Chapitre 3.

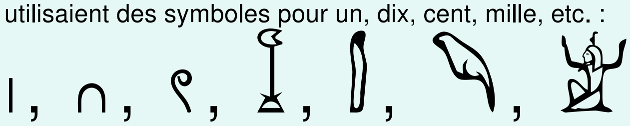
Ensembles de nombres

Les savoir-faire du parcours

- Savoir placer un nombre dans un ensemble.
- Savoir déterminer si un nombre appartient à un ensemble donné.

Les mathématiciennes et mathématiciens

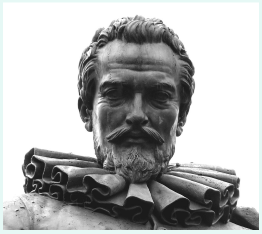
Pour représenter les nombres, nous utilisons de nos jours l'écriture décimale, mais ça n'a pas toujours été ainsi !
Les égyptiens, par exemple, utilisaient des symboles pour un, dix, cent, mille, etc. :



et pour représenter par exemple cent-vingt-trois :

Nous utilisons encore parfois les nombres romains : les symboles pour 1,5,10,50,100,500,1000 sont I,V,X,L,C,D,M, et la valeur d'un symbole dépend un peu de sa position : le I dans VI vaut 1, mais dans IV il vaut -1.

Les indiens dès le Ve siècle ont inventé un système très proche de notre système actuel, et les arabes, à partir du VIIe siècle, ont développé des techniques de calcul et les ont diffusées en Europe, avec peu de succès. Les nombres non entiers sont encore réprésentés par des fractions.
Ce n'est qu'au XVIIe siècle, sous l'impulsion de Simon Stévin, que les européens adoptent le système décimal pour représenter les nombres entiers mais aussi les nombres décimaux sans utiliser de fraction.



Simon Stévin, 1548–1620

Compétence.

1 Si possible : introduire les nombres « normaux base 10 » et faire chercher aux eleves leur date de naissance dans les décimales de $\sqrt{5}$ par exemple.

1 L'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$

Définition 1 : Nombre décimal.

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire avec une partie décimale finie.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemple 2 : Nombres décimaux.

$$0\ ;\ 3\ ;\ -5\ ;\ 7,33\ ;\ \frac{3}{100}\ ;\ \frac{21}{700}$$

sont des décimaux. Par contre, on peut démontrer que $\frac{1}{3}$; $\sqrt{2}$; π ne sont pas des décimaux.

Propriété 3.

Les nombres décimaux sont les nombres de la forme $\frac{a}{10^p}$ avec a appartenant à $\mathbb{Z}$ et p appartenant à $\mathbb{N}$.

Remarque 4.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$

Propriété 5.

Démonstration exigible

$\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Preuve : Par l'absurde. On suppose que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal, alors par propriété : $\exists a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$.
Donc $10^p = a \times 3$ (produit en croix) donc 3 est un diviseur de 10^p or $10^p = 2^p \times 5^p$ (décomposition en facteurs

premiers). Donc 3 ne peut pas diviser 10^p (l'hypothèse est donc absurde). Ainsi, on peut affirmer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

2 L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

Définition 6.

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p appartenant à $\mathbb{Z}$ et q appartenant à $\mathbb{N}^*$.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Remarque 7.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Propriété 8.

Démonstration exigible
$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Preuve : Par l'absurde :
On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, alors par définition :

$$\exists p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

On suppose que $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ donc $\sqrt{2} \times q = p$ donc $(\sqrt{2} \times q)^2 = p^2$ donc $2 \times q^2 = p^2$ et p^2 est donc un nombre pair.
Si le carré d'un nombre est pair alors on peut affirmer que ce nombre est pair donc p est un nombre pair : $\exists p_1 \in \mathbb{N}$ tels que $p = 2 \times p_1$ donc $2 \times q^2 = p^2 = (2 \times p_1)^2 = 4 \times p_1^2$.
Donc $q^2 = 2 \times p_1^2$ et q^2 est donc un nombre pair. Si le carré d'un nombre est pair alors on peut affirmer que ce nombre est pair donc q est un nombre pair.

Les entiers p et q sont pairs donc la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible, l'hypothèse est donc absurde.
Ainsi, on peut affirmer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Représenter.

2 Parmi les nombres suivants, déterminer ceux qui sont dans $\mathbb{D}$, puis ceux qui sont dans $\mathbb{Q}$.

$$-3\ ;\ 12,723\ ;\ \frac{6}{15}\ ;\ \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\ ;\ 3\sqrt{2}$$

....

....

....

/b/ABCD

Calculer. Raisonner

3 Utiliser une calculatrice pour donner une valeur approchée de $\left(\frac{665857}{470832}\right)^2$

A-t-on $\frac{665857}{470832} = \sqrt{2}$?

/b/ABCD

Représenter.

4

1. Donner un exemple de nombre décimal égal à une fraction dont le dénominateur est 7.
2. Donner un exemple de nombre rationnel qui admet une écriture fractionnaire dont le dénominateur est $\sqrt{2}$.
3. Donner un exemple de nombre décimal égal à une fraction *irréductible*, dont le dénominateur n'est pas une puissance de 10.

/b/ABCD

Représenter.

5

1. Démontrer que le produit de deux décimaux est un décimal.
2. Lorsqu'on divise un nombre décimal par un nombre décimal non nul, obtient-on toujours un nombre décimal ?
3. Démontrer que le produit de deux rationnels est un rationnel.
4. Lorsqu'on divise un nombre rationnel par un nombre rationnel non nul, obtient-on toujours un nombre rationnel ?

/b/ABCD

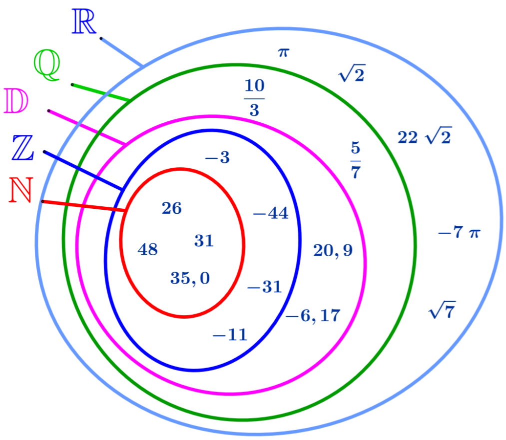
3 L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

Définition 9.

L'ensemble des nombres réels est l'ensemble de tous les nombres que vous connaissez en seconde.
L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Remarque 10.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Compétence.

6

/b/ABCD

Compétence.

7

Compétence.

8

Compétence.

9

Compétence.

10

Compétence.

11

Compétence.

12

On va démontrer dans cet exercice que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. On va procéder *par l'absurde*, c'est-à-dire que l'on va supposer le contraire (donc, que $\sqrt{2}$ est rationnel) et aboutir à une contradiction.
On suppose donc que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, alors par définition :

$$\exists p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

On suppose que $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible.

1. En élevant l'égalité $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ au carré, démontrer que $2q^2 = p^2$.
2. Qu'en déduit-on concernant la parité de p^2 ?
3. Justifier que le carré d'un entier impair est un entier impair. En déduire que p est pair.
   Il existe donc un entier p_1 tel que $p = 2 \times p_1$.
4. Démontrer que $q^2 = 2p_1^2$, et en déduire que q est pair.
5. Le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{p}{q}$ sont tous les deux pairs, cette fraction est-elle irréductible ?
6. Conclure.

Compétence.

13

On sait que les nombres rationnels sont les nombres dont les décimales se répètent à partir d'un certain moment (on dit qu'elles sont *périodiques à partir d'une certain rang*) comme par exemple $12,1\,34\,34\,34\,34\ldots$ (le motif « 34 » se répétant à l'infini) ou $5,2$, qui s'écrit aussi $5,20000$ (le chiffre 0 se répétant à l'infini). La question est alors : étant donné un nombre rationnel x donné par son écriture décimale, déterminer une fraction dont égale à x.

1. Prenons $x = 12,1\,34\,34\,34\,34\ldots$ (le motif « 34 » se répétant à l'infini), le motif a donc 2 chiffres. Donner l'écriture décimale de 10^2x, puis celle de $10^2x - x$, c'est-à-dire $99x$
2. En Déduire que $x = \frac{1201,3}{99}$, puis donner une fraction égale à x

Compétence.

14

Compétence.

15

Compétence.

16

Compétence.

17

Compétence.

18

Compétence.

19

Compétence.

20

Compétence.

21

Compétence.

22

Compétence.

23

Compétence.

24

Compétence.

25

Compétence.

26

Compétence.

27

Compétence.

28

/b/ABCD