Mathématiques 2 : le livre sacado

L'équipe SACADO

10 août 2023

Chapitre I.

Arithmétique

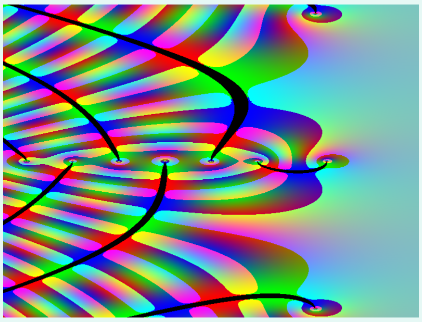
Les savoir-faire du parcours

- **Utiliser des nombres pour calculer et résoudre des problèmes**
- Connaitre les bases de l'arithmétique
- Simplifier une fraction pour la rendre irréductible

Les mathématiciennes et mathématiciens

Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'Homme
Leopold Kronecker

L'arithmétique est la branche des mathématiques qui étudie les nombres entiers et les opérations $+$, $-$, $\times$, $\div$,... Comme le relève la citation en exergue, les concepts de l'arithmétique sont élémentaires et fondamentaux.
Mais cela ne signifie pas que les problèmes de l'arithmétique sont simples. Par exemple, les nombres premiers sont source de nombreux problèmes non résolus à ce jour, en particulier l'*hypothèse de Riemann* qui porte sur la *fonction zêta* et qui est reliée à la répartition des nombres premiers.
L'importance de l'arithmétique dépasse les mathématiques : la plupart des cryptosystèmes (algorithmes qui permettent la sécurité des communications sur internet) sont fondés sur l'arithmétique.



Une représentation de la fonction zêta de Riemann

1 Chercher.

Pour fêter les 25 ans de sa boutique, un chocolatier souhaite offrir aux premiers clients de la journée une boîte contenant des truffes au chocolat. Il a confectionné 300 truffes : 125 truffes parfumées au café et 175 truffes enrobées de noix de coco, et toutes les boîtes devront être identiques : elles devront contenir le même nombre de truffes café, et le même nombre de truffes noix de coco.
Combien, au minimum, y aura-t-il de truffes de chaque sorte dans chaque boîte ?

1 Les entiers naturels et entiers relatifs

Définition 1: Entiers naturels et relatifs..

1. On appelle **entiers naturels** les nombres : $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots$ Leur ensemble est noté $\mathbb{N}$., on a donc : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3 \ldots\}$
2. On appelle **entiers relatifs** ou simplement **entiers** les nombres entiers naturels et leurs opposés. Leur ensemble est noté $\mathbb{Z}$ (d'après le mot allemand Zahl qui signifie chiffre, nombre). On a donc : $\mathbb{Z} = \{\ldots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 \cdots\}$
Parfois, on dit abusivement que les nombres entiers sont les nombres sans partie décimale.

2 Multiples et diviseurs

Définition 2: Multiple.

Soit d un nombre entier. Le nombre m est dit **multiple** de d s'il existe un entier $q \in \mathbb{Z}$ tel que $m = qd$. Dans ce cas, on dit aussi que d est un **diviseur** de m.

Exemples 3.

$35 = 5 \times 7$ où $7 \in \mathbb{Z}$ donc 35 est un multiple de 5 et 5 est un diviseur de 35. Comme $5 \in \mathbb{Z}$, on peut aussi dire que 35 est un multiple de 7 et que 7 est un diviseur de 35.
1 est un diviseur de tous les entiers, et tous les entiers divisent 0.

Définition 4: Nombre premier.

Un **nombre premier** est un nombre entier naturel qui a exactement 2 diviseurs positifs (qui sont alors 1 et lui-même)

Exemple 5.

19 est un nombre premier : il n'est divisible que par 1 et lui-même.
1 n'est pas premier, car il n'a qu'un seul diviseur.

Définition 6: Nombres pairs et impairs.

Un **nombre pair** est un nombre entier divisible par 2, autrement dit un nombre entier n est pair lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.
Un entier n est un **nombre impair** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.

Exemples 7.

$46 = 2 \times 23$ et $23 \in \mathbb{Z}$ donc 46 est un nombre pair.
$15 = 2 \times 7,5$. Comme $7,5 \notin \mathbb{Z}$, 15 n'est pas pair. Par contre, $15 = 2 \times 7 + 1$ avec $7 \in \mathbb{Z}$, donc 15 est impair.

Théorème 8: Décomposition en facteurs premiers.

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers.

Exemples 9.

Les décompositions en facteurs premiers de 8, 15 et 19 sont respectivement $8 = 2^3$; $15 = 3 \times 5$; $19 = 19$.

Définition 10: Nombres premiers entre eux.

Deux nombres entiers a et b sont **premiers entre eux** lorsque leur seul diviseur positif commun est 1.

Exemple 11.

Les diviseurs positifs de 8 sont $1 ; 2 ; 4$ et 8. Ceux de 15 sont $1 ; 3 ; 5$ et 15. Le seul diviseur commun est 1 et 8 **et** 15 **sont donc premiers entre eux** (Pourtant, ils ne sont pas premiers)

3 Logique

Définition 12: Proposition universelle.

Une **proposition universelle** est une proposition qui porte sur tous les éléments d'un ensemble.

Exemple 13.

Le théorème de décomposition en facteurs premiers est une proposition universelle (et elle est vraie).

Définition 14: Contre-exemple.

Un **contre-exemple** est un cas particulier qui vient contredire une proposition universelle.

Exemple 15.

Considérons une proposition universelle : « tous les nombres sont pairs ». Pour démontrer que cette proposition est fausse, il suffit de démontrer qu'un seul nombre n'est pas pair. La contradiction vient sur le mot **tous**.
$3 = 2 \times 1,5$ et $1,5 \notin \mathbb{Z}$ donc 3 n'est pas pair. **Il existe des nombres non-pairs**, la proposition universelle initiale est fausse.

Utiliser les multiples et les diviseurs

2 Calculer.

1. Déterminer les 10 premiers multiples positifs de 4 : ....

2. Déterminer les 10 premiers multiples positifs de 6 : ....

3. Déterminer tous les multiples communs de 4 et de 6 : ....

/b/ABCD

3 Calculer.

51 est-il un nombre premier ? Justifier.

....

....

/b/ABCD

4 Calculer.

Décomposer 24 en produit de facteurs premiers.

....

....

....

/b/ABCD

5 Calculer.

Simplifier la fraction $\dfrac{735}{840}$

....

....

....

/b/ABCD

6 Calculer, raisonner.

Soit a un entier. Démontrer que la somme de deux multiples de a est un multiple de a. ....

....

....

/b/ABCD

7 Raisonner.

Vrai ou faux : quel que soit l'entier n, $2n-1$ est un nombre premier. Justifier. ....

....

/b/ABCD

8 Raisonner.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La différence de deux nombres entiers naturels est un entier naturel. ....

2. Le quotient de deux nombres décimaux non nuls est un nombre décimal. ....

3. Il existe deux nombres premiers distincts dont le quotient est un entier relatif. ....

4. Il existe deux nombres premiers distincts dont le quotient est un nombre décimal. ....

/b/ABCD

Représenter.

9

1. Décomposer 186 et 155 en produit de facteurs premiers. ....

....

....

2. Déterminer le PGCD (plus grand diviseur commun) de 186 et 155. ....

....

3. Un chocolatier a fabriqué 186 pralines et 155 chocolats qu'il répartit dans des colis. Les colis sont constitués ainsi :
   - Le nombre de pralines est le même dans chaque colis.
   - Le nombre de chocolats est le même dans chaque colis.
   - Tous les chocolats et toutes les pralines sont utilisés.

   (a) Quel nombre maximal de colis pourra-t-il réaliser ? ....

....

....

   (b) Combien y aura-t-il de chocolats et de pralines dans chaque colis ? ....

....

....

/b/ABCD

Raisonner.

10

Simplifier la fraction $\dfrac{2310}{2730}$ pour la rendre irréductible. ....

....

Raisonner.

11

Démontrer que le produit de deux entiers consécutifs est pair. ....

....

Chercher.

12

Proposer deux nombres premiers entre eux. ....

....

Chercher. Raisonner.

13

Les produits de deux nombres premiers est-il un nombre premier ? Justifier. ....

....

Chercher.

14

Je suis un nombre à trois chiffres non nuls. Je suis divisible par 94. Changez l'ordre de mes chiffres d'une certaine manière, et je deviens divisible par 49. Qui suis-je ? ....

....

....

....

....

Représenter.

15 On veut démontrer que la proposition universelle $\mathcal{P}$ suivante : « La somme de deux nombres impairs est un nombre pair » est vraie.

1. Calculer $a = 5 + 7$. Peut-on en déduire que la proposition P est vraie ?
2. Soient n et m deux nombres impairs. Il existe donc deux entiers relatifs k et q tels que $n = 2k + 1$ et $m = 2q + 1$. Calculer $n + m$ en fonction de k et q. ....

....

....

3. En déduire que la somme $n + m$ est un nombre pair. ....

....

....

Représenter.

16 Démontrer que si p est pair alors p^2 est pair.

....

....

....

....

....

....

Raisonner.

17 Démontrer que tout nombre entier n multiple de 9 est un multiple de 3. ....

....

....

....

....

....

Raisonner.

18 Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3. ....

....

....

....

....

....

Raisonner.

19

Démontrer que si n est impair alors n^2 est impair.

....

....

....

....

....

Raisonner.

20

On donne le programme en Python ci dessous.

```
def is_divisible(x,y):
    if x%y == 0 :
        test = "{} est divisible par {}".format(x,y)
    else :
        test = "{} n'est pas divisible par {}".format(x,y)
    return test

n=int(input("Entrer un nombre n :"))

print(is_divisible(n,4))
```

1. Que fait ce programme ? On pourra tester le programme avec l'éditeur : https://sacado.xyz/tool/show/18

....

....

2. Modifier le programme pour qu'il teste si un nombre a divise n.

Raisonner.

21

Dans un pays où le système fiduciaire (les pièces et les billets) n'est constitué que de pièces de 3 et de 5, il s'agit d'aider les habitants en créant un algorithme qui donne le nombre minimal de pièces nécessaires à tout achat d'un montant entier supérieur ou égal à 8.
Pour tester l'algorithme, on peut utiliser l'éditeur Python : https://sacado.xyz/tool/show/18

Source : d'après PISA, items libérés

Raisonner.

22

Le crible d'Eratosthène

L'algorithme procède par élimination : il s'agit de rayer d'une table d'entiers tous les multiples d'un entier n (autres que lui-même), et d'entourer tous les autres.
En supprimant tous ces multiples, à la fin il ne restera que les entiers qui ne sont multiples d'aucun entier à part 1 et eux-mêmes, et qui sont donc les nombres premiers.
On commence par entourer deux, puis on barre tous les multiples de 2 à partir de 4. On entoure alors le premier nombre non rayé ni entouré, qui est 3, et on raye puis les multiples de 3 sauf 3. Puis on entoure le premier nombre non rayé ni entouré, qui est 5, et on raye tous les multiples de 5 sauf 5... On répète l'opération jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'entier à rayer.

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

1. Exécuter le crible sur la table ci-contre.
2. Quel est le résultat de ce crible ? ....

....

....

3. Écrire un code en Python du crible d'Eratosthène : https://sacado.xyz/tool/show/18

Raisonner.

23

Simplifier le nombre $a = \dfrac{60}{126}$ pour la rendre irréductible. ....

....

....

....

Raisonner.

24

Simplifier le nombre $b = \dfrac{12a+4}{8}$. ....

....

Raisonner.

25

Le produit de deux nombres impairs est-il impair ? ....

....

....

....

Raisonner.

26

Soit n un entier.
Démontrer que la différence de deux multiples de n est un multiple de n. ....

....

....

....

....

....

Raisonner.

27

Pour déterminer le PGCD de deux entiers naturel a et b (avec $b \neq 0$), on effectue la division euclidienne de a par b. On appelle r_0 le reste.
Puis on divise b par r_0 et on appelle r_1 le reste.
On divise alors r_0 par r_1 et on appelle r_2 le reste.
On divise alors r_1 par r_2 et on appelle r_3 le reste. Et ainsi de suite, jusqu'à obtenir un reste nul. Le PGCD de a et de b est alors le dernier reste non nul (ou b si le premier reste est déjà nul). On appelle ce procédé « la méthode par divisions successives » ou « l'algorithme d'Euclide ».

1. Déterminer à l'aide de ce procédé le PGCD de 912 et de $1\,104$. ....

....

....

2. Un carreleur doit carreler une pièce rectangulaire de 912cm par $1\,104$cm en utilisant des carreaux carrés. Le travail sera grandement facilité si :
   - il n'a pas de découpe à faire : il disposera un nombre entier de carreaux sur la longueur et sur la largeur de la pièce ;
   - il utilise le moins possible de carreaux, donc les carreaux sont les plus grands possibles.

   (a) Quel est le côté c des carreaux qui répond à ces deux contraintes ?

   (b) Combien de carreaux seront disposés en longueur ? en largeur ? Combien de carreaux seront utilisés au total ?