МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет
им. Н.И Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики

Кафедра: Теории управления и динамики систем

Специальность: Фундаментальная информатика и информационные технологии

Отчет
по практике
тема: **«»**

Выполнил: студент группы 381406-1
Шульпин Степан Михайлович

____

Подпись

Научный руководитель:
ассистент кафедры ТУиДС
Бирюков Руслан Сергеевич

____

Подпись

Нижний Новгород
2018

Введение

В данной работе рассматривается антагонистическая игра преследования между двумя объектами. Функционалом в системе является евклидово расстояние между объектами. Интерес представляет получить такой закон управления, при котором один объект будет минимизировать это расстояние, а второй - максимизировать.

В качестве объекта выбраны роботы с двумя ведущими колесами. На робота установлены два электродвигателя постоянного тока, которые обеспечивают вращение ведущих колёс платформы. Пренебрегается влиянием инерционности рояльного колеса и его вилки на динамику робота и считается, что в этой точке платформа имеет абсолютно гладкую опору.

Построение математической модели

Рассмотрим модель одного из роботов, приняв характеристики второго такими же.

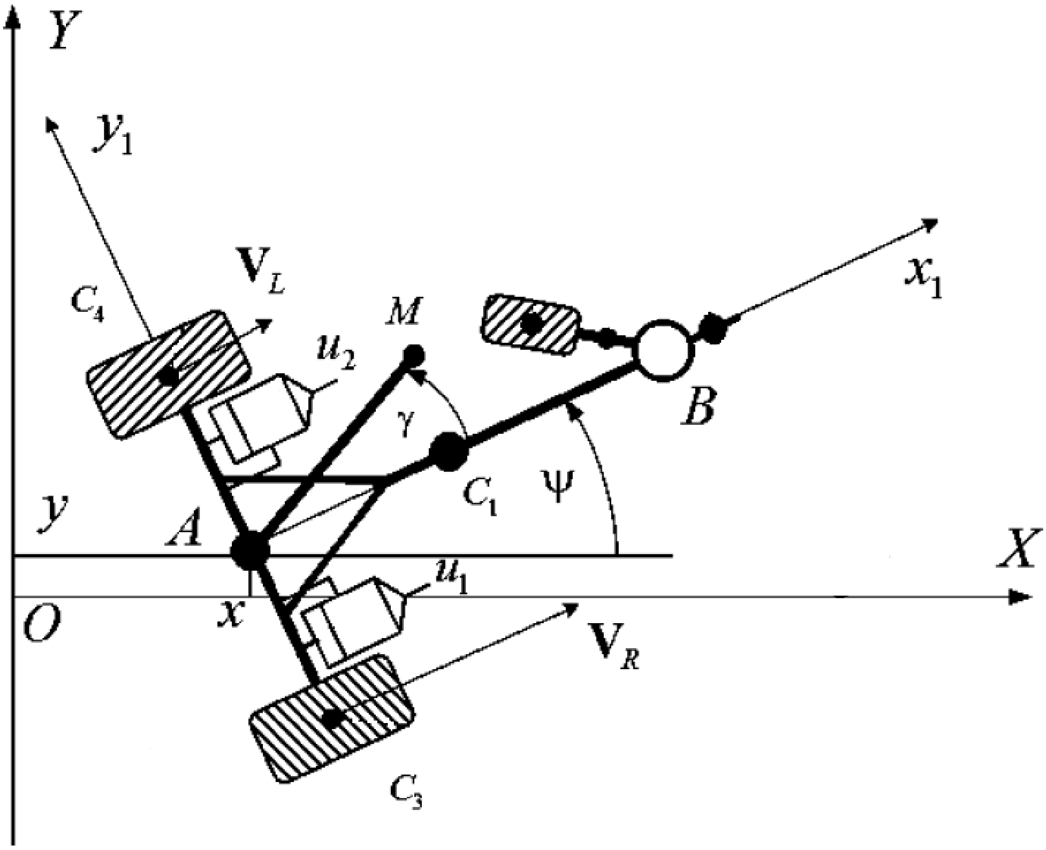

Рис. 1: Модель системы

x, y : координаты точки A середины отрезка, соединяющего колеса C_3 и C_4

ψ : угол поворота шасси вокруг вертикали, отсчитываемый от оси x

φ_3, φ_4 : углы поворота колес относительно горизонтали

m_1 : масса платформы

m_k : суммарная масса ведущего колеса и двигателя

a : расстояние от точки A до центра масс

r : радиус колеса

l : расстояние от точки А до колеса

J_1 : момент инерции платформы относительно вертикали

J_{kz} : момент инерции ведущего колеса

$J_y = J_{ky} + n^2 J_{ry}$: приведенный момент инерции колеса

J_{ky} : момент инерции колеса относительно оси y

J_{ry} : момент инерции ротора электродвигателя

n : передаточное число редуктора

L : обобщенная индуктивность цепи электродвигателя

c : коэффициент электромеханического взаимодействия

R : омическое сопротивление цепи ротора

Электрическая подсистема содержит два контура с током, и следовательно, вектор обобщенных координат электромеханической подсистемы $X = (x, y, \psi, \varphi_3, \varphi_4, e_1, e_2)^\top$, где заряды e_1, e_2 такие, что $i_1 = \dot{e}_1, i_2 = \dot{e}_2$ представляют собой токи, протекающие во внешних цепях питания двигателей.

Выберем в качестве основных переменных $V = \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi$ — скорость точки A и угловую скорость платформы $\Omega = \dot{\psi}$. Тогда

$$\dot{x} = V\cos\psi, \quad \dot{y} = V\sin\psi, \quad \dot{\psi} = \Omega, \quad \varphi_3 = \frac{\dot{V} + l\Omega}{r}, \quad \varphi_4 = \frac{\dot{V} - l\Omega}{r}.$$

К обобщенным силам системы относятся сторонние ЭДС U_1, U_2, приложенные к электродвигателям.

После построения функции Лагранжа и проведения необходимых вычислений, получаются динамические уравнения движения робота:

$$\begin{aligned}
m\dot{V} &= aM\Omega^2 + \frac{nc}{r}(i_1 + i_2),\\
J\dot{\Omega} &= -aMV\Omega + \frac{lnc}{r}(i_1 - i_2),\\
L\frac{\partial i_1}{\partial t} &+ Ri_1 + \frac{nc}{r}(V + l\Omega) = U_1,\\
L\frac{\partial i_2}{\partial t} &+ Ri_2 + \frac{nc}{r}(V + l\Omega) = U_2,
\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$m = m_1 + 2m_k + 2\frac{J_y}{r^2}, \quad M = m_1, \quad J = J_1 + 2J_{kz} + (m - m_1)l^2 + m_1 a^2.$$

Пусть $k = 1, 2$ — номер объекта, предположим, что коэффициент самоиндукции во всех четырех электродвигателях $L = 0$ и $i_\sigma = i_1 + i_2$, $i_\delta = i_1 - i_2$, $U_\sigma = U_1 + U_2$, $U_\delta = U_1 - U_2$. После подстановки токов в явном виде в систему, получаем:

$$\begin{aligned}
m\dot{V}_k &= aM\Omega_k^2 + \frac{nc}{r}\frac{1}{R}(U_{k\sigma} - \frac{2nc}{r}V_k),\\
J\dot{\Omega}_k &= -aMV_k\Omega_k + \frac{lnc}{r}\frac{1}{R}(U_{k\delta} - \frac{2ncl}{r}\Omega_k),\\
\dot{x}_k &= V_k\cos\psi_k,\\
\dot{y}_k &= V_k\sin\psi_k,\\
\dot{\psi}_k &= \Omega_k.
\end{aligned} \tag{2}$$

Далее перейдем к безразмерным переменным

$$t = T\tau, \quad V_k = Av_k, \quad \Omega_k = B\omega_k, \quad x_k = C\xi_k, \quad y_k = D\eta_k.$$

Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases}
\dot{v}_k = \omega_k^2 - v_k + U_{k1},\\
\dot{\omega}_k = -v_k\omega_k - \varkappa\omega_k + U_{k2},\\
\dot{\xi}_k = v_k\cos\psi_k,\\
\dot{\eta}_k = v_k\sin\psi_k,\\
\dot{\psi}_k = \mu\omega_k,
\end{cases} \tag{3}$$

здесь коэффициенты имеют следующий вид

$$T = \frac{mRr^2}{2n^2c^2}, \quad B = \frac{2n^2c^2}{aMRr^2}\sqrt{\frac{J}{m}}, \quad A = \frac{2n^2c^2}{aMRr^2}\frac{J}{m},$$
$$C = \frac{J}{am}, \quad D = \frac{J}{am}, \quad \varkappa = \frac{l^2m}{J}, \quad \mu = \frac{\sqrt{Jm}}{aM}.$$

Поиск оптимального управления

Пусть система 3 описывет поведение объектов. Тогда функционал будет выражаться ввиде Евклидовой метрики:

$$\rho(U_1, U_2) = \rho(\xi_1(T), \eta_1(T), \xi_2(T), \eta_2(T)) = \\ = \sqrt{(\xi_2(T) - \xi_1(T))^2 + (\eta_2(T) - \eta_1(T))^2}.$$

Начальные условия:

$$v_k(0) = v_k^0, \quad \omega_k(0) = \omega_k^0, \quad \xi_k(0) = \xi_k^0, \quad \eta_k(0) = \eta_k^0, \quad \psi_k(0) = \psi_k^0.$$

Задача: $\min\limits_{U_1} \max\limits_{U_2} \rho(U_1, U_2)$.
Запишем принцип Лагранжа:
Пусть $x = (v_1, \omega_1, \xi_1, \eta_1, \psi_1, v_2, \omega_2, \xi_2, \eta_2, \psi_2)$.
Функция Лагранжа $\hat{L} = \Psi^T(t)(\dot{x} - \varphi(x, U_1, U_2))$ принимает следующий вид

$$\hat{L}(v_k, \omega_k, \xi_k, \eta_k, \psi_k, U_{kj}, \Psi_1, ..., \Psi_{10}) = \Psi_1(\dot{v_1} - \omega_1^2 + v_1 - U_{11}) + \\ + \Psi_2(\dot{\omega_1} + v_1\omega_1 + \varkappa\omega_1 - U_{12}) + \Psi_3(\dot{\xi_1} - v_1 \cos\psi_1) + \Psi_4(\dot{\eta_1} - v_1 \sin\psi_1) + \\ + \Psi_5(\dot{\psi_1} - \mu\omega_1) + \Psi_6(\dot{v_2} - \omega_2^2 + v_2 - U_{21}) + \Psi_7(\dot{\omega_2} + v_2\omega_2 + \\ + \varkappa\omega_2 - U_{22}) + \Psi_8(\dot{\xi_2} - v_2 \cos\psi_2) + \Psi_9(\dot{\eta_2} - v_2 \sin\psi_2) + \Psi_{10}(\dot{\psi_2} - \mu\omega_2).$$

а) условие стационарности по x: $\dot{\Psi} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\Psi$

$$
\begin{cases}
\dot{\Psi}_1 = -\dfrac{\partial L}{\partial v_1} = -\Psi_1 - \omega_1\Psi_2 + \Psi_3\cos\psi_1 + \Psi_4\sin\psi_1 \\
\dot{\Psi}_2 = -\dfrac{\partial L}{\partial \omega_1} = 2\omega_1\Psi_1 - \varkappa\Psi_2 - v_1\Psi_2 + \mu\Psi_5 \\
\dot{\Psi}_3 = -\dfrac{\partial L}{\partial \xi_1} = 0 \\
\dot{\Psi}_4 = -\dfrac{\partial L}{\partial \eta_1} = 0 \\
\dot{\Psi}_5 = -\dfrac{\partial L}{\partial \psi_1} = -\Psi_3 v_1\sin\psi_1 + \Psi_4 v_1\cos\psi_1 \\
\dot{\Psi}_6 = -\dfrac{\partial L}{\partial v_2} = -\Psi_6 - \omega_2\Psi_7 + \Psi_8\cos\psi_2 + \Psi_9\sin\psi_2 \\
\dot{\Psi}_7 = -\dfrac{\partial L}{\partial \omega_2} = 2\omega_2\Psi_6 - \varkappa\Psi_7 - v_2\Psi_7 + \mu\Psi_{10} \\
\dot{\Psi}_8 = -\dfrac{\partial L}{\partial \xi_2} = 0 \\
\dot{\Psi}_9 = -\dfrac{\partial L}{\partial \eta_2} = 0 \\
\dot{\Psi}_{10} = -\dfrac{\partial L}{\partial \psi_2} = -\Psi_8 v_2\sin\psi_2 + \Psi_9 v_2\cos\psi_2
\end{cases}
\tag{4}
$$

b) условие трансверсальности по x:

$$
l = \frac{1}{2}\lambda_0\left[(\xi_2(T)-\xi_1(T))^2 + (\eta_2(T)-\eta_1(T))^2\right] + \lambda_1(v_1(0)-v_1^0)+
$$
$$
+\lambda_2(\omega_1(0)-\omega_1^0) + \lambda_3(\xi_1(0)-\xi_1^0) + \lambda_4(\eta_1(0)-\eta_1^0) + \lambda_5(\psi_1(0)-\psi_1^0)+
$$
$$
+\lambda_6(v_2(0)-v_2^0)+\lambda_7(\omega_2(0)-\omega_2^0)+\lambda_8(\xi_2(0)-\xi_2^0)+\lambda_9(\eta_2(0)-\eta_2^0)+\lambda_{10}(\psi_2(0)-\psi_2^0).
$$

Так как $\Psi_k(0) = \dfrac{\partial l}{\partial x(0)}$, то

$$
\Psi_1(0) = \lambda_1, \quad \Psi_2(0) = \lambda_2, \quad \Psi_6(0) = \lambda_6, \quad \Psi_7(0) = \lambda_7.
$$

Далее, $\Psi_k(T) = \dfrac{\partial l}{\partial x(T)}$, следовательно

$$\begin{aligned}
&\Psi_1(T) = \Psi_2(T) = \Psi_6(T) = \Psi_7(T) = 0 \\
&\Psi_3(T) = \lambda_0(\xi_2(T) - \xi_1(T)) \\
&\Psi_4(T) = \lambda_0(\eta_2(T) - \eta_1(T)) \\
&\Psi_8(T) = -\lambda_0(\xi_2(T) - \xi_1(T)) \\
&\Psi_9(T) = -\lambda_0(\eta_2(T) - \eta_1(T))
\end{aligned}$$

$$\dot{\Psi}_5 = -\Psi_3 v_1 \sin\psi_1 + \Psi_4 v_1 \cos\psi_1 = -\Psi_3 \dot{\eta_1} + \Psi_4 \dot{\xi_1}$$

Так как $\dot{\Psi}_3 = \dot{\Psi}_4 = 0$, то $\Psi_3 = const$ и $\Psi_4 = const$, следовательно $\Psi_5 = -\Psi_3\eta_1 + \Psi_4\xi_1 + C$.
Решив задачу Коши $\Psi_5(T) = -\Psi_3\eta_1(T) + \Psi_4\xi_1(T) + C = 0$, получаем:

$$\Psi_5(T) = \Psi_3(\eta_1(T) - \eta_1) - \Psi_4(\xi_1(T) - \xi_1),$$

аналогично

$$\Psi_{10}(T) = \Psi_8(\eta_1(T) - \eta_1) - \Psi_9(\xi_1(T) - \xi_1).$$

b) условие оптимальности по U:

$$\max_{U_2}\min_{U_1}\left[\Psi_1 U_{11} + \Psi_2 U_{12} + \Psi_6 U_{21} + \Psi_7 U_{22}\right] =$$
$$= \max_{|U_2|\le U_2^0}\left[\Psi_1 U_{11} + \Psi_2 U_{12}\right] + \min_{|U_1|\le U_1^0}\left[\Psi_6 U_{21} + \Psi_7 U_{22}\right],$$

следовательно

$$U_{11}^* = U_{11}^0 sgn(\Psi_1), \quad U_{12}^* = U_{12}^0 sgn(\Psi_2),$$

$$U_{21}^* = -U_{21}^0 sgn(\Psi_6), \quad U_{22}^* = -U_{22}^0 sgn(\Psi_7).$$

Методы, которые не привели к необходимым результатам

Поиск оптимального упарвления с помощью функции Понтрягина

Необходимый функционал выражается интегралом

$$I = \sqrt{\int_0^T \left\{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + \varepsilon_1 U_1^\top U_1 - \varepsilon_2 U_2^\top U_2\right\} dt} \to opt.$$

Тогда функционал для первого объекта будем выбирать при наихудшем по отношению к нему выборе управления вторым объектом, то есть:

$$J_1 = \inf_{U_1} \sup_{U_2 \neq 0} \frac{I^2}{\|U_2\|^2},$$

аналогично

$$J_2 = \sup_{U_2} \sup_{U_1 \neq 0} \frac{I^2}{\|U_1\|^2}.$$

Пусть

$$\inf_{U_1} \sup_{U_2 \neq 0} \frac{I^2}{\|U_2\|^2} = \gamma_1^2,$$

тогда

$$\inf_{U_1} \sup_{U_2 \neq 0} \frac{I^2 - \gamma_1^2 \|U_2\|^2}{\|U_2\|^2} = 0.$$

Введем новый функционал

$$L_1(U_1, U_2) = I^2 - \gamma_1^2 \|U_2\|^2 =$$
$$= \int_0^T \left\{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + \varepsilon_1 U_1^\top U_1 - \varepsilon_2 U_2^\top U_2 - \gamma_1^2 U_2^\top U_2\right\} dt$$

И необходимо решить задачу

$$\inf_{U_1} \sup_{\|U_2\| = 1} \left(I^2 - \gamma_1^2 \|U_2\|^2\right) < 0.$$

Аналогично для второго объекта

$$\sup_{U_2} \sup_{\|U_1\|=1} \left(I^2 - \gamma_2^2 \|U_1\|^2\right) < 0.$$

Для поиска оптимального управления применяется принцип максимума Понтрягина. Функция Понтрягина для первого объекта принимает следующий вид:

$$H(v_k, \omega_k, \xi_k, \eta_k, \psi_k, U_{kj}, \Psi_1, ..., \Psi_{10}) = (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + \varepsilon_1 U_1^\top U_1 -$$
$$- \varepsilon_2 U_2^\top U_2 - \gamma_1^2 U_2^\top U_2 + \Psi_1(\omega_1^2 - v_1 + U_{11}) + \Psi_2(-v_1\omega_1 - \varkappa\omega_1 + U_{12}) +$$
$$+ \Psi_3 v_1 \cos\psi_1 + \Psi_4 v_1 \sin\psi_1 + \Psi_5 \mu\omega_1 + \Psi_6(\omega_2^2 - v_2 + U_{21}) +$$
$$+ \Psi_7(-v_2\omega_2 - \varkappa\omega_2 + U_{22}) + \Psi_8 v_2 \cos\psi_2 + \Psi_9 v_2 \sin\psi_2 + \Psi_{10}\mu\omega_2.$$

Сопряженная система имеет вид:

$\dot{\Psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial v_1} = \Psi_1 + \omega_1\Psi_2 - \Psi_3\cos\psi_1 - \Psi_4\sin\psi_1$

$\dot{\Psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial \omega_1} = -2\omega_1\Psi_1 + \varkappa\Psi_2 + v_1\Psi_2 - \mu\Psi_5$

$\dot{\Psi}_3 = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi_1} = 2(\xi_2 - \xi_1)$

$\dot{\Psi}_4 = -\dfrac{\partial H}{\partial \eta_1} = 2(\eta_2 - \eta_1)$

$\dot{\Psi}_5 = -\dfrac{\partial H}{\partial \psi_1} = \Psi_3 v_1 \sin\psi_1 - \Psi_4 v_1 \cos\psi_1$

$\dot{\Psi}_6 = -\dfrac{\partial H}{\partial v_2} = \Psi_6 + \omega_2\Psi_7 - \Psi_8\cos\psi_2 - \Psi_9\sin\psi_2$

$\dot{\Psi}_7 = -\dfrac{\partial H}{\partial \omega_2} = -2\omega_2\Psi_6 + \varkappa\Psi_7 + v_2\Psi_7 - \mu\Psi_{10}$

$\dot{\Psi}_8 = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi_2} = -2(\xi_2 - \xi_1)$

$\dot{\Psi}_9 = -\dfrac{\partial H}{\partial \eta_2} = -2(\eta_2 - \eta_1)$

$\dot{\Psi}_{10} = -\dfrac{\partial H}{\partial \psi_2} = \Psi_8 v_2 \sin\psi_2 - \Psi_9 v_2 \cos\psi_2$

Пусть U_{kj}^* - оптимальное управление, $v_k^*, \omega_k^*, \xi_k^*, \eta_k^*, \psi_k^*$ - решения, соответствующие оптимальному управлению, $\Psi_1^*, ..., \Psi_{10}^*$ - оптимальные значения, тогда

$$H(v_k^*, \omega_k^*, \xi_k^*, \eta_k^*, \psi_k^*, U_{kj}^*, \Psi_1^*, ..., \Psi_{10}^*) = \\ = \max_{U_{21}, U_{22}} H(v_k^*, \omega_k^*, \xi_k^*, \eta_k^*, \psi_k^*, U_{1j}^*, U_{21}, U_{22}, \Psi_1^*, ..., \Psi_{10}^*).$$

После подстановки функции Понтрягина

$$-\gamma_1^2 U_2^{*\top} U_2^* - \varepsilon_2 U_2^{*\top} U_2^* + \Psi_6^* U_{21}^* + \Psi_7^* U_{22}^* = \\ = \max_{U_{21}, U_{22}} \left(-\gamma_1^2 U_2^\top U_2 - \varepsilon_2 U_2^\top U_2 + \Psi_6^* U_{21} + \Psi_7^* U_{22} \right)$$

Откуда

$$U_{21}^* = \frac{\Psi_6^*}{2(\gamma_1^2 + \varepsilon_2)}, \quad U_{22}^* = \frac{\Psi_7^*}{2(\gamma_1^2 + \varepsilon_2)}.$$

Функция Понтрягина для поиска inf по U_1 имеет вид:

$$\varepsilon_1 U_1^{*\top} U_1^* + \Psi_1^* U_{11}^* + \Psi_2^* U_{12}^* = \min_{U_{11}, U_{12}} \left(\varepsilon_1 U_1^\top U_1 + \Psi_1^* U_{11} + \Psi_2^* U_{12} \right)$$

Откуда

$$U_{11}^* = -\frac{\Psi_1^*}{2\varepsilon_1}, \quad U_{12}^* = -\frac{\Psi_2^*}{2\varepsilon_1}.$$

Функция Понтрягина для второго объекта:

$$H(v_k, \omega_k, \xi_k, \eta_k, \psi_k, U_{kj}, \Psi_1, ..., \Psi_{10}) = (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + \varepsilon_1 U_1^\top U_1 - \\ - \varepsilon_2 U_2^\top U_2 - \gamma_2^2 U_1^\top U_1 + \Psi_1(\omega_1^2 - v_1 + U_{11}) + \Psi_2(-v_1\omega_1 - \varkappa\omega_1 + U_{12}) + \\ + \Psi_3 v_1 \cos\psi_1 + \Psi_4 v_1 \sin\psi_1 + \Psi_5 \mu\omega_1 + \Psi_6(\omega_2^2 - v_2 + U_{21}) + \\ + \Psi_7(-v_2\omega_2 - \varkappa\omega_2 + U_{22}) + \Psi_8 v_2 \cos\psi_2 + \Psi_9 v_2 \sin\psi_2 + \Psi_{10}\mu\omega_2.$$

При этом U_1^* существует только при $\gamma_2^2 > \varepsilon_1$ и может быть найдено из:

$$-\gamma_2^2 U_1^{*\top} U_1^* + \varepsilon_1 U_1^{*\top} U_1^* + \Psi_1^* U_{11}^* + \Psi_2^* U_{12}^* = \\ = \max_{U_{11}, U_{12}} \left(-\gamma_2^2 U_1^\top U_1 + \varepsilon_1 U_1^\top U_1 + \Psi_1^* U_{11} + \Psi_2^* U_{12} \right)$$

Получаем

$$U_{11}^* = \frac{\Psi_1^*}{2(\gamma_2^2 - \varepsilon_1)}, \quad U_{12}^* = \frac{\Psi_2^*}{2(\gamma_2^2 - \varepsilon_1)}.$$

Для поиска sup по U_2 запишем:

$$-\varepsilon_2 U_2^{*\top} U_2^* + \Psi_6^* U_{21}^* + \Psi_7^* U_{22}^* = \max_{U_{21}, U_{22}} \left(-\varepsilon_2 U_2^\top U_2 + \Psi_6^* U_{21} + \Psi_7^* U_{22}\right)$$

Откуда

$$U_{21}^* = \frac{\Psi_6^*}{2\varepsilon_2}, \quad U_{22}^* = \frac{\Psi_7^*}{2\varepsilon_2}.$$

Заключение

В данной работе была построена модель системы состоящей из двух объектов, участвующих в антагонистической игре преследования. Была поставлена задача поиска оптимального управления.

Далее необходимо реализовать алгоритм поиска оптимальных параметров вспомогательной системы и промоделировать полученные результаты, используя пакет MATLAB.