\left(c^2 = a^2 - b^2 \ , \ 0 < b < a\right)$.

6.3. Zapremina rotacionih tela

Određeni integral ima primenu i u računanju zapremine tela. U ovom kursu bavićemo se isključivo sa računanjem zapremine takvih tela koja nastaju rotiranjem specijalnih površi oko jedne ose, znači sa zapreminom takozvanih rotacionih tela.

6.3.1. Zapremina rotacionih tela u pravouglom kordinatnom sistemu



Neka je $y=f(x)$ neprekidna kriva na intervalu $[a,b]$. Ako krivolinijski trapez ograničen sa datom krivom, sa pravama $x=a$ i $x=b$ i intervalom $[a,b]$ rotiramo oko jedne ose, dobićemo rotaciono telo. Zapreminu dobijenog rotacionog tela u zavisnosti od toga oko koje ose je vršena rotacija, računamo sa jednom od sledećih formula:

$$\mathrm{V}_x=\pi\int_a^b y^2(x)dx \quad ili \quad \mathrm{V}_y=2\pi\int_a^b xy(x)dx \ .$$

Ako krivolinijski trapez ograničen krivom $y=f(x)$, pravama $y=c$, $y=d$ i $x=0$ rotiramo oko y-ose, tada zapreminu rotacionog tela računamo po formuli:

$$\mathrm{V}_y=\pi\int_c^d x^2(y)dy.$$

193.Primer: **Izračunati zapreminu onog tela koje se dobija prilikom rotacije luka funkcije $y = \sin x$ na intervalu $0 \le x \le \pi$, oko x-ose.**

Rešenje: Ako primenimo odgovarajuću formulu, tada je tražena zapremina:

$$V_x = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left(x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos 2x dx \right) = \frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos t dt \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}\sin t\Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{\pi}{2}[\pi - 0] = \frac{\pi^2}{2}.$$

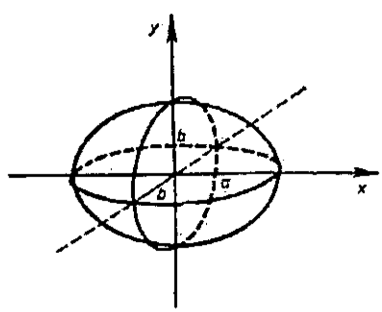
194. Primer: **Izračunati zapreminu onog tela koje se dobija prilikom rotacije luka funkcije $y = \sin x$ na intervalu $0 \le x \le \pi$, oko y-ose.**

Rešenje: Primenom odgovarajuće formule dobija se tražena zapremina:

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = \int \sin dx = -\cos x \end{matrix} \right| = 2\pi \left(-x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \right) =$$

$$= 2\pi \left(-\pi\cos\pi - 0 + \sin x\Big|_0^{\pi} \right) = 2\pi(\pi + 0) = 2\pi^2.$$

195. Primer: **Izračunati zapreminu rotacione elipsoide, koja se dobija prilikom rotacije gornjeg luka elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ oko x-ose.**

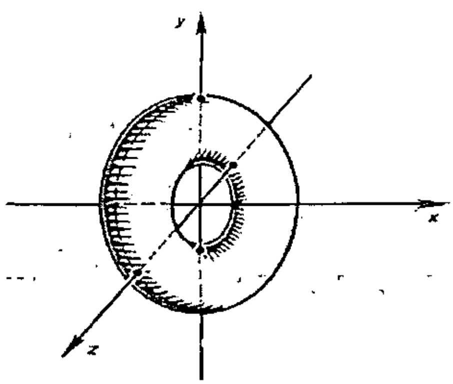


Rešenje: Izrazimo y iz jednačine elipse, tako dobijamo funkciju $f(x)$ iz formule: $y = f(x) = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Primenimo odgovarajuću formulu, tako je zapremina rotacione elipse:

$$\mathrm{V}_x = \pi\int_{-a}^{a}\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2 dx = b^2\pi\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{b^2\pi}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx = \frac{b^2\pi}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{b^2\pi}{a^2}\left(a^2(a+a)-\frac{1}{3}\left(a^3+a^3\right)\right) = \frac{b^2\pi}{a^2}\left(2a^3-\frac{1}{3}2a^3\right) = \frac{b^2\pi}{a^2}\cdot\frac{4}{3}a^3 = \frac{4}{3}ab^2\pi .$$

196. Primer: **Izračunati zapreminu torusa, koji se dobija prilikom rotacije kruga $x^2+(y-b)^2 \le a^2$ $(b \ge a > 0)$ oko x-ose.**



Rešenje: Zapreminu torusa dobijamo, ako iz zapremine rotacionog tela koju opisuje gornja polukružnica (rotacijom oko x-ose), oduzmemo zapreminu rotacionog tela koju opisuje donja polukružnica, (rotacijom oko x-ose). Jednačina gornje polukružnice je: $y=\sqrt{a^2-x^2}+b$, a jednačina donje polukružnice je: $y=-\sqrt{a^2-x^2}+b$. Pošto se rotacija vrši oko x-ose, iz odgovarajuće formule dobijamo da je:

$$\mathrm{V}_x = \pi\int_{-a}^{a}\left[\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\right]dx =$$

$$= \pi \int_{-a}^{a} \left(b^2 + 2b\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 - x^2 - b^2 + 2b\sqrt{a^2 - x^2} - a^2 + x^2 \right) dx = \pi \int_{-a}^{a} 4b\sqrt{a^2 - x^2} =$$

$$= 4b\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \begin{vmatrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos t dt \end{vmatrix} = 4ab\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, \cos t dt = 4a^2 b\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= 4a^2 b\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2a^2 b\pi \left(t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt \right) = 2a^2 b\pi \left(2\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= 2a^2 b\pi \left(\pi + \frac{1}{2}\sin \pi - \frac{1}{2}\sin(-\pi) \right) = 2a^2 b\pi \cdot \pi = 2a^2 b\pi^2 .$$

ZADACI ZA VEŽBU:

266. Zadatak: **Odrediti zapreminu rotacionog tela koje nastaje prilikom rotiranja oko x-ose površine koju zatvara parabola $y = ax - x^2$ $(a > 0)$ sa x-osom.**

267. Zadatak: **Odrediti zapreminu rotacionog tela, koje nastaje prilikom rotiranja površine koju zatvaraju parabola $y^2 = x^3$, prava $x = 1$ i x-osa, a rotacija se vrši oko x-ose.**

268. Zadatak: **Odrediti zapreminu rotacionog tela, koje nastaje rotiranjem površine koju zatvara kriva $y = e^x$ sa x i y-osama. Rotacija se vrši oko x-ose.**

269. Zadatak: **Odrediti zapreminu rotacionog tela, koje nastaje rotiranjem površine koju zatvara kriva $y = e^x$ sa x i y-osama. Rotacija se vrši oko y-ose.**

270. Zadatak: **Odrediti zapreminu rotacionog tela koje nastaje rotacijom površine koju zatvaraju kriva $y^2 = 4ax$ i prava $x = a$, ako se rotacija vrši oko y-ose.**

6.3.2. Zapremina rotacionih tela u polarnim kordinatama

Neka je kriva $\rho=\rho(\varphi)$ nenegativna, i neka ima neprekidne izvode na intervalu $[\alpha,\beta]\subset[0,\pi]$. Ako krivlinijski trougao, kojeg zatvaraju kriva $\rho=\rho(\varphi)$ i poluprave $\varphi=\alpha$ i $\varphi=\beta$ rotiramo oko polarne ose, tada zapreminu nastalog rotacionog tela računamo po formuli:

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho^3\sin\varphi d\varphi .$$

197. Primer: **Izračunati zapreminu onog rotacionog tela, koji se dobija prilikom rotacije krive $\rho=a\sin 2\varphi$ oko polarne ose.**

Rešenje: Na osnovu gornje formule sledi:

$$V=2\cdot\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^3\sin\varphi d\varphi=\frac{4}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 2\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{4}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}8\sin^3\varphi\cos^3\varphi\sin\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{32}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\cos^3\varphi d\varphi=\frac{32}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\cos^2\varphi\cos\varphi d\varphi=\frac{32}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\left(1-\sin^2\varphi\right)\cos\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{32}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4\varphi-\sin^6\varphi\right)\cos\varphi d\varphi=\left|\begin{matrix}\sin\varphi=t\\ co\varphi d\varphi=dt\end{matrix}\right|=\frac{32}{3}\pi a^3\int_0^1\left(t^4-t^6\right)dt=\frac{32}{3}\pi a^3\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{32}{3}\pi a^3\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)=\frac{32}{3}\pi a^3\frac{7-5}{35}=\frac{32}{3}\pi a^3\frac{2}{35}=\frac{64}{105}\pi a^3 .$$

198. Primer: **Izračunati zapreminu rotacionog tela koji nastaje prilikom rotacije kardioide date jednačinom $\rho=2(1+\cos\varphi)$, oko polarne ose.**

Rešenje: Slično prethodnom zadatku:

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_{0}^{\pi}8(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi d\varphi=\begin{vmatrix}1+\cos\varphi=t\\-\sin\varphi d\varphi=dt\end{vmatrix}=-\frac{16}{3}\pi\int_{2}^{0}t^3dt=-\frac{16}{3}\pi\frac{t^4}{4}\bigg|_2^0=$$

$$=-\frac{4}{3}\pi\cdot(0-16)=\frac{64}{3}\pi.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

271. Zadatak: **Izračunati zapreminu rotacionog tela koji nastaje prilikom rotacije kardioide date jednačinom $\rho=a(1+\cos\varphi)$, oko polarne ose.**

272. Zadatak: **Izračunati zapreminu rotacionog tela, koji nastaje prilikom rotacije krive $\rho=a\cos^2\varphi$ oko polarne ose.**

6.3.3. Zapremina rotacionih tela u parametraskom obliku

Ako je kriva $y=f(x)$ data sistemom parametarskih jednačina $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[t_1,t_2]$, gde $\varphi(t)$, $\psi(t)$ zadovoljavaju sledeće uslove:

a) $\varphi(t)$ je neprekidna i diferencijabilna na zatvorenom intervalu $[t_1,t_2]$

b) $\varphi(t)$ je monotono rastuća na zatvorenom intervalu $[t_1,t_2]$

c) $\psi(t)$je neprekidna na zatvorenom intervaluz $[t_1,t_2]$

d) $\psi(t)\geq 0$ za svako $t\in[t_1,t_2]$

tada zapreminu rotacionog tela, kojeg dobijamo prilikom rotiranja parametarski zadate krive oko x-ose, možemo računati po formuli:

$$V=\pi\int_{t_1}^{t_2}\psi^2(t)\varphi'(t)dt=\pi\int_{t_1}^{t_2}y^2\cdot x_t'dt.$$

199. Primer: **Odrediti zapreminu rotacionog tela, koje se dobija prilikom rotiranja parametarski zadate hiperbole** $\begin{cases} x = \mathrm{sh}t \\ y = \mathrm{ch}t \end{cases}$, **ako se rotacije vrši oko** x**-ose na intervalu** $0 \le t \le 2$ **.**

Rešenje: Primenimo gornje zadatu formulu:

$$\mathrm{V} = \pi \int_0^2 y^2(t) x_t' dt = \pi \int_0^2 \mathrm{ch}^2 t \cdot \mathrm{ch}t dt = \pi \int_0^2 (1 + \mathrm{sh}^2 t)\mathrm{ch}t dt = \pi \int_0^2 \mathrm{ch}t dt + \pi \int_0^2 \mathrm{sh}^2 t \mathrm{ch}t dt =$$

$$= \pi \mathrm{sh}t \Big|_0^2 + \pi \int_0^2 \mathrm{sh}^2 t \mathrm{ch}t dt = \left| \begin{matrix} \mathrm{sh}t = u \\ \mathrm{ch}t dt = du \end{matrix} \right| = \pi(\mathrm{sh}2 - \mathrm{sh}0) + \pi \int_{\mathrm{sh}0}^{\mathrm{sh}2} u^2 du = \pi \mathrm{sh}2 + \pi \frac{u^3}{3} \Big|_{\mathrm{sh}0}^{\mathrm{sh}2} =$$

$$= \pi \mathrm{sh}2 + \frac{\pi}{3}(\mathrm{sh}^3 2 - \mathrm{sh}^3 0) = \pi \mathrm{sh}2 + \frac{\pi}{3}\mathrm{sh}^3 2 \approx \pi \cdot 3.63 + \frac{\pi}{3} 3.63^3 \approx 61.6$$

jer:

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ i tako je } \mathrm{sh}2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \approx 3.63 \quad \text{i} \quad \mathrm{sh}0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 \ .$$

200. Primer: **Izračunati zapreminu rotacionog tela, koje se dobija prilikom rotiranja cikloisa date jednačinama** $\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$, $(0 \le t \le 2\pi)$, **oko** x**-ose.**

Rešenje: Pošto je $x_t' = r(1 - \cos t)$, dobijamo:

$$\mathrm{V} = \pi \int_0^{2\pi} [r(1 - \cos t)]^2 r(1 - \cos t) dt = r^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = r^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt =$$

$$= r^3 \pi (\mathrm{I}_1 - 3\mathrm{I}_2 + 3\mathrm{I}_3 - \mathrm{I}_4)$$

Integrirajmo član po član:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} dt = t\Big|_0^{2\pi} = (2\pi - 0) = 2\pi,$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \cos t dt = \sin t\Big|_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = 0 \ ,$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2t dt = \begin{vmatrix} 2t = u \\ dt = \dfrac{du}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\int_0^{4\pi} \cos u du =$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi + \frac{1}{4} \sin u\Big|_0^{4\pi} = \pi + \frac{1}{4}(\sin 4\pi - \sin 0) = \pi + 0 = \pi \ ,$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot \cos t dt = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)\cos t dt = \begin{vmatrix} \sin t = u \\ \cos t dt = du \end{vmatrix} = \int_0^0 (1-u^2) du = 0 \ ,$$

Ovako je tražena zapremina:

$$V = r^3\pi(2\pi - 3\cdot 0 + 3\cdot \pi - 0) = r^3\pi \cdot 5\pi = 5r^3\pi^2 \ .$$

201. Primer: **Odrediti zapreminu tela, kojeg dobijamo rotiranjem luka astroide** $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, \ (0 \le t \le \pi)$.

Rešenje: Primenimo zadatu formulu:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^6 t \cdot 3\cos^2 t(-\sin t) dt = -3\pi \int_0^{\pi} (\sin^2 t)^3 \cos^2 t \sin t dt = -3\pi \int_0^{\pi} (1-\cos^2 t)^3 \cos^2 t \sin t dt =$$

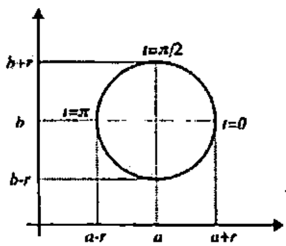
$$= \begin{vmatrix} \cos t = u \\ -\sin t dt = du \end{vmatrix} = 3\pi \int_1^{-1} (1-u^2)^3 u^2 du = 3\pi \int_1^{-1} (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6) u^2 du =$$

$$=3\pi\int_{1}^{-1}\left(u^2-3u^4+3u^6-u^8\right)du=3\pi\left(\frac{u^3}{3}-3\frac{u^5}{5}+3\frac{u^7}{7}-\frac{u^9}{9}\right)\Bigg|_{1}^{-1}=$$

$$=3\pi\left(\frac{-1}{3}+\frac{3}{5}-\frac{3}{7}+\frac{1}{9}\right)-3\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{1}{9}\right)=3\pi\left(\frac{-2}{3}+\frac{6}{5}-\frac{6}{7}+\frac{2}{9}\right)=3\pi\frac{-32}{315}=-\frac{32}{105}\pi.$$

Negativni predznak dobijamo, jer porastom vrednosti parametara t, vrednosti abscise opadaju.

202. Primer: **Odrediti zapreminu torusa, koji se dobija prilikom rotiranja kružnice zadate parametarskim jednačinama** $\begin{cases} x=a+r\cos t \\ y=b+r\sin t\end{cases}$, **ako se rotacija vrši oko** x**-ose.**



Rešenje: Pošto je $x_t'=-r\sin t$, tako na osnovu zadate formule računamo:

$$V=-\pi\int_{0}^{\pi}(b+r\sin t)^2(-r\sin t)dt-\pi\int_{\pi}^{2\pi}(b+r\sin t)^2(-r\sin t)dt=$$

$$=r\pi\int_{0}^{\pi}\left(b^2+2rb\sin t+r^2\sin^2 t\right)\sin t dt+r\pi\int_{\pi}^{2\pi}\left(b^2+2rb\sin t+r^2\sin^2 t\right)\sin t dt=$$

$$=r\pi\int_{0}^{\pi}\left(b^2\sin t+2rb\frac{1-\cos 2t}{2}+r^2\left(1-\cos^2 t\right)\sin t\right)dt+$$

$$+r\pi\int_{\pi}^{2\pi}\left(b^2\sin t+2rb\frac{1-\cos 2t}{2}+r^2\left(1-\cos^2 t\right)\sin t\right)dt=$$

$$= -r\pi b^2 \cos t\Big|_0^{\pi} + r^2\pi b t\Big|_0^{\pi} - \frac{r^2\pi b}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi} - r^3\pi\cos t\Big|_0^{\pi} + \frac{r^3\pi}{3}\cos^3 t\Big|_0^{\pi} -$$

$$- r\pi b^2 \cos t\Big|_{\pi}^{2\pi} + r^2\pi b t\Big|_{\pi}^{2\pi} - \frac{r^2\pi b}{2}\sin 2t\Big|_{\pi}^{2\pi} - r^3\pi\cos t\Big|_{\pi}^{2\pi} + \frac{r^3\pi}{3}\cos^3 t\Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= -r\pi b^2(-1-1) + r^2\pi b\pi - \frac{r^2\pi b}{2}\cdot 0 - r^3\pi(-1-1) + \frac{r^3\pi}{3}(-1-1) - r\pi b^2(1+1) + r^2\pi b\pi -$$

$$-\frac{r^2\pi b}{2}\cdot 0 - r^3\pi(1+1) + \frac{r^3\pi}{3}(1+1) =$$

$$= 2r\pi b^2 + r^2\pi^2 b + 2r^3\pi - \frac{2r^3\pi}{3} - 2r\pi b^2 + r^2\pi^2 b - 2r^3\pi + \frac{2r^3\pi}{3} = 2br^2\pi^2 .$$

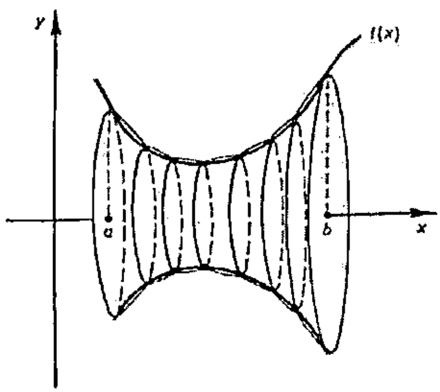
ZADACI ZA VEŽBU:

273. ***Zadatak:*** **Izračunati zapreminu rotacionog tela, koje nastaje prilikom rotiranja luka krive** $\begin{cases} x = t^2 + \ln t \\ y = t^2 - \ln t \end{cases}$, $(1 \le t \le e)$ **oko** x**-ose.**

274. ***Zadatak:*** **Odrediti zapreminu rotacionog tela, koje nastaje prilikom rotiranja luka krive** $\begin{cases} x = \cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} \\ y = \sin t \end{cases}$, $\left(\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$ **oko** x**-ose.**

6.4. Površina omotača rotacionih tela

Ako luk krive $y = f(x)$ koji pripada intervalu $(a \le x \le b)$ rotiramo oko x-ose, tada on opisuje omotač jednog rotacionog tela. Površina tog omotača može da se izračuna pomoću određenog integrala. Ako funkcija $y = f(x)$ ima neprekidn izvod na intervalu $[a,b]$, tada površina omotača tako nastalog rotacionog tela može da se zada u sva tri, do sada pomenuta oblika.

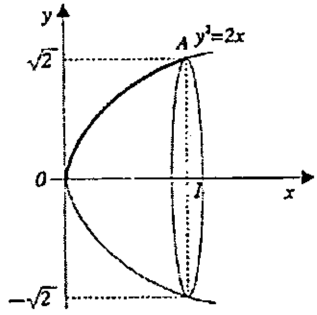


6.4.1. Površina omotača rotacionih tela u pravouglom kordinatnom sistemu

Ako je funkcija $y = f(x)$ nenegativna i ima neprekidni izvod na intervalu $[a,b]$, tada rotiranjem posmatranog luka date krive oko x-ose dobija se omotač rotacionog tela koji se može izračunati po formuli:

$$P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx \ .$$

203. Primer: **Izračunati površinu omotača paraboloidnog ogledala dubine $1m$ i prečnika $D = 2\sqrt{2}m$.**



Rešenje: Ako je $D = 2\sqrt{2}m$ tada je tačka $A\left(1, \sqrt{2}\right)$ tačka parabole. Jednačina parabole je:

$y^2 = 2px$

$2 = 2 \cdot p \cdot 1 \;\Rightarrow\; p = 1$

znači da je jednačina parabole koju treba rotirati oko x-ose: $y^2 = 2x$.

Odavde je $y = \pm\sqrt{2x}$, ali je dovoljno rotirati granu sa pozitivnim predznakom.

Tada je: $y' = \sqrt{2}\dfrac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$.

Površina traženog omotača je znači:

$$P = 2\pi\int_0^1 \sqrt{2x}\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt{2x}\sqrt{\frac{2x+1}{2x}}dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt{2x+1}dx = \begin{vmatrix} 2x+1=t \\ dx=\dfrac{dt}{2} \end{vmatrix} = 2\pi\int_1^3 \sqrt{t}\,\frac{dt}{2} =$$

$$= \pi\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_1^3 = \frac{2\pi}{3}t\sqrt{t}\Bigg|_1^3 = \frac{2\pi}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)m^2 .$$

204. Primer: **Odrediti površinu torusa, koji nastaje rotacijom kružnice $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ oko x-ose, ako je $b > a$.**

Rešenje: Izrazimo iz date jednačine eksplicitno promenljivu y:

$$x^2+(y-b)^2=a^2$$

$$y-b=\pm\sqrt{a^2-x^2}$$

$$y=b\pm\sqrt{a^2-x^2} \quad\Rightarrow\quad y'=\pm\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\mp\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Tada je tražena površina:

$$P=2\cdot 2\pi\int_0^a\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx+2\cdot 2\pi\int_0^a\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx=$$

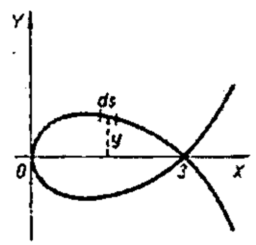
$$=4\pi\int_0^a\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx+4\pi\int_0^a\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=4\pi\int_0^a\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2-x^2}}+a+\frac{ab}{\sqrt{a^2-x^2}}-a\right)dx=8ab\pi\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{8ab\pi}{a}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\frac{x}{a}=t\\ dx=adt\end{array}\right|=8b\pi\int_0^1\frac{adt}{\sqrt{1-t^2}}=8ab\pi\arcsin t\Big|_0^1=8ab\pi(\arcsin 1-\arcsin 0)=$$

$$=8ab\pi\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=4ab\pi^2\ .$$

205. Primer: **Odrediti površinu omotača rotacionog tela, koji se dobija rotiranjem petlje, koju obrazuje kriva zadata jednačinom $9y^2=x(3-x)^2$, ako se rotacija vrši oko x-ose.**



Rešenje: Petlja se dobija na intervalu $0 \le x \le 3$, jednačina njene gornje grane glasi:

$$y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+(y')^2} = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}$$

Tada je tražena površina:

$$P = 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\,\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{\pi}{3}\int_0^3 (2x - x^2 + 3)dx = \frac{\pi}{3}\left(x^2 - \frac{x^3}{3} + 3x\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{\pi}{3}(9-9+9) = 3\pi .$$

ZADACI ZA VEŽBU:

275. Zadatak: **Izračunati površinu omotača rotacionog tela, koji se dobija prilikom rotiranja krive $y = \sqrt{x}$ na intervalu $1 \le x \le 4$, ako se rotacija vrši oko x-ose.**

276. Zadatak: **Izračunati površinu omotača rotacionog tela, koja se dobija rotiranjem krive $y = \sin x$ na intervalu $0 \le x \le \pi$, a rotacija se vrši oko x-ose.**

277. Zadatak: **Izračunati površinu omotača rotacionog tela, koji se dobija rotiranjem luka krive $y = \mathrm{tg} x$ na intervalu $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, a rotacija se vrši oko x-ose.**

278. Zadatak: **Odrediti površinu omotača rotacionog tela, koji se dobija prilikom rotiranja luka krive $y = e^{-x}$ na intervalu $0 \le x \le +\infty$, ako se rotacija vrši oko x-ose.**

279. Zadatak: **Odrediti površinu omotača rotaciong tela, koji se dobija prilikom rotiranja krive $y = a \cdot \mathrm{ch}\frac{x}{a}$ na intervalu $0 \le x \le a$, ako se rotacija vrši oko x-ose.**

6.4.2. Površina omotača rotacionog tela u polarnom kordinatnom sistemu

Ako luk krive $\rho = \rho(\varphi)$ zadate polarnim kordinatama, koji pripada intervalu $\varphi \in [\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$ rotiramo oko polarne ose, tada površinu omotača nastalog rotacionog tela računamo po formuli

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} \sin\varphi d\varphi,$$

ako kriva $\rho = \rho(\varphi)$ ima neprekidni izvod na zatvorenom intervalu $[a,b]$.

206. Primer: **Izračunati površinu lopte poluprečnika R.**

Rešenje: U polarnom kordinatnom sistemu jednačina kružnice glasi $\rho = R$. Ako ovu kružnicu rotiramo oko polarne ose, dobijamo loptu poluprečnika R. Na osnovu gornje formule, njena površina se može izračunati na sledeći način:

$$P = 2\pi \int_0^{\pi} R\sqrt{R^2 + 0} \sin\varphi d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi} R^2 \sin\varphi d\varphi = 2R^2\pi \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = -2R^2\pi \cos\varphi \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -2R^2\pi(-1-1) = 4R^2\pi.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

280. Primer: **Odrediti površinu omotača rotacionog tela, koji se dobija rotiranjem krive $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ zadate polarnim kordinatama, ako se rotacija vrši oko polarne ose.**

281. Primer: **Odrediti površinu rotacionog tela, koji se dobija prilikom rotiranja krive zadate polarnim kordinatama $\rho = 2a(1+\cos\varphi)$, ako se rotacija vrši oko polarne ose.**

6.4.3. Površina omotača rotacionog tela u parametarskom obliku

Neka je data funkcija $y = f(x)$ *sa parametrskim jednačinama:* $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$.

Rotirajmo datu funkciju oko xose, pod sledećim uslovima:

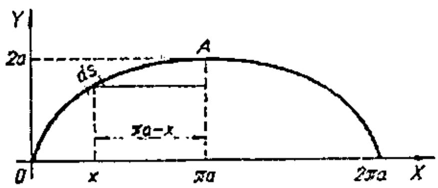
a) funkcija $x = \varphi(t)$ *ima neprekidan i pozitivan prvi izvod na intervalu* $[t_1, t_2]$,

b) funkcija $y = \psi(t)$ *je nenegativna i ima neprekidan prvi izvod na intervalu* $t \in [t_1, t_2]$,

tada površinu omotača nastalog rotacionog tela računamo po formuli

$$P = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt \text{ i.}$$

207. Primer: **Odrediti površinu omotača rotacionog tela, koji nastaje prilikom rotiranja jednog luka cikloide** $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ **oko x-ose.**



Rešenje:

$x = a(t - \sin t) \Rightarrow x' = a(1 - \cos t)$

$y = a(1 - \cos t) \Rightarrow y' = a\sin t$

Tada je tražena površina na osnovu formule:

$$P = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 2a^2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = 2a^2\pi\sqrt{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{1 - \cos t}\,dt =$$

$$= 4a^2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}dt = 8a^2\pi\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt = 8a^2\pi\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= \left|\begin{array}{c}\cos\frac{t}{2}=u\\ -\sin\frac{t}{2}dt = 2du\end{array}\right| = -16a^2\pi\int_1^{-1}(1-u^2)du = -16a^2\pi\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^{-1} = -16a^2\pi\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right) =$$

$$-16a^2\pi\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{64}{3}a^2\pi \ .$$

ZADACI ZA VEŽBU:

282. Zadatak: **Izračunati površinu omotača rotacionog tela, koji nastaje prilikom rotiranja parametarski zadate krive** $\begin{cases} x = e^t\sin t \\ y = e^t\cos t\end{cases}$ **na intervalu** $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$**, ako se rotacija vrši oko** x**-ose.**

283. Zadatak: **Izračunati površinu omotača rotacionog tela, koji nastaje prilikom rotiranja parametarski zadate krive** $\begin{cases} x = \cos t + \ln\operatorname{tg}\frac{t}{2} \\ y = \sin t\end{cases}$ **na intervalu** $\frac{\pi}{2} \le t \le t_0$**, ako se rotacija vrši oko** x**-ose.**

284. Zadatak: **Izračunati površinu omotača rotacionog tela, koji nastaje prilikom rotiranja parametarski zadate cikloide** $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t)\end{cases}$ **na intervalu** $0 \le x \le 2\pi$**, ako se rotacija vrši oko** x**-ose.**

285. Zadatak: **Izračunati površinu omotača rotacionog tela, koji nastaje prilikom rotiranja parametarski zadate kardioide** $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t)\end{cases}$**, ako se rotacija vrši oko** x**-ose.**

7. Diferencijalne jednačine

Rešavanje matematičkog modela fizičkih pojava u prirodi često zahteva određivanje neke nepoznate funkcije. Da bi smo odredili nepoznatu funkciju, potrebno je da napišemo neku jednačinu koju ta funkcija mora da zadovolji. U takvim jednačinama pored nepoznate funkcije mogu da figurišu i neki njeni izvodi, sama nezavisna promenljiva, i eventualno neke konstante. Ovakve jednačine nazivamo *diferencijalnim jednačinama.* U rešenju diferencijalne jednačine nalazimo konstante, za čije bilo koje vrednosti dobijamo funkciju koja zadovoljava datu diferencijalnu jednačinu. Rešenje koje sadrži te nepoznate konstante nazivamo *opštim rešenjem,* a rešenja koja dobijamo za konkretne vrednosti tih konstanti nazivamo *partikularnim rešenjima.* Diferencijalna jednačina može da ima i takva rešenja, koja se iz opšteg rešenja ne mogu dobiti, njih nazivamo *singularnim rešenjima.*

Diferencijalnu jednačinu u kojem figuriše samo prvi izvod (prvi diferencijal) nepoznate funkcije zovemo *diferencijalna jednačina prvog reda,* dok jednačine u kojima figuriše i drugi izvod tražene nepoznate funkcije, nazivamo *diferencijalnim jednačinama drugog reda.*

U ovom poglavlju upoznaćemo se sa nekim najjednostavnijim tipovima diferencijalnih jednačina prvog i drugog reda. Rešavanjem ovih diferencijalnih jednačina prvenstveno želimo pokazati jednu oblast primene diferencijalnog i integralnog računa, i nećemo se dublje upuštati u teoriju diferencijalnih jednačina. Zato pri rešavanju zadataka nećemo se osvrtati u svakom koraku na dokazivanje mogućnosti izvođenja pojedinačnih koraka. Svakako možemo direktnim uvrštavanjem dobijenog rezultata da se uverimo da zadovoljava početnu diferencijalnu jednačinu.

Definicija: *Jednačinu* $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ *gde je F zadata finkcija, a* $y = y(x)$ *tražena nepoznata funkcija (x je nezavisna promenljiva) nazivamo diferencijalnom jednačinom. Funkciju* $y = y(x)$*, koja zajedno sa svojim izvodima zadovoljava datu jednačinu, zovemo rešenjem date diferencijalne jednačine. Ako je rešenje dato u implicitnom obliku* $\phi(x, y) = 0$*, onda ga obično nazivamo integralom date jednačine.*

7.1. Diferencijalne jednačine prvog reda

Diferencijalna jednačina prvog reda je jednačina, koja sadrži nepoznatu funkciju (y), njen prvi izvod $\left(y'=\dfrac{dy}{dx}\right)$, *nezavisnu promenljivu (x) i konstante, i zato može da se napiše u u opštem obliku*

$$F(x,y,y')=0.$$

Ako iz ove implicitne jednačine izrazimo y', *dobijamo eksplicitni oblik diferencijalne jednačine prvog reda:*

$$y'=f(x,y),$$

a u nju uvrštavajći $\dfrac{dy}{dx}$ *umesto* y', *datu diferencijalnu jednačinu prvog reda možemo da dovedemo i na oblik*

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$$

Od navedenih oblika u svakom zadatku koristimo onaj, koji je najpogodniji za nalaženje rešenja date jednačine.

7.1.1. Diferencijalne jednačine sa razdvojenim promenljivima

Opšti oblik: $y'=f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$

Rešavanje: *Razdvajamo promenljive x i y na dve različite strane jednačine, a po...*
integralimo obe strane: $\displaystyle\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int\frac{dx}{f_1(x)}$.

208. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $yy'-x=0$.

Rešenje: Sredimo datu jednačinu i primenimo smenu : $y'=\dfrac{dy}{dx}$.

$$yy'=x$$

$$y\frac{dy}{dx}=x$$

Razdvojimo promenljive na dve različite strane jednačine:

$$ydy = xdx,$$

pa integralimo obe strane:

$$\int ydy = \int xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y^2 = x^2 + 2c.$$

Odavde y možemo i eksplicitno da izrazimo, pa je opšti oblik rešenja date diferencijalne jednačine:

$$y_{1/2} = \pm\sqrt{x^2 + c_1} \ .$$

209. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y(x^2-1)y' = -x(y^2-1)$.

Rešenje: Uvedimo prvo smenu $y' = \frac{dy}{dx}$. Tada je:

$$y(x^2-1)\frac{dy}{dx} = -x(y^2-1).$$

Razdvojimo promenljive na dve različite strane jednačine:

$$\frac{y}{y^2-1}dy = -\frac{x}{(x^2-1)}dx$$

i integralimo obe strane:

$$\int \frac{y}{y^2-1}dy = -\int \frac{x}{x^2-1}dx$$

$$y^2-1=t \qquad x^2-1=z$$

$$2ydy = dt \qquad 2xdx = dz$$

$$ydy = \frac{dt}{2} \qquad xdx = \frac{dz}{2}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z}$$

$$\int \frac{dt}{t} = -\int \frac{dz}{z}$$

$$\ln|t| = -\ln|z| + \ln c$$

$$\ln|y^2-1| = \ln\frac{c}{|x^2-1|}$$

$$\left|y^2-1\right|=\frac{c}{\left|x^2-1\right|}.$$

Odavde sledi da je implicitni oblik opšteg rešenja diferencijalne jednačine:

$$\left|y^2-1\right|\left|x^2-1\right|=c.$$

210. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y'=\dfrac{-x-xy}{y+xy}$.

Rešenje: Uvedimo smenu $y'=\dfrac{dy}{dx}$ i razdvojimo obe strane jednačine na faktore:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x(1+y)}{y(1+x)}.$$

Razdvojimo promenljive na dve različite strane jednačine:

$$\frac{ydy}{1+y}=-\frac{xdx}{1+x}$$

i integralimo dobijenu jednačinu:

$$\int\frac{ydy}{1+y}=-\int\frac{xdx}{1+x}.$$

Odavde je:

$$\int\frac{y+1-1}{1+y}dy=-\int\frac{x+1-1}{1+x}dx$$

$$\int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy=-\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$\int dy-\int\frac{dy}{1+y}=-\int dx+\int\frac{dx}{1+x},$$

iz koje dobijamo opšte rešenje diferencijalne jednačine:

$$y-\ln|1+y|=-x+\ln|1+x|+c,$$

ili u drugačijem obliku:

$$y+x-c=\ln|1+x|+\ln|1+y|.$$

211. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y'^2+y^2-1=0$.

Rešenje: Iz ove diferencijalne jednačine prvo treba izraziti y':

$$y'^2 = 1 - y^2$$

$$y' = \pm\sqrt{1-y^2}\,.$$

Uvedimo sada smenu $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-y^2}\,,$$

razdvojimo promenljive:

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm\,dx\,,$$

i integralimo ovu jednačinu:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm\int dx\,.$$

Rešimo oba tablična integrala i dobijamo opšte rešenje:

$$\arcsin y = \pm x + c\,,$$

iz koje možemo eksplicitno izraziti y, i tada dobijamo opšte rešenje početne diferencijalne jednačine:

$$y_{1/2} = \sin(c \pm x)\,.$$

212. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine**

$$\mathrm{tg}x\sin^2 y\,dx + \cos^2 x\,\mathrm{ctg}y\,dy = 0\,.$$

Rešenje: Rešavamo jednačinu po sledećim koracima:

$$\mathrm{tg}x\sin^2 y\,dx = -\cos^2 x\,\mathrm{ctg}y\,dy$$

$$\frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x}dx = -\frac{\mathrm{ctg}y}{\sin^2 y}dy$$

$$\int\frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x}dx = -\int\frac{\mathrm{ctg}y}{\sin^2 y}dy$$

$$\mathrm{tg}x = t \qquad \mathrm{ctg}y = z$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = dt \qquad \frac{-dy}{\sin^2 y} = dz$$

$$\int t\,dt = \int z\,dz$$

$$\frac{t^2}{2} + c = \frac{z^2}{2}$$

$$\mathrm{tg}^2 x + 2c = \mathrm{ctg}^2 y.$$

Znači da je opšte rešenje dobijene jednačine:

$$\mathrm{ctg}^2 y = \mathrm{tg}^2 x + c_1.$$

213. Primer: **Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y - xy' = a(1 + x^2 y')$ koje zadovoljava pošetni uslov $y(1) = 1$.**

Rešenje: Odredimo prvo opšte rešenje date diferencijalne jednačine:

$$y - xy' = a + ax^2 y'$$

$$y - a = y'(ax^2 + x)$$

$$y - a = \frac{dy}{dx}(ax^2 + x)$$

$$\frac{dx}{ax^2 + x} = \frac{dy}{y - a}$$

$$\int \frac{dy}{y-a} = \int \frac{dx}{x(ax+1)}.$$

Integral na levoj strani može da se reši običnom smenom i jednak je sa $\ln|y - a|$, dok je integral na desnoj strani integral racionalno razlomljene funkcije, i može da se reši razlaganjem na zbir elementarnih parcijalnih sabiraka:

$$\frac{1}{x(ax+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{ax+1}$$

$$1 = A(ax+1) + Bx$$

$$1 = Aax + A + Bx$$

$$1 = (Aa + B)x + A$$

$$Aa + B = 0$$

$$A = 1 \quad \Rightarrow \quad B = -a$$

$$\frac{1}{x(ax+1)} = \frac{1}{x} - \frac{a}{ax+1}.$$

Nastavimo sada itegraljenje:

$$\ln|y-a| = \int\frac{dx}{x} - a\int\frac{dx}{ax+1}$$

$$ax+1=t$$

$$adx=dt$$

$$\ln|y-a| = \ln|x| - \int\frac{dt}{t}$$

$$\ln|y-a| = \ln|x| - \ln|t| + \ln c$$

$$\ln|y-a| = \ln\left|\frac{cx}{t}\right|.$$

Odavde je opšte rešenje dobijene jednačine:

$$y-a=\frac{cx}{ax+1}$$

$$y=\frac{cx}{ax+1}+a.$$

Traženo partikularno rešenje dobijamo tako, da u ovo opšte rešenje uvrstimo početni uslov, izračunamo nepoznatu konstantu c, i dobijenu vrednost konstante uvrstimo u opšte rešenje:

$$1=\frac{c}{a+1}+a$$

$$c=(1-a)(a+1)$$

$$c=1-a^2.$$

Znači da je partikularno rešenje date diferencijalne jednačine:

$$y=\frac{(1-a^2)x}{ax+1}+a.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

286. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y(x+1)dy - x^3(y+1)dx = 0$.

287. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $yy' = x^2y + 4y - x^2 - 4$.

288. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $\sqrt{25-x^2}\cdot\cos^2 y\cdot y' = 1$.

289. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine**

$$\left(2e^{2x}-3e^x+1\right)(2y+4)y' = \left(2y^2+8y\right)\left(3-4e^x\right).$$

290. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y' = xy - y + 2x - 2$.

291. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $x^2(1-y)y' + y^2 + xy^2 = 0$.

292. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $\sin \ln y = \frac{xy}{(x^2+1)y'}$.

293. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $xy' + y = 2$.

294. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $e^y(y'+1) = 1$.

295. Zadatak: **Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine** $2y' \arcsin y = \sqrt{1-y^2}$ **koje zadovoljava početni uslov** $x = \frac{\pi}{2},\ y = 0$.

296. Zadatak: **Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine** $2y = xy'(x^2+1)$ **koje zadovoljava početni uslov** $\lim_{x\to\infty} y(x) = 2$.

297. Zadatak: **Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine** $(1+e^x)\cdot y \cdot y' = e^x$ **koje zadovoljava početni uslov** $x = 0,\ y = 1$.

298. Zadatak: **Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine** $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$ **koje zadovoljava početni uslov** $x = 0,\ y = 1$.

299. Zadatak: **Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine** $y' \sin x = y \ln y$ **koje zadovoljava početni uslov** $x = \frac{\pi}{2},\ y = 1$.

300. Zadatak: **Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine** $e^y(y'+1) = 1$ **koje zadovoljava početni uslov** $y(0) = \ln 2$.

7.1.2. Homogene diferencijalne jednačine

Opšti oblik: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Rešavanje: *Smenom* $\frac{y}{x} = t \quad \Rightarrow \quad y = xt \quad \Rightarrow \quad y' = t + xt'$

svodi se na diferencijalnu jednačinu sa razdvojenim promenljivima.

214. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ **.**

Rešenje: U ovoj jednačini ne možemo razdvojiti promenljive zbog izraza $\sqrt{x^2 + y^2}$. Ako podelimo jednačinu sa x, možemo videti da je ona homogenog tipa:

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2} \quad / : x$$

tada je

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}},$$

odnosno

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

iz kojeg oblika se vidi da je jednačina *homogenog* tipa. Uvedimo smenu koja je predložena u načinu rešavanja, i sredimo tako dobijenu jednačinu:

$$t + xt' = t + \sqrt{1 + t^2}$$

$$xt' = \sqrt{1 + t^2}$$

$$x\frac{dt}{dx} = \sqrt{1 + t^2} .$$

U ovoj jednačini možemo razdvojiti promenljive na dve strane jednačine:

$$\frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \int \frac{dx}{x},$$

na obe strane jednačine imamo tablične integrale koje lako rešavamo:

$$\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|=\ln|x|+\ln c$$

$$\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|=\ln|cx|$$

$$t+\sqrt{1+t^2}=cx.$$

Vratimo se na početne promenljive:

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=cx$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=cx$$

$$\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=cx$$

koju jednačinu množeći sa x, dobijamo opšte rešenje date diferencijalne jednačine u obliku :

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=cx^2.$$

215. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $\left(x^2+y^2\right)y'=2xy$.**

Rešenje: Jednačina je homogena, $\left(x^2+y^2\right)$ se ne može razdvojiti po promenljivima:

$$\left(x^2+y^2\right)y'=2xy \quad / : x^2$$

$$\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)y'=2\frac{y}{x}$$

$$\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)y'=2\frac{y}{x}$$

$$\left(1+t^2\right)\left(t+xt'\right)=2t$$

$$xt'=\frac{2t}{1+t^2}-t$$

$$x\frac{dt}{dx}=\frac{2t-t-t^3}{1+t^2}$$

$$x\frac{dt}{dx}=\frac{t-t^3}{1+t^2}$$

$$x\frac{dt}{dx}=\frac{t\left(1-t^2\right)}{1+t^2}$$

$$\frac{1+t^2}{t(1-t)(1+t)}dt = \frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{1+t^2}{t(1-t)(1+t)}dt = \int\frac{dx}{x}.$$

Integral na levoj strani rešavamo tako da podintegralnu funkciju razdvajamo na zbir parcijalnih sabiraka:

$$\frac{1+t^2}{t(1-t)(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t}$$

$$1+t^2 = A(1-t^2) + Bt(1+t) + Ct(1-t)$$

$$1+t^2 = A - At^2 + Bt + Bt^2 + Ct - Ct^2$$

$$1+t^2 = (-A+B-C)t^2 + (B+C)t + A$$

odavde je:

$$-A+B-C=1$$
$$B+C=0 \quad \Rightarrow \quad C=-B$$
$$A=1$$

$$-1+B+B=1$$
$$2B=2$$
$$B=1 \quad \Rightarrow \quad C=-1$$

Parcijalno razlaganje je znači: $\dfrac{1+t^2}{t(1-t)(1+t)} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{1}{1+t}$,

Znači da integraljenje možemo da nastavimo na sledeći način:

$$\int\frac{dt}{t} + \int\frac{dt}{1-t} - \int\frac{dt}{1+t} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|t| - \ln|1-t| - \ln|1+t| = \ln|x| + \ln c$$

$$\ln\left|\frac{t}{1-t^2}\right| = \ln|cx|$$

$$\frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}} = cx$$

$$\frac{yx^2}{x(x^2-y^2)} = cx.$$

Odavde opšte rešenje je: $y = c(x^2-y^2)$.

216. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$.

Rešenje: Lako se pokazuje da je jednačina homogenog tipa:

$$xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x+y}{x}\ln\frac{x+y}{x}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right),$$

uvodimo znači smenu:

$$\frac{y}{x} = t \quad \Rightarrow \quad y' = t + xt'$$

$$t + xt' = t + (1+t)\ln(1+t)$$

$$x\frac{dt}{dx} = (1+t)\ln(1+t)$$

$$\frac{dt}{(1+t)\ln(1+t)} = \frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dt}{(1+t)\ln(1+t)} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\ln(1+t) = z$$

$$\frac{dt}{1+t} = dz$$

$$\int\frac{dz}{z} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln c$$

$$z = cx$$

$$\ln(1+t) = cx$$

$$1 + \frac{y}{x} = e^{cx},$$

a odavde sledi da je opšte rešenje jednačine:

$$y = x\left(e^{cx} - 1\right).$$

217. Primer: **Pokazati da se diferencijalna jednačina** $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$ **smenom** $y = z^m$ **može da se svede na homogenu diferencijalnu jednačinu, i odrediti njeno opšte rešenje.**

Rešenje: Za $y = z^m$ sledi da je $y' = m z^{m-1} z'$, pa posle uvođenja date smene jednačina dobija sledeći oblik:

$$2x^4 z^m m z^{m-1} z' + z^{4m} = 4x^6$$

$$2mx^4 z^{2m-1} z' = 4x^6 - z^{4m}$$

$$z' = \frac{4x^6 - z^{4m}}{2mx^4 z^{2m-1}}$$

$$z' = \frac{2}{m}\frac{x^2}{z^{2m-1}} - \frac{1}{2m}\frac{z^{2m+1}}{x^4}$$

a da bi ona bila homogenog tipa, treba da je:

$$2m - 1 = 2$$
$$2m + 1 = 4$$

$$2m = 3 \;\Rightarrow\; m = \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; y = z^{\frac{3}{2}} \;\Rightarrow\; y^2 = z^3.$$

Za $m = \frac{3}{2}$ jednačina dobija sledeći oblik:

$$z' = \frac{4}{3}\left(\frac{x}{z}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{x}\right)^4,$$

iz kojeg se vidi, da je jednačina stvarno homogenog tipa. Smena je znači:

$$\frac{z}{x} = t \;\Rightarrow\; z = t + xt'$$

$$t + xt' = \frac{4}{3t^2} - \frac{t^4}{3}$$

$$xt' = \frac{4 - t^6 - 3t^3}{3t^2}$$

$$x\frac{dt}{dx} = -\frac{t^6 + 3t^3 - 4}{3t^2}$$

$$\frac{3t^2}{t^6 + 3t^3 - 4}dt = -\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{3t^2}{t^6 + 3t^3 - 4}dt = -\int\frac{dx}{x}$$

$$t^3 = s$$

$$3t^2 dt = ds$$

$$\int\frac{dz}{s^2 + 3s - 4} = -\ln|x| + \ln c$$

$$\int \frac{dz}{(s-1)(s+4)} = \ln\left|\frac{c}{x}\right|.$$

Razlaganjem na zbir parcijalnih sabiraka može da se pokaže da je

$$\frac{1}{(s-1)(s+4)} = \frac{1}{5(s-1)} - \frac{1}{5(s+4)},$$

znači da je:

$$\frac{1}{5}\int \frac{dz}{s-1} - \frac{1}{5}\int \frac{dz}{s+4} = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

$$\frac{1}{5}\ln\left|\frac{s-1}{s+4}\right| = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

$$\frac{t^3-1}{t^3+1} = \left(\frac{c}{x}\right)^5$$

$$\frac{\frac{z^3}{x^3}-1}{\frac{z^3}{x^3}+4} = \frac{c_1}{x^5}$$

$$\frac{z^3-x^3}{z^3+4x^3}\cdot x^5 = c_1.$$

Vratimo se na smenu $y^2 = z^3$, tada je :

$$x^5 \cdot \frac{y^2-x^3}{y^2+4x^3} = c_1$$

traženo opšte rešenje početne diferencijalne jednačine.

ZADACI ZA VEŽBU:

301. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine** $(x-y)ydx - x^2dy = 0$.

302. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine** $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$.

303. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine** $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

304. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine** $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

305. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine** $y' = \frac{y^2 - x^2}{xy}$.

306. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine**

$xy' = y(1 - \ln y + \ln x)$.

307. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine**

$xy' \cos\frac{y}{x} + x - y\cos\frac{y}{x} = 0$.

308. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine**

$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

309. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine**

$8y + 10x + (5y + 7x)y' = 0$.

310. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine** $xy^2 y' = x^3 + y^3$.

311. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine** $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$.

312. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine** $y' = \frac{x}{2\sqrt{x^2 - y^2}}$.

313. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine**

$(x^2 + 2xy)y' = y^2 - 2xy$.

7.1.3. Linearne diferencijalne jednačine

Opšti oblik: $y' + p(x)y = q(x)$

Rešenje: *1. Formulom:* $y = e^{-\int p(x)dx}\left(c + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right).$

2. Smenom: $y = uv$.

3. Metodom varijacije konstante.

218. Primer: **Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine $(1-x^2)y' + xy - 1 = 0$ koje prolazi kroz tačku $(0,1)$.**

Rešenje: Nađimo prvo opšte rešenje jednačine pomoću prve metode, znači pomoću formule. Pokažimo prvo da je jednačina stvarno linearnog tipa:

$$(1-x^2)y' + xy - 1 = 0 \quad /:(1-x^2)$$

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = \frac{1}{1-x^2}.$$

Odavde je $p(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ i $q(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$. Izračunajmo integrale iz formule:

$$\int p(x)dx = \int \frac{xdx}{1-x^2} = \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2xdx = dt \\ xdx = -\dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| = -\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right| = \ln\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int\frac{1}{1-x^2}e^{\ln\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}dx = \int\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int\frac{\cos t dt}{(1-\sin^2 t)\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int\frac{\cos t dt}{\cos^2 t\cdot\cos t} = \int\frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \mathrm{tg}t = \mathrm{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

opšte rešenje je prema tome :

$$y = e^{-\ln\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\left(c + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$y=\sqrt{1-x^2}\left(c+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$y=c\sqrt{1-x^2}+x.$$

Traženo partikularno rešenje nalazimo tako, da u opšte rešenje uvrštavamo datu tačku $(0,1)$ i izračunavamo vrednost nepoznate konstante c:

$$1=c\sqrt{1-0}$$

$$c=1.$$

Dobijenu vrednost $c=1$ vraćamo u opšte rešenje jednačine, i tako dobijamo partikularno rešenje početne diferencijalne jednačine:

$$y=x+\sqrt{1-x^2}.$$

219. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y'+y\cos x=\sin x\cdot\cos x$.

Rešenje: Data diferencijalna jednačina je linearnog tipa, gde je $p(x)=\cos x$ i $q(x)=\sin x\cos x$. Nađimo sada opšte rešenje *2.* metodom, znači smenom $y=uv \quad\Rightarrow\quad y'=u'v+uv'$. Posle uvrštavanja ove smene jednačina prima oblik:

$$u'v+uv'+uv\cos x=\sin x\cos x$$

a odavde je

$$u'v+u(v'+v\cos x)=\sin x\cos x.$$

Izaberimo sada uslov takav, da izraz u zagradi bude jednak sa 0 (to je jedan uslov koji se postavlja na faktor v):

$$v'+v\cos x=0$$

$$\frac{dv}{dx}=-v\cos x$$

$$\frac{dv}{v}=-\cos x dx$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\cos x dx$$

$$\ln|v|=-\sin x$$

$$v=e^{-\sin x},$$

U slučaju integracije prvog faktora ne dodajemo konstantu c, a dobijeni izraz v vraćamo u jednačinu:

$$u'e^{-\sin x} = \sin x \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = e^{\sin x} \sin x \cos x$$

$$du = \sin x \cos x e^{\sin x} dx$$

$$\int du = \int \sin x e^{\sin x} \cos x dx$$

$$\sin x = t$$

$$\cos x dx = dt$$

$$u = \int te^t dt$$

$$u = t \qquad dv = e^t dt$$

$$du = dt \qquad v = e^t$$

$$u = te^t - \int e^t dt$$

$$u = \sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + c.$$

Opšte rešenje dobijamo iz formule $y = uv$. U ovom slučaju to rešenje je:

$$y = e^{-\sin x}\left(\sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + c\right)$$

$$y = \sin x - 1 + \frac{c}{e^{\sin x}}.$$

220. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy' + y - xe^x = 0$ metodom varijacije konstante.**

Rešenje: Pokažimo prvo, da je ova jednačina linearnog tipa:

$$xy' + y - xe^x = 0 \ / : x$$

$$y' + \frac{1}{x} y = e^x.$$

Ova linearna diferenijalna jednačina je nehomogena, jer na desnoj strani stoji izraz $q(x) = e^x \neq 0$. Odgovarajuća homogena jednačina je:

$$y' + \frac{1}{x} y = 0,$$

a odavde je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln c$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{c}{x}\right|,$$

odakle dobijamo opšte rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine:

$$y = \frac{c}{x}.$$

Da bi smo uzeli u obzir i nehomogeni deo početne jednačine, u dobijenom opštem rešenju variramo konstantu c, značimo uzimamo da je $c = c(x)$, i tada opšte rešenje prima oblik:

$$y = \frac{c(x)}{x}.$$

Vraćajući ovo y o početnu jednačinu dobijamo diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{c'(x)\cdot x - c(x)}{x^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{c(x)}{x} = e^x$$

odakle je

$$\frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2} + \frac{c(x)}{x^2} = e^x$$

$$\frac{c'(x)}{x} = e^x$$

$$c'(x) = xe^x \quad /\cdot dx$$

$$\int c'(x)dx = \int xe^x dx$$

$$u = x \qquad dv = e^x dx$$
$$du = dx \qquad v = e^x$$

$$c(x) = xe^x - \int e^x dx$$

$$c(x) = xe^x - e^x + c.$$

Dobijeno $c(x)$ vraćamo u rešenje $y = \dfrac{c(x)}{x}$, i tako dobijamo opšte rešenje početne nehomogene linearne diferencijalne jednačine:

$$y = \frac{xe^x - e^x + c}{x},$$

odnosno

$$y = e^x - \frac{e^x}{x} + \frac{c}{x}.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

314. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine**

$$y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3 \quad , \quad x\neq -1.$$

315. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y'-\frac{1}{x}y=x^2$.

316. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y'+xy-x=0$.

317. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y'+2xy=-xe^{-x^2}$.

318. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $xy'-\frac{y}{x+1}=x$.

319. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y'\sin x+\cos x=1+y$.

320. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y'+y=\sin 2x$.

321.Zadatak: **Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine** $y'+2y=5$ **koje prolazi kroz tačku** $\left(0,\frac{5}{2}\right)$.

322.Zadatak: **Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine** $y'\cos x+y\sin x=1$ **koje zadovoljava početni uslov** $y(0)=1$.

323. Zadatak: **Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine** $y'+\frac{y}{x}+e^x=0$ **koje zadovoljava početni uslov** $y(1)=0$.

7.1.4. Bernulijeve diferencijalne jednačine

Opšti oblik: $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$

Rešenje: *1. Smenom:* $y = uv$.

2. Smenom: $y^{1-\alpha} = z$ *svodi se na linearnu diferencijalnu jednačinu.*

221. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y' - \frac{1}{2x}y = \frac{x^2}{2y}$.

Rešenje: Lako se pokazuje da je data diferencijalna jednačina *Bernulijeva*:

$$y' - \frac{1}{2x}y = \frac{x^2}{2}y^{-1}$$

gde je $\alpha = -1$. Rešimo datu jednačinu smenom $y = uv$. Tada je $y' = u'v + uv'$, a jednačina uzima sledeći oblik:

$$u'v + uv' - \frac{1}{2x}uv = \frac{x^2}{2uv}$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{1}{2x}v\right) = \frac{x^2}{2uv}.$$

Slično kao kod linearnih diferencijalnih jednačina birajmo faktor v tako, da bude:

$$v' - \frac{1}{2x}v = 0.$$

Odavde je:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{2x}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{2x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = \frac{1}{2}\ln|x|$$

$$v = \sqrt{x}.$$

Dobijeno v vratimo u početnu diferencijalnu jednačinu, i tada je::

$$u'\sqrt{x} = \frac{x^2}{2u\sqrt{x}}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{x}{2u}$$

$$\int u du=\frac{1}{2}\int x dx$$

$$\frac{u^2}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{c}{2} \qquad /\cdot 2$$

$$u^2=\frac{x^2}{2}+c$$

$$u=\pm\sqrt{\frac{x^2}{2}+c}\,.$$

Opšti oblik date jednačine je znači:

$$y=uv$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{x^2}{2}+c}\cdot\sqrt{x}$$

odnosno

$$y=\pm\sqrt{x\left(\frac{x^2}{2}+c\right)}\,.$$

222. Primer:**Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine** $2xyy'=y^2-2x^3$ **koje zadovoljava početni uslov** $y(1)=2$**.**

Rešenje: Pokažimo najpre da je data diferencijalna jednačina *Bernoulijevog* tipa:

$$2xyy'=y^2-2x^3 \quad /:2xy$$

$$y'-\frac{1}{2x}y=-\frac{x^2}{y}$$

$$y'-\frac{1}{2x}y=-x^2y^{-1}.$$

Odavde je $\alpha=-1$. Primenimo smenu $y^{1-\alpha}=z$, tada je:

$$y^2=z \quad\Rightarrow\quad y=\sqrt{z} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{z'}{2\sqrt{z}}$$

$$\frac{z'}{2\sqrt{z}}-\frac{1}{2x}\sqrt{z}=-\frac{x^2}{\sqrt{z}} \qquad /\cdot 2\sqrt{z}$$

$$z'-\frac{1}{x}z=-2x^2.$$

Dobili smo diferencijalnu jednačinu sa promenljivom z, i to jednačinu linearnog tipa.Rešimo je pomoću formule. Tada računamo dva integrala:

$$\int p(x)dx = \int \frac{dx}{x} = -\ln|x|,$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = -2\int x^2 e^{-\ln|x|}dx = -2\int x^2 \frac{1}{x}dx = -2\int xdx = -2\frac{x^2}{2} = -x^2 .$$

i dobijamo opšte rešenje ove linearne jednačine u obliku:

$$z = e^{\ln|x|}\left(c - x^2\right)$$

$$z = x\left(c - x^2\right).$$

Opšte rešenje početne Bernulijeve jednačine je:

$$y^2 = x\left(c - x^2\right),$$

a odavde sledi da je

$$y = \pm\sqrt{x\left(c - x^2\right)}.$$

Vrednost nepoznate c računamo iz zadatog početnog uslova:

$$2 = +\sqrt{1(c-1)}$$

$$4 = c - 1$$

$$c = 5 \quad ,$$

znači da je partikularno rešenje koje zadovoljava početni uslov $y(1) = 2$ funkcija:

$$y = \sqrt{x\left(5 - x^2\right)}.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

324. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $xy' + y = \frac{\ln x}{y^3}$.

325. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine**

$$5\left(1 + x^2\right)y' = 2xy + \frac{\left(1 + x^2\right)^2}{y^4}.$$

326. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y'-x^3y^3=xy$.

327. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine**

$$(x^2-1)dy-y(2x-3y)dx=0.$$

328. Zadatak: **Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine** $y'=4y-xy^2$ **koje zadovoljava početni uslov** $x=0, y=2$.

329.Zadatak: **Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine** $y^3(2y'+y)=x$ **koje zadovoljava početni uslov** $x=1, y=1$.

330.Zadatak: **Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine**

$3y'+y\,\mathrm{ctg}x=\dfrac{1+\mathrm{ctg}x}{y^2\cos x}$ **koje zadovoljava početni uslov** $x=\dfrac{\pi}{3}, y=0$.

331. Zadatak: **Zamenom promenljivih rešiti diferencijalnu jednačinu** $(y^2-6x)y'=-2y$.

332. Zadatak: **Zamenom promenljivih rešiti diferencijalnu jednačinu**

$$(x-2xy-y^2)y'+y^2=0 .$$

333. Zadatak: **Zamenom promenljivih rešiti diferencijalnu jednačinu**

$$(x^2+y^2+1)y'+xy=0.$$

Napomena: zamena promenljivih znači da x smatramo zavisnom, a y nezavisnom promenljivom.Tako je $y=y(x) \Rightarrow y'=\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow x'=\dfrac{dx}{dy} \Rightarrow x=x(y)$.

7.2. Diferencijalne jednačine drugog reda

Diferencijalna jednačina drugog reda je jednačina, koja sadrži nepoznatu funkciju (y), njen prvi izvod i drugi izvod $\left(y'=\dfrac{dy}{dx},\ y''=\dfrac{dy'}{dx}\right)$, *nezavisnu promenljivu (x) i konstante, i zato može da se napiše u opštem obliku*

$$F(x,y,y',y'')=0.$$

Ako iz ove implicitne jednačine izrazimo y'', *dobijamo eksplicitni oblik diferencijalne jednačine drugog reda:*

$$y''=f(x,y,y').$$

U opštem rešenju diferencijalne jednačine drugog reda figurišu dve konstane, prema tome za određivanje partikularnog rešenje potrebna su dva početna uslova.

Diferencijalna jednačina drugog reda može da bude nepotpuna, ako iz nje fali neka od promenljivih x, y ili y'. *Kod ovih jednačina odgovarajućim smenama možemo sniziti red jednačine i rešiti ga kao diferencijalnu jednačinu prvog reda. Potpune diferencijalne jednačine mogu imati raznorazne oblike, i u zavisnosti od toga kojeg su tipa odgovarajućim metodama odnosno smenama mogu da se reše. Mi ćemo se u ovom odeljku osvrtati samo na neke najjednostavnije tipove diferencijalnih jednačina drugog reda koji se mogu analitički rešiti pomoću integrala.*

7.2.1. Linearne homogene diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Opšti oblik: $y''+ay'+by=0$

Rešavanje: *Partikularna rešenja tražimo u obliku* $y_p=e^{rx}$, *gde su* r_1 *i* r_2 *koreni karakteristične jednačine* $r^2+ar+b=0$. *U zavisnosti od prirode rešenja ove kvadratne jednačine, opšte rešenje date diferencijalne jednačine drugog reda nalazimo u jednom od sledeća tri oblika:*

1. $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$ *ako je* $r_1\neq r_2\in R$

2. $y=c_1e^{r_1x}+c_2xe^{r_2x}$ *ako je* $r_1=r_2\in R$

3. $y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$ *ako je* $r_{1/2}=\alpha\pm i\beta\in C$

223. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''-5y'+6y=0$.

Rešenje: Ova jednačina je homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima, pa postupamo po prethodnom predlogu za rešavanje. Prvo treba da se zapiše odgovarajuća karakteristična jednačina, da se nađu njena rešenja, i pomoću njih da se zapiše opšte rešenje jednačine:

$$y''-5y'+6y=0$$

karakteristična jednačina je

$$r^2-5r+6=0,$$

a njena rešenje su:

$$r_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}$$

$$r_1=3 \Rightarrow y_{p_1}=e^{3x}$$

$$r_2=2 \Rightarrow y_{p_2}=e^{2x}$$

Opšte rešenje ove jednačine glasi:

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{2x}.$$

224. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''+6y'+9y=0$.

Rešenje: Karakteristična jednačina je:

$$r^2+6r+9=(r+3)^2=0,$$

a njena rešenje su:

$$r_1=r_2=-3$$

$$r_1=r_2=-3 \Rightarrow y_{p_1}=y_{p_2}=e^{-3x}$$

Opšte rešenje ove diferencijalne jednačine glasi:

$$y=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}.$$

225. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''-4y'+13y=0$.

Rešenje: Karakteristična jednačina je:

$$r^2-4r+13=0,$$

a njena rešenje su:

$$r_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}=2\pm3i=\alpha\pm i\beta \Rightarrow \alpha=2,\beta=3$$

Opšte rešenje ove jednačine glasi:

$$y=e^{2x}\left(c_1\cos3x+c_2\sin3x\right).$$

226. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''' - 3y'' + 2y' = 0$.

Rešenje: Karakteristična jednačina je trećeg stepena, pa ima tri rešenja:

$$r^3 - 3r^2 + 2r = 0$$

$$r(r^2 - 3r + 2) = 0$$

$$r = 0 \lor r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$r_1 = 0 \Rightarrow y_{p_1} = e^{0x} = 1$$

$$r_2 = 1 \Rightarrow y_{p_2} = e^{1x} = e^x$$

$$r_3 = 2 \Rightarrow y_{p_3} = e^{2x}$$

pa opšte rešenje ove jednačine glasi:

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^x.$$

227. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Rešenje: Karakteristična jednačina je trećeg stepena, pa ima tri rešenja:

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = (r-1)^3 = 0$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = 1 \Rightarrow y_{p_1} = y_{p_2} = y_{p_3} = e^x$$

pa opšte rešenje ove jednačine glasi:

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x = e^x\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right).$$

228. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

Rešenje: Karakteristična jednačina je:

$$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)^2 = 0,$$

a njena rešenje su:

$$r_1^2 = r_2^2 = -1$$

$$r_{1/2} = i \Rightarrow y_{p_{1/2}} = e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$r_{3/4} = -i \Rightarrow y_{p_{3/4}} = e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

Opšte rešenje ove diferencijalne jednačine glasi:

$$y = c_1(\cos x + i\sin x) + c_2 x(\cos x + i\sin x) + c_3(\cos x - i\sin x) + c_4 x(\cos x - i\sin x)$$

ili

$$y = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x.$$

ZADACI ZA VEŽBU:

334. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''-3y'+2y=0$.

335. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''-2y'+y=0$.

336. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''-2y'+2y=0$.

337. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''+4y=0$.

338. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y'''+y=0$.

339. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''+6y'+34y=0$.

340. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''-8y'+16y=0$.

341. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''+y'+y=0$.

442. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $9y''+24y'+16y=0$.

343. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y^{IV}+2y'''+y''=0$.

7.2.2. *Nehomogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima*

Opšti oblik: $y'' + ay' + by = f(x)$

Rešavanje: *Opšte rešenje tražimo u obliku* $y = y_h + y_p$, *gde je* y_h *opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine* $y'' + ay' + by = 0$, *a* y_p *je partikularno rešenje nehomogenog dela. Ako je* $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ *onda je i* $y_p = \sum_{i=1}^{n} y_{p_i}$. *Ova partikularna rešenja u zavisnosti od oblika nehomogenog dela* $f(x)$ *tražimo u jednom od sledeća dva oblika:*

1. $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \quad \Rightarrow \quad y_p = x^p e^{\alpha x} R_N(x)$

2. $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right] \quad \Rightarrow \quad y_p = x^p e^{\alpha x}\left[R_N(x)\cos\beta x + S_N(x)\sin\beta x\right]$

gde je:

$N = \max(n,m)$, $\quad R_N(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i x^{N-i}$, $\quad S_N(x) = \sum_{i=1}^{n} B_i x^{N-i}$,

i:

$p = 0$ *ako je* $r_{1/2} \neq \alpha \pm i\beta$, $\alpha + i\beta$ *nije karakteristični koren*

$p = 1$ *ako je* $r_{1/2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha + i\beta$ *je jednostruki karakteristični koren*

$p = 2$ *ako je* $r_1 = r_2 = \alpha \pm i\beta$, $\alpha + i\beta$ *je dvostruki karakteristični koren*.

229. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y'' - 7y' + 12y = x$.

Rešenje: Data jednačina je nehomogena, ali sa konstantnim koeficijentima. Rešenje tražimo u obliku $y = y_h + y_p$. Odredimo prvo opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine.

y_h:
$$y'' - 7y' + 12y = 0$$
$$r^2 - 7r + 12 = 0,$$
$$r_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2}$$

$$r_1 = 4 \Rightarrow y_{p_1} = e^{4x}$$
$$r_2 = 3 \Rightarrow y_{p_2} = e^{3x}$$
$$\underline{y_h = c_1 e^{4x} + c_2 e^{3x}}\ .$$

Nehomogeni deo funkcije sastoji se od jednog člana:

$$f(x) = x = e^{\alpha x} P_n(x) = e^{0x} P_1(x)$$

a odavde se čitaju odgovarajuće veličine:

$$n = 1,\ m = 0,\ \alpha = 0,\ \beta = 0,$$

iz kojih se određuju: $N = \max(0,1) = 1$,

$\alpha \pm i\beta = 0 \pm i0 = 0$ nije karakteristični koren $\Rightarrow\ p = 0$.

Partikularno rešenje jednačine nalazimo na osnovu predložene formule 1:

$$y_p = x^p e^{\alpha x} R_N(x)$$
$$y_p = x^0 e^{0x} R_1(x)$$
$$y_p = 1 \cdot 1 \cdot (ax + b)$$
$$y_p = ax + b\,.$$

U ovom partikularnom rešenju konstante a i b treba izračunati, a to možemo uraditi polazeći od činjenice da svako partikularno rešenje zadovoljava svoju početnu diferencijalnu jednačinu sa odgovarajućim nehomogenim sabirkom.

$$y_p = ax + b$$
$$y_p' = a$$
$$y_p'' = 0\,.$$

Tada je

$$0 - 7a + 12a(x + b) = x$$
$$12ax + 12b - 7a = x\,.$$

Izjednačavamo koeficijente ispred odgovarajućih stepena nepoznate x i dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{array}{l} 12a = 1 \\ \underline{12b - 7a = 0} \end{array} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{12} \ \text{ i } \ b = \frac{7}{144}.$$

Partikularno rešenje nehomogenog dela je znači $y_p = \frac{x}{12} + \frac{7}{144}$, a odatle sledi da je opšte rešenje date nehomogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{3x} + \frac{x}{12} + \frac{7}{144}\,.$$

230. Primer: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y'' - y = e^x\left(x^2 - 1\right)$.

Rešenje: Data jednačina je nehomogena, ali sa konstantnim koeficijentima. Rešenje tražimo u obliku $y = y_h + y_p$. Odredimo prvo opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine.

y_h:
$$y'' - y = 0$$
$$r^2 - 1 = 0,$$
$$r_1 = -1 \Rightarrow y_{p_1} = e^{-x}$$
$$r_2 = 1 \Rightarrow y_{p_2} = e^{x}$$
$$\underline{y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}}\ .$$

Nehomogeni deo funkcije je:
$$f(x) = e^x(x^2 - 1) = e^{\alpha x}P_n(x) = e^{1x}P_2(x)$$

a odavde se čitaju odgovarajuće veličine:
$$n = 2,\ m = 0,\ \alpha = 1,\ \beta = 0.$$

Tada je: $N = \max(0,2) = 2$,

$\alpha \pm i\beta = 1 \pm i0 = 1$ je jednostruki karakteristični koren $\Rightarrow p = 1$.

Partikularno rešenje jednačine nalazimo na osnovu predložene formule 1:
$$y_p = x^p e^{\alpha x} R_N(x)$$
$$y_p = x^1 e^{1x} R_2(x)$$
$$y_p = xe^x\left(ax^2 + bx + c\right)$$
$$y_p = e^x\left(ax^3 + bx^2 + cx\right).$$

U ovom partikularnom rešenju konstante a i b treba izračunati, a to možemo uraditi polazeći od činjenice da svako partikularno rešenje zadovoljava svoju početnu diferencijalnu jednačinu sa odgovarajućim nehomogenim sabirkom.

$$y_p = e^x\left(ax^3 + bx^2 + cx\right)$$
$$y_p' = e^x\left(ax^3 + 3ax^2 + bx^2 + 2bx + cx + c\right)$$
$$y_p'' = e^x\left(ax^3 + 6ax^2 + bx^2 + 6ax + 4bx + cx + 2b + 2c\right).$$

Uvrštavajući ove izvode u početnu diferencijalnu jednačinu dobijamo jednačinu:
$$e^x\left(ax^3 + 6ax^2 + bx^2 + 6ax + 4bx + cx + 2b + 2c\right) - e^x\left(ax^3 + bx^2 + cx\right) = e^x\left(x^2 - 1\right)$$
$$6ax^2 + 6ax + 4bx + 2b + 2c = x^2 - 1.$$

Izjednačavamo koeficijente ispred odgovarajućih stepena nepoznate x i dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{array}{l} 6a=1 \\ 6a+4b=0 \\ \underline{2b+2c=-1} \end{array} \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{6},\ b=-\frac{1}{4},\ c=-\frac{1}{4}$$

odnosno dobijamo partikularno rešenje:

$$y_p=xe^x\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\right).$$

I na kraju opšte rešenje početne diferencijalne jednačine dobijamo kao zbir homogenog i partikularnog rešenja $y=y_h+y_p$:

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^x+xe^x\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\right).$$

ZADACI ZA VEŽBU:

344. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''-9y=6\cos 3x$.

345. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''+y'-6y=x$.

346. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''-3y'-10y=3e^{4x}$.

347. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''-5y'+6y=2xe^x$.

348. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''+2y'+y=x\sin x$.

349. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''+y=x^2+\cos x$.

350. Zadatak: **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''-y=(2x+3)e^x$.

LITERATURA

1. M.P.Uščumlič, P.M.Miličić: Zbirka zadataka iz više matematike I. Naučna Knjiga, Beograd, 1980.

2. Demidovič: Zadaci i rešeni primeri iz matematičke analize za fakultete Tehnička Knjiga, Beograd, 1977.

3. Svetozar Kurepa: Matematička analiza I. Tehnička Knjiga, Zagreb, 1977.

4. Grupa autora: Matematika za više tehničke škole Savremena Administracija, Beograd, 1990.

5. Jožef Detki, Franja Ferenci: Matematika I Univerzitet u Novom Sadu, Subotica, 1983.

6. Szerényi Tibor: Analízis Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

7. B.P.Gyemidovics: Matematikai analízis, feladatgyűjtemény Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

8. Stefan Banach: Differenciál és integrálszámítás Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.

9. Novković,Rodić,Kovačević: Zbirka rešenih zadataka iz matematičke analize I Univerzitet u Novom Sadu Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 1998.

10. MonostoryI.,Szeredai E.: Matematika példatár,VIII. kötet, Differenciálegyenletek Budapesti Műszaki egyetem Műegyetemi Kiadó,1998.