

N.B. I presenti appunti, dal cap. 1 al cap. 4, sono destinati esclusivamente agli studenti del corso di Elementi di Analisi Matematica 2 (a.a. 2021-2022) da noi tenuto presso il CdL in Informatica dell'Università di Catania, ed è vietato ogni altro utilizzo. Ringraziamo fin da ora coloro che ci segnaleranno eventuali refusi.

proff. G.R. Cirimi, O. Naselli

Capitolo 4

SERIE NUMERICHE

4.1 PRIME DEFINIZIONI

Sia data una successione di numeri reali $\{a_n\}$.

La somma di tutti i suoi termini viene indicata con uno dei simboli

$$a_1 + a_2 + \cdots a_n + \cdots$$

oppure

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4.1}$$

ed è chiamata serie numerica di termine generale a_n . Per attribuire un significato, eventualmente numerico, alla serie, si introducono le seguenti somme (con un numero finito di addendi):

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}, n > 1. \end{aligned}$$

Fissato $n \in \mathbb{N}$ il numero s_n si chiama *somma parziale di posto n* (o *somma parziale n -esima*) della serie (4.1) e si può scrivere anche nella forma

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Il comportamento al limite della successione $\{s_n\}$ delle somme parziali è chiamato *carattere* della serie.

Precisamente:

- se $s_n \rightarrow s$, si dice che la serie **converge** ed ha *somma* s , e si scrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

- se $s_n \rightarrow +\infty(-\infty)$, si dice che la serie **diverge positivamente** (**negativamente**)
- se $\{s_n\}$ è non regolare, si dice che la serie è **indeterminata** o **oscillante** o **non regolare**

Studiare il carattere di una serie numerica vuol dire stabilire se è regolare o no e, in caso di regolarità, se è convergente o divergente positivamente o divergente negativamente.

ESEMPIO 1 Sia $k \in \mathbf{R}$.

La serie di termine generale

$$a_n = k, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ha la somma parziale n -esima

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0 \\ kn & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi se $k = 0$ converge ed ha somma 0, se $k > 0$ diverge positivamente, se $k < 0$ diverge negativamente.

ESEMPIO 2 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

ha somma parziale n -esima

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e dunque diverge positivamente.

ESEMPIO 3 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

è indeterminata, in quanto la somma parziale n -esima è data da

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

e quindi $\{s_n\}$ non è dotata di limite.

ESEMPIO 4 Sia $\{x_n\}$ una successione numerica. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - x_{n+1})$$

è detta *serie telescopica*.

La sua somma parziale di posto n è

$$s_n = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \cdots + (x_{n-1} - x_n) + (x_n - x_{n+1}) = x_1 - x_{n+1}$$

e quindi la serie

- converge ed ha somma $x_1 - l$ se $\lim x_n = l \in \mathbb{R}$;
- diverge positivamente (negativamente) se $\lim x_n = +\infty (-\infty)$;
- è indeterminata se non esiste il $\lim x_n$.

Ad esempio, se $x_n = \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$, la serie telescopica (serie di Mengoli)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

converge ad 1.

ESEMPIO 5 Sia $x \in \mathbf{R}$. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

si chiama *serie geometrica di ragione x*.

Se $x = 1$ la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ e diverge positivamente.

Se $x \neq 1$, la somma parziale di posto n è

$$s_n = 1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Poichè

$$\lim x^n \begin{cases} = +\infty & \text{se } x > 1 \\ = 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

la serie geometrica

- diverge positivamente se $x > 1$;
- converge ed ha somma $\frac{1}{1-x}$ se e solo se $-1 < x < 1$;
- è indeterminata se $x \leq -1$.

Ad esempio,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2.$$

ESEMPIO 6 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

si chiama *serie armonica*. La somma parziale n -esima è

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Diversamente dagli esempi precedenti, in questo caso non riusciamo a trovare un'espressione analitica della successione $\{s_n\}$ che consente di determinarne il limite. Osserviamo, tuttavia, che poichè

$$e = \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \right\}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\left(1 + \frac{1}{k} \right)^k < e$$

e dunque

$$\log \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k < 1$$

che implica

$$\log \frac{k+1}{k} < \frac{1}{k}. \quad (4.2)$$

Utilizzando la disuguaglianza (4.2) si ottiene

$$\begin{aligned} s_n &> \log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \cdots + \log \frac{n+1}{n} \\ &= \log \left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{n+1}{n} \right) \\ &= \log(n+1) \end{aligned}$$

cioè

$$s_n > \log(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dato che

$$\lim \log(n+1) = +\infty$$

per il Teorema del confronto sulle successioni, si ottiene che

$$\lim s_n = +\infty$$

e quindi la serie armonica diverge positivamente.

4.2 RISULTATI GENERALI

.

Per le serie numeriche convergenti vale la seguente

Teorema 1 (Condizione necessaria per la convergenza) *Se la serie (4.1) converge allora*

$$\lim a_n = 0$$

.

Dimostrazione Basta osservare che $a_n = s_n - s_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

OSSERVAZIONE 1 La condizione espressa dal Teorema 1 è una condizione **solo necessaria** per la convergenza, ma non sufficiente, cioè

$$\lim a_n = 0 \quad \nRightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{converge.}$$

Ad esempio,

$$\lim \frac{1}{n} = 0$$

ma la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge positivamente.

Applicando il Criterio di convergenza di Cauchy alla successione delle somme parziali si dimostra il seguente

Teorema 2 (Criterio di convergenza di Cauchy) *Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie (4.1) sia convergente è la seguente:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{N} : \forall n > \alpha, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Definizione 1 (Serie resto) Sia $p \in \mathbb{N}$.

La serie

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$$

ottenuta dalla serie (4.1) sopprimendo i suoi primi p termini, è detta resto di posto p della (4.1).

Si ha subito la seguente

Proposizione 1 *Una serie e tutti i suoi resti hanno il medesimo carattere.*

In particolare, in caso di convergenza si ha:

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - (a_1 + \cdots + a_p)$$

Dimostrazione Basta osservare che, indicata con S_n la somma parziale n -esima della serie resto, si ha

$$\begin{aligned} S_n &= a_{p+1} + \cdots + a_{p+n} \\ &= s_{n+p} - s_p \end{aligned}$$

e che la successione $\{s_{n+p}\}$ ha lo stesso comportamento al limite di $\{s_n\}$ essendo definitivamente uguale ad essa.

ESEMPIO 7 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

è il primo resto della serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$ quindi è convergente e la sua somma è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1.$$

Utilizzando la Proposizione 1 possiamo provare la seguente

Proposizione 2 *Se due serie differiscono per un numero finito di termini, esse hanno lo stesso carattere.*

Dimostrazione Accanto alla serie (4.1), consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{4.3}$$

e supponiamo che $b_n \neq a_n$ solo per un numero finito di indici, siano essi n_1, \dots, n_k . Se $p = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, i resti di posto p delle due serie coincidono, la tesi segue allora dalla Proposizione 1.

Proposizione 3 *Sia $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Allora, la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} k a_n$$

è regolare se e solo se la serie (4.1) è regolare.

In particolare

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad converge \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} k a_n \quad converge$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n;$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge positivamente}$$

\Downarrow

$$\sum_{n=1}^{\infty} k a_n \begin{cases} \text{diverge positivamente} & \text{se } k > 0 \\ \text{diverge negativamente} & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge negativamente}$$

\Downarrow

$$\sum_{n=1}^{\infty} k a_n \begin{cases} \text{diverge negativamente} & \text{se } k > 0 \\ \text{diverge positivamente} & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

Dimostrazione Basta osservare che le somme parziali della serie (3) sono $S_n = k s_n$.

Alla luce della Proposizione 3, la serie dell'esempio 7 può essere rivista come ottenuta moltiplicando per $\frac{1}{2}$ i termini della serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$, ottenendo ancora una volta che la somma è $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Definizione 2 Date le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

si chiama *serie somma*.

Vale la seguente

Proposizione 4 Se $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $S = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, si ha $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + S$. Se una delle due serie converge e l'altra diverge, o entrambe divergono con lo stesso segno, la serie somma diverge.

Dimostrazione Basta osservare che le somme parziali della serie somma si ottengono sommando le somme parziali delle due serie.

Ci sono due categorie di serie per le quali, a partire da considerazioni sul termine generale, si possono avere informazioni sul carattere della serie. Una è quella delle serie i cui termini hanno tutti lo stesso segno, l'altra è quella delle serie i cui termini sono alternativamente positivi e negativi.

4.3 SERIE A TERMINI DI SEGNO COSTANTE

Grazie alla Proposizione 3 senza ledere la generalità possiamo supporre che $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Osserviamo subito che, in questo caso, si ha

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La successione delle somme parziali è dunque crescente, quindi

$$\exists \lim s_n = \sup\{s_n\}.$$

Pertanto, vale il seguente

Teorema 3 (Regolarità delle serie a termini non negativi) Ogni serie a termini non negativi è regolare.

Precisamente, la serie converge se e solo se la successione delle somme parziali è limitata superiormente, e in tal caso la somma della serie è l'estremo superiore delle somme parziali.

Esponiamo alcuni criteri utili per stabilire il carattere di una serie a termini non negativi.

Teorema 4 (Criterio del confronto) *Siano*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

due serie a termini non negativi, tali che

$$a_n \leq b_n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ o definitivamente.}$$

Allora si ha:

i) se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

ii) se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Dimostrazione Il risultato segue subito osservando che, indicate rispettivamente con s_n e S_n le somme parziali delle due serie, si ha $s_n \leq S_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare, in caso di convergenza, indicate rispettivamente con s e S le somme delle due serie, si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n \leq S_n \leq S$$

e quindi $s \leq S$.

Teorema 5 (Criterio del confronto asintotico.) *Siano*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

due serie a termini positivi.

i) se $\lim \frac{a_n}{b_n} = l > 0$ le due serie hanno lo stesso carattere

ii) se $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

iii) se $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge positivamente allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge positivamente.

Dimostrazione. i) Basta osservare che, definitivamente, si ha

$$\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq 2l b_n$$

e applicare il criterio precedente.

ii), iii) Basta osservare che, definitivamente, si ha $a_n \leq b_n$ e anche stavolta applicare il criterio precedente.

OSSERVAZIONE 2 Ricordiamo che se

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$$

si dice che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono asintotiche e si scrive $a_n \sim b_n$. Invece, se

$$\lim a_n = \lim b_n = 0$$

e

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$$

si dice che $\{a_n\}$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\{b_n\}$ e si scrive $a_n = o(b_n)$.

ESEMPIO 8 Sia $a_n > 0 \forall n \in \mathbf{N}$ e supponiamo che

$$\lim 2^n a_n = 3.$$

Cosa si può dire sul carattere della serie di termine generale a_n ? Dall'ipotesi segue che

$$a_n \sim \frac{3}{2^n}$$

e, dato che la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, anche la serie di termine generale a_n converge.

ESEMPIO 9 Sia $a_n > 0 \forall n \in \mathbf{N}$ e supponiamo che

$$\lim a_n = +\infty \quad \text{e} \quad \lim \frac{a_n}{n} = 0.$$

Cosa si può dire sul carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}?$$

Dall'ipotesi segue che $\lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{a_n}} = 0$, quindi $\frac{1}{n} = o(\frac{1}{a_n})$, ne segue che la serie considerata diverge.

Teorema 6 (Criterio del rapporto.) *Sia*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

una serie a termini positivi tale che

$$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

i) Se $l > 1$ oppure $l = +\infty$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge positivamente;

ii) se $l < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Dimostrazione *i)* Per il teorema della permanenza del segno generalizzato esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \forall n > \nu$ ovvero

$$a_{n+1} > a_n, \forall n > \nu.$$

La successione $\{a_n\}$ è definitivamente crescente e, pertanto,

$$\lim a_n = \sup\{a_n, n > \nu\} > 0.$$

Poichè il termine generale della serie non tende a zero, per il Teorema 1 la serie non converge e quindi diverge positivamente.

ii) Sia $h \in]l, 1[$. Come nel caso precedente esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che se $n > \nu$ si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} < h$ quindi $a_{n+1} < ha_n$. Si ha dunque

$$a_{\nu+1} < ha_\nu$$

$$a_{\nu+2} < ha_{\nu+1} < h^2 a_\nu$$

...

$$a_{n+\nu} < h^n a_\nu.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} h^n a_\nu$ converge perchè ha lo stesso carattere della serie geometrica di ragione h e, per il Teorema del confronto, anche la serie data converge.

ESEMPIO 10 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}n!}.$$

Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}(n+1)!} \frac{3^{n+1}n!}{2^n} = \frac{2}{3(n+1)} \rightarrow 0$$

quindi la serie converge.

ESEMPIO 11 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{n+2}n!}.$$

Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+3}(n+1)!} \frac{2^{n+2}n!}{n^n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{e}{2} > 1$$

quindi la serie diverge.

OSSERVAZIONE 3 Se $l = 1$ il criterio non fornisce alcuna informazione: ad esempio la serie armonica diverge positivamente mentre, come vedremo dopo, la serie di termine generale $\frac{1}{n^2}$ converge e in entrambi i casi si ha $l = 1$.

Teorema 7 (Criterio della radice) *Sia*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

una serie a termini non negativi tale che

$$\exists \lim \sqrt[n]{a_n} = l.$$

. Allora si ha

i) se $l > 1$ oppure $l = +\infty$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge positivamente;

ii) se $l < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

Dimostrazione. *i)* Si ha, definitivamente, $\sqrt[n]{a_n} > 1$ ovvero $a_n > 1$, quindi il termine generale della serie non può tendere a zero e per il Teorema 1 la serie diverge positivamente.

ii) Sia $h \in]l, 1[$. Allora esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per $n > \nu$ si ha $\sqrt[n]{a_n} < h$ quindi

$$a_n < h^n \quad \forall n > \nu,$$

e la serie converge per confronto con la serie geometrica di ragione h .

ESEMPIO 12 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+4} \right)^n.$$

Si ha

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{3n+4} \rightarrow \frac{1}{3},$$

quindi la serie converge.

OSSERVAZIONE 4 Anche in questo caso, se $l = 1$ il criterio non fornisce alcuna informazione. La serie armonica diverge positivamente mentre, come vedremo dopo, la serie di termine generale $\frac{1}{n^2}$ converge e in entrambi i casi si ha $l = 1$.

Teorema 8 (Criterio di Raabe.) *Sia*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

una serie a termini positivi tale che

$$\exists \lim n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = l.$$

Allora si ha:

i) se $l > 1$ oppure $+\infty$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

ii) se $l < 1$ oppure $-\infty$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge positivamente.

Omettiamo la dimostrazione del criterio di Raabe, lo utilizziamo per studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

detta *serie armonica generalizzata di esponente x* , essendo x un numero reale. Si ha

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= n \left(\frac{\frac{1}{n^x}}{\frac{1}{(n+1)^x}} - 1 \right) = \\ n \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^x - 1 \right) &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^x - 1}{\frac{1}{n}} \rightarrow x \end{aligned}$$

quindi la serie armonica generalizzata converge se e solo se $x > 1$ (il caso $x = 1$ era già noto).

Teorema 9 (Criterio del confronto con la serie armonica generalizzata)

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

una serie a termini non negativi. Se esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che

$$\lim n^x a_n = l > 0$$

allora si ha

i) se $x > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

ii) se $x \leq 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge positivamente.

Dimostrazione Basta osservare che

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^x}} \rightarrow l$$

ed applicare il Criterio del confronto asintotico .

OSSERVAZIONE 5 . Il criterio appena esposto è anche detto **Criterio dell'ordine di infinitesimo** perché se $\{a_n\}$ è infinitesima ⁽¹⁾ dal fatto che $n^x a_n \rightarrow l > 0$ segue che $a_n \sim \frac{l}{n^x}$, ossia che $\{a_n\}$ è infinitesimo di ordine x rispetto all'infinitesimo campione $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Utilizzando i criteri sulle serie a termini non negativi, siamo in grado di introdurre una classe di serie che possono essere studiate abbastanza facilmente.

4.4 SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI

Accanto alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (4.4)$$

si consideri la serie dei valori assoluti

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (4.5)$$

che è a termini non negativi.

Definizione 3 Diremo che la serie (4.4) è assolutamente convergente se la serie (4.5) è convergente.

Si ha il seguente risultato

Teorema 10 Una serie assolutamente convergente è convergente.

Dimostrazione. Basta applicare il criterio di Cauchy e osservare che per ogni $n, p \in \mathbb{N}$ si ha

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|$$

¹Se $\lim a_n \neq 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge positivamente

ESEMPIO 13 (SERIE ESPONENZIALE) Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

essendo $x \in \mathbf{R}$.

Per $x = 0$ conveniamo che $x^{n-1} = 1$ se $n = 1$, pertanto essa converge ed ha somma 1 .

Per $x > 0$ possiamo studiarla con il criterio del rapporto; poiché si ha

$$\frac{x^n}{n!} \frac{(n-1)!}{x^{n-1}} \rightarrow 0$$

la serie converge.

Se $x < 0$ la serie dei valori assoluti è quella di termine generale $\frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}$ e converge perché rientra nel caso precedente. La serie esponenziale, dunque, converge (assolutamente) per ogni $x \in \mathbf{R}$.

OSSERVAZIONE 6 In generale

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge} \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge assolutamente}$$

Infatti, nel prossimo paragrafo vedremo che la serie armonica a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge, ma non è assolutamente convergente.

4.5 SERIE A SEGNI ALTERNI

Data una successione $\{a_n\}$ di numeri positivi (o negativi), consideriamo la serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \tag{4.6}$$

i cui termini di posto dispari sono positivi e quelli di posto pari sono negativi (o viceversa). Se la successione $\{a_n\}$ è monotona è possibile stabilire dei criteri che permettono di studiare il carattere della serie (4.6).

Premettiamo il seguente risultato.

Lemma 1 *Se la successione $\{a_n\}$ è monotona, la serie (4.6) non può divergere.*

Dimostrazione. Per fissare le idee, supponiamo che la successione $\{a_n\}$ sia decrescente. Indichiamo con $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali e proviamo che la sua estratta $\{s_{2n}\}$ è una successione crescente. Si ha infatti, dato che $\{a_n\}$ è decrescente, $a_{2n+1} > a_{2n+2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) > s_{2n}$$

dunque la successione $\{s_{2n}\}$ è crescente, quindi non può divergere a $-\infty$. Allo stesso modo si prova che la successione $\{s_{2n-1}\}$ delle somme parziali di posto dispari è decrescente, quindi non può divergere a $+\infty$. Ne segue la tesi.

Siamo in grado ora di stabilire i seguenti criteri:

Teorema 11 (Criterio di Leibniz.) *Supponiamo che la successione $\{a_n\}$ sia decrescente e che*

$$\lim a_n = 0.$$

Allora, la serie (4.6) è convergente e, indicata con s la sua somma si ha

$$|s - s_n| \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.7)$$

Dimostrazione. Dal lemma precedente segue che la serie non diverge; per provare che converge basta dimostrare che $\{s_{2n}\}$ e $\{s_{2n-1}\}$ convergono allo stesso limite. Come osservato nella dimostrazione del lemma, $\{s_{2n-1}\}$ è decrescente, ed essendo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$s_{2n-1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + a_{2n-1}$$

essa è a termini non negativi, in quanto è somma di addendi non negativi e quindi è limitata inferiormente. Pertanto, $\{s_{2n-1}\}$ non tende a $-\infty$ ma ad un numero $s = \inf s_{2n-1}$.

Osserviamo che

$$s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \rightarrow s$$

e la convergenza della serie è dunque acquisita. Inoltre, dato che $\{s_{2n}\}$ è crescente, si ha $s = \sup s_{2n}$.

Proviamo ora la disuguaglianza (4.7). Sia $n \in \mathbf{N}$. Se n è pari, si ha $s \geq s_n$ quindi la (4.7) equivale a $s - s_n \leq a_{n+1}$, ovvero $s \leq s_{n+1}$, che è vera in quanto $n+1$ è dispari. Se n è dispari, si ha $s \leq s_n$ quindi la (4.7) equivale a $s_n - s \leq a_{n+1}$, ovvero $s \geq s_{n+1}$, che è vera in quanto $n+1$ è pari.

Teorema 12 (Criterio di non regolarità.) *Se la successione $\{a_n\}$ è crescente ed ha almeno un termine positivo, oppure è decrescente e non tende a zero, la serie (4.6) è indeterminata.*

Dimostrazione. Sotto le ipotesi fatte

$$\lim a_n \neq 0$$

e per il Teorema 1 la serie non può convergere. D'altra parte per il Lemma 1 non può divergere, dunque essa è indeterminata.

ESEMPIO 14 (SERIE ARMONICA ALTERNATA) Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Dal criterio di Leibniz segue che essa converge.

ESEMPIO 15 (SERIE LOGARITMICA) Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

essendo $x \in \mathbf{R}$. Per $x = 0$ essa converge ed ha somma zero. Per $x > 0$ possiamo studiarla con il criterio del rapporto; poi ch 

$$\lim \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{n}{x^n} = x$$

la serie converge per $0 < x < 1$ e diverge per $x > 1$.

Se $x = 1$ diverge (  la serie armonica).

Se $x < 0$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|x|^n}{n}$$

che   a segni alterni.

Se $-1 < x < 0$ allora $|x| < 1$ e la serie dei valori assoluti per il caso precedente   convergente, quindi la serie logaritmica   assolutamente convergente.

Se $x = -1$ la serie logaritmica converge (  la serie armonica alternata).

Se $x < -1$, trattandosi di una serie a segni alterni, studiamo la monotonia della successione $\left\{ \frac{|x|^n}{n} \right\}$. Precisamente, proviamo che definitivamente si ha

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} > \frac{n}{x^n}.$$

Questa disuguaglianza equivale infatti a $|x| > \frac{n+1}{n}$, che definitivamente   vera perch  $|x| > 1$ e il secondo membro tende ad 1. In definitiva, la serie logaritmica converge se e solo se $-1 \leq x < 1$.

ESEMPIO 16 Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n+2}$$

essendo $x \in \mathbf{R}$.

Per $x = 0$ essa converge ed ha somma zero.

Per $x > 0$ possiamo studiarla con il criterio del rapporto, si ha

$$\lim \frac{(2x)^{n+1}}{n+3} \frac{n+2}{(2x)^n} = 2x,$$

quindi se $0 < x < \frac{1}{2}$ la serie converge, se $x > \frac{1}{2}$ diverge. Per $x = \frac{1}{2}$ diverge essendo il secondo resto della serie armonica.

Se $x < 0$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |2x|^n}{n+2}$$

e quindi è a segni alterni. Se $-\frac{1}{2} < x < 0$ la serie converge assolutamente, per $x = -\frac{1}{2}$ converge non assolutamente essendo il secondo resto della serie armonica alternata.

Se $x < -\frac{1}{2}$ studiamo la monotonia della successione

$$\left\{ \frac{|2x|^n}{n+2} \right\}.$$

Verifichiamo che definitivamente si ha

$$\frac{|2x|^n}{n+2} < \frac{|2x|^{n+1}}{n+3}.$$

Quest'ultima disuguaglianza equivale a $\frac{n+3}{n+2} < |2x|$ che definitivamente è vera perché $|2x| > 1$ e il secondo membro tende ad 1.