

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени
М.В.ЛОМОНОСОВА»

Физический факультет

Кафедра физики земли

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА
«Математическое моделирование течения жидкости в неоднородной
пористой среде»

Выполнил студент
429 группы
Степанов Т.П.

подпись студента

Научный руководитель:
доцент, к.ф.-м.н. Исаева А.В.

подпись научного руководителя

Консультант:
к.ф.-м.н. вед.н.с. ИФЗ,
Институт физики земли РАН
Герке К.М.

подпись консультанта

Допущен к защите

Зав. Кафедрой _____
Подпись зав. кафедрой

Москва
2020

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. Литературный обзор	5
ГЛАВА 2. Решение задачи о течении в неоднородной пористой среде численными методами	10
ГЛАВА 3. Моделирование неоднородной среды с заданными статистическими параметрами	16
ГЛАВА 4. Методы перемасштабирования	19
ГЛАВА 5. Вычислительные эксперименты	22
Заключение	33
Список использованной литературы	34

ВВЕДЕНИЕ

Истощение ресурсной базы нефтедобычи приводит к необходимости вовлекать в разработку трудноизвлекаемые и нетрадиционные запасы углеводородного сырья. В частности, трудноизвлекаемые запасы содержат низкопроницаемые и трещиноватые породы-коллекторы. Как правило, фильтрационно-емкостные свойства (пористость и проницаемость) таких пород демонстрируют значительную пространственную неоднородность. Неоднородность фильтрационно-емкостных свойств влияет на характер течения пластовых флюидов (нефти, газа, воды) через породы.

Таким образом, при численном исследовании течений пластовых флюидов через неоднородные породы-коллекторы приходится сначала решать вспомогательную задачу моделирования пространственного распределения физических свойств таких пород. Для моделирования неоднородных пористых сред применяют алгоритмы геостатистики. Эти алгоритмы опираются на теорию случайных полей и позволяют генерировать ансамбли реализаций неоднородных сред с заданными статистическими параметрами.

В настоящей работе рассмотрены алгоритмы, позволяющие генерировать модели пространственно неоднородных сред, для которых фиксированы статистические моменты первого (математические ожидания) и второго (ковариации) порядков.

При численном моделировании течений в залежи оптимально использовать модели, включающие не более сотен тысяч активных ячеек сетки. Поскольку геологическая модель пласта может состоять из более чем десятка миллионов активных ячеек, необходимо понижать размерность расчетной задачи, т.е. переходить от детальной геологической сетки к «грубой» (укрупненной) сетке гидродинамической модели. При этом возникает задача перерасчета физических параметров модели залежи. Так, требуется вычислять эквивалентные значения абсолютной проницаемости ячеек грубой модели, используя информацию о значениях абсолютной проницаемости ячеек детальной модели. Методы, которые позволяют решать

такую задачу, называются методами перемасштабирования или апскейлинга (upscaling).

Существующие методы перемасштабирования вносят ошибки в результаты моделирования, поэтому для практики важно создавать новые методы апскейлинга, которые будут минимизировать ошибки.

Для тестирования различных методов перемасштабирования (метод среднего арифметического, среднего геометрического и среднего гармонического) в настоящей работе был создан программный комплекс на языке Python. Программный комплекс позволяет численно моделировать стационарное течение несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде. При этом расчет течений можно проводить как для детальных сеток, так и для укрупненных после перемасштабирования, что позволяет сравнивать разные методы между собой.

Таким образом, цели настоящей работы включали в себя следующее.

1. Создать программный инструмент, позволяющий тестировать различные методы перемасштабирования неоднородного поля проницаемости. В качестве такого инструмента разработать комплекс программ на языке Python, с помощью которого можно численно моделировать стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости в неоднородной пористой среде.
2. В вычислительных экспериментах провести сопоставление различных техник перемасштабирования: метод среднего арифметического, среднего геометрического и среднего гармонического.
3. Используя информацию о статистических параметрах неоднородного поля проницаемости, предложить модификацию известных техник перемасштабирования в целях повышения точности численного моделирования течений в пористой среде при использовании укрупненных сеток.

ГЛАВА 1. Литературный обзор

Математическая модель представляет собой приближенное описание поведения изучаемого объекта с помощью математических символов. В работе [6] процесс математического моделирования предложено разделить на четыре взаимосвязанных этапа пункта:

- 1) формулирование в математических терминах законов, описывающих поведение объекта;
- 2) решение прямой задачи, т.е. получение путем исследования модели выходных данных для дальнейшего сопоставления с результатами наблюдений за объектом моделирования;
- 3) адаптация модели по результатам наблюдения, решение обратных задач, т.е. определение характеристик модели, которые оставались неопределенными;
- 4) анализ модели, ее модернизация по мере накопления новой информации об изучаемом объекте, постепенный переход к новой более совершенной модели.

Первый этап моделирования требует глубоких знаний об изучаемом объекте. Для создания модели пластовой системы используются обширные сведения из геологии и геофизики, гидромеханики и теории упругости, физики пласта и химии, теории и практики разработки месторождений, математики, численных методов и программирования [1]— [3], [6].

Закон сохранения массы

Основные уравнения для однофазного потока жидкости в пористой среде задаются законом сохранения массы, законом Дарси и уравнением состояния.

Рассмотрим поток жидкости через элементарный объем. Пространственные и временные переменные будут представлены $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и t соответственно [2]. Обозначим через ϕ пористость пористой среды

(доля объема пористой среды, доступная для жидкости), через ρ – плотность жидкости на единицу объема, через $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – скорость течения в соответствии с законом Дарси, и q – поток жидкости, создаваемый внешними и внутренними источниками.

Прямоугольный куб расположен так, чтобы его грани были параллельны осям координат (см. рис. 1). Центр этого куба обозначается (x_1, x_2, x_3) , а его длина в направлении x_i -координаты равна $\Delta x_i, i = 1, 2, 3$. x_i -компонента потока массы (массовый расход на единицу площади в единицу времени) жидкости запишем как ρu_i .

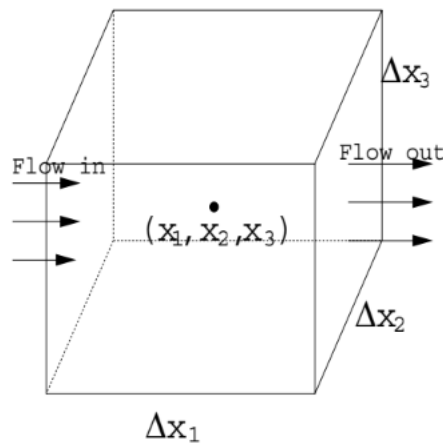


Рис.1 поток жидкости через рассматриваемый объем $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$

Как видно из рисунка 1, приток массы по поверхности при $x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}$ за единицу времени равен

$$(\rho u_1)_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3} \Delta x_2 \Delta x_3,$$

массовый отток при $x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}$ равен

$$(\rho u_1)_{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3} \Delta x_2 \Delta x_3.$$

Точно так же в направлениях координат x_2 и x_3 притоки и оттоки массы через поверхности имеют вид

$$(\rho u_2)_{x_1, x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_3} \Delta x_1 \Delta x_3,$$

$$(\rho u_2)_{x_1, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}, x_3} \Delta x_1 \Delta x_3,$$

и

$$(\rho u_3)_{x_1, x_2, x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}} \Delta x_1 \Delta x_2,$$

$$(\rho u_3)_{x_1, x_2, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} \Delta x_1 \Delta x_2.$$

Обозначим символом $\partial / \partial t$ дифференцирование по времени. Тогда накопление массы жидкости в объеме $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ в единицу времени можно записать как

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3.$$

Отток массы жидкости из объема $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$, то есть уменьшение массы (накопление) из-за снижения потока q (масса на единицу объема в единицу времени) можно записать как

$$-q \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3.$$

Разница между притоком и оттоком массы равна сумме накопления массы внутри этого куба:

$$\left[(\rho u_1)_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3} - (\rho u_1)_{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3} \right] \Delta x_2 \Delta x_3 + \left[(\rho u_2)_{x_1, x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_3} - (\rho u_2)_{x_1, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}, x_3} \right] \Delta x_1 \Delta x_3 + \left[(\rho u_3)_{x_1, x_2, x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}} - (\rho u_3)_{x_1, x_2, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} \right] \Delta x_1 \Delta x_2 = \left(\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} - q \right) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3.$$

Разделим это уравнение на $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$, чтобы увидеть, что

$$-\frac{(\rho u_1)_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3} - (\rho u_1)_{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3}}{\Delta x_1} - \frac{(\rho u_2)_{x_1, x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_3} - (\rho u_2)_{x_1, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}, x_3}}{\Delta x_2} - \frac{(\rho u_3)_{x_1, x_2, x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}} - (\rho u_3)_{x_1, x_2, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}}}{\Delta x_3} = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} - q.$$

Полагая, что $\Delta x_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2, 3$, получим уравнение, выражающее закон сохранения массы

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = -\nabla(\rho u) + q. \quad (1)$$

Соотношение (1) принято называть уравнением неразрывности.

Закон Дарси

Закон Дарси выражает линейную зависимость скорости фильтрации \mathbf{u} от градиента давления ∇p . Для текущей через пористую среду жидкости это соотношение имеет вид [6]:

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{\mu} \mathbf{K} (\nabla p - \rho g \nabla z). \quad (2)$$

В формуле (2) \mathbf{K} — тензор абсолютной проницаемости пористой среды, μ — динамическая вязкость жидкости, g — ускорение свободного падения, ρ — плотность жидкости, p — давление в жидкости. Предполагается, что ось Z направлена вертикально вниз.

Условие $\mathbf{u} = 0$ определяет гидростатическое распределение давления:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g.$$

При решении многих практических задач предполагается, что направления главных осей тензора проницаемости совпадают с направлениями осей координат. В этом случае \mathbf{K} — диагональный тензор:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}.$$

Если $k_x = k_y = k_z$, то среда называется изотропной, а в противном случае — анизотропной. Характер осадконакопления часто приводит к вертикальной анизотропии природных резервуаров: $k_z < k_{x,y}$. Трещиноватые пласты также характеризуются естественной анизотропией: проницаемость вдоль направления основных трещин выше, чем в ортогональном направлении.

Постановка краевой задачи о стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости через неоднородную пористую среду.

Сложный и нерегулярный характер структуры порового пространства делает нецелесообразным изучение движения жидкости и газов в нем обычными методами гидродинамики. Основные уравнения для однофазного потока жидкости в пористой среде задаются законом сохранения массы,

законом Дарси (который заменяет закон сохранения импульса) и уравнением состояния.

При постановке задачи будем считать, что в среде нет внутренних источников, создающих дополнительный поток жидкости. Жидкость будем считать несжимаемой ($\rho = \text{const}$), а ее динамическую вязкость одинаковой во всем рассматриваемом объеме. Тогда из уравнения (1) получим

$$(\nabla, \mathbf{u}) = 0.$$

Для поставленной задачи для упрощения не будет учитываться сила тяжести, поэтому из закона Дарси (2) получим

$$\mathbf{u} = -\frac{K}{\mu} \nabla p.$$

Для расчета распределения давления и скорости жидкости в стационарном случае из закона сохранения массы и закона Дарси запишем систему уравнений с учётом граничных условий:

$$\begin{cases} (\nabla, \mathbf{u}) = 0, \\ \mathbf{u} = -\frac{K}{\mu} \nabla p, \\ p|_{\Gamma} = g(x, y, z). \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) представляет собой краевую задачу, решаемую относительно поля давления. Получив решение системы (3), можно также рассчитать зависимость скорости жидкости от координаты из закона Дарси.

Поскольку решения системы (3) необходимо получать для произвольного неоднородного поля проницаемости (K зависит от пространственной координаты), целесообразно использовать численные методы. В настоящей работе для построения численных решений (3) использовался метод конечных объемов.

ГЛАВА 2. Решение задачи о течении в неоднородной пористой среде численными методами

Основным инструментом для решения сложных математических задач являются численные методы. Численные методы сводят решение задачи к выполнению конечного числа арифметических действий. Эти методы дают результат в виде числового значения с погрешностью, допустимой для данной задачи. При этом выделяют методы конечных элементов (МКЭ), методы контрольных объемов (МКО), методы конечных разностей (МКР).

Как описано в работе [16], метод конечных разностей базируется на аппроксимации производных, входящих в исходные дифференциальные уравнения, их дискретными аналогами. Преимуществом данного метода является его высокая эффективность и несложность реализации, а также наглядность процедуры дискретизации.

Основные особенности метода конечных элементов описаны в [16]. В методе конечных элементов вся область решения разбивается на большое число дискретных элементов (конечных элементов). На созданной сетке определяется множество базисных функций. Решение задачи будет линейной комбинацией этих функций. Нахождение необходимых коэффициентов выполняется либо минимизацией энергетического функционала, либо методом взвешенных невязок с произвольной весовой функцией.

Основная идея метода контрольных (конечных) объемов заключается в следующем: расчетную область делят на некоторое число непересекающихся областей (контрольных объемов) таким образом, что каждая узловая точка содержится в одном контрольном объеме. Одно из важных свойств метода заключается в том, что в нем заложено точное интегральное сохранение таких величин, как масса, количество движения и т.д.

Метод конечных объемов и основные расчетные формулы

Одномерным случаем.

Чтобы решить систему уравнений (3) использован метод конечных объемов. Рассмотрим сначала применение МКО в одномерном случае, когда система (3) решается на отрезке длины L . Отрезок L разбивается на $N+1$ одинаковых по длине отрезков (см. рис. 2). В каждом из узлов определяется сеточная функция давления p_0, p_1, \dots, p_N . Расстояние между соседними узлами $h = L/N$.

Определим граничные условия (ГУ), как $p_0 = p(x = 0) = p_{left}$, $p_N = p(x = L) = p_{right}$.

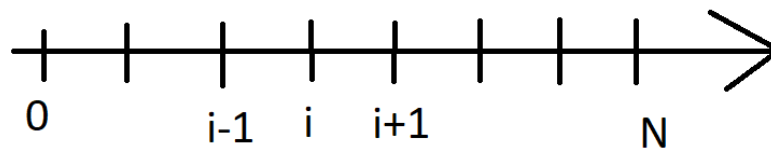


Рис.2 рассматриваемая область в методе конечных объемов (одномерный случай)

Рассмотрим поток жидкости в установившемся течении через узел i , имеющий координату центра x_i . Поскольку рассматривается стационарный случай, по закону сохранения массы количество входящей в элемент жидкости должно равняться количеству выходящей из него жидкости:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) d\vec{x} = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left(\frac{du}{dx} \right) dx = 0 = u \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} = u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} = 0.$$

Получаем, что

$$u_{i+\frac{1}{2}} = u_{i-\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Не учитывая силу тяжести, из закона Дарси (2) имеем

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\mu * u(x)}{k(x)}. \quad (5)$$

По определению производной разность давлений между двумя соседними узлами можно записать как

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{dp}{dx} \right) dx = p_i - p_{i-1}. \quad (6)$$

Подставим градиент давления (5) в предыдущее уравнение (6):

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{dp}{dx} \right) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} -\frac{\mu * u(x)}{k(x)} dx.$$

Из того, что длина элементарной ячейки намного меньше, чем вся длина рассматриваемой области, для упрощения будем считать, что скорость от x_{i-1} до x_i не меняется и равна $u_{i-\frac{1}{2}}$. Тогда:

$$p_i - p_{i-1} = -\mu * u_{i-\frac{1}{2}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}.$$

Введем $a_i = \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}$, получаем:

$$p_i - p_{i-1} = -\mu * u_{i-\frac{1}{2}} \frac{1}{a_i}.$$

Отсюда можем получить:

$$u_{i-\frac{1}{2}} = \frac{a_i}{\mu} (p_{i-1} - p_i).$$

Подставим это в (4) предварительно найдя аналогично $u_{i+\frac{1}{2}}$

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{a_{i+1}}{\mu} (p_i - p_{i+1}).$$

Далее

$$u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{a_{i+1}}{\mu} (p_i - p_{i+1}) - \frac{a_i}{\mu} (p_{i-1} - p_i) = 0.$$

Отсюда, вспомнив что вязкость жидкости постоянна и заданы граничные условия, приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно $N+1$ значения давления p_0, p_1, \dots, p_N :

$$\begin{cases} -a_i p_{i-1} + (a_{i+1} + a_i) p_i - a_{i+1} p_{i+1} = 0; i = 1, \overline{1, N-1}, \\ p_0 = p(x=0) = p_{left}, \\ p_N = p(x=L) = p_{right}. \end{cases}$$

В нашей модели для упрощения будем считать, что проницаемость между соседними узлами меняется линейно. То есть при создании модели среды будут задаваться значения проницаемости в узлах сетки, а зависимость проницаемости от координаты между узлами сетки будет задаваться как линейная. Тогда для проницаемости между узлами i и $i-1$ можем записать

$$k(x) = k_{i-1} + \frac{k_i - k_{i-1}}{h} (x - x_{i-1}),$$

где $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Из определения a_i :

$$a_i = \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k_{i-1} + \frac{k_i - k_{i-1}}{h} (x - x_{i-1})} \right)^{-1}.$$

Тогда мы можем записать

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k_{i-1} + \frac{k_i - k_{i-1}}{h} (x - x_{i-1})} = \\ &= \frac{h}{k_i - k_{i-1}} \ln \left(k_{i-1} + \frac{k_i - k_{i-1}}{h} (x - x_{i-1}) \right) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \\ &= \frac{h}{k_i - k_{i-1}} (\ln k_i - \ln k_{i-1}) = \frac{h}{k_i - k_{i-1}} \ln \frac{k_i}{k_{i-1}}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем выражение для параметров численной схемы

$$a_i = \left(\frac{h}{k_i - k_{i-1}} \ln \frac{k_i}{k_{i-1}} \right)^{-1}.$$

Двумерный случай.

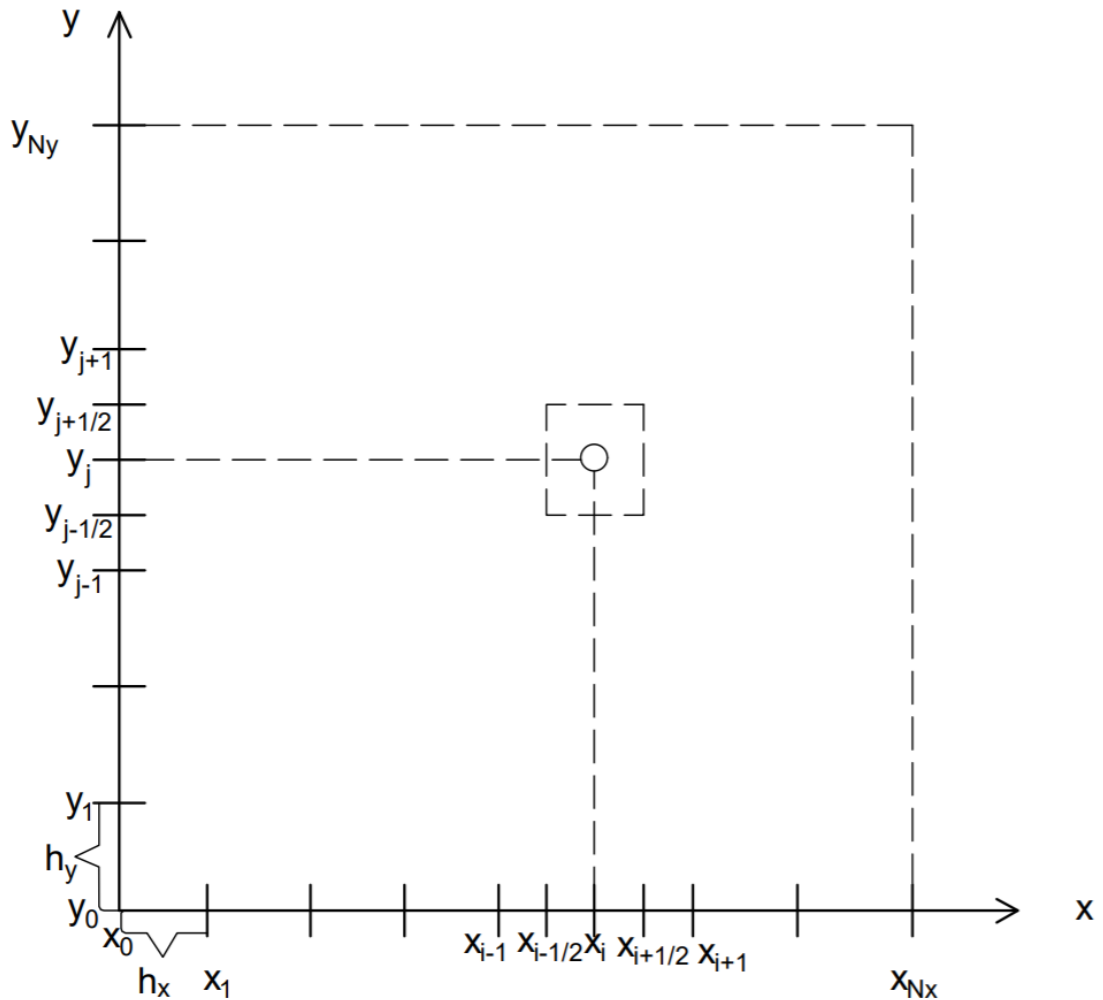


Рис.3 рассматриваемая область в методе конечных объемов для двумерного случая.

При моделировании будет рассмотрено течение жидкости в неоднородной среде в двумерном случае. Для этого случая по аналогии с одномерным случаем нужно определить сеточные функции проницаемости, давления, скорости и т.д. По оси X разделим рассматриваемую область на $N_x + 1$ часть, а по оси Y – на $N_y + 1$ часть, в итоге получив $(N_x + 1) * (N_y + 1)$ узлов, в каждом из которых будет задаваться значение проницаемости.

Определяем граничные условия (ГУ) через условие заданного постоянного давления на левой и правой границе расчетной области:

$$p(0, y) = p_{left}; p(L_x, y) = p_{right},$$

А кровля и подошва (верх и низ расчетной области) будут определены как непроницаемые границы:

$$u_n(x, 0) = 0; u_n(x, L_y) = 0.$$

Применив те же самые методы, как в одномерном случае, для двумерного случая получим СЛАУ:

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_{i,j}h_y p_{i-1,j} - b_{i,j}h_x p_{i,j-1} + \\ \left((a_{i+1,j} + a_{i,j})h_y + (b_{i+1,j} + b_{i,j})h_x \right) p_{i,j} - \\ -a_{i+1,j}h_y p_{i+1,j} - b_{i,j+1}h_x p_{i,j+1} = 0; \\ i = \overline{1, N_x - 1}; j = \overline{1, N_y - 1} \\ p_{0,j} = p_{left}; p_{N_x,j} = p_{right}; \\ j = \overline{1, N_y - 1} \\ p_{i,0} = p_{i,1}; p_{i,N_y} = p_{i,N_y-1}; \\ i = \overline{0, N_x} \end{array} \right. \quad (7)$$

где $a_{i,j} = \left(\frac{h_x}{k_{i,j} - k_{i-1,j}} \ln \frac{k_{i,j}}{k_{i-1,j}} \right)^{-1}$, $b_{i,j} = \left(\frac{h_y}{k_{i,j} - k_{i,j-1}} \ln \frac{k_{i,j}}{k_{i,j-1}} \right)^{-1}$.

Решив систему линейных алгебраических уравнений (7), получим распределение давления жидкости при течении через неоднородную пористую среду в двумерном случае. Затем, используя закон Дарси, можно получить распределение скорости жидкости в этом случае.

ГЛАВА 3. Моделирование неоднородной среды с заданными статистическими параметрами

Большинство пород-коллекторов характеризуется пространственной неоднородностью физических параметров. Для реалистичного моделирования такой неоднородности широко используют методы геостатистики [4—6]. Методы геостатистики опираются на теорию случайных полей и позволяют генерировать ансамбли реализаций неоднородных сред с заданными статистическими параметрами.

В настоящей работе требовалось моделировать пористые среды с неоднородной проницаемостью. Рассматривался двумерный случай: значения проницаемости $k_{i,j}$ определялись в узлах сетки (x_i, y_j) , $i = \overline{0, N_x}$, $j = \overline{0, N_y}$, где (x_i, y_j) – точки на плоскости \mathbf{R}^2 .

Для моделирования значений проницаемости $k_{i,j}$ использовался алгоритм, позволяющий генерировать пространственно неоднородные поля, для которых фиксированы статистические моменты первого (математические ожидания) и второго (ковариации) порядков.

Генерация неоднородной среды с необходимыми статистическими параметрами производилась в два этапа. Сначала с помощью генератора псевдослучайных чисел создавался набор независимых случайных величин $\alpha_{i,j}$, $i = \overline{0, N_x}$, $j = \overline{0, N_y}$. При этом все случайные величины $\alpha_{i,j}$ были равномерно распределены на отрезке $[0,1]$. Следовательно, математическое ожидание и дисперсия равны $M\alpha_{i,j} = 1/2$, $D\alpha_{i,j} = 1/12$ соответственно.

Введем вектор $\overrightarrow{\alpha_v} = (\alpha_{v_1}, \alpha_{v_2}, \dots, \alpha_{v_{(N_x+1)*(N_y+1)}})$, каждому из значений которого последовательно сопоставим значение из $\alpha_{i,j}$, т.е. развернем матрицу $\alpha_{i,j}$ в вектор $\overrightarrow{\alpha_v}$.

Преобразованием вектора $\overrightarrow{\alpha_v}$ можно получить набор случайных величин, имеющих заданную матрицу ковариаций. В настоящей работе считалось, что значения проницаемости $k_{i,j}$ и $k_{k,l}$ в узлах сетки с

координатами (x_i, y_j) и (x_k, y_l) должны быть коррелированы так, что величина их ковариации зависит от взаимного расположения узлов.

Для определения зависимости величины ковариации от расстояния использовалась следующая функция:

$$R(r) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{12} * \frac{r_* - r}{r_*}, & r < r_*, \\ 0, & r > r_*, \end{cases}$$

где r_* – радиус корреляции, r – модифицированное расстояние между точками (x_i, y_j) и (x_k, y_l) . Радиус корреляции r_* показывает, начиная с какого расстояния значения проницаемости сгенерированной среды будут статистически независимы. Модифицированное расстояние между точками среды рассчитывалось так:

$$r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

где

$$\Delta x = \alpha * ((x_i - x_k) \cos \varphi + (y_j - y_l) \sin \varphi), \quad (8)$$

$$\Delta y = \beta * (-(x_i - x_k) \sin \varphi + (y_j - y_l) \cos \varphi), \quad (9)$$

где $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^1$, φ – это угол поворота, который позволяет учесть анизотропию неоднородности среды: вдоль направления φ корреляция значений максимальна при $\alpha < \beta$.

С помощью функции $R(r)$ для всех пар узлов сетки (x_i, y_j) и (x_k, y_l) , $i, k = \overline{0, N_x}$, $j, l = \overline{0, N_y}$, рассчитывались требуемые значения ковариаций. В итоге получалась матрица R размером $(N_x + 1)^2 * (N_y + 1)^2$. После определения матрицы ковариаций R исходный некоррелированный вектор $\overrightarrow{\alpha_v}$ преобразовывался в вектор $\overrightarrow{k_v}$ следующим образом:

$$\overrightarrow{k_v} = R^{1/2} * \overrightarrow{\alpha_v}.$$

Результирующий вектор $\overrightarrow{k_v}$ имеет матрицу ковариаций R . Преобразовав путем последовательного присвоения значений вектора $\overrightarrow{k_v}$ матрице $k_{i,j}$, получим неоднородное поле проницаемости с заданной матрицей ковариации.

ГЛАВА 4. Методы перемасштабирования

Неоднородность проницаемости пород-коллекторов влияет на характер течения жидкости в их пустотном пространстве. Неоднородность проницаемости может проявляться в различных масштабах по пространству (межзерновая пористость, протяженные трещины, литологическое замещение и т.д.).

При проведении численного моделирования течений через неоднородные пористые среды невозможно учесть изменения свойств во всех пространственных масштабах. На практике уровень детализации, который может быть включен в имитационную модель, ограничен вычислительными возможностями и доступными ресурсами. Приходится понижать размерность расчетной задачи, переходить от детальной геологической сетки к «грубой» (укрупненной) сетке гидродинамической модели. При этом возникает задача перерасчета физических параметров модели залежи. Так, требуется вычислять эквивалентные значения абсолютной проницаемости ячеек грубой модели, используя информацию о значениях абсолютной проницаемости ячеек детальной модели. Методы, которые позволяют решать такую задачу, называются методами перемасштабирования или апскейлинга (upscaling).

Таким образом, методы перемасштабирования / upscaling используются для пересчета физических параметров модели при укрупнении сеток. Распространенное предположение, хотя часто и неуместное, при выводе соответствующих алгоритмов пересчета заключается в том, что форма уравнений остается неизменной при изменении масштабов.

Задача метода перемасштабирования для однофазного течения жидкости в пористой среде является самой простой, широко используемой и наиболее понятной. Поскольку этот подход имеет дело с однофазным потоком, основное внимание уделяется расчету эквивалентной абсолютной проницаемости, которая воспроизводит мелкомасштабное поведение в более крупном (грубом) масштабе.

Известные методы перемасштабирования / upscaling в случае однофазных течений можно разделить на три группы: детерминированные, стохастические и эвристические. Первая группа предполагает, что геологическая модель и граничные условия известны, тогда как стохастические методы предполагают только приблизительное знание модели и вероятностный взгляд. Эвристические методы предлагают правила для расчета разумных эквивалентных проницаемостей.

Среднее арифметическое

Этот метод может быть применен для многослойных моделей без поперечного потока и постоянного перепада давления между входом и выходом слоев [3]. В этом случае эффективная проницаемость \bar{k}_{arith} определяется как среднее арифметическое

$$\bar{k}_{arith} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i h_i}{\sum_{i=1}^n h_i},$$

где k_i - проницаемость слоя i , h_i - толщина слоя i , а n - количество слоев.

Этот метод не чувствителен к упорядочению слоев: конечная эффективная проницаемость будет такой же. Этот тип усреднения работает для однофазного потока, но его применимость для моделирования двухфазного потока ограничена, так как он не сохраняет экстремумы проницаемости.

Среднее гармоническое

Если изменение проницаемости параллельно основному направлению потока, среднее гармоническое дает наилучшую оценку эффективной проницаемости [3]:

$$\bar{k}_{harm} = \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{k_i}}.$$

Несмотря на ограниченную применимость, арифметическое и гармоническое усреднение дают верхнюю и нижнюю границу проницаемости, что полезно при инициализации других алгоритмов укрупнения масштаба для определения более точного увеличенного значения. Среднее арифметическое и гармоническое значение являются верхней и нижней границей эффективной проницаемости соответственно:

$$\bar{k}_{harm} < k_{eff} < \bar{k}_{arith}.$$

Среднее геометрическое

Этот метод может быть применен к случайно распределенным проницаемостям с логнормальным распределением. В этом случае среднее геометрическое значение эквивалентно эффективной проницаемости.

$$\bar{k}_{geo} = (\prod_{i=1}^n k_i)^{\frac{1}{n}}.$$

Это правило усреднения дает нулевую проницаемость, если только одна из проницаемостей, которые усредняются, мала или равна нулю, может быть некорректно для всей среды. Среднее геометрическое находится между гармоническими и арифметическими средними:

$$\bar{k}_{harm} < \bar{k}_{geo} < \bar{k}_{arith}.$$

ГЛАВА 5. Вычислительные эксперименты

В настоящей работе с помощью языка программирования Python был создан комплекс программ, позволяющий решать следующие задачи численного моделирования: 1) генерация двумерных неоднородных полей проницаемости с заданными статистическими параметрами (моментами первого и второго порядка); 2) расчет параметров течения несжимаемой вязкой жидкости через неоднородную пористую среду.

С помощью разработанного комплекса программ был выполнен ряд вычислительных экспериментов. Вычислительные эксперименты состояли из нескольких этапов. Во-первых, была сгенерирована серия неоднородных сред, проницаемости которых имели различные статистические характеристики. Во-вторых, для набора неоднородных сред проводилось численное моделирование течения жидкости для нахождения распределения давления и скорости, а также расчета максимальных отклонений различных полей. В-третьих, численное моделирование проводилось как для исходного поля проницаемости (результат генерации), так и для укрупненных полей, рассчитанных с применением различных методов перемасштабирования описанных ранее.

Далее приведены примеры результатов выполненных вычислительных экспериментов. На рис.4 показаны промежуточные этапы генерации неоднородного поля проницаемости с заданными стохастическими параметрами. Геометрические размеры расчетной области были определены как $L_x = 300 \text{ М}$; $L_y = 300 \text{ М}$. При этом количество ячеек сетки выбиралось равным 60×60 . На рис.4(а) показано исходное некоррелированное поле случайных величин, из которого путем алгебраических преобразований было получено поле проницаемости с требуемой матрицей ковариации. На рис.4(б) показано результирующее распределение проницаемости сгенерированной среды с параметрами: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\varphi = 0$, $r_* = 3$. Обозначения параметров соответствуют формулам (8), (9). В этом случае и далее $\sigma^2 = 10^4 \text{ мД}^2$. На рис.4(в) показана соответствующая ковариационная матрица среды с рис.4(б).

Для ковариационной матрицы по оси X и Y указан номер ячейки по соответствующей оси, а цветом показано значение ковариационной матрицы

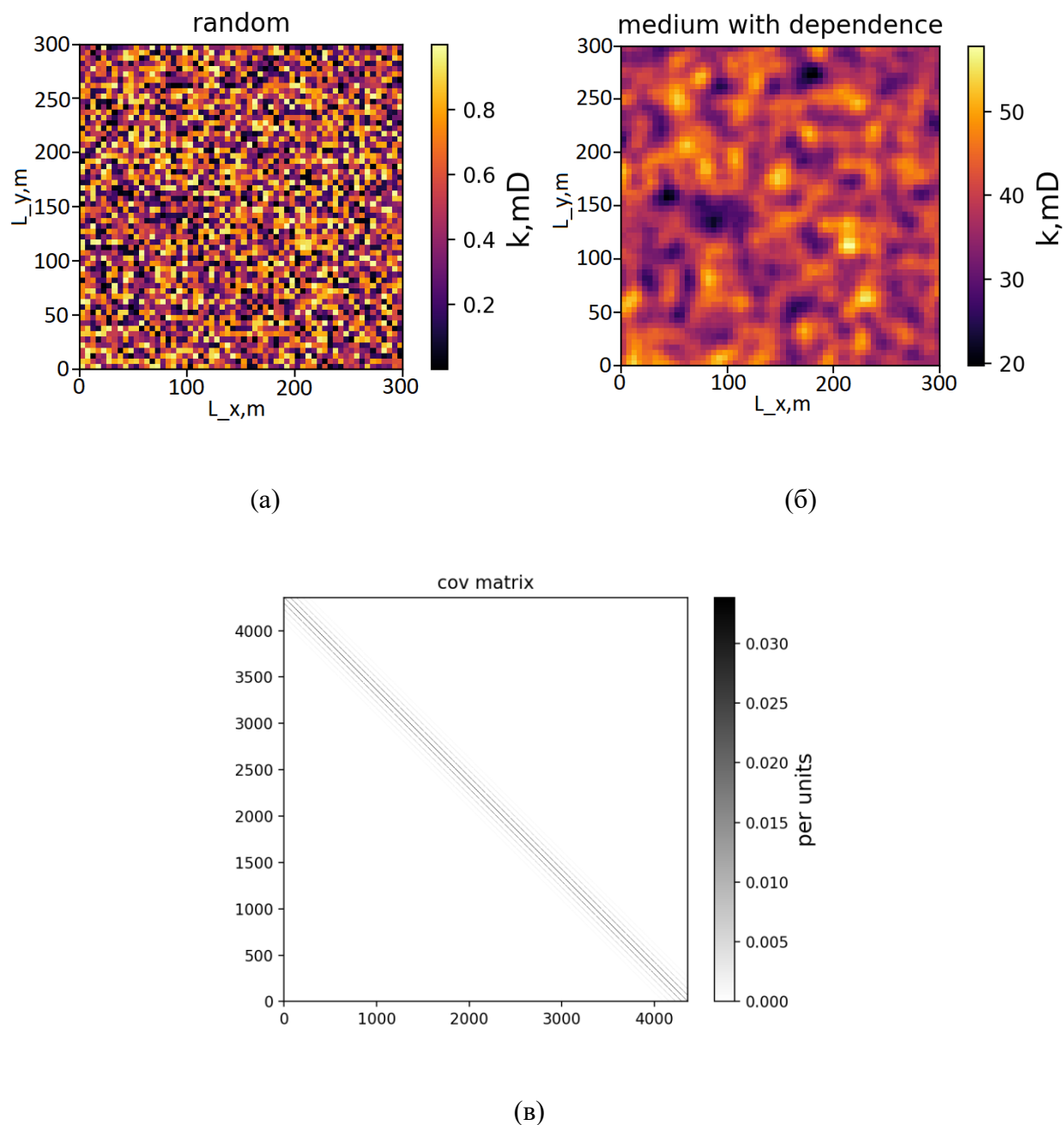


Рис.4 генерация неоднородной среды

((a) – исходное некоррелированное поле случайных величин; (б) – поле проницаемости с требуемой матрицей ковариации; (в) – соответствующая ковариационная матрица)

На рис.5 показаны результаты генерации различных неоднородных полей проницаемости из одного и того же исходного поля некоррелированных

случайных величин с использованием разных радиусов корреляции. На рис.5(а) показано распределение проницаемости сгенерированной среды с параметрами (см. формулы (8) и (9)): $\alpha = 1, \beta = 1, \varphi = 0, r_* = 3$. Цветом показана проницаемость среды. На рис.5(б) показано распределение проницаемости сгенерированной среды с параметрами: $\alpha = 1, \beta = 1, \varphi = 0, r_* = 5$. Для ковариационных матриц по осям X и Y указан номер ячейки по соответствующей оси, а цветом показано значение ковариационной матрицы. На рис.5(в) показана ковариационная матрица среды с рис.5(а). На рис.5(г) показана ковариационная матрица среды с рис.5(б)

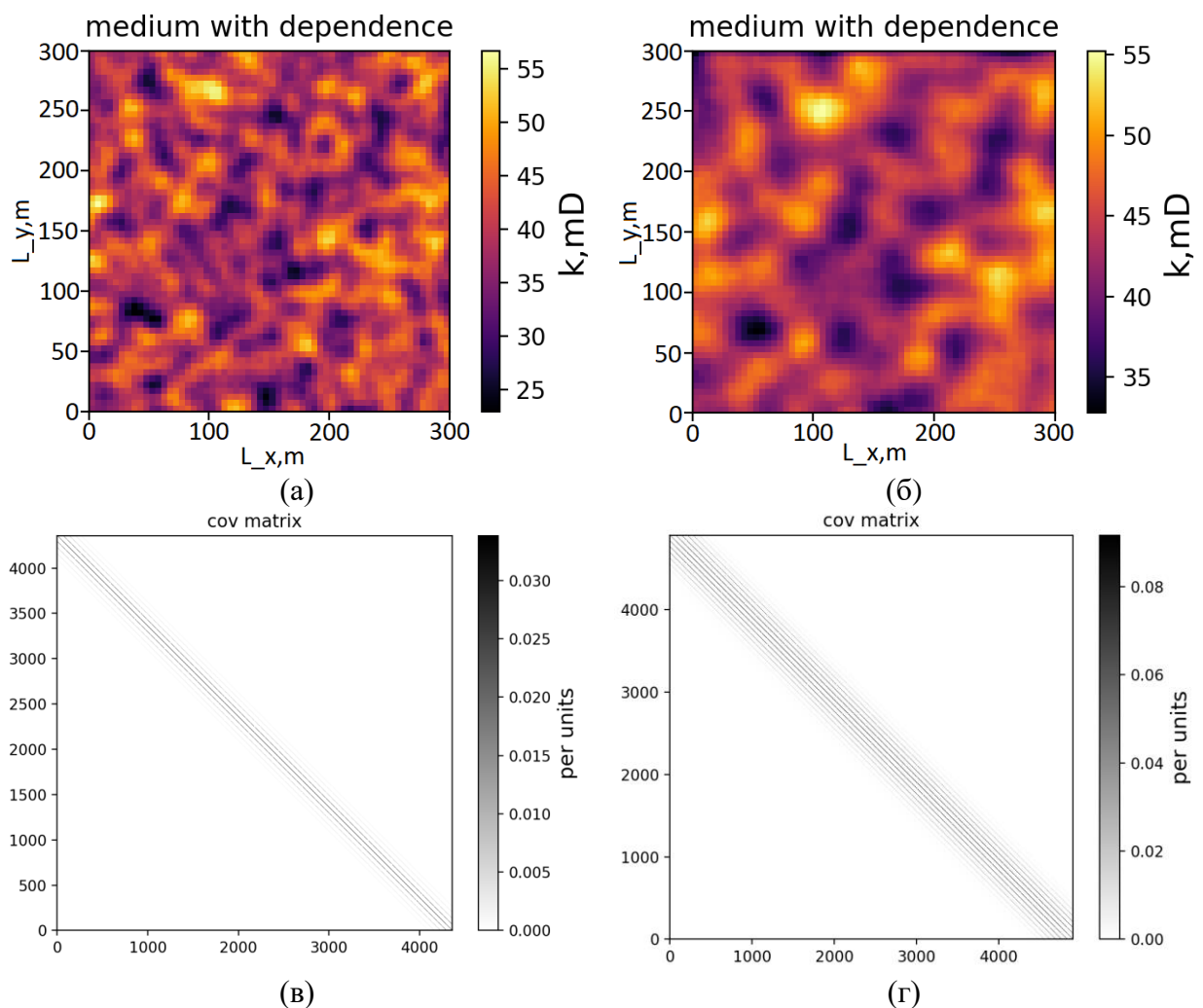


Рис.5 сгенерированные неоднородные поля проницаемости и соответствующие матрицы ковариаций.

При различных α и β , которые отвечают за степень «растяжения» корреляции по горизонтали и вертикали, для одних и тех же исходных данных поля будут выглядеть, как на рис.6. На рис.6(а) показано распределение

проницаемости сгенерированной неоднородной среды с параметрами: $\alpha = 1, \beta = 1, \varphi = 0, r_* = 3$. На рис.6(б) показано распределение проницаемости сгенерированной среды с параметрами: $\alpha = 0.4, \beta = 1.6, \varphi = 0, r_* = 3$

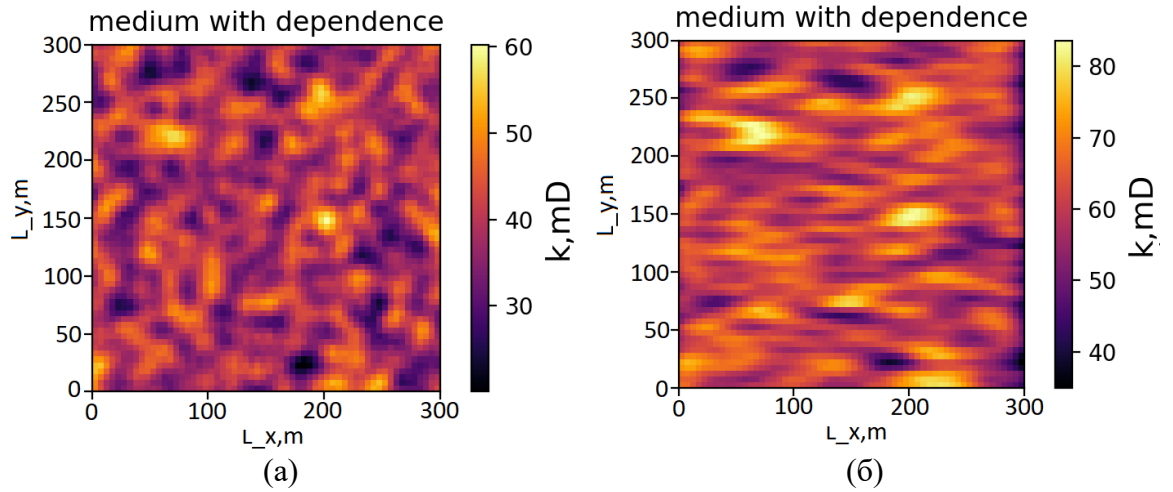


Рис.6 сгенерированные неоднородные поля проницаемости с различными параметрами α и β .

На рис.7(а) показано распределение проницаемости сгенерированной среды с параметрами: $\varphi = 0$, На рис.7(б) показано распределение проницаемости сгенерированной среды с параметрами: $\varphi = \pi/3$. Видно, что параметр (угол) φ определяет направление, в котором статистическая связь значений проницаемости максимальна.

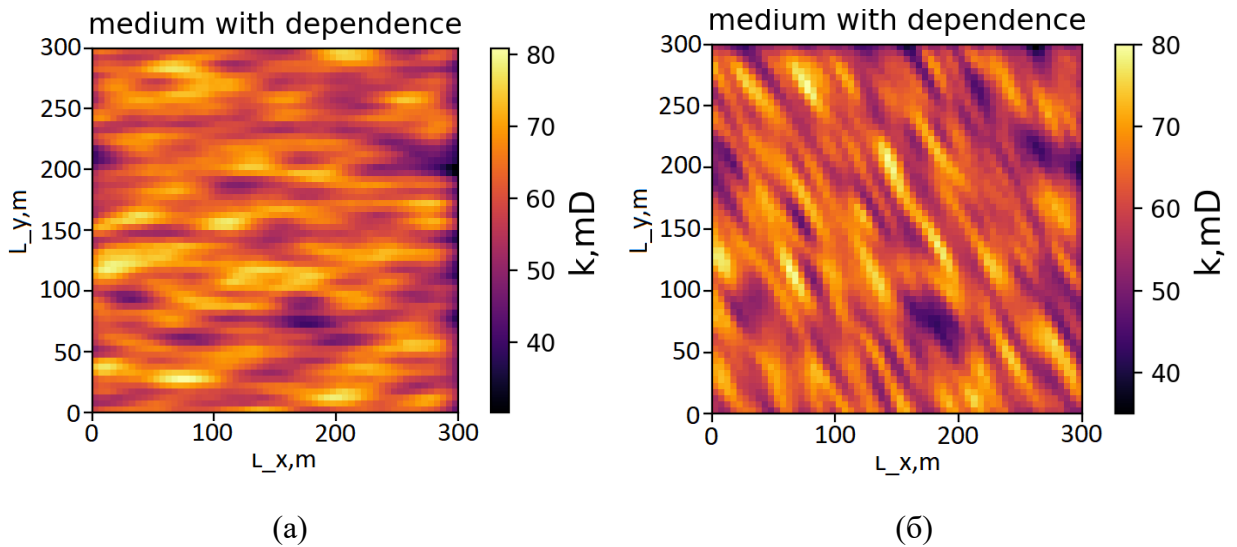


Рис.7 сгенерированные неоднородные поля проницаемости с различными углами поворота φ

На рис.8 показан пример вычислительного эксперимента, в котором для среды с заданным неоднородным полем проницаемости моделировалось стационарное фильтрационное течение несжимаемой жидкости. Рассчитывались соответствующие поля давления и скорости жидкости. Расчеты производились в соответствии с (6) и (2). При этом жидкость имела динамическую вязкость, как у воды, равную $\mu = 10^{-3}$ Па*с. Также задавались граничные условия $p_{left} = 2$ МПа; $p_{right} = 4$ МПа. На рис.8(а) показано распределение проницаемости сгенерированной среды с параметрами: $\alpha = 1, \beta = 1, \varphi = 0, r_* = 3$. На рис.8(б) показано распределение давления и скорости жидкости для среды с рис.8(а). Давление показано цветом, а скорости векторами.

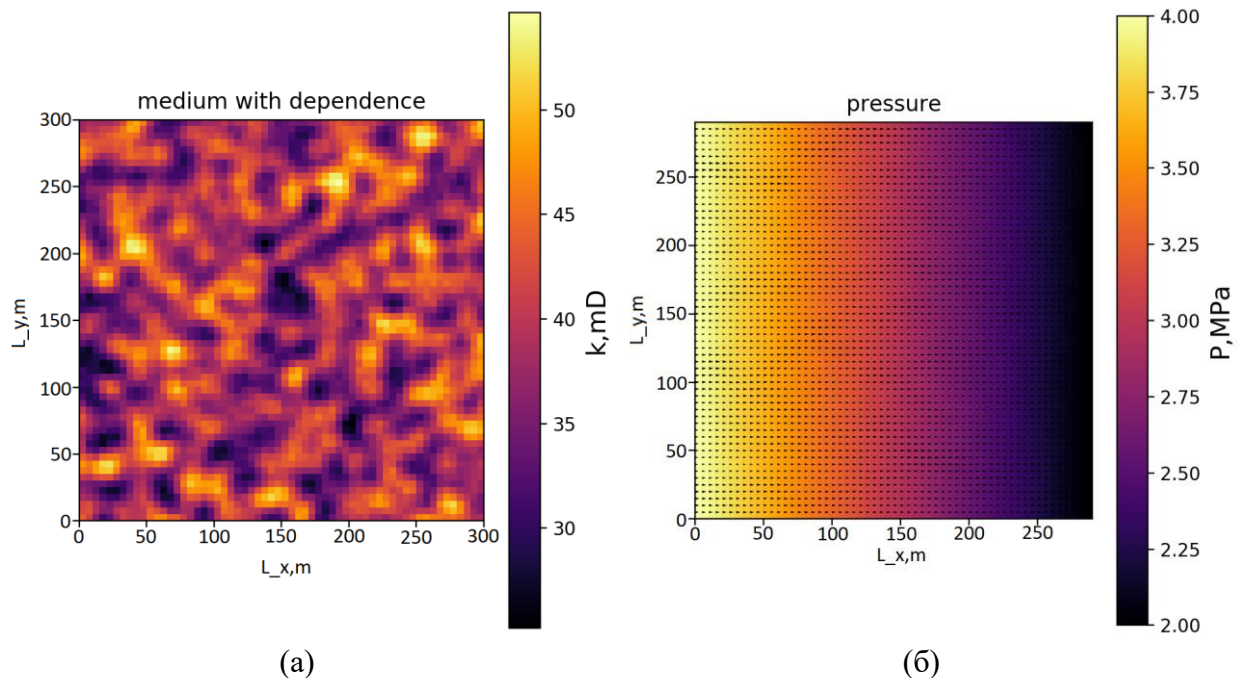


Рис.8 проницаемость среды и распределение давления и скорости.

Можно отметить на рис. 9, что отношение компонент скорости повторяет неоднородность проницаемости. На рис.9(а) показано распределение проницаемости сгенерированной среды с параметрами: $\alpha = 0.4, \beta = 1.6, \varphi = \pi/3, r_* = 3$. На рис.9(б) показано распределения отношения компонент скорости для среды из рис.9(а). Так как для определения скорости использовался закон Дарси, в котором скорость определяется через градиент

давлений, то знак минус в отношении скоростей, означает направленность вверх вертикальной составляющей скорости, в данном участке среды.

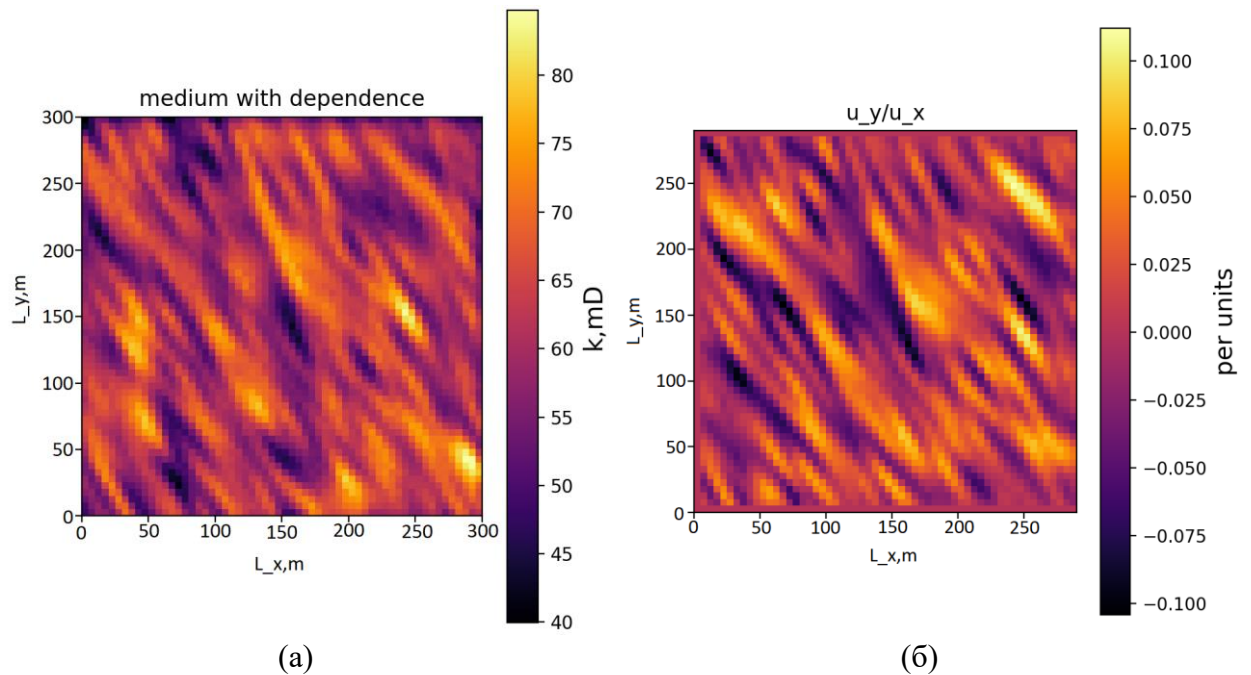


Рис.9 проницаемость среды и распределение отношения компонент скорости протекающий через среду жидкости.

Ниже показан результат использования различных методов перемасштабирования для различных размерностей элементарной ячейки сетки (2 на 2 либо 3 на 3) для одной и той же неоднородно заданной среды. То есть при укрупнении сетки каждому блоку ячеек 2 x 2 или 3 x 3 детальной сетки сопоставлялась одна ячейка укрупненной сетки. Укрупненной ячейке приписывалось новое значение проницаемости с использованием различных техник перемасштабирования: метод среднего арифметического, среднего геометрического и среднего гармонического.

На рис.10(а) показано распределение проницаемости сгенерированной среды с параметрами: $\alpha = 1, \beta = 1, \varphi = 0, r_* = 3$. Количество ячеек уменьшилось с 60x60 до 30x30. На рис.10(б) показано распределение проницаемости, полученное методом перемасштабирования, определяемый по среднему геометрическому. На рис.10(в) показано распределение проницаемости, полученное методом перемасштабирования, определяемый по среднему гармоническому. На рис.10(г) показано распределение

проницаемости, полученное методом перемасштабирования, определяемый по среднему арифметическому

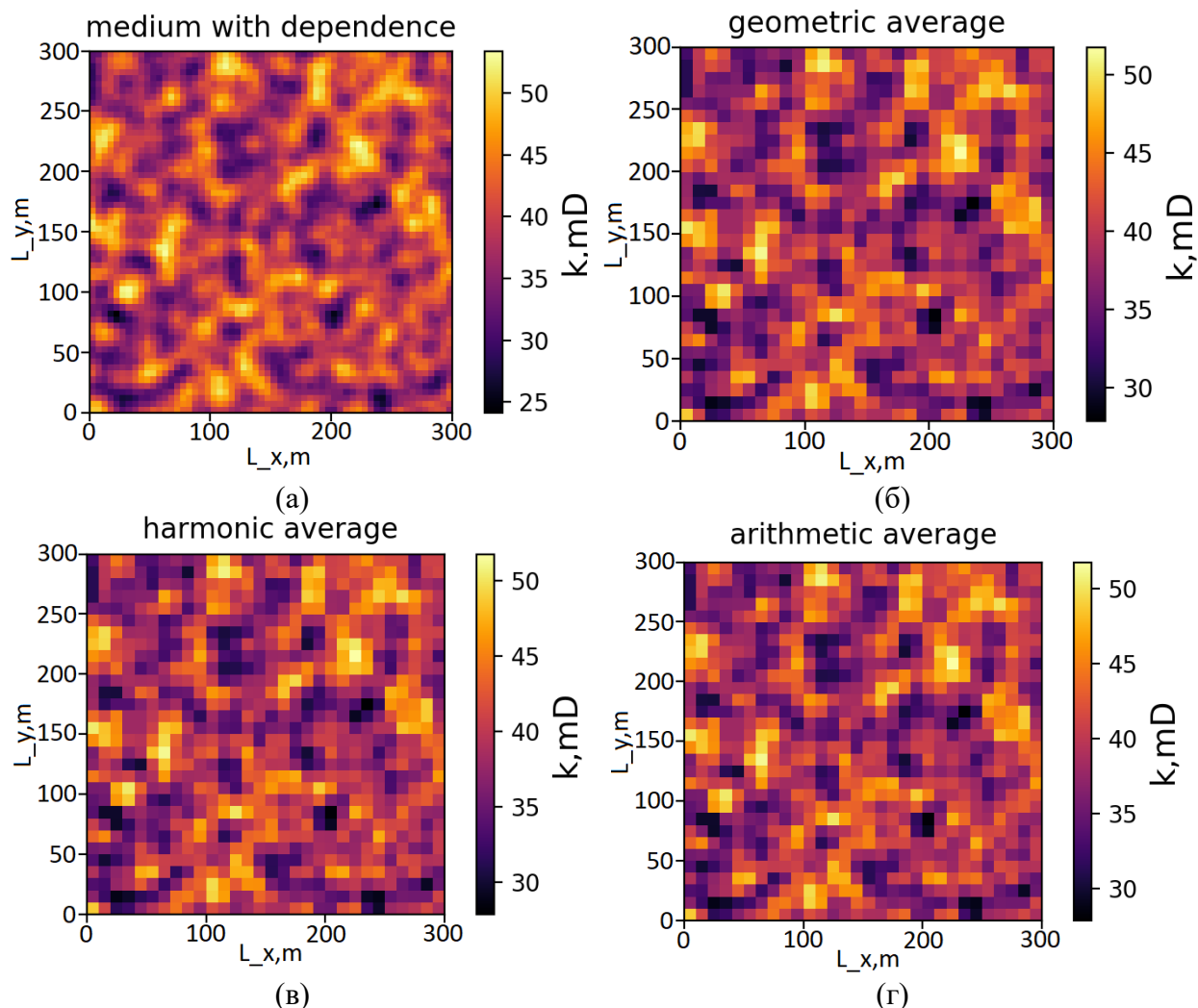


Рис. 10 распределение проницаемости для различных методов перемасштабирования с шаблоном 2 на 2

На рис.11(а) показано распределение проницаемости сгенерированной среды с параметрами: $\alpha = 1, \beta = 0, \varphi = 0, r_* = 3$. Количество ячеек уменьшилось с 60x60 до 20x20. На рис.11(б) показано распределение проницаемости, полученное методом перемасштабирования, определяемый по среднему геометрическому. На рис.11(в) показано распределение проницаемости, полученное методом перемасштабирования, определяемый по среднему гармоническому. На рис.11(г) показано распределение проницаемости, полученное методом перемасштабирования, определяемый по среднему арифметическому

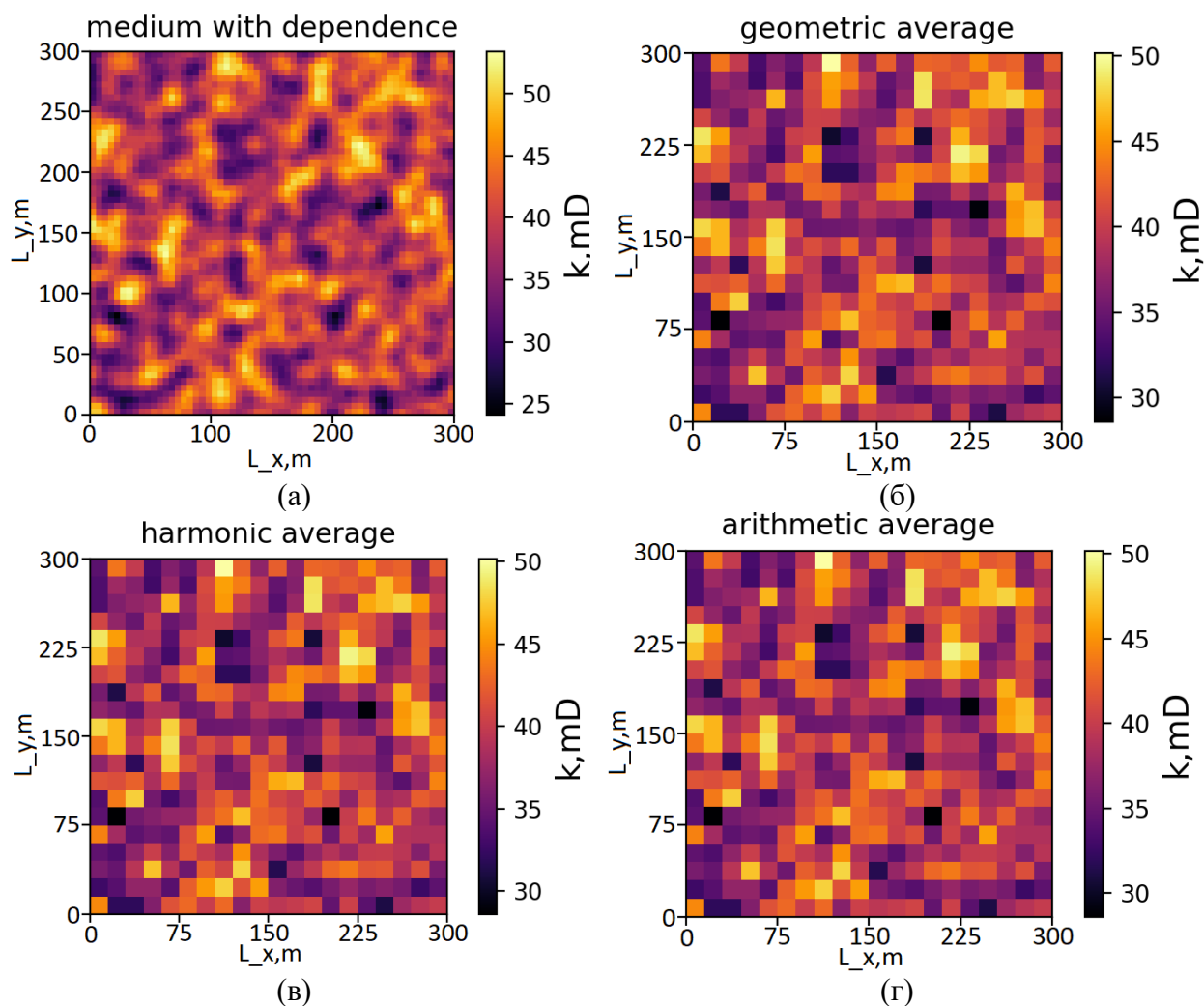


Рис. 11 распределение проницаемости для различных методов перемасштабирования с шаблоном 3 на 3

После укрупнения ячеек различными методами, для каждого из них рассчитывалось распределение давления и скорости, аналогично, как для детальной сетки. Затем, рассчитывалась разность между значением поля распределения (проницаемости, давления или скорости) детальной сетки и полем распределения укрупненной сетки с учетом расположения укрупненной ячейки. Далее из этих разностей ищались максимальные отклонения таких полей, как поле распределения проницаемости, давления и скорости.

Параметры	Среднее геометрическое	Среднее гармоническое	Среднее арифметическое
Проницаемость, мД	0.459	0.922	0.967
Давление, МПа	0.0313	0.0313	0.0313
Скорость, м/с	0.000128	0.000129	0.000130

Таблица 1 сравнение максимальных отклонений полей (метод апскейлинга 2 на 2)

Параметры	Среднее геометрическое	Среднее гармоническое	Среднее арифметическое
Проницаемость, мД	0.738	1.495	1.687
Давление, МПа	0.01583	0.0158	0.0158
Скорость, м/с	0.000198	0.000200	0.000202

Таблица 2 сравнение максимальных отклонений полей (метод апскейлинга 3 на 3)

Максимальное отклонение полей давления и скорости для всех трёх методов масштабирования не сильно различаются. Опираясь на численное сравнение максимальных отклонений укрупненных полей проницаемости от детальных полей проницаемости можно сделать вывод, что наиболее эффективным методом перемасштабирования является метод усреднения по среднему геометрическому.

Также с помощью созданного программного комплекса, найдена зависимость максимальных отклонений полей в зависимости от выбираемого шаблона метода масштабирования (2 на 2, 3 на 3, 4 на 4 или 5 на 5) по среднему геометрическому. На рис. 12(а) показана зависимость максимального отклонения поля проницаемости от размера шаблона метода перемасштабирования. По оси X указано, какую длину имеет сторона симметричного шаблона, используемого усреднения. На рис. 12(б) показана зависимость максимального отклонения поля давления от размера шаблона метода перемасштабирования. На рис. 12(а) показана зависимость максимального отклонения поля скорости от размера шаблона метода перемасштабирования

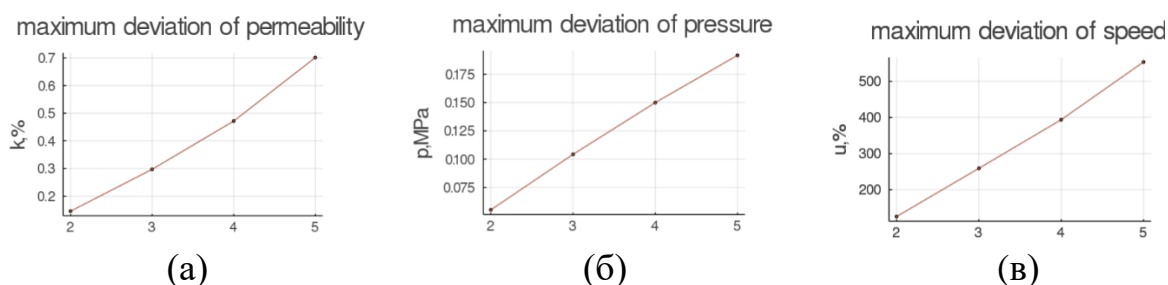


Рис.12 максимальные отклонения полей с различными шаблонами перемасштабирования.

Так же было проведено численное сравнение максимальных отклонений для несимметричных шаблонов масштабирования, которые повторяют шаблон поля корреляции. Для поля проницаемости с параметрами $\alpha = 0.8, \beta = 1.6, \varphi = 0, r_* = 3$, т.е. имеющим напластование по горизонтали. В этом случае радиус корреляции по вертикали будет 1.6, а по горизонтали 4.8, поэтому были взяты шаблоны ячеек 2 x 3 и 2 x 4, которые тоже были расположены горизонтально, для исследования поведения максимальных отклонений полей с несимметричными шаблонами перемасштабирования.

Параметры отклонения	2x2	3x3	4x4	5x5	2x3
Проницаемость, %	0.2033	0.3249	0.4026	0.3566	0.3483
Давление, МПа	0.0534	0.1011	0.1475	0.1895	0.0541
Скорость, %	119.7	245.7	379.0	525.3	120.8

Таблица 3 сравнение максимальных отклонений полей

Параметры отклонения	2x2	3x3	4x4	5x5	2x4
Проницаемость, %	0.1459	0.2973	0.4716	0.7012	0.4724
Давление, МПа	0.0552	0.1043	0.1499	0.1917	0.0577
Скорость, %	125.9	259.2	393.8	553.5	125.4

Таблица 4 сравнение максимальных отклонений полей

В результате сравнения максимальных отклонений полей проницаемости, давления и скорости можно заметить, что максимальное отклонения поля проницаемости для несимметричного шаблона перемасштабирования больше, чем у симметричного шаблона перемасштабирования с такими же сторонами, как длинная сторона

несимметричного (для 2×3 – это 3×3 , для 2×4 – это 4×4). Однако, при расчете поля давления и скорости для методов с различными шаблонами перемасштабирования выясняется, что максимальное отклонение этих полей для несимметричного случая меньше, чем для симметричных шаблонов с перемасштабирования такими же сторонами, как длинная сторона несимметричного, а в некоторых случаях максимально отклонение меньше, чем для симметричных шаблонов перемасштабирования с меньшими сторонами, чем длинная сторона несимметричного. В результате чего можно прийти к выводу, что шаблон масштабирования, который повторяет шаблон корреляции поля проницаемости, дает улучшение метода масштабирования по сравнению с симметричными шаблонами методов перемасштабирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения настоящей работы были получены следующие результаты.

1. С использованием метода конечных (контрольных) объемов сформулирован алгоритм численного решения краевой задачи для стационарной однофазной фильтрации несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде.
2. Разработан программный комплекс на языке Python для численного моделирования стационарного течения несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде.
3. Разработан вспомогательный программный модуль, который генерирует неоднородные среды с заданными статистическими параметрами.
4. В вычислительных экспериментах проведено сравнение трех методов перемасштабирования (апскейлинга) поля абсолютной проницаемости пористой среды: метод среднего арифметического, среднего геометрического и среднего гармонического.
5. Предложена модификация стандартных методов апскейлинга с использованием информации о статистических параметрах неоднородного поля проницаемости.

Анализируя полученные результаты работы, можно сделать следующие основные выводы.

1. Разработанный программный комплекс можно рассматривать как инструмент, позволяющий тестировать различные методы перемасштабирования неоднородного поля проницаемости.
2. Метод среднего геометрического продемонстрировал преимущества перед методами среднего арифметического и среднего гармонического в серии проведенных вычислительных экспериментов.
3. Модификация стандартных методов апскейлинга, заключающаяся в использовании шаблона перемасштабирования, повторяющего шаблон корреляции поля проницаемости, показывает преимущества в сравнении со стандартными техниками апскейлинга.

Список использованных источников

1. Баренблатт, Г.И. Движение жидкостей и газов в природных пластах [текст]: учебник / Г.И. Баренблатт, В.М. Енотов, В.М. Рыжик – М.: Недра, 1984 г. – 211 с.
2. Zhangxin Chen Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media / Zhangxin Chen, Guanren Huan, Yuanle Ma – Ph.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006 – 184 p.
3. Mahani, Hassan. (2005). Upscaling and optimal coarse grid generation for the numerical simulation of two phase flow in porous media.
4. Исаева, А.В. Развитие вероятностных методов математического моделирования естественных нефтегазовых систем [текст]: диссертация. Москва 2013 г. - 111 с.
5. Матерон, Ж. Основы прикладной геостатистики [текст]: учебник / Ж. Матерон – М.: Мир, 1967 г. – 408 с.
6. Каневская Р.Д. математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов [текст]: учебник / Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований 2002 г. – 140 с.
7. Brantson ET, Ju B, Wu D (2018) Numerical simulation of viscous fingering and flow channeling phenomena in perturbed stochastic fields: finite volume approach with tracer injection tests. Arab J Sci Eng. <https://doi.org/10.1007/s13369-018-3070-0>
8. Леонтьев Н.Е. Основы теории фильтрации [текст]: учебное пособие 2-е изд. / Н. Е. Леонтьев. – Москва: МАКС Пресс, 2017. - 88 с.
9. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В., Лекции по математической физике. М.: Наука, 2004.
10. Сердобольская М. Л., Чуличков А. И. Пособие по решению задач по теории вероятностей. — Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ. 2018. 172 с.

11. Louis J. Durlofsky, Upscaling and Gridding of Fine Scale Geological Models for Flow Simulation, Department of Petroleum Engineering, Stanford University, Stanford, CA 94305-2220 USA, 2005.
12. Renard, P., De Marsily, G. (1997). Calculating equivalent permeability: a review. *Advances in Water Resources*, 20(5-6), 253-278.
13. Pergament A.K., Semiletov V.A., Zaslavsky M.Y. Multiscale Averaging Algorithms for Flow Modeling in Heterogeneous Reservoir // 10th European Conference of Mathematics in Oil Recovery [ECMOR X] (Amsterdam, The Netherlands, 9/4-7/2006) Proceedings pap.no.P014, 2006.
14. А.Ю. Беляев. Усреднение в задачах теории фильтрации. – М.: Наука, 2004, 200 с.
15. Р. П. Федоренко, Л. Г. Страховская, Об одном варианте метода конечных элементов, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 19:4 (1979), 950–960
16. Клуникова Ю.В., Малюков С.П., Аникеев М.В. Метод конечных элементов для моделирования устройств и систем: учебное пособие. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2019. – 85 с.