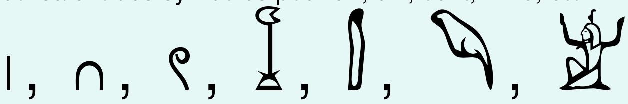
Chapitre 3. Ensembles de nombres

Les savoir-faire du parcours

- Savoir placer un nombre dans un ensemble.
- Savoir déterminer si un nombre appartient à un ensemble donné.

Les mathématiciennes et mathématiciens

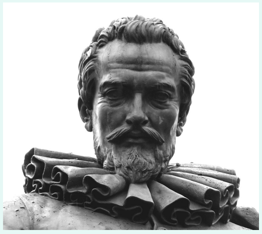
Pour représenter les nombres, nous utilisons de nos jours l'écriture décimale, mais ça n'a pas toujours été ainsi !
Les égyptiens, par exemple, utilisaient des symboles pour un, dix, cent, mille, etc. :



et pour représenter par exemple cent-vingt-trois :

Nous utilisons encore parfois les nombres romains : les symboles pour 1,5,10,50,100,500,1000 sont I,V,X,L,C,D,M, et la valeur d'un symbole dépend un peu de sa position : le I dans VI vaut 1, mais dans IV il vaut -1.

Les indiens dès le V[e] siècle ont inventé un système très proche de notre système actuel, et les arabes, à partir du VII[e] siècle, ont développé des techniques de calcul et les ont diffusées en Europe, avec peu de succès. Les nombres non entiers sont encore réprésentés par des fractions.
Ce n'est qu'au XVII[e] siècle, sous l'impulsion de Simon Stévin, que les européens adoptent le système décimal pour représenter les nombres entiers mais aussi les nombres décimaux sans utiliser de fraction.



Simon Stévin, 1548–1620

1

Compétence.

1 L'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$

Définition 1 : Nombre décimal.

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire avec une partie décimale finie.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemple 2 : Nombres décimaux.

$$0\ ;\ 3\ ;\ -5\ ;\ 7,33\ ;\ \frac{3}{100}\ ;\ \frac{21}{700}$$

sont des décimaux. Par contre, on peut démontrer que $\frac{1}{3}$; $\sqrt{2}$; π ne sont pas des décimaux.

Propriété 3.

Les nombres décimaux sont les nombres de la forme $\frac{a}{10^p}$ avec a appartenant à $\mathbb{Z}$ et p appartenant à $\mathbb{N}$.

Remarque 4.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$

Propriété 5.

Démonstration exigible
$\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Preuve : Par l'absurde. On suppose que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal, alors par propriété : $\exists a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$.
Donc $10^p = a \times 3$ (produit en croix) donc 3 est un diviseur de 10^p or $10^p = 2^p \times 5^p$ (décomposition en facteurs

premiers). Donc 3 ne peut pas diviser 10^p (l'hypothèse est donc absurde). Ainsi, on peut affirmer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

2 L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

Définition 6.

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p appartenant à $\mathbb{Z}$ et q appartenant à $\mathbb{N}^*$.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Remarque 7.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Propriété 8.

Démonstration exigible
$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Preuve : Par l'absurde :
On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, alors par définition :

$$\exists p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

On suppose que $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ donc $\sqrt{2} \times q = p$ donc $(\sqrt{2} \times q)^2 = p^2$ donc $2 \times q^2 = p^2$ et p^2 est donc un nombre pair.
Si le carré d'un nombre est pair alors on peut affirmer que ce nombre est pair donc p est un nombre pair : $\exists p_1 \in \mathbb{N}$ tels que $p = 2 \times p_1$ donc $2 \times q^2 = p^2 = (2 \times p_1)^2 = 4 \times p_1^2$.
Donc $q^2 = 2p_1^2$ et q^2 est donc un nombre pair. Si le carré d'un nombre est pair alors on peut affirmer que ce nombre est pair donc q est un nombre pair.
Si p est un nombre pair et que q est un nombre pair alors la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible, l'hypothèse est donc absurde.
Ainsi, on peut affirmer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Représenter.

2 Parmi les nombres suivants, déterminer ceux qui sont dans $\mathbb{D}$, puis ceux qui sont dans $\mathbb{Q}$.

$$-3\ ;\ 12,723\ ;\ \frac{6}{15}\ ;\ \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\ ;\ 3\sqrt{2}$$

....

....

....

/b/ABCD

Calculer. Raisonner

3 Utiliser une calculatrice pour donner une valeur approchée de $\left(\frac{665857}{470832}\right)^2$

A-t-on $\frac{665857}{470832} = \sqrt{2}$?

/b/ABCD

Représenter.

4

1. Donner un exemple de nombre décimal égal à une fraction de deux entiers, dont le dénominateur est 7.
2. Donner un exemple de nombre rationnel égal à une fraction dont le dénominateur est $\sqrt{2}$
3. Donner un exemple de nombre décimal égal à une fraction *irréductible* de deux entiers, dont le dénominateur n'est pas une puissance de 10.

/b/ABCD

Représenter.

5

1. Démontrer que le produit de deux décimaux est un décimal.
2. Lorsqu'on divise un nombre décimal par un nombre décimal non nul, obtient-on toujours un nombre décimal ?

/b/ABCD

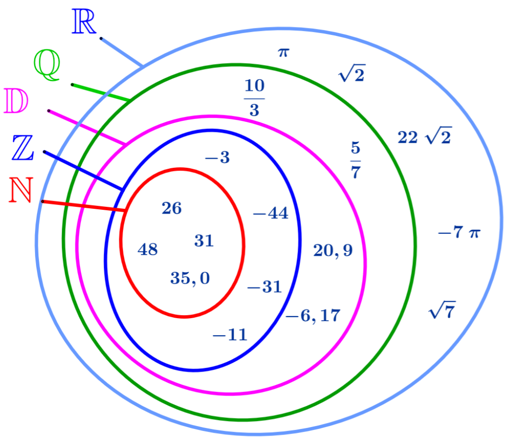
3 L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

Définition 9.

L'ensemble des nombres réels est l'ensemble de tous les nombres que vous connaissez en seconde.
L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Remarque 10.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



6

Compétence.

/b/ABCD

7

Compétence.

8

Compétence.

9

Compétence.

10

Compétence.

11

Compétence.

Compétence.

12

Compétence.

13

Compétence.

14

Compétence.

15

Compétence.

16

Compétence.

17

Compétence.

18

Compétence.

19

Compétence.

20

Compétence.

21

Compétence.

22

Compétence.

23

Compétence.

24

Compétence.

25

Compétence.

26

Compétence.

27

Compétence.

28

/b/ABCD