

Mémoire de Master :
Compliance normale et contact sans frottement

Stephane Robin sous la direction de Franz Chouly



Présenté le 5 octobre 2015 à l'Université de Franche Comté

Remerciements

Je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements à Monsieur Franz Chouly professeur à l'université de Franche Comté pour m'avoir guidé, conseillé et soutenu durant l'élaboration de ce mémoire. Ses explications claires, sa disponibilité malgré un emploi du temps chargé et ses encouragements ont largement contribué à ma compréhension du sujet.

Je voudrais également souligner la gentillesse avec laquelle il a su me garder motivé durant certaines périodes de découragement. Il en ressort que j'ai particulièrement apprécié de travailler sous sa direction.

Son enseignement m'a ouvert l'esprit vers le domaine de la modélisation mathématique et m'a permis de réfléchir à un thème jusqu'alors inconnu de mon cursus universitaire et professionnel.

Acknowledgement

I would like to express my most sincere thanks to Mister Franz Chouly, Franche Comté university professor, for having guided, advised and supported me during the development of this thesis. His clear explanations, availability in light of a full schedule and his encouragement largely contributed to my understanding of the subject.

I equally valued his way of motivating me during periods of discouragement. Consequently, I genuinely appreciated working under his direction.

His teaching enriched my knowledge in the domaine of mathematical modelling and gave me the opportunity to think about a subject that hadn't been part of my university and professional experience until now.

Table des matières

Remerciements	2
Préambule	8
1. Modélisation du problème de contact	11
Section 1. Formulation classique du problème de contact	13
Section 2. Formulation faible du problème de contact	16
1. Présentation de la formulation faible	16
2. Notations	16
3. Calculs préliminaires	16
3.a. V est un espace de Hilbert	16
3.b. K est un convexe fermé	17
3.c. a est continue, symétrique et coercive sur $V \times V$	18
3.d. L est une forme linéaire continue	19
4. Recherche d'une formulation faible au problème de contact	19
5. La solution du problème faible réalise le minimum de l'énergie	20
6. Le problème faible est bien posé	21
6.a. Le problème faible admet une solution unique	21
6.b. Estimation a priori	22
2. Modélisation du problème pénalisé	23
Section 1. Le problème sans contact	23
1. Formulation classique du problème sans contact	23
2. Le champ des contraintes	24
2.a. Lorsque les forces volumiques sont positives	25
2.b. Lorsque les forces volumiques sont négatives	26
3. Formulation faible du problème sans contact	28
Section 2. Le problème de compliance normale	30
1. Présentation de la pénalisation	30
2. La condition de contact pénalisée	30
3. Rappels préliminaires	30
4. Formulation classique du problème pénalisé	31
5. Formulation faible du problème pénalisé	31
6. Le problème faible pénalisé est bien posé	31
6.a. Le problème faible pénalisé admet une solution unique	32
6.b. Estimation a priori	34
6.c. Estimation a priori de l'erreur	35
7. Que se passe-t-il lorsque le paramètre de pénalisation tend vers 0 ?	36

8. Que se passe-t-il lorsque le paramètre de pénalisation tend vers l'infini ?	37
3. Résolution numérique du problème pénalisé	39
Section 1. Discrétisation par éléments finis	40
1. Création d'un maillage	40
2. V_h est un espace de Hilbert de dimension n	40
3. Validation du protocole de calcul de la méthode des éléments finis	41
3.a. Lorsque les forces volumiques sont positives	44
3.b. Lorsque les forces volumiques sont négatives	46
4. Recherche d'une formulation faible pénalisée discrète	46
5. Convergence de la méthode des éléments finis lorsque h tend vers 0	47
Section 2. Résolution par la méthode du point fixe	49
1. Présentation de la méthode du point fixe	49
2. Construction de la méthode du point fixe	49
3. Algorithme de résolution par la méthode du point fixe	50
4. Sensibilité au paramètre de pénalisation	52
4.a. Lorsque les forces volumiques sont positives	52
4.b. Lorsque les forces volumiques sont négatives	55
5. Interprétation des résultats	57
Section 3. Résolution par la méthode de Newton	59
1. Présentation de la méthode de Newton	59
2. Construction de la méthode de Newton	59
3. Algorithme de résolution par la méthode de Newton	61
4. Sensibilité au paramètre de pénalisation	63
4.a. Lorsque les forces volumiques sont positives	63
4.b. Lorsque les forces volumiques sont négatives	66
4.c. Interprétation des résultats	69
Annexe : Programmation des solutions en <i>Python</i>	70
Conclusion	88
Bibliographie	90
Index	92

Table des figures

0.1	Le solide élastique	12
1.1	Le solide élastique lorsqu'il n'est soumis à aucune contrainte	23
1.2	La solution analytique du problème sans contact et le champ des contraintes pour f positif	25
1.3	Déformation du solide élastique dilaté - problème sans contact	26
1.4	Contraintes exercées sur le solide dilaté - problème sans contact	26
1.5	La solution analytique du problème sans contact et le champ des contraintes pour f négatif	27
1.6	Déformation du solide élastique comprimé - problème sans contact	28
1.7	Contraintes exercées sur le solide comprimé - problème sans contact	28
1.1	La fonction ϕ_i	40
1.2	Comparaison des solutions analytique et numérique pour $n = 5, 10, 100$ et f positif	45
1.3	Comparaison des solutions analytique et numérique pour $n = 5, 10, 100$ et f négatif	46
2.4	La norme du résidu en fonction du nombre d'itérations, pour des valeurs de ε supérieures à 5	53
2.5	La solution numérique du problème pénalisé pour f positif et $\varepsilon = 5$	53
2.6	La déformation du solide élastique pour f positif et $\varepsilon = 5$	54
2.7	La norme du résidu converge vers 0 grâce à l'effet de la relaxation pour f positif et $\varepsilon = 1$	54
2.8	La solution numérique du problème pénalisé avec effet de relaxation pour f positif et $\varepsilon = 1$	55
2.9	La déformation du solide en utilisant un effet de relaxation pour f positif et $\varepsilon = 1$	55
2.10	La norme du résidu pour f négatif et $\varepsilon = 1$	56
2.11	La solution numérique du problème de contact pénalisé pour f négatif et $\varepsilon = 1$	56
2.12	La déformation du solide élastique pour f négatif et $\varepsilon = 1$	57
2.13	Les contraintes sur le solide élastique pour f négatif et $\varepsilon = 1$	57
3.14	Evolution de $\ S^{(k)}\ $ pour chaque itération k en faisant varier ε pour f positif	64
3.15	La solution numérique du problème pénalisé pour f positif et $\varepsilon = 0.01$	64
3.16	La déformation du solide élastique pour f positif et $\varepsilon = 0.01$	65
3.17	Les contraintes exercées sur le solide élastique pour f positif et $\varepsilon = 0.01$	65
3.18	Variation des solutions obtenues en fonction des valeurs de ε	66
3.19	Déformation du solide en fonction des valeurs de ε	66
3.20	Evolution de $\ S^{(k)}\ $ pour chaque itération k en faisant varier ε pour f négatif	67
3.21	La solution numérique du problème pénalisé pour f négatif et $\varepsilon = 0.01$	67
3.22	La déformation du solide élastique pour $f(x) = -2$ et $\varepsilon = 0.01$	68

3.23	La déformation du solide élastique pour $f(x) = -3$ et $\varepsilon = 0.01$	68
3.24	Les contraintes exercées sur le solide élastique pour f négatif et $\varepsilon = 0.01$	69
3.25	La solution numérique du problème pénalisé pour f négatif et $\varepsilon = 100$	69

Préambule

PRÉSENTATION DU PROJET

Nous cherchons à étudier le contact unilatéral sans frottement en dimension un. Pour cela, nous considérons un solide élastique rectangulaire fixé sur sa partie supérieure et pouvant entrer en contact avec un support rigide dans sa partie basse. Nous allons tout d'abord formuler le problème en dimension deux, puis nous simplifierons ce problème en dimension un au regard des hypothèses de travail choisies.

Notre étude consistera dans un premier temps à modéliser le problème de contact par une formulation classique, puis à déterminer une formulation variationnelle moins régulière et donc moins restrictive. L'intérêt de cette approche est de pouvoir disposer des propriétés des espaces de Hilbert et de la méthode des éléments finis pour déterminer des solutions numériques approchées. Nous vérifierons qu'un tel problème est bien posé.

Nous introduirons ensuite la pénalisation, méthode de modélisation consistant à contrôler la profondeur de pénétration dans le support rigide par approximation des conditions de contact. Nous vérifierons également que le problème présenté sous cette forme est bien posé.

La discrétisation du problème nous permettra alors d'utiliser deux méthodes de résolution : la méthode du point fixe et la méthode de Newton. Nous ferons ressortir les difficultés rencontrées avec une méthode pour finalement obtenir la solution numérique à l'aide de l'autre méthode. Les algorithmes de résolution sont rédigés en langage *Python 3.4*.

NOTATIONS

Tout au long de notre étude, nous utiliserons les notations suivantes :

- l'écriture en caractères gras représente un vecteur ou un champ vectoriel,
- les matrices et le tenseur d'élasticité sont représentés par des lettres en majuscule.
 $Tr(A) = A_{11} + A_{22}$ représente la trace de la matrice A ,
- \mathbb{P}_1 est l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'une variable réelle de degré inférieur ou égal à 1

- $\mathcal{D}(0;1)$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $[0,1]$
- $\mathcal{D}'(0;1)$ est l'espace des distributions sur $[0,1]$
- l'espace $L^2(0;1)$ des fonctions de carré intégrable est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx.$$

On rappelle que la norme associée est

$$\|v\| = (v, v)^{1/2} = \left(\int_0^1 (v(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

- l'espace de Sobolev

$$H^1(0;1) = \{v \in L^2(0;1); \exists w \in L^2(0;1), \int_0^1 v(x)\phi'(x)dx = - \int_0^1 w(x)\phi(x)dx, \forall \phi \in C_c^1(0,1)\}$$

est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_1 = (u, v) + (u', v') = \int_0^1 u(x)v(x)dx + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.$$

On rappelle que la norme associée est $\|v\|_1^2 = (v, v)_1 = \|v\|^2 + \|v'\|^2$.

- $H_0^1(0;1) = \{v \in H^1(0;1); \exists \nu_n \in \mathcal{D}(0,1) \text{ tel que } \nu_n \rightarrow v \text{ dans } H^1(0;1)\}$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(0,1)$ dans $H^1(0;1)$ pour la topologie associée à la norme $\|\cdot\|_1$.

On munit $H_0^1(0;1)$ du produit scalaire de $H^1(0;1)$. Dans notre étude, on utilisera la caractérisation suivante $H_0^1(0;1) = \{v \in H^1(0;1); v(0) = v(1) = 0\}$.

Chapitre 1.

Modélisation du problème de contact

L'objet de notre étude est un solide élastique qui occupe initialement un domaine Ω borné de \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé noté $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y$. Tout point \mathbf{x} de Ω s'écrit donc $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$. La frontière de Ω , notée $\partial\Omega$, est partitionnée en trois ouverts disjoints :

- Γ_D correspondant à la partie attachée en haut de la barre, ayant pour largeur l :
 $\Gamma_D = \{0\} \times [0, l]$
- Γ_C correspondant à la partie basse de la barre pouvant entrer en contact avec un support rigide : $\Gamma_C = \{1\} \times [0, l]$
- Γ_N correspondant aux bords latéraux de la barre ayant une longueur initiale égale à 1 :
 $\Gamma_N = \partial\Omega - (\Gamma_C \cup \Gamma_D)$.

Nous noterons également $\mathbf{n} = n_x\mathbf{e}_x + n_y\mathbf{e}_y$ le vecteur unitaire normal sortant à la frontière $\partial\Omega$ et $\mathbf{t} = -n_y\mathbf{e}_x + n_x\mathbf{e}_y$ le vecteur unitaire tangent à cette frontière. Pour tout champ de déplacement \mathbf{u} et toute densité surfacique de forces $\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$, nous adoptons la décomposition suivante en composantes normales et tangentielles : $\mathbf{u} = u_n\mathbf{n} + u_t\mathbf{t}$ et $\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \sigma_n(\mathbf{u})\mathbf{n} + \sigma_t(\mathbf{u})\mathbf{t}$.

Le schéma ci-dessous permet de se faire une idée du système que nous allons étudier :

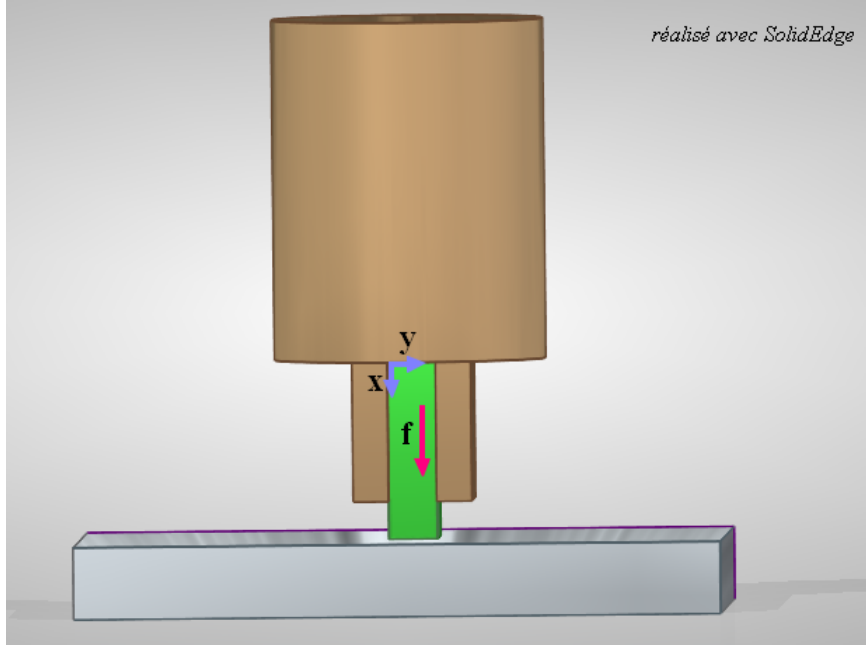


FIGURE 0.1: Le solide élastique

Le solide élastique se déforme sous l'action de forces ou de déplacements imposés, de sorte que chaque point \mathbf{x} occupe une nouvelle position $\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Le déplacement des points du solide est donc représenté par le champ vectoriel $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Par hypothèse de travail, nous limitons volontairement le déplacement de chacun des points du solide le long de l'axe des abscisses, que nous orientons de haut en bas. Le solide pourra par exemple glisser le long d'un guide sur ses bords latéraux. Ainsi $\mathbf{u}(x, y) = u(x)\mathbf{e}_x$. Pour simplifier la modélisation, nous faisons l'hypothèse de petites déformations élastiques. En revanche, nos solutions numériques décrivent bien souvent des situations où les déformations sont visuellement importantes, parfois même au détriment de nos hypothèses d'étude. Nous justifions ce choix par le souhait de rendre plus clair aux yeux du lecteur les résultats que nous obtenons.

Par ailleurs, nous supposons qu'au repos le solide est en contact avec le support rigide et qu'il est fixe sur la frontière Γ_D . Nous considérons également qu'il subit des forces volumiques $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$. En fonction de l'orientation de ces forces, le solide décollera ou entrera en contact avec le support.

Section 1. FORMULATION CLASSIQUE DU PROBLÈME DE CONTACT

Dans le domaine de l'élasticité linéaire, on ne considère que des petits déplacements et de petites déformations. L'état de déformation d'un système résultant d'efforts internes est alors représenté par un champ tensoriel appelé tenseur des déformations, noté $\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}}{2}$ pour un vecteur déplacement \mathbf{u} .

Dans le cadre de notre étude ce tenseur des petites déformations devient $\varepsilon(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u'(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

L'état de contrainte d'un solide, c'est à dire la description des efforts intérieurs au système, est représenté par un champ tensoriel appelé le tenseur des contraintes de Cauchy, noté $\sigma(\mathbf{u})$ pour un vecteur déplacement \mathbf{u} . Le comportement supposé linéaire, homogène et isotrope du matériau nous permet de déterminer ce tenseur des contraintes en utilisant la loi de Hooke, à savoir $\sigma(\mathbf{u}) = 2\mu_L \varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda_L \text{Tr}(\varepsilon(\mathbf{u})) Id$ dans Ω , où μ_L et λ_L sont les coefficients de Lamé caractéristiques du comportement du matériau. On pourra considérer μ_L et λ_L strictement positifs dans la suite de nos calculs.

Dans le cadre de notre étude, ce tenseur des contraintes devient

$$\sigma(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} (2\mu_L + \lambda_L)u'(x) & 0 \\ 0 & \lambda_L u'(x) \end{pmatrix}.$$

On définit le problème de contact sans frottement dans sa formulation classique continue par les équations suivantes :

- l'équilibre du système est donné par l'équation $\text{div}(\sigma(\mathbf{u})) + \mathbf{f} = \mathbf{0}$ dans Ω
- le comportement du matériau lorsqu'il se déforme est donné par la loi de Hooke $\sigma(\mathbf{u}) = 2\mu_L \varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda_L \text{Tr}(\varepsilon(\mathbf{u})) Id$ dans Ω
- sur Γ_D , la barre est fixée sur sa partie supérieure, ce que nous noterons $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur Γ_D (condition de Dirichlet homogène)
- sur Γ_N , le glissement est donné par $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, c'est à dire que le déplacement est orthogonal à la normale
- sur Γ_C sont définies les conditions de contact unilatéral, qui sont les suivantes : les points de contact ne peuvent pas pénétrer le socle, la réaction du socle est dirigée vers l'intérieur du solide, si un point de contact décolle alors il n'y a pas réaction du socle, si il y a une réaction alors il existe un contact.
Ces conditions expriment qu'en cas de contact, c'est le solide qui se déforme et qu'il ne peut y avoir d'interpénétration entre le solide et le socle. Elles se traduisent par $u_n \leq 0$, $\sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0$ et $\sigma_n(\mathbf{u})u_n = 0$ sur Γ_C .
- L'absence de frottement entraîne la condition $\sigma_t(\mathbf{u}) = 0$ sur Γ_C

Ainsi, en dimension deux, la formulation classique du problème de contact sans frottement consiste à :

déterminer $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) + \mathbf{f} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega$$

$$\sigma(\mathbf{u}) = 2\mu_L \varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda_L \operatorname{Tr}(\varepsilon(\mathbf{u})) \operatorname{Id} \text{ dans } \Omega$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N$$

$$u_n \leq 0, \sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0 \text{ et } \sigma_n(\mathbf{u})u_n = 0 \text{ sur } \Gamma_C$$

$$\sigma_t(\mathbf{u}) = 0 \text{ sur } \Gamma_C.$$

Au regard de l'hypothèse de travail selon laquelle le déplacement \mathbf{u} ne dépend que de la variable x , nous pouvons réécrire la formulation classique du problème en dimension un.

- comme $\sigma(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} (2\mu_L + \lambda_L)u'(x) & 0 \\ 0 & \lambda_L u'(x) \end{pmatrix}$,

$$\text{on en déduit que } \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) = \begin{pmatrix} (2\mu_L + \lambda_L)u''(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Etant donné que la barre se déplace uniquement selon l'axe des abscisses, nous supposons que les forces volumiques ne dépendent que de x .

Nous écrirons donc $\mathbf{f}(x, y) = f(x)\mathbf{e}_x$ pour tout $(x, y) \in \Omega$.

Ainsi, $\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) + \mathbf{f} = \mathbf{0}$ dans Ω devient $(2\mu_L + \lambda_L)u''(x) + f(x) = 0$ pour $0 < x < 1$.

- $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur Γ_D devient $u(0) = 0$
- sur Γ_N on obtient $\mathbf{u} = u(x)\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{n} = \mathbf{e}_y$, donc l'équation $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ est bien vérifiée
- comme $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ sur Γ_C , on en déduit que

$$\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \begin{pmatrix} (2\mu_L + \lambda_L)u'(x) & 0 \\ 0 & \lambda_L u'(x) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\mu_L + \lambda_L)u'(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = (2\mu_L + \lambda_L)u'(x)\mathbf{e}_x \text{ sur } \Gamma_C, \text{ c'est à dire } \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = (2\mu_L + \lambda_L)u'(x)\mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_C.$$

$$\text{Donc } \sigma_n(\mathbf{u})(1) = (2\mu_L + \lambda_L)u'(1).$$

$$\text{Ainsi, } \sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C \text{ devient } (2\mu_L + \lambda_L)u'(1) \leq 0, \text{ donc } u'(1) \leq 0.$$

$$\text{De même } \sigma_n(\mathbf{u})u = 0 \text{ sur } \Gamma_C \text{ devient } u'(1)u(1) = 0.$$

$$\text{On vérifie par ailleurs que } \sigma_t(\mathbf{u}) \text{ est bien nul sur } \Gamma_C.$$

Ainsi, en dimension un, la formulation classique du problème de contact sans frottement consiste à :

déterminer $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$(2\mu_L + \lambda_L)u''(x) + f(x) = 0 \text{ pour } 0 < x < 1 \quad (1.1)$$

$$u(0) = 0$$

$$u(1) \leq 0, u'(1) \leq 0, u'(1)u(1) = 0.$$

Section 2. FORMULATION FAIBLE DU PROBLÈME DE CONTACT

1. Présentation de la formulation faible

La formulation faible est une autre manière d'énoncer un problème régi par une équation différentielle. Nous allons chercher une solution du problème moins régulière et donc moins restrictive, en écrivant celui-ci sous sa forme variationnelle, c'est à dire relative aux valeurs obtenues à travers des fonctions tests. L'intérêt de cette approche est de pouvoir disposer des propriétés des espaces de Hilbert et de la méthode des éléments finis pour déterminer des solutions numériques approchées.

2. Notations

Nous allons utiliser les propriétés de l'espace de Hilbert $H^1(0; 1)$. Pour cela, nous allons définir :

- le sous espace vectoriel $V = \{v \in H^1(0; 1); v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\} = \{v \in H^1(0; 1); v(0) = 0\}$ des déplacements admissibles satisfaisant la condition de Dirichlet $v(0) = 0$
- le convexe fermé $K = \{v \in V; v \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\} = \{v \in V; v(1) \leq 0\}$ des déplacements admissibles satisfaisant la condition de non pénétration dans le socle rigide.

Nous aurons également besoin des applications suivantes :

- la forme bilinéaire

$$a : \begin{cases} (H^1(0; 1))^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx \end{cases}$$

- la forme linéaire

$$L : \begin{cases} H^1(0; 1) \rightarrow \mathbb{R} \\ L(v) = \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \int_0^1 f(x)v(x)dx \end{cases} .$$

3. Calculs préliminaires

3.a. V est un espace de Hilbert

Considérons l'application linéaire $\psi : \begin{cases} H^1(0; 1) \rightarrow \mathbb{R} \\ v \rightarrow \psi(v) = v(0) \end{cases} .$

Le théorème de trace¹ montre que $|v(0)| \leq \|v\|_1$ donc $|\psi(v)| \leq \|v\|_1$ pour tout $v \in H^1(0; 1)$, ce qui montre que l'application ψ est continue.

1. *Théorème de trace* : soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 avec une frontière Γ de classe C^1 par morceaux. Il existe $c > 0$ tel que $\|v|_\Gamma\|_{0,\Gamma} \leq c\|v\|_{1,\Omega}$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$. Le lecteur intéressé pourra trouver une démonstration de ce théorème dans le livre [13]

Comme V est défini par $\{v \in H^1(0, 1); v(0) = 0\}$,
on en déduit que $V = \{v \in H^1(0, 1); \psi(v) = 0\} = \psi^{-1}(\{0\})$.

Comme $\{0\}$ est fermé et que ψ est continu, on en déduit que V est un sous espace fermé de $H^1(0; 1)$, qui est un espace de Hilbert. On en déduit donc que V est également un espace de Hilbert.

3.b. K est un convexe fermé

🔖 Voyons que K est un fermé :

Notons γ_0 l'application trace sur V .

Comme $v(0) = 0$ pour tout $v \in K$ (car $K \subset V$) et $v(1) \leq 0$ pour tout $v \in K$, on en déduit que $\gamma_0(v) \leq 0$ pour tout $v \in K$.

On peut donc réécrire K de la façon suivante :

$$K = \{v \in V; v(1) \leq 0\} = \{v \in V; \gamma_0(v) \leq 0\} = \gamma_0^{-1}(]-\infty, 0]).$$

Comme $]-\infty, 0]$ est le complémentaire de l'ouvert $]0, +\infty[$, on en déduit que $]-\infty, 0]$ est fermé.

Le théorème de trace nous assure que l'application trace γ_0 est continue sur $H^1(0; 1)$, donc sur V .

On en déduit que K est l'image réciproque d'un fermé par une application continue,

donc K est un fermé.

🔖 Voyons que K est convexe :

c'est à dire que toute combinaison convexe de deux éléments de K reste dans K .

Soit $v, w \in K$, alors $v(1) \leq 0$ et $w(1) \leq 0$.

Pour tout $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$, $\alpha v(1) + \beta w(1) \leq 0$.

Par ailleurs $\alpha v + \beta w \in V$ car V est un espace vectoriel,

donc $\alpha v + \beta w \in K$,

donc K est convexe.

3.c. a est continue, symétrique et coercive sur $V \times V$

☞ On montre que a est continue pour la norme $\|\cdot\|_1$:

En effet,

$$|a(v, w)| = \left| \int_0^1 v'(x)w'(x)dx \right| \leq \int_0^1 |v'(x)||w'(x)|dx \text{ pour tout } v, w \in V.$$

Comme $v, w \in V$, on en déduit que $v', w' \in L^2(0; 1)$. On peut donc appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz² pour obtenir $|a(v, w)| \leq \|v'\| \|w'\| \leq \|v\|_1 \|w\|_1$.

On en déduit la continuité de la forme bilinéaire a .

☞ On montre que a est symétrique :

En effet

$$a(v, w) = \int_0^1 v'(x)w'(x)dx = \int_0^1 w'(x)v'(x)dx = a(w, v) \text{ pour tout } v, w \in V.$$

☞ On montre que a est coercive³ :

En effet, la définition de la norme $\|\cdot\|_1$ nous permet d'écrire $\|v\|_1^2 = \|v'\|^2 + \|v\|^2$

donc $\|v\|_1^2 \leq \|v'\|^2 + \|v\|^2 + 2\|v\|\|v'\| = (\|v'\| + \|v\|)^2$ pour tout $v \in V$.

Ainsi $\|v\|_1 \leq \|v'\| + \|v\|$.

Afin d'utiliser le lemme de Petree Tartar⁴, nous avons besoin de montrer que l'opérateur dérivation est linéaire continu et injectif de V dans $L^2(0; 1)$.

La linéarité de l'opérateur dérivation est assurée par construction.

Soit $v \in V$. Comme $\|v'\|^2 \leq \|v'\|^2 + \|v\|^2 = \|v\|_1^2$, on en déduit que $\|v'\| \leq \|v\|_1$ pour tout $v \in V$, ce qui assure la continuité de l'opérateur dérivation de V dans $L^2(0; 1)$.

Soit $v \in V$. Supposons maintenant que $v' = 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v = \alpha$. Comme $v \in V$, on en déduit que $v(0) = 0$, donc $\alpha = 0$. Ainsi $v = 0$ et l'opérateur dérivation est injectif de V dans $L^2(0; 1)$. On remarque que l'opérateur dérivation ne serait pas forcément injectif de $H^1(0; 1)$ dans $L^2(0; 1)$, puisque la condition décisive est $v(0) = 0$. C'est la raison pour laquelle nous choisissons d'appliquer le lemme de Petree Tartar à l'espace de Hilbert V .

2. Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|(v, w)| \leq \|v\| \|w\|$ pour tout $v, w \in L^2(0; 1)$

3. Forme bilinéaire coercive : a est une forme bilinéaire coercive sur $V \times V$ ssi il existe $c > 0$ tel que $a(v, v) \geq c\|v\|_1^2$ pour tout $v \in V$

4. Lemme de Petree Tartar : si il existe $c > 0$ tel que $\|v\|_1 \leq c(\|D(v)\| + \|T(v)\|)$ pour tout $v \in H^1(0; 1)$ où D est un opérateur linéaire continu injectif et T est un opérateur linéaire continu compact, alors il existe $\eta > 0$ tel que $\|v\|_1 \leq \eta\|D(v)\|$ pour tout $v \in H^1(0; 1)$.

Comme par ailleurs le domaine $[0, 1]$ est borné, le théorème de Rellich⁵ nous assure que l'injection canonique de $H^1(0; 1)$ dans $L^2(0; 1)$ est compacte.

Nous pouvons donc appliquer le lemme de Petree Tartar et affirmer l'existence de $\eta > 0$ tel que $\|v\|_1 \leq \eta \|v'\|$ pour tout $v \in V$.

Or

$$a(v, v) = \int_0^1 v'(x)^2 dx = \|v'\|^2.$$

On en déduit que $\eta^2 a(v, v) = \eta^2 \|v'\|^2 \geq \|v\|_1^2$,

donc $a(v, v) \geq \frac{1}{\eta^2} \|v\|_1^2$ pour tout $v \in V$ (car $\eta \neq 0$),

donc a est bien coercive.

3.d. L est une forme linéaire continue

L est clairement linéaire par linéarité de l'intégrale et

$$|L(v)| = \left| \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \int_0^1 f(x)v(x)dx \right| \leq \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \int_0^1 |f(x)v(x)|dx \text{ pour tout } v \in H^1(0; 1).$$

On déduit de l'inégalité de Cauchy Schwarz que $|L(v)| \leq \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \|f\| \|v\|$.

Comme $f \in L^2(0; 1)$, si on note $c = \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \|f\|$, on en déduit qu'il existe $c > 0$ tel que $|L(v)| \leq c \|v\| \leq c \|v\|_1$, donc L est une forme linéaire continue sur $H^1(0; 1)$.

4. Recherche d'une formulation faible au problème de contact

Soit $u \in V$ une solution de la formulation classique du problème de contact (1.1).

Nous cherchons une formulation variationnelle de ce problème en utilisant une fonction test $v \in V$ dans l'équation $(2\mu_L + \lambda_L)u'' + f = 0$.

Comme $f \in L^2(0; 1)$ par hypothèse sur le terme source, on déduit de l'équation ci-dessus que $u'' \in L^2(0; 1)$.

Comme par ailleurs $v \in V$, on sait que $v \in L^2(0; 1)$.

L'inégalité de Cauchy Schwarz montre alors que

$$\int_0^1 |u''(x)v(x)|dx \leq \|u''\| \|v\| \leq \infty$$

5. *Théorème de Rellich* : soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , de frontière de classe C^1 par morceaux, alors l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.

et

$$\int_0^1 |f(x)v(x)dx| < \|f\| \|v\| < \infty.$$

Les intégrales ci-dessus ont donc bien un sens, ce qui nous permet d'obtenir

$$(2\mu_L + \lambda_L) \int_0^1 u''(x)v(x)dx + \int_0^1 f(x)v(x)dx = 0 \text{ pour tout } v \in V.$$

Une intégration par partie conduit à

$$(2\mu_L + \lambda_L) [u'(x)v(x)]_0^1 - (2\mu_L + \lambda_L) \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 f(x)v(x)dx = 0.$$

Comme $v \in V$, on en déduit que $v(0) = 0$, donc

$$(2\mu_L + \lambda_L) \int_0^1 u'(1)v(1)dx - \int_0^1 (2\mu_L + \lambda_L)u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 f(x)v(x)dx = 0.$$

Comme μ_L et λ_L sont strictement positifs, on obtient $a(u, v) - u'(1)v(1) = L(v)$ pour tout $v \in V$.

On en déduit une formulation faible du problème de contact en tenant compte des conditions de contact unilatéral $u(1) \leq 0, u'(1) \leq 0, u'(1)u(1) = 0$:

$$\begin{aligned} &\text{déterminer } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = u'(1)v(1) + L(v) \text{ pour tout } v \in V \\ &\text{sous la condition de contact } u(1) \leq 0, u'(1) \leq 0, u'(1)u(1) = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Nous allons maintenant exprimer cette formulation faible sous forme d'inéquation variationnelle.

Considérons u une solution du problème (1.1) appartenant à K , alors la condition $u(1) \leq 0$ est implicite.

On remarque que $a(u, v - u) = u'(1)v(1) - u'(1)u(1) + L(v - u)$.

Comme u est solution du problème (1.1), on en déduit que $u'(1) \leq 0$ et $u'(1)u(1) = 0$.

Pour $v \in K$ quelconque, on sait que $v(1) \leq 0$, donc $u'(1)v(1) \geq 0$.

La formulation faible du problème de contact devient donc :

$$\text{déterminer } u \in K \text{ tel que } a(u, v - u) \geq L(v - u) \text{ pour tout } v \in K. \quad (1.3)$$

5. La solution du problème faible réalise le minimum de l'énergie

La solution u du problème faible (1.3) appartient à K et minimise l'énergie potentielle J définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \text{ pour tout } v \in K.$$

Preuve :

Soit u solution du problème faible (1.3), alors $u \in K$.

Pour tout $v \in K$, $J(v) = J(u + v - u) = \frac{1}{2}a(u + v - u, u + v - u) - L(u + v - u)$,

$$J(v) = \frac{1}{2}a(u, u) + \frac{1}{2}a(v - u, v - u) + \frac{1}{2}a(u, v - u) + \frac{1}{2}a(v - u, u) - L(u) - L(v - u).$$

Comme a est symétrique, on en déduit que

$$J(v) = \frac{1}{2}a(u, u) + \frac{1}{2}a(v - u, v - u) + a(u, v - u) - L(u) - L(v - u).$$

Comme u est solution du problème (1.3), on en déduit que $a(u, v - u) - L(v - u) \geq 0$, donc $J(v) \geq J(u) + \frac{1}{2}a(v - u, v - u)$.

Comme a est coercive, on en déduit qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que $a(v - u, v - u) \geq \alpha \|v - u\|_1^2 \geq 0$ pour tout $v \in V$ et en particulier pour tout $v \in K$.

Ainsi $J(v) \geq J(u)$ pour tout $v \in K$ et la solution du problème (1.3) réalise bien le minimum de l'énergie potentielle J . ■

On remarque que ce raisonnement peut s'appliquer de façon réciproque sans modification, et de ce fait, on montre qu'il y a équivalence entre la solution du problème faible (1.3) et la solution du problème d'optimisation : *déterminer $u \in K$ tel que $J(u) = \min_{v \in K} J(v)$ avec $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$ pour tout $v \in K$.*

6. Le problème faible est bien posé

Le problème faible (1.3) est bien posé.

Un problème est bien posé au sens de Hadamard si il admet une solution unique et que cette solution dépend de façon continue des données, c'est à dire qu'une faible perturbation des données entraîne une faible perturbation de la solution.

Nous allons tout d'abord établir que le problème faible (1.3) admet une solution unique, puis établir une estimation a priori de cette solution.

6.a. Le problème faible admet une solution unique

Nous avons établi que V est un espace de Hilbert, K est un sous espace convexe fermé de V , a est une forme bilinéaire continue coercive et L est une forme linéaire continue.

Le théorème de Stampacchia⁶ appliqué à la formulation faible (1.3) : *déterminer $u \in K$ tel que $a(u, v - u) \geq L(v - u)$ pour tout $v \in K$* nous assure que celle-ci admet une solution unique.

6. *Théorème de Stampacchia* : soit V un espace de Hilbert, K un convexe fermé non vide de V , a une forme bilinéaire continue coercive sur V^2 , L une forme linéaire continue sur V . Alors le problème variationnel "trouver $u \in K$ tel que $a(u, v - u) \geq L(v - u)$ pour tout $v \in K$ " admet une solution unique. Le lecteur intéressé pourra trouver une démonstration du théorème de Stampacchia dans le livre [3]

6.b. Estimation a priori

Comme a est coercive, il existe $\alpha > 0$ tel que $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_1^2$ pour tout $v \in V$.

En particulier pour u solution du problème faible (1.2), on obtient $\alpha \|u\|_1^2 \leq a(u, u) = u'(1)u(1) + L(u)$.

Comme u est solution du problème faible (1.2), on en déduit que $u'(1)u(1) = 0$.

On obtient alors $\alpha \|u\|_1^2 \leq L(u)$.

Dans le paragraphe 2.3. *Calculs préliminaires*, nous avons déjà montré que L est une forme linéaire continue avec $|L(v)| \leq \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \|f\| \|v\|_1$ pour tout $v \in H^1(0; 1)$,

donc en particulier $|L(u)| \leq \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \|f\| \|u\|_1$.

On en déduit $\alpha \|u\|_1^2 \leq \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \|f\| \|u\|_1$.

Pour $u \neq 0$, comme $\alpha > 0$, on obtient $\|u\|_1 \leq \frac{\|f\|}{\alpha(2\mu_L + \lambda_L)}$,

Pour $u = 0$, on remarque que l'inégalité précédente est toujours vraie.

On obtient donc l'estimation a priori suivante :

$$\|u\|_1 \leq \frac{\|f\|}{\alpha(2\mu_L + \lambda_L)}$$

où α correspond au coefficient de coercivité de a ,
 μ_L et λ_L sont les coefficients de Lamé,
et f représente les forces volumiques.

Ainsi le problème faible (1.3) est bien posé.

Nous allons maintenant chercher une autre formulation variationnelle, dite pénalisée, qui va nous permettre de discrétiser le problème.

Chapitre 2.

Modélisation du problème pénalisé

Section 1. LE PROBLÈME SANS CONTACT

Nous allons nous intéresser au problème sans contact car celui-ci va nous permettre de tester et valider la pertinence de l'algorithme utilisé ultérieurement pour approcher la solution du problème pénalisé. Par ailleurs, le problème sans contact nous permet de visualiser l'état du solide élastique avant d'entrer en contact avec le socle rigide, et donc de nous faire une intuition physique du phénomène étudié.

Le solide élastique, sous la contrainte d'aucune action extérieure, c'est à dire sans contact, au repos et soumis à aucune force volumique, peut être représenté de la façon suivante :

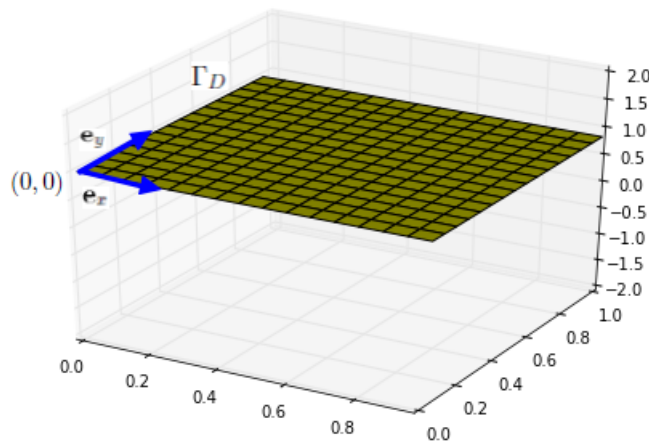


FIGURE 1.1: Le solide élastique lorsqu'il n'est soumis à aucune contrainte

1. Formulation classique du problème sans contact

Pour obtenir la formulation classique du problème sans contact, il convient de changer les conditions de contact $u(1) \leq 0, u'(1) \leq 0, u'(1)u(1) = 0$ en $u'(1) = 0$.

Ainsi, en dimension un, la formulation classique du problème sans contact consiste à :

déterminer $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$(2\mu_L + \lambda_L)u''(x) + f(x) = 0 \text{ pour } 0 < x < 1 \quad (2.1)$$

$$u(0) = 0$$

$$u'(1) = 0.$$

Nous pouvons résoudre analytiquement ce problème classique sans contact :

$$(2\mu_L + \lambda_L)(u'(1) - u'(x)) = - \int_x^1 f(\xi) d\xi.$$

Comme $u'(1) = 0$, on en déduit

$$(2\mu_L + \lambda_L)u'(x) = \int_x^1 f(\xi) d\xi,$$

donc

$$(2\mu_L + \lambda_L)(u(x) - u(0)) = \int_0^x \int_s^1 f(\xi) d\xi ds.$$

Comme $u(0) = 0$ et $2\mu_L + \lambda_L \neq 0$, on en déduit

$$u(x) = \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \int_0^x \int_s^1 f(\xi) d\xi ds.$$

Ainsi la résolution analytique du problème classique sans contact conduit au résultat suivant :

$$u(x) = \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \int_0^x \int_s^1 f(\xi) d\xi ds \text{ pour } 0 < x < 1.$$

2. Le champ des contraintes

Nous avons vu dans le chapitre 1 *Modélisation du problème de contact* que le tenseur des contraintes s'exprime de la façon suivante :

$$\sigma(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} (2\mu_L + \lambda_L)u'(x) & 0 \\ 0 & \lambda_L u'(x) \end{pmatrix}.$$

Le champ des contraintes, quant à lui, correspond à la répartition des efforts par unité de surface. On en déduit que le champ des contraintes peut s'exprimer ainsi :

$$\|\sigma(\mathbf{u})\| = F(\mu_L, \lambda_L)|u'(x)|$$

où F est une fonction de μ_L et λ_L .

Au regard de la solution analytique du problème classique sans contact, nous obtenons :

$$u'(x) = \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \int_x^1 f(\xi) d\xi \text{ pour } 0 < x < 1$$

d'où le champ des contraintes suivant :

$$||\sigma(\mathbf{u})|| = \frac{c}{2\mu_L + \lambda_L} \left| \int_x^1 f(\xi) d\xi \right| \text{ pour } 0 < x < 1, \text{ avec } c > 0$$

2.a. Lorsque les forces volumiques sont positives

Aux fins d'obtenir une représentation graphique de la solution analytique obtenue, nous considérons dans un premier temps des forces volumiques positives, c'est à dire un solide élastique qui s'étire. Nous utilisons pour le calcul les paramètres suivants :

- $c = 1$
- $\mu_L = 1, \lambda_L = 1$
- $f(x) = 2$.

Nous obtenons la solution analytique suivante :

$$u(x) = \frac{2}{3} \int_0^x \int_s^1 d\xi ds = \frac{2}{3} \int_0^x 1 - s ds,$$

$$u(x) = \frac{2}{3} \left[s - \frac{s^2}{2} \right]_0^x = \frac{2}{3} \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \text{ pour } 0 < x < 1,$$

Ainsi

$$u'(x) = \frac{2}{3}(1 - x) \text{ pour } 0 < x < 1,$$

Le champ des contraintes exercées sur le solide élastique est donc :

$$||\sigma(\mathbf{u})|| = \frac{2}{3}(1 - x) \text{ pour } 0 < x < 1,$$

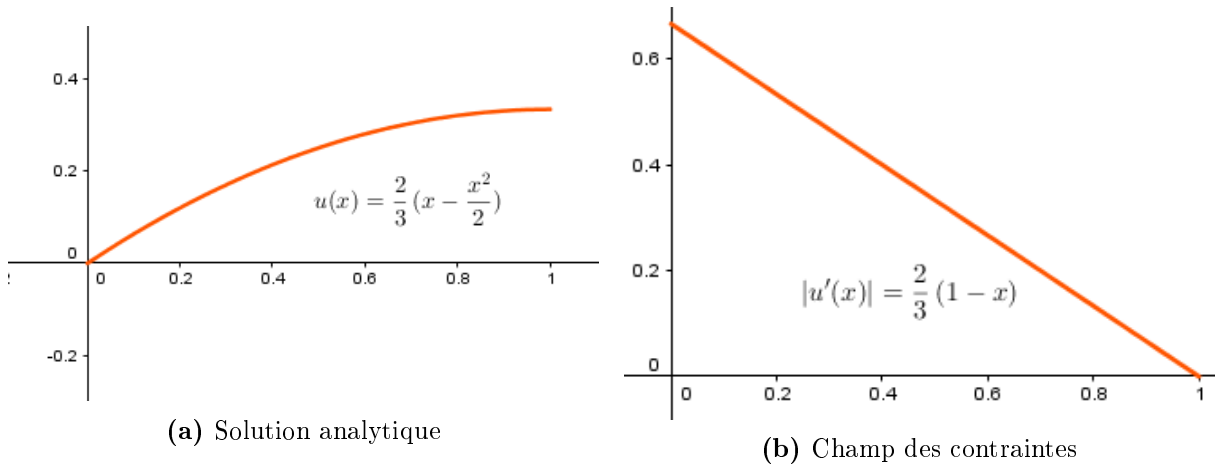


FIGURE 1.2: La solution analytique du problème sans contact et le champ des contraintes pour f positif

Ceci nous permet d'en déduire une représentation du solide élastique dilaté :

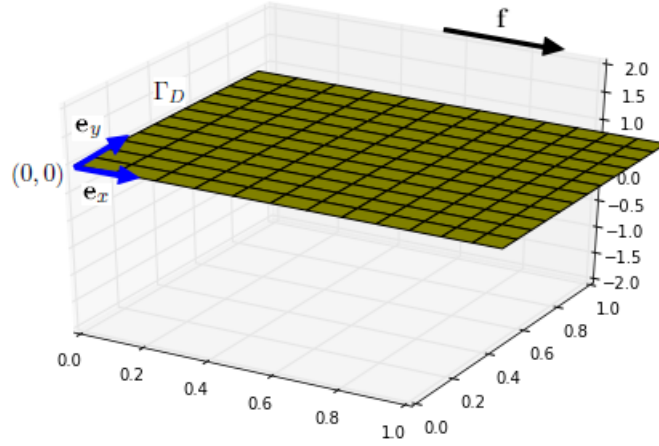


FIGURE 1.3: Déformation du solide élastique dilaté - problème sans contact

Ainsi, en utilisant un effet visuel de changement de couleur en fonction des valeurs prises par $|u'(x)|$, nous obtenons la représentation suivante de l'intensité des contraintes exercées sur le solide élastique :

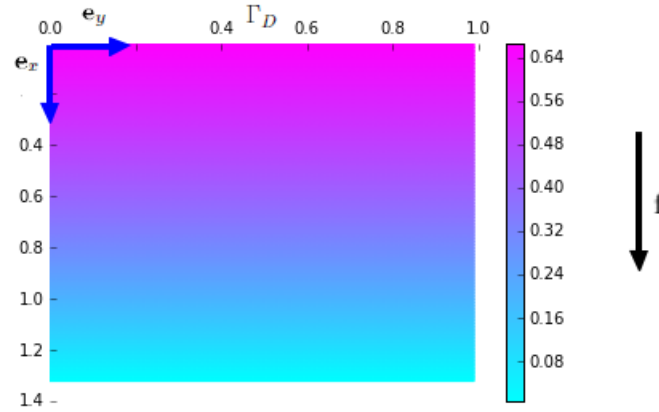


FIGURE 1.4: Contraintes exercées sur le solide dilaté - problème sans contact

Sur la figure 1.4, les parties en mauve sont soumises aux plus fortes contraintes. On remarque donc que dans le cas du problème sans contact soumis à des forces volumiques positives, les plus fortes contraintes sont exercées sur la partie du solide proche du bord Γ_D . Il s'agit de contraintes de dilatation.

Le lecteur intéressé pourra retrouver en annexe *Programmation des solutions en Python* les lignes de commande en *Python 3.4* permettant d'obtenir les représentations graphiques ci-dessus.

2.b. Lorsque les forces volumiques sont négatives

Nous considérons ensuite des forces volumiques négatives, c'est à dire un solide élastique qui se comprime. Nous utilisons pour le calcul les paramètres suivants :

- $c = 1$
- $\mu_L = 1, \lambda_L = 1$
- $f(x) = -2$.

Nous obtenons la solution analytique suivante :

$$u(x) = -\frac{2}{3} \int_0^x \int_s^1 d\xi ds = -\frac{2}{3} \int_0^x 1 - s ds,$$

$$u(x) = \frac{2}{3} \left[\frac{s^2}{2} - s \right]_0^x = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \text{ pour } 0 < x < 1,$$

Ainsi

$$u'(x) = \frac{4}{15}(x - 1) \text{ pour } 0 < x < 1,$$

Le champ des contraintes exercées sur le solide élastique est donc

$$\|\sigma(\mathbf{u})\| = |u'(x)| = \frac{2}{3}(1 - x) \text{ pour } 0 < x < 1,$$

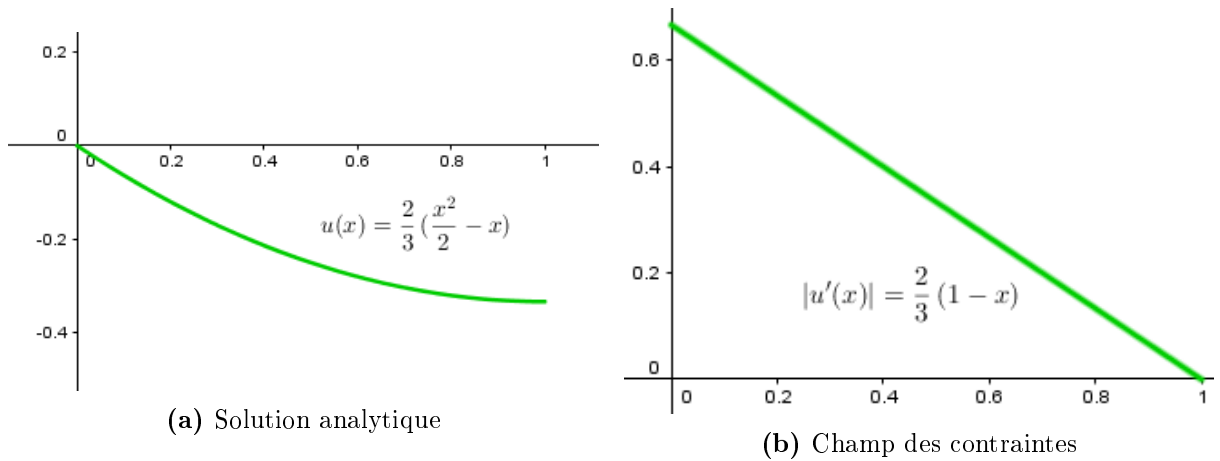


FIGURE 1.5: La solution analytique du problème sans contact et le champ des contraintes pour f négatif

Ceci nous permet d'en déduire une représentation du solide élastique comprimé :

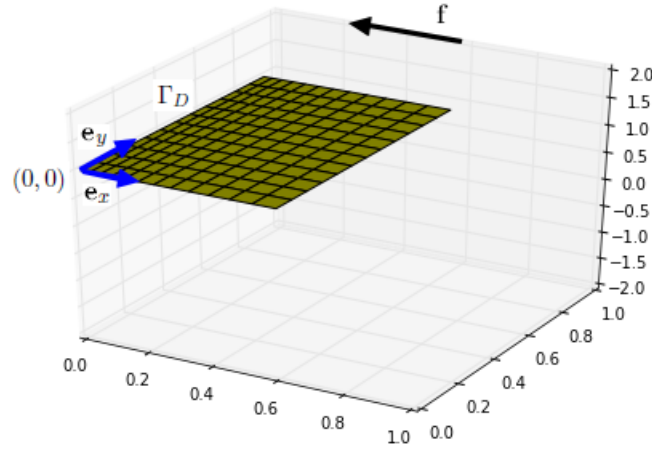


FIGURE 1.6: Déformation du solide élastique comprimé - problème sans contact

Ainsi, en utilisant un effet visuel de changement de couleur en fonction des valeurs prises par $|u'(x)|$, nous obtenons la représentation suivante de l'intensité des contraintes exercées sur le solide élastique :

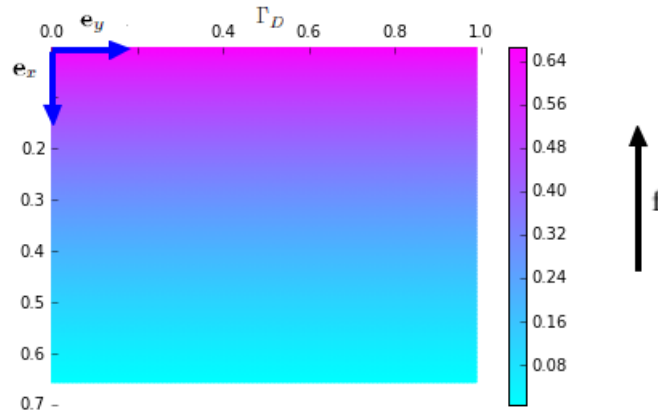


FIGURE 1.7: Contraintes exercées sur le solide comprimé - problème sans contact

Sur la figure 1.7, les parties en mauve sont soumises aux plus fortes contraintes. On remarque donc que dans le cas du problème sans contact soumis à des forces volumiques négatives, les plus fortes contraintes sont également exercées sur la partie du solide proche du bord Γ_D . Il s'agit cette fois de contraintes de compression.

3. Formulation faible du problème sans contact

Le même raisonnement que celui utilisé pour la formulation faible (1.2) du problème de contact conduit à :

$$(2\mu_L + \lambda_L)[u'(x)v(x)]_0^1 - (2\mu_L + \lambda_L) \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 f(x)v(x)dx = 0 \text{ pour tout } v \in V.$$

Comme $v \in V$, on en déduit que $v(0) = 0$. Comme par ailleurs la condition sans contact implique $u'(1) = 0$, on en déduit

$$-(2\mu_L + \lambda_L) \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 f(x)v(x)dx = 0.$$

En utilisant les mêmes notations que pour la formulation faible (1.2) du problème de contact, on obtient $a(u, v) = L(v)$.

On en déduit une formulation faible du problème sans contact :

$$\text{déterminer } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V. \quad (2.2)$$

Comme V est un espace de Hilbert, a est une forme bilinéaire coercive, continue sur $V \times V$ et L est une forme linéaire continue sur V , le théorème de Lax Milgram¹ nous assure que le problème faible ci-dessus admet une solution unique.

1. *Théorème de Lax Milgram* : soit V un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire coercive continue sur $V \times V$ et L une forme linéaire continue sur V , alors le problème déterminer $u \in V$ tel que $a(u, v) = L(v)$ pour tout $v \in V$ admet une solution unique. Le lecteur intéressé pourra trouver une démonstration de ce théorème dans l'article [1] paragraphe 7.3.

Section 2. LE PROBLÈME DE COMPLIANCE NORMALE

1. Présentation de la pénalisation

Nous présentons ici une pénalisation du modèle précédent, appelée compliance normale. La pénalisation consiste à contrôler la profondeur de pénétration dans le support rigide par approximation des conditions de contact via un paramètre que l'on notera ε .

Cette technique permet de résoudre numériquement un problème d'optimisation avec contrainte en le transformant en problème d'optimisation sans contrainte. Toutefois, la solution pénalisée ne constitue qu'une approximation de la solution de notre problème.

2. La condition de contact pénalisée

Nous allons pénaliser le système en utilisant la condition de contact pénalisée

$$\sigma_n(\mathbf{u}_\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}[u_{\varepsilon,n}]_+ \text{ sur } \Gamma_C$$

à la place de la condition de contact unilatéral $u_n \leq 0, \sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0, u_n \sigma_n(\mathbf{u}) = 0$ sur Γ_C , où $\varepsilon > 0$ est le paramètre de pénalisation et u_ε est la solution du problème pénalisé. Comme dans le cas de notre étude, $\sigma_n(\mathbf{u}_\varepsilon)(1) = u'_\varepsilon(1)$, on en déduit que la condition de contact pénalisée se traduit par

$$u'_\varepsilon(1) = -\frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+$$

et remplace la condition de contact unilatéral $u(1) \leq 0, u'(1) \leq 0, u'(1)u(1) = 0$.

Le choix du coefficient de pénalisation est primordial. Une valeur trop faible de ce coefficient peut empêcher la convergence de la méthode. Une valeur trop grande peut engendrer des erreurs sur les conditions de contact qui perdent alors tout sens physique. Nous aborderons cela au chapitre 3 dans les différents paragraphes intitulés *Sensibilité au paramètre de pénalisation*.

3. Rappels préliminaires

Nous rappelons les relations suivantes :

- $\alpha \leq [\alpha]_+$ et $\alpha[\alpha]_+ \leq [\alpha]_+^2$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
- $([\alpha]_+ - [\beta]_+)(\alpha - \beta) \geq ([\alpha]_+ - [\beta]_+)^2$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

En effet, $([\alpha]_+ - [\beta]_+)(\alpha - \beta) = \alpha[\alpha]_+ - \beta[\alpha]_+ - \alpha[\beta]_+ + \beta[\beta]_+ = [\alpha]_+^2 + [\beta]_+^2 - \beta[\alpha]_+ - \alpha[\beta]_+$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Comme $\beta \leq [\beta]_+$ et $\alpha \leq [\alpha]_+$, on en déduit que $-\beta[\alpha]_+ - \alpha[\beta]_+ \geq -2[\alpha]_+[\beta]_+$,

donc $([\alpha]_+ - [\beta]_+)(\alpha - \beta) \geq [\alpha]_+^2 - 2[\alpha]_+[\beta]_+ + [\beta]_+^2$,

donc $([\alpha]_+ - [\beta]_+)(\alpha - \beta) \geq ([\alpha]_+ - [\beta]_+)^2$.

- $|[\alpha]_+ - [\beta]_+| \leq |\alpha - \beta|$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

En effet, à partir de l'inégalité précédente $([\alpha]_+ - [\beta]_+)^2 \leq ([\alpha]_+ - [\beta]_+)(\alpha - \beta)$,

si $[\alpha]_+ - [\beta]_+ = 0$ la propriété à montrer est vraie,

si $[\alpha]_+ - [\beta]_+ < 0$ alors $\alpha - \beta \leq [\alpha]_+ - [\beta]_+ < 0$, donc $|[\alpha]_+ - [\beta]_+| \leq |\alpha - \beta|$,

si $[\alpha]_+ - [\beta]_+ > 0$ alors $[\alpha]_+ - [\beta]_+ \leq \alpha - \beta$, donc $|[\alpha]_+ - [\beta]_+| \leq |\alpha - \beta|$.

On en déduit que $|[\alpha]_+ - [\beta]_+| \geq |\alpha - \beta|$.

4. Formulation classique du problème pénalisé

La condition de contact pénalisée $u'_\varepsilon(1) = -\frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+$ permet d'écrire le problème classique (1.1) sous sa forme pénalisée :

déterminer $u_\varepsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que : $(2\mu_L + \lambda_L)u''_\varepsilon(x) + f(x) = 0$ pour $0 < x < 1$
avec $u_\varepsilon(0) = 0$ et $u'_\varepsilon(1) = -\frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+$

5. Formulation faible du problème pénalisé

La condition de contact pénalisée $u'_\varepsilon(1) = -\frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+$ permet d'écrire le problème faible (1.2) sous sa forme pénalisée :

$$a(u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+v(1) = L(v)$$

On en déduit une formulation faible du problème pénalisé :

déterminer $u_\varepsilon \in V$ tel que

$$a(u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+v(1) = L(v) \text{ pour tout } v \in V. \quad (2.3)$$

6. Le problème faible pénalisé est bien posé

Le problème faible pénalisé (2.3) est bien posé.

Nous allons montrer que le problème faible pénalisé (2.3) admet une solution unique et que la solution dépend continûment des données.

Dans la formulation faible pénalisée (2.3), on remarque que a est une forme bilinéaire et L est une forme linéaire.

En revanche, l'application $u \rightarrow \frac{1}{\varepsilon}[u]_+v$ n'est pas linéaire en u , car on a en général $(\alpha u + w)_+ \neq \alpha u_+ + w_+$.

On en déduit que la formulation faible pénalisée n'est pas linéaire.

On définit alors l'opérateur $T : \begin{cases} V \rightarrow V \\ v \rightarrow Tv \end{cases}$ par $(Tv, w)_1 = a(v, w) + \frac{1}{\varepsilon}[v(1)]_+w(1)$ pour tout $v, w \in V$.

On remarque que l'opérateur T n'est pas linéaire pour la raison invoquée ci-dessus.

Cette formule permet de bien définir l'opérateur T , car elle assure l'unicité et l'existence de Tv pour tout $v \in V$. En effet, considérons l'application linéaire $\psi_v : \begin{cases} V \rightarrow \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) \\ w \rightarrow \psi_v(w) = (Tv, w)_1 \end{cases}$.

$$|\psi_v(w)| = |a(v, w) + \frac{1}{\varepsilon}[v(1)]_+w(1)| \leq |a(v, w)| + \frac{1}{\varepsilon}[v(1)]_+|w(1)| \text{ pour tout } v, w \in V.$$

Le théorème de trace montre que $|w(1)| \leq \|w\|_1$.

Comme a est continue, il existe $m > 0$ tel que $|a(v, w)| \leq m\|v\|_1\|w\|_1$.

On en déduit que $|\psi_v(w)| \leq (m\|v\|_1 + \frac{1}{\varepsilon}[v(1)]_+)\|w\|_1$ donc l'application linéaire ψ_v est continue.

Le théorème de représentation de Riesz² appliqué à l'application linéaire continue ψ_v dans l'espace de Hilbert V montre que pour tout $w \in V$ il existe $\eta \in V$ tel que $\psi_v(w) = (\eta, w)_1$. Ceci assure l'existence et l'unicité de Tv défini par $\psi_v(w) = (Tv, w)_1$ pour v donné.

6.a. Le problème faible pénalisé admet une solution unique

L'opérateur T défini ci-dessus va nous permettre de montrer que la formulation faible pénalisée (2.3) admet une solution unique.

Preuve :

La démonstration ci-dessous est inspirée de l'article [2].

☞ Voyons que $(Tv - Tw, v - w)_1 \geq \alpha\|v - w\|_1^2$:

En utilisant l'opérateur T , le problème faible pénalisé devient : *déterminer $u \in V$ tel que $(Tu, v)_1 = L(v)$ pour tout $v \in V$.*

2. *Théorème de Riesz* : soit V un espace de Hilbert muni de son produit scalaire noté $(\cdot, \cdot)_1$ et L une forme linéaire continue sur V . Alors il existe un unique $w \in V$ tel que pour tout $v \in V$ on ait $L(v) = (w, v)_1$. Le lecteur intéressé pourra trouver une démonstration du théorème de Riesz dans le livre [3] chapitre V paragraphe 2

On remarque que

$(Tv - Tw, v - w)_1 = (Tv, v - w)_1 - (Tw, v - w)_1$ par bilinéarité du produit scalaire

$$\begin{aligned} (Tv - Tw, v - w)_1 &= a(v, v - w) + \frac{1}{\varepsilon}[v(1)]_+(v(1) - w(1)) - a(w, v - w) - \frac{1}{\varepsilon}[w(1)]_+(v(1) - w(1)) \\ &= a(v - w, v - w) + \frac{1}{\varepsilon}([v(1)]_+ - [w(1)]_+)(v(1) - w(1)). \end{aligned}$$

En utilisant les résultats du paragraphe 2.3 *Rappels préliminaires*, on obtient

$$([v(1)]_+ - [w(1)]_+)(v(1) - w(1)) \geq ([v(1)]_+ - [w(1)]_+)^2,$$

$$\text{donc } (Tv - Tw, v - w)_1 \geq a(v - w, v - w) + \frac{1}{\varepsilon}([v(1)]_+ - [w(1)]_+)^2.$$

Comme $\frac{1}{\varepsilon}([v(1)]_+ - [w(1)]_+)^2 \geq 0$, on en déduit que $(Tv - Tw, v - w)_1 \geq a(v - w, v - w)$.

Par ailleurs, comme a est coercive, on en déduit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_1^2$ pour tout $v \in V$, donc en particulier il existe $\alpha > 0$ tel que $a(v - w, v - w) \geq \alpha \|v - w\|_1^2$ pour tout $v, w \in V$.

$$\text{Ainsi } (Tv - Tw, v - w)_1 \geq \alpha \|v - w\|_1^2.$$

🔍 Voyons que T est un opérateur hémicontinu³ :

Considérons la fonction $\phi : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ \phi(t) = (T(v - tw), w)_1 \end{cases}$ pour $v, w \in V$.

$$\begin{aligned} |\phi(t) - \phi(s)| &= |(T(v - tw), w)_1 - (T(v - sw), w)_1| \text{ pour } s, t \in [0, 1] \\ &= |a(v - tw, w) + \frac{1}{\varepsilon}[v(1) - tw(1)]_+w(1) - a(v - sw, w) - \frac{1}{\varepsilon}[v(1) - sw(1)]_+w(1)| \\ &\leq |a(v - tw, w) - a(v - sw, w)| + \frac{1}{\varepsilon}|w(1)| |[v(1) - tw(1)]_+ - [v(1) - sw(1)]_+|. \end{aligned}$$

En utilisant les résultats obtenus au paragraphe 2.3 *Rappels préliminaires* :

$$|[v(1) - tw(1)]_+ - [v(1) - sw(1)]_+| \leq |(v - tw)(1) - (v - sw)(1)|, \text{ on en déduit que}$$

$$\begin{aligned} |\phi(t) - \phi(s)| &\leq |a(v - tw, w) - a(v - sw, w)| + \frac{1}{\varepsilon}|w(1)| |(v - tw)(1) - (v - sw)(1)| \\ &\leq |a(v - tw, w) - a(v - sw, w)| + \frac{1}{\varepsilon}|w(1)| |s - t| |w(1)|. \end{aligned}$$

Comme $|a(v - tw, w) - a(v - sw, w)| = |a((s - t)w, w)| = |t - s| |a(w, w)|$, on en déduit que

$$|\phi(t) - \phi(s)| \leq |t - s| (|a(w, w)| + \frac{1}{\varepsilon}|w(1)|^2).$$

Nous avons montré au chapitre 1 dans le paragraphe 2.3. *Calculs préliminaires* que a est une forme bilinéaire symétrique continue coercive sur $V \times V$. On en déduit qu'elle est définie

3. *Opérateur hémicontinu* : soit V un espace de Hilbert. Un opérateur $T : V \rightarrow V$ est hémicontinu ssi l'application $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(t) = (T(v - tw), w)_1$ pour tout $v, w \in V$ est continue sur $[0, 1]$

positive et donc qu'il s'agit d'un produit scalaire auquel on peut associer la norme $||\cdot||_a$ définie par $||v||_a^2 = a(v, v)$ pour tout $v \in V$.

Nous pouvons donc réécrire l'inégalité précédente comme suit :

$$|\phi(t) - \phi(s)| \leq |t - s| \left(||w||_a + \frac{1}{\varepsilon} |w(1)|^2 \right).$$

En notant $c_\varepsilon = ||w||_a + \frac{1}{\varepsilon} |w(1)|^2$, on obtient $|\phi(t) - \phi(s)| \leq c_\varepsilon |t - s|$ pour tout $s, t \in [0, 1]$, ce qui nous permet de conclure à la continuité de ϕ sur $[0, 1]$,

donc T est un opérateur hémicontinu.

🔖 Voyons que T est un opérateur bijectif :

Comme V est un espace de Hilbert et l'opérateur T vérifie la propriété $(Tv - Tw, v - w)_1 \geq \alpha ||v - w||_1^2$ pour tout $v, w \in V$, le théorème de Brezis Lions⁴ nous permet d'en déduire que T est un opérateur bijectif de V dans V .

Ainsi pour $Tu_\varepsilon \in V$ il existe un unique $\eta_\varepsilon \in V$ tel que $Tu_\varepsilon = \eta_\varepsilon$. Le problème faible pénalisé (2.3) devient donc : *déterminer $u_\varepsilon \in V$ tel que $(Tu_\varepsilon, v)_1 = L(v)$ pour tout $v \in V$ ou encore déterminer $\eta_\varepsilon \in V$ tel que $(\eta_\varepsilon, v)_1 = L(v)$ pour tout $v \in V$.*

Comme V est un espace de Hilbert et L est une forme linéaire continue (voir chapitre 1 paragraphe 2.3. *Calculs préliminaires*), on peut appliquer le théorème de représentation de Riesz qui affirme l'existence et l'unicité d'une telle solution.

Ainsi le problème faible pénalisé admet bien une solution unique. ■

6.b. Estimation a priori

🔖 Estimation de $||u_\varepsilon||_1$:

Comme a est coercive, il existe $\alpha > 0$ tel que $a(v, v) \geq \alpha ||v||_1^2$ pour tout $v \in V$.

En particulier pour u_ε solution du problème variationnel pénalisé (2.3), on obtient $\alpha ||u_\varepsilon||_1^2 \leq a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} [u_\varepsilon(1)]_+ u_\varepsilon(1) + L(u_\varepsilon)$.

Comme $[u_\varepsilon]_+ u_\varepsilon = [u_\varepsilon]_+^2$, on obtient $\alpha ||u_\varepsilon||_1^2 \leq -\frac{1}{\varepsilon} [u_\varepsilon(1)]_+^2 + L(u_\varepsilon)$,

donc $\alpha ||u_\varepsilon||_1^2 \leq L(u_\varepsilon)$.

Au chapitre 1 paragraphe 2.3. *Calculs préliminaires*, nous avons déjà montré que L est une forme linéaire continue avec $|L(v)| \leq \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} ||f|| ||v||_1$ pour tout $v \in L^1(0, 1)$,

4. *Théorème de Brezis Lions* : Soit V un espace de Hilbert, T un opérateur vérifiant $(T(v - w), v - w)_1 \geq 0$, ϕ une application continue définie par $\phi(t) = (T(v - tw), w)_1$ sur $[0, 1]$ (c'est à dire que T est un opérateur hémicontinu), alors T est bijectif de V dans V . Le lecteur intéressé pourra trouver une démonstration du théorème de Brezis Lions dans l'article [4] corollaire 15 page 126

donc en particulier $|L(u_\varepsilon)| \leq \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \|f\| \|u_\varepsilon\|_1$,

On en déduit $\alpha \|u_\varepsilon\|_1^2 \leq \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \|f\| \|u_\varepsilon\|_1$.

Comme $\alpha \neq 0$, pour $u_\varepsilon \neq 0$, on obtient $\|u_\varepsilon\|_1 \leq \frac{\|f\|}{\alpha(2\mu_L + \lambda_L)}$.

Pour $u_\varepsilon = 0$, on remarque que l'inégalité précédente est toujours vraie, d'où l'estimation a priori suivante :

$$\|u_\varepsilon\|_1 \leq \frac{\|f\|}{\alpha(2\mu_L + \lambda_L)}$$

où α correspond au coefficient de coercivité de a ,
 μ_L et λ_L sont les coefficients de Lamé,
et f représente les forces volumiques.

On en déduit que le problème de la formulation faible pénalisée (2.3) est donc bien posé.

6.c. Estimation a priori de l'erreur

Nous allons nous attacher à majorer l'erreur commise entre la solution u du problème faible (1.2) et la solution u_ε du problème faible pénalisé (2.3), c'est à dire $\|u - u_\varepsilon\|_1$.

✉ Utilisation de la coercivité de a :

Comme a est coercive, il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha \|u - u_\varepsilon\|_1^2 \leq a(u - u_\varepsilon, u - u_\varepsilon)$,

donc $\alpha \|u - u_\varepsilon\|_1^2 \leq a(u, u - u_\varepsilon) - a(u_\varepsilon, u - u_\varepsilon)$.

Or d'après la formulation faible (1.2) : $a(u, u - u_\varepsilon) = L(u - u_\varepsilon) + u'(1)(u - u_\varepsilon)(1)$.

De même d'après la formulation faible pénalisée (2.3) :

$$a(u_\varepsilon, u - u_\varepsilon) = L(u - u_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} [u_\varepsilon(1)]_+ (u - u_\varepsilon)(1).$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } a(u, u - u_\varepsilon) - a(u_\varepsilon, u - u_\varepsilon) &= u'(1)(u - u_\varepsilon)(1) + \frac{1}{\varepsilon} [u_\varepsilon(1)]_+ (u - u_\varepsilon)(1) \\ &= u'(1)u(1) - u'(1)u_\varepsilon(1) + \frac{1}{\varepsilon} u(1)[u_\varepsilon(1)]_+ - \frac{1}{\varepsilon} [u_\varepsilon(1)]_+ u_\varepsilon(1). \end{aligned}$$

Comme $u(1) \leq 0$ et $[u_\varepsilon(1)]_+ \geq 0$, on en déduit que $u(1)[u_\varepsilon(1)]_+ \leq 0$,

donc $a(u, u - u_\varepsilon) - a(u_\varepsilon, u - u_\varepsilon) \leq u'(1)u(1) - u'(1)u_\varepsilon(1) - \frac{1}{\varepsilon} [u_\varepsilon(1)]_+ u_\varepsilon(1)$.

Comme par ailleurs $u'(1)u(1) = 0$ et $u_\varepsilon \leq [u_\varepsilon]_+$, on en déduit que

$$a(u, u - u_\varepsilon) - a(u_\varepsilon, u - u_\varepsilon) \leq -u'(1)[u_\varepsilon(1)]_+ - \frac{1}{\varepsilon} [u_\varepsilon(1)]_+ [u_\varepsilon(1)]_+.$$

Ainsi $\alpha \|u - u_\varepsilon\|_1^2 \leq -(u'(1) + \frac{1}{\varepsilon} [u_\varepsilon(1)]_+) [u_\varepsilon(1)]_+.$

📖 *Utilisation de l'inégalité de Young :*

Comme $[u_\varepsilon]_+ = \varepsilon(\frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon]_+ + u' - u')$, on en déduit maintenant que

$$\alpha \|u - u_\varepsilon\|_1^2 \leq -\varepsilon(u'(1) + \frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+)(\frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+ + u'(1) - u'(1)),$$

$$\text{donc } \alpha \|u - u_\varepsilon\|_1^2 \leq -\varepsilon(u'(1) + \frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+)^2 + \varepsilon u'(1)(u'(1) + \frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+).$$

L'inégalité de Young⁵ nous permet d'écrire

$$u'(1)(u'(1) + \frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+) \leq \frac{1}{2}(u'(1)^2 + (u'(1) + \frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+)^2).$$

$$\text{On en déduit que } \alpha \|u - u_\varepsilon\|_1^2 \leq -\varepsilon(u'(1) + \frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+)^2 + \frac{\varepsilon}{2}u'(1)^2 + \frac{\varepsilon}{2}(u'(1) + \frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+)^2,$$

$$\text{donc } \alpha \|u - u_\varepsilon\|_1^2 \leq -\frac{\varepsilon}{2}(u'(1) + \frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+)^2 + \frac{\varepsilon}{2}u'(1)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}u'(1)^2.$$

$$\text{Finalement } \|u - u_\varepsilon\|_1 \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\alpha}}|u'(1)|.$$

En notant $\beta(u) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}|u'(1)|$, on en déduit une estimation a priori de l'erreur :

$$\|u - u_\varepsilon\|_1 \leq \beta(u)\sqrt{\varepsilon} \text{ avec } \beta(u) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}|u'(1)|$$

où α correspond au coefficient de coercivité de a ,
et ε est le coefficient de pénalisation.

7. Que se passe-t-il lorsque le paramètre de pénalisation tend vers 0 ?

A partir de l'inégalité $\alpha \|u_\varepsilon\|_1^2 \leq -\frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+^2 + L(u_\varepsilon)$ obtenue au paragraphe 2.6. *Estimation a priori*, on en déduit

$$\frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+^2 \leq L(u_\varepsilon) - \alpha \|u_\varepsilon\|_1^2 \leq L(u_\varepsilon).$$

En montrant la continuité de L on a établi que $L(u_\varepsilon) \leq \frac{\|f\| \|u_\varepsilon\|_1}{2\mu_L + \lambda_L}$.

Par ailleurs l'estimation a priori $\|u_\varepsilon\|_1 \leq \frac{\|f\|}{\alpha(2\mu_L + \lambda_L)}$ entraîne $\frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+^2 \leq \frac{\|f\|^2}{\alpha(2\mu_L + \lambda_L)^2}$,

$$\text{donc } [u_\varepsilon(1)]_+ \leq \sqrt{\varepsilon} \frac{\|f\|}{\sqrt{\alpha}(2\mu_L + \lambda_L)}.$$

Ainsi dans le problème faible pénalisé (2.3), si on fait tendre ε vers 0, l'inégalité ci-dessus montre que $[u_\varepsilon(1)]_+$ tend vers 0, donc $u_\varepsilon(1)$ est négatif.

Par ailleurs, comme $u'_\varepsilon(1) = -\frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+$, en faisant tendre ε vers 0, on en déduit que $u'_\varepsilon(1)$ tend vers $-\infty$ en restant toujours négatif, donc $u'_\varepsilon(1) \leq 0$.

5. *Inégalité de Young* : $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

Finalement, $u'_\varepsilon(1)u_\varepsilon(1) = -\frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+u_\varepsilon(1) = -\frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+^2$.

En utilisant l'inégalité qu'on vient de montrer $[u_\varepsilon(1)]_+ \leq \sqrt{\varepsilon} \frac{\|f\|}{\sqrt{\alpha(2\mu_L + \lambda_L)}}$, on en déduit que $u'_\varepsilon(1)u_\varepsilon(1) \leq -\frac{\|f\|^2}{\alpha(2\mu_L + \lambda_L)^2} \leq 0$.

Or on vient de voir que $u'_\varepsilon(1) \leq 0$ et $u_\varepsilon(1) \leq 0$, donc $u'_\varepsilon(1)u_\varepsilon(1) \geq 0$.

On en conclut que $u'_\varepsilon(1)u_\varepsilon(1) = 0$.

On constate donc que lorsque ε tend vers 0 dans le problème faible pénalisé (2.3), on retrouve les conditions du contact unilatéral.

8. Que se passe-t-il lorsque le paramètre de pénalisation tend vers l'infini ?

Comme le déplacement des points du solide est limité par la non pénétration dans le socle rigide, on en déduit que $u_\varepsilon(1)$ ne peut pas tendre vers l'infini, donc $[u_\varepsilon(1)]_+$ ne peut pas non plus tendre vers l'infini.

Mathématiquement, on remarque qu'en dimension un, toute fonction de $H^1(0; 1)$ est continue sur $[0, 1]$, donc u_ε est continue sur le compact $[0, 1]$, donc $u_\varepsilon(1)$ ne peut pas tendre vers l'infini. De même, $[u_\varepsilon(1)]_+$ ne peut pas non plus tendre vers l'infini.

Ainsi, lorsque le paramètre de pénalisation ε tend vers l'infini, on en conclut que $\frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+$ tend vers 0. A partir du problème faible pénalisé (2.3) :

déterminer $u \in K$ tel que $a(u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(1)]_+v(1) = L(v)$ pour tout $v \in V$, on en déduit donc le problème faible suivant : déterminer $u \in K$ tel que $a(u_\varepsilon, v) = L(v)$ pour tout $v \in V$.

On reconnaît ici les conditions du problème faible sans contact (2.2).

On constate donc que lorsque ε tend vers l'infini dans le problème faible pénalisé (2.3), on retrouve les conditions du problème faible sans contact.

Chapitre 3.

Résolution numérique du problème pénalisé

Nous allons maintenant chercher une approximation $u_{\varepsilon,h}$ de la solution u_ε du problème faible pénalisé (2.3) en utilisant la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation numérique des solutions de problèmes aux limites.

Les différentes étapes de la méthode sont les suivantes : à partir d'un problème différentiel, on cherche une formulation faible équivalente qui nous amène à travailler dans un espace de Hilbert V sous espace de $H^1(0;1)$. On calcule alors une approximation de la solution en projetant sur un espace de dimension finie V_h . Le problème variationnel approché se ramène alors à la résolution d'un système linéaire.

La base théorique de la méthode des éléments finis est la méthode de Galerkin. L'appellation éléments finis vient de la décomposition du domaine d'étude en éléments représentés par un maillage.

Dans le cadre de notre étude, comme nous avons obtenu un problème faible non linéaire, nous ne pourrions nous contenter d'utiliser une discrétisation par éléments finis, nous devons donc combiner la méthode des éléments finis avec la méthode du point fixe, ou encore avec la méthode de Newton.

Section 1. DISCRÉTISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS

1. Création d'un maillage

Nous allons commencer par remplacer l'espace V dans lequel est recherchée la solution u_ε par un sous espace vectoriel V_h de dimension finie. Pour cela, on discrétise le domaine de définition par un maillage que l'on choisit. On commence par partitionner l'intervalle $[0,1]$ en n intervalles de longueur $h = \frac{1}{n}$ où l'on note $x_0 = 0, x_n = 1$ et pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ $x_i = ih$ les $n + 1$ noeuds du maillage. Le paramètre h est destiné à tendre vers 0.

On définit $V_h = \{v_h \in C^0(0;1); v_{h,[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout } i \in \{0, \dots, n-1\}, v_h(0) = 0\}$

comme l'espace des éléments finis d'ordre 1.

On note $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ une base de V_h définie par :

pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}, \phi_i :$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} = \frac{x-(i-1)h}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h} = \frac{(i+1)h-x}{h} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ \phi_i(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\phi_n :$

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{h} = \frac{x-(n-1)h}{h} & \text{si } x \in [x_{n-1}, 1] \\ \phi_n(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

ce qu'on peut représenter de la façon suivante :

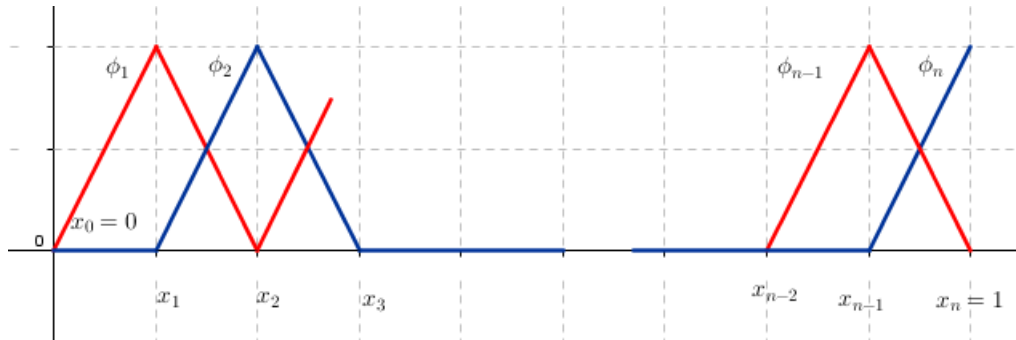


FIGURE 1.1: La fonction ϕ_i

2. V_h est un espace de Hilbert de dimension n

V_h est un espace de Hilbert de dimension n .

Preuve :

V_h est défini par $V_h = Vect\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, donc $(\phi_i)_i$ est une famille génératrice de V_h par définition.

Voyons que les fonctions ϕ_i forment un système libre de n vecteurs. Supposons qu'il existe

$(\lambda_i)_i$ tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(x) = 0 \text{ pour tout } x \in [0, 1].$$

Alors en particulier en chaque point x_j pour $j \in \{1, \dots, n\}$ on obtient $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker. Ainsi

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(x_j) = \lambda_j.$$

Il en résulte que la famille $(\phi_i)_i$ forme une famille libre et génératrice de V_h , c'est donc une base de V_h . On en déduit que V_h est de dimension n .

Montrons maintenant que V_h est un sous espace vectoriel de V .

On remarque que

$$\int_0^1 |v_h(x)|^2 dx \leq \max_{x \in [0,1]} |v_h(x)|^2 < \infty \text{ pour tout } v_h \in V_h \text{ car les } v_h \text{ sont des polynômes d'ordre } 1,$$

donc $v_h \in L^2(0; 1)$.

Par ailleurs, comme la fonction v_h est linéaire par morceaux sur $[0, 1]$, on en déduit qu'elle est de classe C^1 par morceaux sur $[0; 1]$, c'est à dire qu'il existe un nombre fini de points de discontinuité de première espèce¹ en chaque point x_i . On en déduit que $v_h' \in L^2(0; 1)$,

donc $v_h \in H^1(0; 1)$.

Comme de plus $v_h(0) = 0$, on en déduit que V_h est un sous espace de V .

Comme de plus V_h est de dimension finie et que V est un espace de Hilbert, on en déduit que V_h est lui-même un espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_1$ de $H^1(0, 1)$. ■

3. Validation du protocole de calcul de la méthode des éléments finis

Nous allons dans un premier temps tester la méthode des éléments finis en cherchant la solution approchée du problème sans contact. En effet, dans ce cas, nous sommes en mesure de comparer le résultat obtenu avec la solution analytique trouvée dans le chapitre précédent.

A partir de la formulation faible obtenue dans le cas du problème sans contact (2.2), nous obtenons la formulation faible discrétisée suivante :

déterminer $u_h \in V_h$ tel que $a(u_h, v_h) = L(v_h)$ pour tout $v_h \in V_h$.

La solution approchée u_h peut s'écrire dans la base (ϕ_1, \dots, ϕ_n)

$$u_h = \sum_{j=1}^n u_{h,j} \phi_j.$$

1. *Discontinuité de première espèce* : α est un point de discontinuité de première espèce de F si et seulement si $F(\alpha^+) \neq F(\alpha^-) < \infty$

Dans la formulation faible discrétisée, si on prend $v_h = \phi_i$ on obtient

$$a(u_h, \phi_i) = L(\phi_i)$$

$$a\left(\sum_{j=1}^n u_{h,j} \phi_j, \phi_i\right) = L(\phi_i)$$

$$\sum_{j=1}^n a(\phi_j, \phi_i) u_{h,j} = L(\phi_i).$$

On obtient donc un système linéaire du type $AU_h = B$ d'inconnue $U_h = \begin{pmatrix} u_{h,1} \\ u_{h,2} \\ \vdots \\ u_{h,n} \end{pmatrix}$

où $A_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i)$, $B_i = L(\phi_i)$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

A est appelée matrice de rigidité du système.

Cherchons à déterminer $A_{i,j}$:

On remarque que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\phi'_i : \begin{cases} \phi'_i(x) = \frac{1}{h} \text{ si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \phi'_i(x) = -\frac{1}{h} \text{ si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ \phi'_i(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Lorsque $j = i$ avec $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on obtient

$$A_{i,i} = \int_0^1 \phi'_i(x)^2 dx = \int_0^{x_{i-1}} \phi'_i(x)^2 dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_i(x)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi'_i(x)^2 dx + \int_{x_{i+1}}^1 \phi'_i(x)^2 dx$$

$$A_{i,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{h^2} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{h^2} = \frac{x_i - x_{i-1}}{h^2} + \frac{x_{i+1} - x_i}{h^2} = \frac{h}{h^2} + \frac{h}{h^2} = \frac{2}{h}.$$

Lorsque $j = i-1$ avec $i \in \{2, \dots, n-1\}$, on obtient

$$A_{i,i-1} = \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_{i-1}(x) dx$$

$$A_{i,i-1} = \int_0^{x_{i-2}} \phi'_i(x) \phi'_{i-1}(x) dx + \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \phi'_i(x) \phi'_{i-1}(x) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_i(x) \phi'_{i-1}(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi'_i(x) \phi'_{i-1}(x) dx$$

$$+ \int_{x_{i+1}}^1 \phi'_i(x) \phi'_{i-1}(x) dx$$

$$A_{i,i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_i(x) \phi'_{i-1}(x) dx = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} dx = - \frac{x_i - x_{i-1}}{h^2} = - \frac{1}{h}.$$

Lorsque $j = i+1$ avec $i \in \{1, \dots, n-2\}$, on obtient

$$A_{i,i+1} = \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_{i+1}(x) dx$$

$$\begin{aligned}
A_{i,j} &= \int_0^{x_{i-1}} \phi'_i(x) \phi'_{i+1}(x) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_i(x) \phi'_{i+1}(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi'_i(x) \phi'_{i+1}(x) dx + \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \phi'_i(x) \phi'_{i+1}(x) dx \\
&\quad + \int_{x_{i+2}}^1 \phi'_i(x) \phi'_{i+1}(x) dx \\
A_{i,j} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi'_i(x) \phi'_{i+1}(x) dx = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} dx = -\frac{1}{h}.
\end{aligned}$$

En dehors de ces cas, $A_{i,j} = 0$, car les fonctions ϕ'_i et ϕ'_j ont des supports dont l'intersection est vide.

On remarque également que $\phi'_n : \begin{cases} \phi'_n(x) = \frac{1}{h} \text{ si } x \in [x_{n-1}, 1] \\ \phi'_n(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Lorsque $j = n$, on obtient

$$A_{n,n} = \int_0^1 \phi'_n(x)^2 dx = \int_{x_{n-1}}^1 \frac{1}{h^2} dx = \frac{1 - x_{n-1}}{h^2} dx = \frac{1}{h}.$$

Lorsque $j = n - 1$, on obtient

$$A_{n,n-1} = \int_0^1 \phi'_n(x) \phi'_{n-1}(x) dx = \frac{1}{h} \int_{x_{n-1}}^1 \phi'_{n-1}(x) dx = -\frac{1}{h^2} \int_{x_{n-1}}^1 dx = -\frac{1 - x_{n-1}}{h^2} = -\frac{1}{h}.$$

En dehors de ces cas, $A_{n,j} = 0$, car les fonctions ϕ'_n et ϕ'_j ont des supports dont l'intersection est vide.

On représente donc la matrice A de la façon suivante :

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cherchons maintenant à déterminer B_i :

Pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\begin{aligned}
B_i &= L(\phi_i) = \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx = \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \phi_i(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \phi_i(x) dx \right) \\
B_i &= \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) (x - (i-1)h) dx + \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) ((i+1)h - x) dx \right)
\end{aligned}$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$B_i = \frac{1}{h(2\mu_L + \lambda_L)} \left(\int_{(i-1)h}^{ih} f(x) (x - (i-1)h) dx + \int_{ih}^{(i+1)h} f(x) ((i+1)h - x) dx \right).$$

Par ailleurs,

$$B_n = L(\phi_n) = \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \int_0^1 f(x) \phi_n(x) dx = \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \int_{x_{n-1}}^1 f(x) \frac{x - (n-1)h}{h} dx$$

Il reste alors à résoudre le système $AU_h = B$.

3.a. Lorsque les forces volumiques sont positives

Nous considérons dans un premier temps des forces volumiques positives, et reprenons les paramètres utilisés précédemment, à savoir :

- $\mu_L = 1, \lambda_L = 1$
- $f(x) = 2$.

Nous explicitons alors B_i au regard de ces paramètres :

Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$B_i = \frac{1}{(2\mu_L + \lambda_L)h} \left(\int_{(i-1)h}^{ih} f(x)(x - (i-1)h) dx + \int_{ih}^{(i+1)h} f(x)((i+1)h - x) dx \right)$$

$$B_i = \frac{2}{3h} \left(\int_{(i-1)h}^{ih} x - (i-1)h dx + \int_{ih}^{(i+1)h} (i+1)h - x dx \right).$$

Comme

$$\int_{(i-1)h}^{ih} x - (i-1)h dx = \left[\frac{x^2}{2} - (i-1)hx \right]_{(i-1)h}^{ih} = \frac{i^2 h^2}{2} - i(i-1)h^2 - \frac{(i-1)^2 h^2}{2} + (i-1)^2 h^2$$

et

$$\int_{ih}^{(i+1)h} (i+1)h - x dx = \left[(i+1)hx - \frac{x^2}{2} \right]_{ih}^{(i+1)h} = (i+1)^2 h^2 - \frac{(i+1)^2 h^2}{2} - i(i+1)h^2 + \frac{i^2 h^2}{2},$$

on en déduit que

$$B_i = \frac{2}{3h} (i^2 h^2 - i h^2 (i+1 + i-1) + \frac{(i-1)^2 h^2}{2} + \frac{(i+1)^2 h^2}{2}) = \frac{2}{3h} (i^2 h^2 - 2i^2 h^2 + (2i^2 + 2) \frac{h^2}{2})$$

$$B_i = \frac{2}{3h} (-i^2 h^2 + (i^2 + 1)h^2) = \frac{2}{3h} h^2 = \frac{2h}{3} \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Par ailleurs,

$$B_n = \frac{1}{2\mu_L + \lambda_L} \int_{x_{n-1}}^1 f(x) \frac{(x - (n-1)h)}{h} dx = \frac{2}{3h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} x - (n-1)h dx$$

$$B_n = \frac{2}{3h} \left[\frac{x^2}{2} - (n-1)hx \right]_{x_{n-1}}^{x_n} = \frac{2}{3h} \left(\frac{(nh)^2}{2} - n(n-1)h^2 - \frac{(n-1)^2 h^2}{2} + (n-1)^2 h^2 \right)$$

$$B_n = \frac{2}{3h} \frac{1}{2} ((nh)^2 - 2n(n-1)h^2 + ((n-1)h)^2) = \frac{1}{3h} (nh - (n-1)h)^2$$

$$B_n = \frac{1}{3h} h^2 = \frac{h}{3}.$$

Il nous reste maintenant à calculer les valeurs des éléments de U_h , puis à comparer les résultats avec les valeurs de la solution analytique obtenue au chapitre 2 paragraphe 1.1. *Formulation classique du problème sans contact*. Le moyen le plus explicite de comparer ces résultats étant une représentation graphique, notre algorithme devra effectuer les tâches suivantes :

- construction du maillage
- définition de la fonction ϕ_i découpée en une partie croissante et une partie décroissante
- construction de la matrice A
- construction du vecteur B
- résolution de l'équation $AU_h = B$ d'inconnue U_h
- construction de la solution analytique sous forme vectorielle
- représentation de la fonction U_h en tenant compte de la base (ϕ_1, \dots, ϕ_n)
- représentation de la solution analytique

Le lecteur intéressé pourra retrouver en annexe *Programmation des solutions en Python* les lignes de commande de l'algorithme ci-dessus rédigé en *Python 3.4*.

Nous obtenons alors les représentations graphiques suivantes, où l'on partitionne successivement le maillage en $n = 5$, $n = 10$ puis $n = 100$ intervalles :

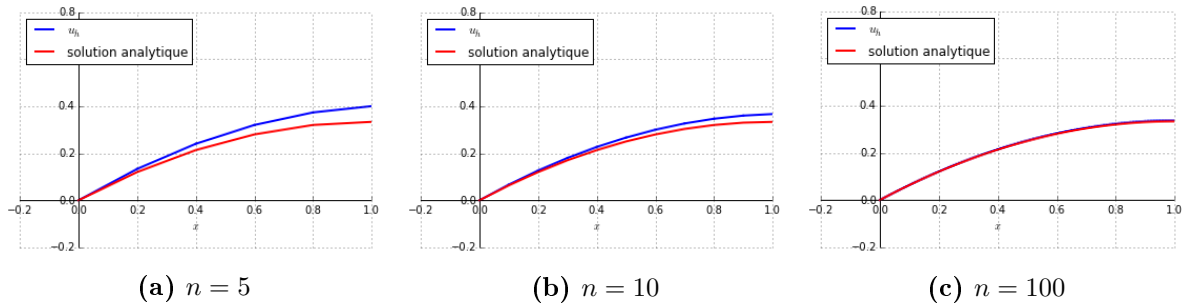


FIGURE 1.2: Comparaison des solutions analytique et numérique pour $n = 5, 10, 100$ et f positif

On remarque que les courbes de la solution analytique en rouge et de la solution approchée en bleu se rapprochent lorsque n augmente. Les deux courbes sont confondues pour $n = 100$.

Ainsi, la méthode des éléments finis appliquée au problème faible sans contact (2.2) fournit dans ce cas particulier une bonne approximation du problème classique sans contact (2.1).

3.b. Lorsque les forces volumiques sont négatives

Nous considérons dans un second temps des forces volumiques négatives, et reprenons les paramètres utilisés précédemment, à savoir :

- $\mu_L = 1, \lambda_L = 1$
- $f(x) = -2$.

Les mêmes calculs que précédemment conduisent à $B_i = -\frac{2h}{3}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ et $B_n = -\frac{h}{3}$.

En reprenant l'algorithme précédent, nous obtenons alors les représentations graphiques suivantes, où l'on partitionne successivement le maillage en $n = 5$, $n = 10$ puis $n = 100$ intervalles :

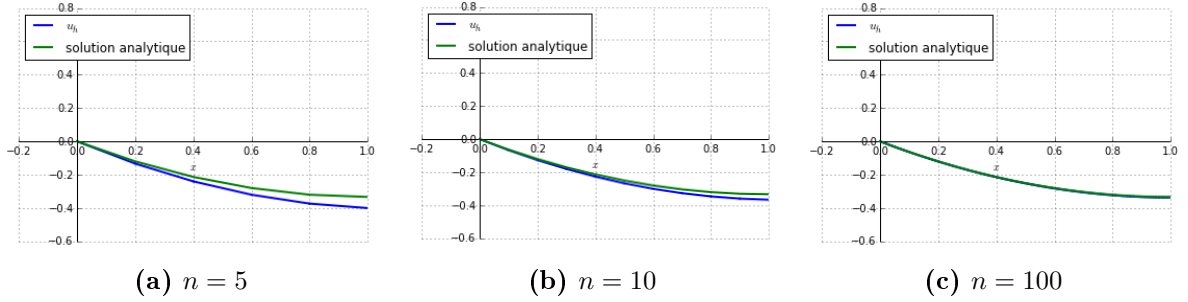


FIGURE 1.3: Comparaison des solutions analytique et numérique pour $n = 5, 10, 100$ et f négatif

On remarque que les courbes de la solution analytique en vert et de la solution approchée en bleu se rapprochent lorsque n augmente. Les deux courbes sont confondues pour $n = 100$.

Ainsi, la méthode des éléments finis appliquée au problème faible sans contact (2.2) fournit dans ce cas particulier une bonne approximation du problème classique sans contact (2.1).

4. Recherche d'une formulation faible pénalisée discrète

A partir de la formulation faible pénalisée (2.3), en utilisant les notations relatives à la discrétisation par éléments finis introduites plus haut, et en prenant $\varepsilon = \varepsilon_0 h^m$, on en déduit une formulation faible pénalisée discrète du problème :

déterminer $u_{\varepsilon,h} \in V_h$ tel que

$$a(u_{\varepsilon,h}, v_h) + \frac{1}{\varepsilon_0 h^m} [u_{\varepsilon,h}(1)]_+ v_h(1) = L(v_h) \text{ pour tout } v_h \in V_h. \quad (3.1)$$

Nous remarquons que le terme pénalisé $\frac{1}{\varepsilon_0 h^m} [u_{\varepsilon,h}(1)]_+ v_h(1)$ introduit une difficulté supplémentaire lors de la résolution de l'équation, par rapport au problème faible sans contact que nous

avons déjà étudié. Nous allons donc combiner la méthode des éléments finis - permettant de résoudre le problème linéaire - avec celle du point fixe, afin d'obtenir la solution par itérations successives de résolutions de systèmes linéaires.

5. Convergence de la méthode des éléments finis lorsque h tend vers 0

Nous citons ici un résultat sans démonstration, qui sort du cadre de notre étude, extrait de l'article [2] :

Soit $\mathbf{u}_{\varepsilon,h}$ la solution du problème pénalisé discret : $a(\mathbf{u}_{\varepsilon,h}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_{\varepsilon,h}) \geq L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_{\varepsilon,h})$.

Soit \mathbf{u} la solution du problème faible : $a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u})$.

Si la solution \mathbf{u} appartient à $(H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega))^2$ avec $\nu \in (0, \frac{1}{2}]$, alors on obtient l'estimation suivante :

si $0 < \nu < 1$, alors

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\varepsilon,h}\|_{1,\Omega} + \sqrt{\varepsilon} \|\sigma_n(\mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon} [u_{\varepsilon,h,n}]_+\|_{0,\Gamma_C} \leq c \left(h^{\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} + \nu^2} + \sqrt{\varepsilon} h^\nu + \varepsilon h^{\nu - \frac{1}{2}} \right) \|\mathbf{u}\|_{\frac{3}{2} + \nu, \Omega},$$

si $\nu = \frac{1}{2}$, alors

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\varepsilon,h}\|_{1,\Omega} + \sqrt{\varepsilon} \|\sigma_n(\mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon} [u_{\varepsilon,h,n}]_+\|_{0,\Gamma_C} \leq c \left(h |\ln h|^{1/2} + \sqrt{\varepsilon} h^{1/2} + \varepsilon \right) \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}$$

où $c > 0$ est une constante indépendante de ε, h et \mathbf{u} .

Cherchons à adapter ce résultat au cas de la dimension un d'espace :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\varepsilon,h}\|_{1,\Omega}^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\varepsilon,h}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}' - \mathbf{u}'_{\varepsilon,h}\|_{0,\Omega}^2$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\varepsilon,h}\|_{1,\Omega}^2 = \int_0^l \int_0^1 |u(x) - u_{\varepsilon,h}(x)|^2 dx dy + \int_0^l \int_0^1 |u'(x) - u'_{\varepsilon,h}(x)|^2 dx dy$$

où nous rappelons que l représente la largeur du solide.

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\varepsilon,h}\|_{1,\Omega}^2 = l \|u - u_{\varepsilon,h}\|^2 + l \|u' - u'_{\varepsilon,h}\|^2 = l \|u - u_{\varepsilon,h}\|_1^2$$

On obtient de façon similaire $\|\mathbf{u}\|_{\frac{3}{2} + \nu, \Omega} = \sqrt{l} \|u\|_{\frac{3}{2} + \nu}$ et $\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} = \sqrt{l} \|u\|_2$.

Par ailleurs,

$$\|\sigma_n(\mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon} [u_{\varepsilon,h,n}]_+\|_{0,\Gamma_C}^2 = l \int_0^1 u'(1) + \frac{1}{\varepsilon} [u_{\varepsilon,h}(1)]_+ dx = l \left(u'(1) + \frac{1}{\varepsilon} [u_{\varepsilon,h}(1)]_+ \right).$$

On en déduit donc que si $0 < \nu < 1$, alors

$$\sqrt{l} \left(\|u - u_{\varepsilon,h}\| + \sqrt{\varepsilon} (u'(1) + \frac{1}{\varepsilon} [u_{\varepsilon,h}]_+)^{1/2} \right) \leq c \left(h^{\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} + \nu^2} + \sqrt{\varepsilon} h^\nu + \varepsilon h^{\nu - \frac{1}{2}} \right) \sqrt{l} \|u\|_{\frac{3}{2} + \nu, \Omega},$$

$$\|u - u_{\varepsilon,h}\| + \sqrt{\varepsilon}(u'(1) + \frac{1}{\varepsilon}[u_{\varepsilon,h}]_+)^{1/2} \leq c \left(h^{\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} + \nu^2} + \sqrt{\varepsilon}h^\nu + \varepsilon h^{\nu - \frac{1}{2}} \right) \|u\|_{\frac{3}{2} + \nu, \Omega},$$

et si $\nu = \frac{1}{2}$, alors

$$\sqrt{l} \left(\|u - u_{\varepsilon,h}\| + \sqrt{\varepsilon}(u'(1) + \frac{1}{\varepsilon}[u_{\varepsilon,h}]_+)^{1/2} \right) \leq c \left(h |\ln h|^{1/2} + \sqrt{\varepsilon}h^{1/2} + \varepsilon \right) \sqrt{l} \|u\|_{2,\Omega}$$

$$\|u - u_{\varepsilon,h}\| + \sqrt{\varepsilon}(u'(1) + \frac{1}{\varepsilon}[u_{\varepsilon,h}]_+)^{1/2} \leq c \left(h |\ln h|^{1/2} + \sqrt{\varepsilon}h^{1/2} + \varepsilon \right) \|u\|_{2,\Omega}$$

Ainsi, on peut en déduire que lorsque h tend vers 0, $u_{\varepsilon,h}$ tend vers u , d'où la convergence de la méthode des éléments finis.

Section 2. RÉSOLUTION PAR LA MÉTHODE DU POINT FIXE

1. Présentation de la méthode du point fixe

Il s'agit ici d'une méthode de résolution numérique des solutions et non plus d'une modélisation des solutions du problème de contact.

D'une manière générale la méthode du point fixe utilise un algorithme permettant d'obtenir une approximation de la solution des équations algébriques quelconques de la forme $F(X) = X$.

On remarque qu'on peut construire une suite $(X^{(k)})_k$ telle que $X^{(k+1)} = F(X^{(k)})$. Si cette suite converge, alors sa limite X vérifie l'équation du point fixe : $F(X) = X$. Attention, une telle suite ne converge pas nécessairement. Nous pourrions d'ailleurs le constater dans la suite de notre étude.

La méthode du point fixe est abordée dans l'article [16]. Toutefois, il ne s'agit pas vraiment d'une méthode classique de résolution de problèmes variationnels. En fait, nous l'abordons ici essentiellement dans le but de faire comprendre les difficultés rencontrées lors de la résolution du problème faible pénalisé.

2. Construction de la méthode du point fixe

On part de la formulation faible pénalisée discrète qu'on cherche à écrire sous la forme $F(X) = X$. Nous avons établi précédemment que : $a(u_{\varepsilon,h}, v_h) = L(v_h) - \frac{1}{\varepsilon_0 h^m} [u_{\varepsilon,h}(1)]_+ v_h(1)$ pour tout $v_h \in V_h$.

En particulier en prenant $v_h = \phi_i$, on obtient $a(u_{\varepsilon,h}, \phi_i) = L(\phi_i) - \frac{1}{\varepsilon_0 h^m} [u_{\varepsilon,h}(1)]_+ \phi_i(1)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

On peut alors utiliser la méthode du point fixe et construire une suite $(u_{\varepsilon,h}^{(k)})_k$ telle que $a(u_{\varepsilon,h}^{(k+1)}, \phi_i) = L(\phi_i) - \frac{1}{\varepsilon_0 h^m} [u_{\varepsilon,h}^{(k)}(1)]_+ \phi_i(1)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Si on note $L_i^{(k)} = L(\phi_i) - \frac{1}{\varepsilon_0 h^m} [u_{\varepsilon,h}^{(k)}(1)]_+ \phi_i(1)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on doit alors résoudre à chaque itération sur k :

$$a(u_{\varepsilon,h}^{(k+1)}, \phi_i) = L_i^{(k)} \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Comme $\phi_i(1) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ et $\phi_n(1) = 1$, on en déduit que

$$\begin{pmatrix} L_1^{(k)} \\ L_2^{(k)} \\ \vdots \\ L_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\phi_1) \\ L(\phi_2) \\ \vdots \\ L(\phi_n) - \frac{1}{\varepsilon_0 h^m} [u_{\varepsilon,h}^{(k)}(1)]_+ \end{pmatrix}.$$

A chaque itération k , pour résoudre le système $a(u_{\varepsilon,h}^{(k+1)}, \phi_i) = L_i^{(k)}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on utilise la méthode des éléments finis introduite à la section précédente *Discretisation par*

éléments finis. Nous reprenons donc le maillage à $n + 1$ noeuds défini plus haut et l'espace de travail V_h .

On peut alors ré-écrire l'équation $a(u_{\varepsilon,h}^{(k+1)}, \phi_i) = L_i^{(k)}$ sous forme linéaire :

$$\begin{aligned} \text{à chaque itération } k, \text{ déterminer } U_{\varepsilon,h}^{(k+1)} &= \begin{pmatrix} u_{\varepsilon,h,1}^{(k+1)} \\ u_{\varepsilon,h,2}^{(k+1)} \\ \vdots \\ u_{\varepsilon,h,n}^{(k+1)} \end{pmatrix} \text{ tel que } AU_{\varepsilon,h}^{(k+1)} = C^{(k)} \\ \text{avec } A &= \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{et } C^{(k)} &= \begin{pmatrix} L(\phi_1) \\ L(\phi_2) \\ \vdots \\ L(\phi_n) - \frac{1}{\varepsilon_0 h^m} [u_{\varepsilon,h}^{(k)}(1)]_+ \end{pmatrix} = B + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\frac{1}{\varepsilon_0 h^m} [u_{\varepsilon,h}^{(k)}(1)]_+ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On sait résoudre ce type d'équation, et il nous suffit de reprendre les lignes de commandes établies dans la section *Discretisation par éléments finis* en remplaçant le vecteur B par le vecteur $C^{(k)}$ pour obtenir le résultat au rang k .

D'ailleurs, pour $k = 0$, on obtient $a(u_{\varepsilon,h}^{(1)}, \phi_i) = L(\phi_i) - \frac{1}{\varepsilon_0 h^m} [u_{\varepsilon,h}^{(0)}(1)]_+ \phi_i(1)$.

En choisissant $u_{\varepsilon,h}^{(0)}(1) = 0$, on retrouve $a(u_{\varepsilon,h}^{(1)}, \phi_i) = L(\phi_i)$, équation que nous avons déjà résolue dans le cadre du problème sans contact.

3. Algorithme de résolution par la méthode du point fixe

Lors de la création du maillage, on choisit un nombre n qui va définir le pas h ainsi que la taille des matrices A, B et $U_{\varepsilon,h}^{(k)}$. Toutefois, ce nombre n est indépendant du nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une bonne approximation de la solution.

Nous allons tout d'abord nous assurer que le point fixe converge avant de nous intéresser à la solution, faute de quoi, nous pourrions obtenir une solution qui n'a aucun sens au regard du problème posé.

Pour cela, nous allons contrôler le résidu $R^{(k)} = AU^{(k)} - C^{(k)}$ à chaque itération k . Nous choisirons $\|R^{(k)}\|$ comme référence pour la condition d'arrêt de l'algorithme plutôt que $U^{(k+1)} - U^{(k)}$, car $R^{(k)}$ est un indicateur de convergence plus adapté à la méthode du point fixe. En effet, $U^{(k+1)} - U^{(k)}$ peut parfois converger sans que la solution s'approche du point fixe.

Le calcul devra se terminer soit lorsque le nombre maximal d'itérations est atteint, auquel cas la convergence du point fixe n'est pas réalisée, soit lorsque la norme du résidu devient inférieure à un certain seuil que nous fixons à 10^{-8} . Nous choisirons la norme l^2 comme norme du résidu. Ainsi

$$\|R^{(k)}\| = \left(\sum_{i=1}^n (R_i^{(k)})^2 \right)^{1/2}.$$

Nous garderons en mémoire chaque valeur de $\|R^{(k)}\|$ en fonction de k .

L'algorithme de résolution numérique devra donc effectuer les tâches suivantes au rang k :

- calculer $[u_{\varepsilon,h}^{(k)}(1)]_+$
- construire le vecteur $C^{(k)}$
- construire le résidu $R^{(k)} = AU_{\varepsilon,h}^{(k)} - C^{(k)}$
- calculer la norme du vecteur $R^{(k)}$.
Conserver la norme $\|R^{(k)}\|$ comme k -ème élément d'un vecteur
- conserver les valeurs du vecteur $U_{\varepsilon,h}^{(k)}$ avant d'obtenir $U_{\varepsilon,h}^{(k+1)}$
- construire le vecteur $U_{\varepsilon,h}^{(k+1)}$ par résolution de l'équation $AU_{\varepsilon,h}^{(k+1)} = C^{(k)}$
- nouvelle construction de $U_{\varepsilon,h}^{(k+1)}$ à partir du vecteur $U_{\varepsilon,h}^{(k+1)}$ précédemment obtenu et du vecteur $U_{\varepsilon,h}^{(k)}$ que nous avons conservé
(relaxation suivant la relation $U_{\varepsilon,h}^{(k+1)} = 0.1U_{\varepsilon,h}^{(k+1)} + 0.9U_{\varepsilon,h}^{(k)}$)
- condition d'arrêt : interrompre l'itération si $\|R^{(k)}\| < 10^{-8}$

Le processus se répète au rang $k+1$ et ainsi de suite jusqu'à ce que $\|R^{(k+1)}\|$ atteigne la valeur seuil que nous nous sommes fixés.

A la fin de ces itérations, l'algorithme devra effectuer les tâches suivantes :

- construire un vecteur composé des normes $\|R^{(1)}\|, \dots, \|R^{(k)}\|, \dots$
- construire la solution approchée en rajoutant $u_{\varepsilon,h}(0)$. Rappelons que la solution approchée est représentée par un vecteur de taille $n+1$ alors que $U_{\varepsilon,h}$ est un vecteur de taille n , car $U_{\varepsilon,h}$ doit être de la même taille que A et C
- construire les points du maillage et les points du maillage déplacés $x_i + u_{\varepsilon,h,i}$ à partir de la solution approchée
- construire l'intensité de la contrainte $|u'_{\varepsilon,h}(x)|$
- représentation graphique du résidu

- représentation graphique de la solution approchée $u_{\varepsilon,h}$
- représentation graphique de la déformation du solide en tenant compte du déplacement obtenu $u_{\varepsilon,h}$
- représentation graphique des contraintes exercées sur le solide

Le lecteur intéressé pourra retrouver en annexe *Programmation des solutions en Python* les lignes de commande de l'algorithme ci-dessus rédigé en *Python 3.4*.

4. Sensibilité au paramètre de pénalisation

Nous allons fournir plusieurs exemples de résolution numérique avec des forces volumiques positives et négatives. Au travers de ces exemples, nous allons voir que le paramètre de pénalisation ε influence directement les résultats obtenus. Pour cela, nous allons reprendre les valeurs que nous avons attribuées précédemment aux paramètres de calcul, à savoir :

- $n = 15$
- $\mu_L = 1, \lambda_L = 1$

4.a. Lorsque les forces volumiques sont positives

Nous considérons dans un premier temps des forces volumiques positives, que nous choisissons constantes et égales à $f(x) = 2$.

Nous allons faire évoluer le paramètre de pénalisation ε de 0.0001 à 100 pour observer les solutions numériques obtenues. Nous devons tout d'abord nous assurer de la convergence de la norme du résidu $R^{(k)}$, afin d'éliminer les solutions non admissibles.

Lorsque $\varepsilon = 0.0001$, $R^{(k)}$ reste constant, égal à 3333.33. La convergence du point fixe n'est donc pas réalisée.

Lorsque $\varepsilon = 0.01$, $R^{(k)}$ reste constant, égal à 33.33. La convergence du point fixe n'est pas non plus réalisée.

Lorsque $\varepsilon = h$, $R^{(k)}$ reste constant, égal à 5. La convergence du point fixe n'est pas réalisée.

Lorsque $\varepsilon = 0.1$, $R^{(k)}$ reste constant, égal à 3.33. La convergence du point fixe n'est pas réalisée.

Lorsque $\varepsilon = 0.5$, $R^{(k)}$ reste constant, égal à 0.66. La convergence du point fixe n'est pas réalisée.

Lorsque $\varepsilon = 1$, $R^{(k)}$ reste constant, égal à 0.33. La convergence du point fixe n'est toujours pas réalisée.

On constate donc l'échec de la convergence du point fixe pour de petites valeurs de ε . En revanche, à partir de $\varepsilon = 5$ et au-delà, on observe que la condition d'arrêt est atteinte en quelques itérations et la convergence de $R^{(k)}$ vers 0 est assurée (figure 2.4).

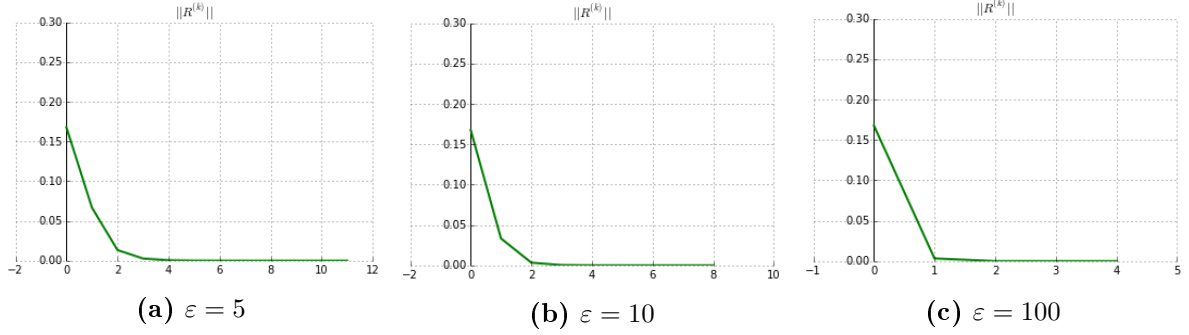


FIGURE 2.4: La norme du résidu en fonction du nombre d'itérations, pour des valeurs de ε supérieures à 5

Intéressons-nous donc aux solutions numériques obtenues pour ε supérieur à 5. Dans tous les cas, on observe que la courbe des solutions s'éloigne de 0 en $u_{\varepsilon,h}(1)$, ce qui laisse supposer une pénétration physiquement inadmissible dans le socle rigide (figure 2.5).

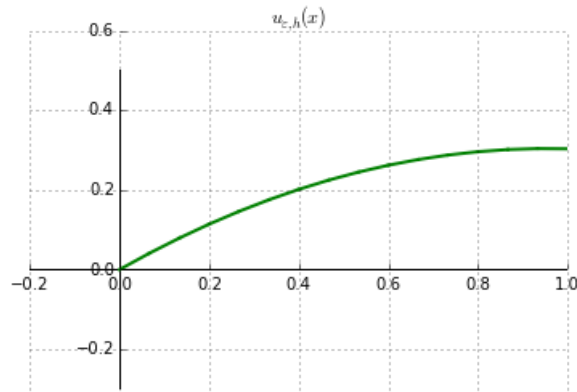


FIGURE 2.5: La solution numérique du problème pénalisé pour f positif et $\varepsilon = 5$

Cette pénétration inacceptable est confirmée par la déformation du solide élastique, obtenue en remplaçant chaque point x par $x + u_{\varepsilon,h}(x)$ (figure 2.6).

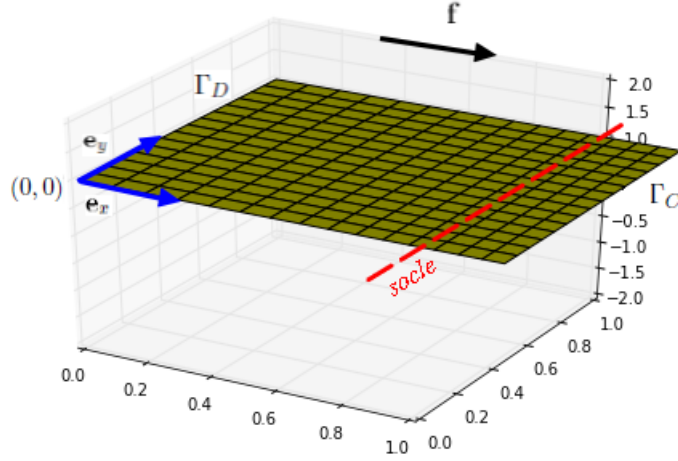


FIGURE 2.6: La déformation du solide élastique pour f positif et $\varepsilon = 5$

Ainsi, les solutions obtenues pour ε supérieur à 5 ne sont pas admissibles. Toutefois, pour ε assez grand, il est satisfaisant de constater qu'on retrouve la solution numérique à laquelle on s'attendait, c'est à dire celle du problème sans contact. Ce résultat est donc conforme aux conclusions du paragraphe 2.8 chapitre 2 *Que se passe-t-il lorsque le paramètre de pénalisation tend vers l'infini ?*.

Nous pouvons maintenant nous intéresser de plus prêt au cas $\varepsilon = 1$. En effet, dans ce cas la convergence du point fixe n'est pas assurée, mais $\|R^{(k)}\|$ reste proche de 0. Nous pouvons alors essayer de forcer la convergence en relaxant la solution obtenue à chaque itération. On choisira un coefficient de relaxation égal à 0.1 et on écrira à chaque étape de l'algorithme $U^{(k+1)} = 0.1U^{(k+1)} + 0.9U^{(k)}$ où on cherche $U^{(k+1)}$ dans le membre de gauche et on connaît dans le membre de droite $U^{(k)}$ provenant de l'étape précédente et $U^{(k+1)}$ provenant de la résolution du système linéaire $AU^{(k+1)} = C^{(k)}$.

On remarque que la relaxation a une réelle influence sur la norme du résidu, puisque celui-ci converge maintenant vers 0 (figure 2.7).

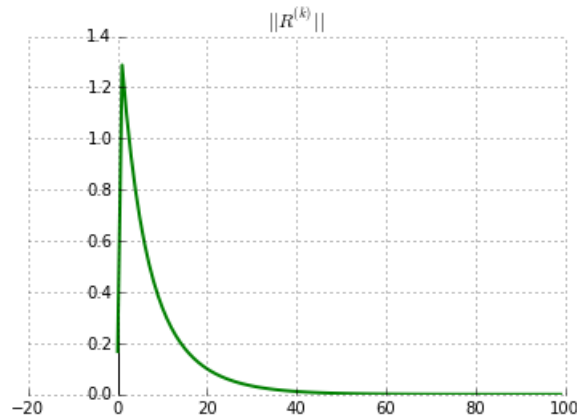


FIGURE 2.7: La norme du résidu converge vers 0 grâce à l'effet de la relaxation pour f positif et $\varepsilon = 1$

On obtient alors la représentation graphique de la solution approchée suivante :

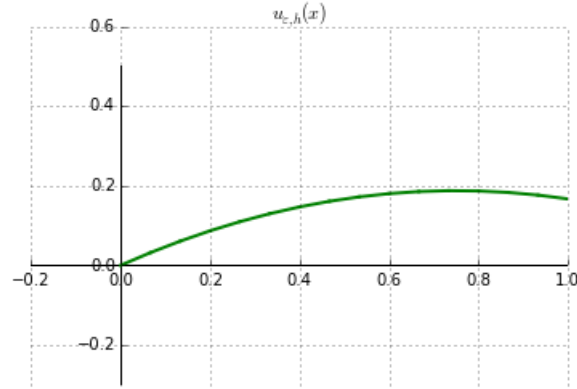


FIGURE 2.8: La solution numérique du problème pénalisé avec effet de relaxation pour f positif et $\varepsilon = 1$

On remarque que la solution numérique s'éloigne de 0 en $u_{\varepsilon,h}(1)$. On peut donc craindre que la déformation du solide conduise à une pénétration inadmissible physiquement au niveau du socle rigide. Ceci est bien confirmé visuellement sur la figure 2.9 :

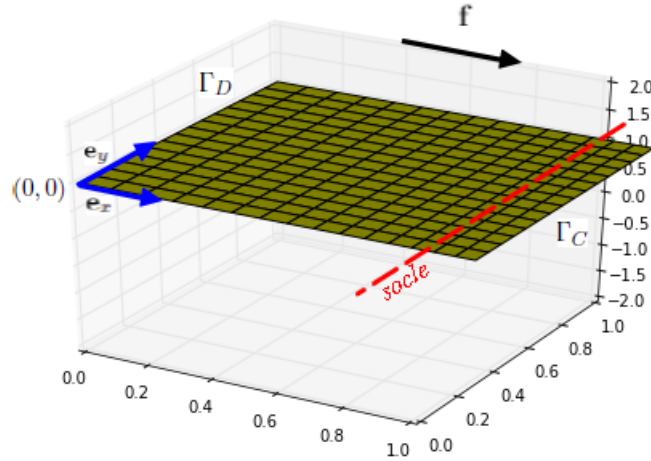


FIGURE 2.9: La déformation du solide en utilisant un effet de relaxation pour f positif et $\varepsilon = 1$

4.b. Lorsque les forces volumiques sont négatives

Nous considérons maintenant des forces volumiques négatives, que nous choisissons constantes et égales à $f(x) = -2$.

Nous allons faire évoluer le paramètre de pénalisation ε de 0.0001 à 100 pour observer les solutions numériques obtenues. A l'instar du cas des forces volumiques positives, nous devons tout d'abord nous assurer de la convergence de la norme du résidu $R^{(k)}$ afin d'éliminer les solutions non admissibles.

Quelles que soient les valeurs prises par ε , on constate la convergence rapide de $\|R^{(k)}\|$ vers 0 (figure 2.10).

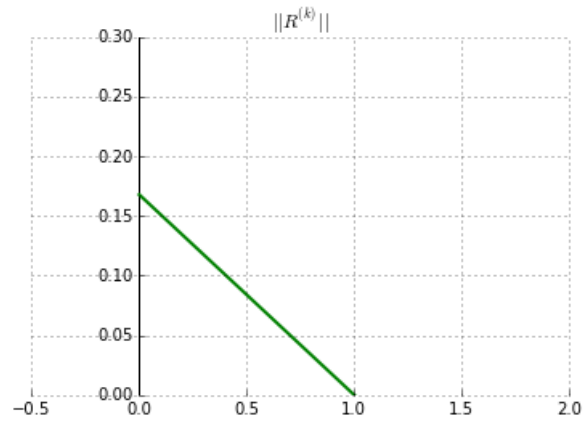


FIGURE 2.10: La norme du résidu pour f négatif et $\varepsilon = 1$

Quelles que soient les valeurs de ε , la solution numérique obtenue est similaire, et représentée sur la figure 2.11 :

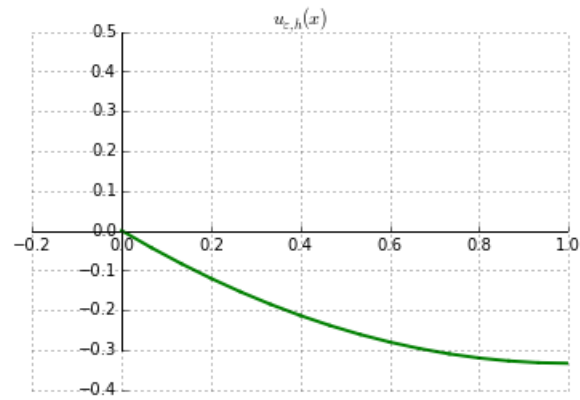


FIGURE 2.11: La solution numérique du problème de contact pénalisé pour f négatif et $\varepsilon = 1$

On en déduit la représentation graphique suivante de la déformation du solide élastique, où l'on constate clairement qu'il se comprime sous l'action des forces volumiques négatives, et qu'il perd tout contact avec le socle rigide :

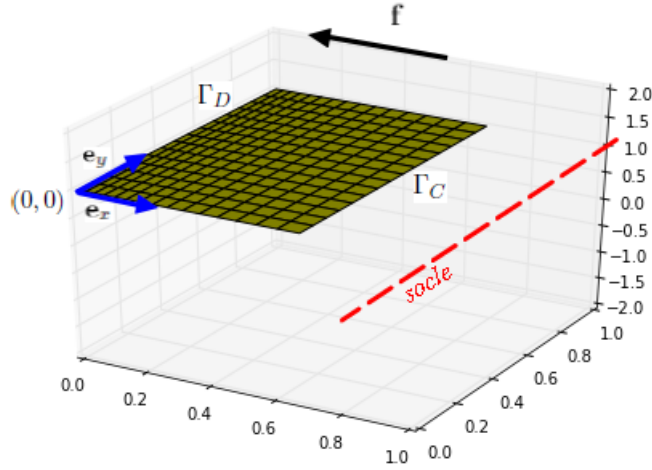


FIGURE 2.12: La déformation du solide élastique pour f négatif et $\varepsilon = 1$

On en déduit également l'intensité des contraintes exercées sur le solide élastique. Dans la représentation graphique ci-dessous les parties en mauve sont soumises aux plus fortes contraintes :

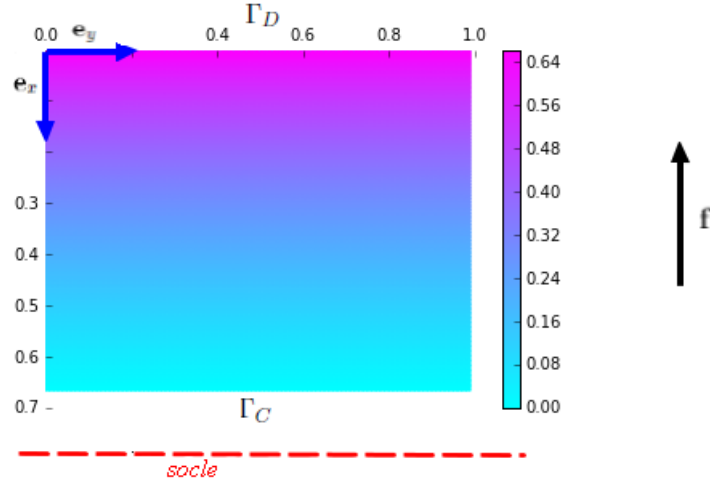


FIGURE 2.13: Les contraintes sur le solide élastique pour f négatif et $\varepsilon = 1$

On remarque que les plus fortes contraintes sont exercées sur la partie Γ_D du solide attachée au bord supérieur, comme on pouvait déjà le constater dans le cas du problème sans contact. Ces contraintes semblent physiquement acceptables, car elles correspondent au niveau de Γ_D à une compression imposée par les forces volumiques négatives.

5. Interprétation des résultats

Pour nous faire une idée de la pertinence de la méthode du point fixe combinée avec la méthode des éléments finis, nous avons choisi de donner certaines valeurs numériques à nos paramètres de calcul. Les résultats obtenus n'ont donc aucun caractère général.

Toutefois, dans le cas de forces volumiques positives, on remarque clairement le défaut de convergence de la méthode du point fixe pour des valeurs trop faibles du paramètre de pénalisation. Pour les autres valeurs et en particulier pour les valeurs très grandes, les solutions numériques trouvées sont inadmissibles physiquement au regard du problème de contact.

Dans le cas où notre solide est soumis à des forces volumiques négatives, les solutions obtenues sont physiquement acceptables et la valeur du paramètre de pénalisation ne semble pas affecter le résultat des calculs. On pourra également noter que le solide élastique se comprime et perd le contact avec le socle rigide.

Cette méthode de résolution est donc peu adaptée au problème faible pénalisé que nous étudions.

Ceci nous conduit à introduire une autre méthode de résolution, la méthode de Newton.

Section 3. RÉOLUTION PAR LA MÉTHODE DE NEWTON

1. Présentation de la méthode de Newton

Il s'agit d'une autre méthode de résolution numérique des solutions et non pas d'une modélisation des solutions du problème de contact.

D'une manière générale la méthode de Newton utilise un algorithme permettant d'obtenir une approximation de la solution des équations algébriques quelconques de la forme $F(X) = 0$.

Le développement de Taylor de F au premier ordre en tout point X montre que $F(X) \simeq F(X^{(0)}) + F'(X^{(0)})(X - X^{(0)})$.

En particulier pour un zéro de F qu'on notera α on obtient $0 \simeq F(X^{(0)}) + F'(X^{(0)})(\alpha - X^{(0)})$. Ainsi l'intersection de la tangente à F en $X^{(0)}$ et de l'axe des abscisses fournit une approximation de α . Si on note $X^{(1)}$ cette approximation de α , on peut réitérer le développement de Taylor en remplaçant $X^{(0)}$ par $X^{(1)}$ plus proche de α . On obtient ainsi un algorithme nous permettant d'approcher α par itération.

Pour formaliser cet algorithme, on construit la suite $(X^{(k)})_k$ telle que

$$F(X^{(k)}) + F'(X^{(k)})(X^{(k+1)} - X^{(k)}) = 0.$$

On remarque à l'usage la particularité suivante : pour que l'algorithme converge vers un zéro de F , il est nécessaire que le premier itéré soit assez proche de ce zéro, sinon la suite des itérés a un comportement erratique. Toute mise en oeuvre de cet algorithme doit donc contenir un code de contrôle car la méthode peut ne pas converger.

2. Construction de la méthode de Newton

Pour combiner la méthode de Newton avec la méthode des éléments finis, on part de la formulation faible pénalisée discrète (3.1) : *déterminer* $u_{\varepsilon,h} \in V_h$ tel que

$$a(u_{\varepsilon,h}, v_h) = L(v) - \frac{1}{\varepsilon}[u_{\varepsilon,h}(1)]_+ v_h(1) \text{ pour tout } v_h \in V_h.$$

On suppose qu'au rang 0 le déplacement est nul sur tous les points du maillage, c'est à dire $u_{\varepsilon,h}^{(0)}(0) = u_{\varepsilon,h}^{(0)}(x_1) = \dots = u_{\varepsilon,h}^{(0)}(x_{n-1}) = u_{\varepsilon,h}^{(0)}(1) = 0$.

Notons $R(u_{\varepsilon,h}, v_h) = a(u_{\varepsilon,h}, v_h) - L(v_h) + \frac{1}{\varepsilon}[u_{\varepsilon,h}(1)]_+ v_h(1)$. Le problème devient : *déterminer* $u_{\varepsilon,h} \in V_h$ tel que $R(u_{\varepsilon,h}, v_h) = 0$ pour tout $v_h \in V_h$.

La méthode de Newton est une méthode itérative consistant à chercher une correction $s \in V_h$, connaissant une première approximation $u_{\varepsilon,h}^*$, telle que $R(u_{\varepsilon,h}^* + s, v_h) = 0$ pour tout $v_h \in V_h$.

Un développement de $R(u_{\varepsilon,h}^* + s, v_h)$ permet d'écrire

$$R(u_{\varepsilon,h}^* + s, v_h) = R(u_{\varepsilon,h}^*, v_h) + D_u R(u_{\varepsilon,h}^*, v_h)[s] + \|s\| o(s, v_h) \text{ où } D_u R(u_{\varepsilon,h}^*, v_h)[s] \text{ représente la dérivée de Gateaux de } R \text{ par rapport à } u \text{ le long de } s \text{ et } \lim_{\|s\| \rightarrow 0} o(s, v_h) = 0.$$

On obtient donc $R(u_{\varepsilon,h}^*, v_h) + D_u R(u_{\varepsilon,h}^*, v_h)_{[s]} + ||s||o(s, v_h) = 0$.

En négligeant le terme $||s||o(s, v_h)$, on obtient l'approximation suivante :

$R(u_{\varepsilon,h}^*, v_h) = -D_u R(u_{\varepsilon,h}^*, v_h)_{[s]}$, ce qui nous ramène à un problème linéaire.

Cherchons à expliciter la dérivée de Gateaux :

$$\begin{aligned} D_u R(u_{\varepsilon,h}^*, v_h)_{[s]} &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{R(u_{\varepsilon,h}^* + \eta s, v_h) - R(u_{\varepsilon,h}^*, v_h)}{\eta} = \frac{d}{d\eta} (R(u_{\varepsilon,h}^* + \eta s, v_h))_{\eta=0} \\ D_u R(u_{\varepsilon,h}^*, v_h)_{[s]} &= \frac{d}{d\eta} \left(a(u_{\varepsilon,h}^* + \eta s, v_h) - L(v_h) + \frac{1}{\varepsilon} [(u_{\varepsilon,h}^* + \eta s)(1)]_+ v_h(1) \right)_{\eta=0} \\ &= \frac{d}{d\eta} \left(a(u_{\varepsilon,h}^*, v_h) + a(\eta s, v_h) - L(v_h) + \frac{1}{\varepsilon} [(u_{\varepsilon,h}^* + \eta s)(1)]_+ v_h(1) \right)_{\eta=0} \\ &= \frac{d}{d\eta} \left(a(\eta s, v_h) + \frac{1}{\varepsilon} [(u_{\varepsilon,h}^* + \eta s)(1)]_+ v_h(1) \right)_{\eta=0} \\ &= a(s, v_h) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{d\eta} \left([(u_{\varepsilon,h}^* + \eta s)(1)]_+ v_h(1) \right)_{\eta=0} \end{aligned}$$

Comme $\frac{d}{dw}([w]_+) = H(w)$ où H désigne la fonction de Heaviside², en notant $w = u_{\varepsilon,h}^* + \eta s$, on obtient $\frac{d}{d\eta}([w]_+) = \frac{dw}{d\eta} \frac{d}{dw}([w]_+) = sH(w)$,

$$\text{donc } \frac{d}{d\eta} \left([(u_{\varepsilon,h}^* + \eta s)(1)]_+ \right)_{\eta=0} = s \left(H(u_{\varepsilon,h}^* + \eta s)(1) \right)_{\eta=0} = sH(u_{\varepsilon,h}^*(1)).$$

On en déduit finalement que $D_u R(u_{\varepsilon,h}^*, v_h)_{[s]} = a(s, v_h) + \frac{s}{\varepsilon} H(u_{\varepsilon,h}^*(1))v_h(1)$.

On doit donc maintenant résoudre l'équation $R(u_{\varepsilon,h}^*, v_h) = -a(s, v_h) - \frac{s}{\varepsilon} H(u_{\varepsilon,h}^*(1))v_h(1)$ pour tout $v_h \in V_h$, d'inconnue $s \in S$, en connaissant $u_{\varepsilon,h}^*$.

A chaque étape de calcul, on cherche donc $s \in V_h$

tel que $a(u_{\varepsilon,h}^*, v_h) - L(v_h) + \frac{1}{\varepsilon} [u_{\varepsilon,h}^*(1)]_+ v_h(1) = -a(s, v_h) - \frac{s}{\varepsilon} H(u_{\varepsilon,h}^*(1))v_h(1)$ pour tout $v_h \in V_h$.

En particulier si on choisit $v_h = \phi_i$ tel que défini dans le paragraphe sur la discrétisation, on obtient $a(u_{\varepsilon,h}^*, \phi_i) - L(\phi_i) + \frac{1}{\varepsilon} [u_{\varepsilon,h}^*(1)]_+ \phi_i(1) = -a(s, \phi_i) - \frac{s}{\varepsilon} H(u_{\varepsilon,h}^*(1))\phi_i(1)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

On peut donc maintenant construire une suite $(u_{\varepsilon,h}^{(k)})_k$ dans V_h et une suite $(s^{(k)})_k$ dans V_h telles que

$$u_{\varepsilon,h}^{(k+1)} = u_{\varepsilon,h}^{(k)} + s^{(k)}$$

et

$$a(u_{\varepsilon,h}^{(k)}, \phi_i) - L(\phi_i) + \frac{1}{\varepsilon} [u_{\varepsilon,h}^{(k)}(1)]_+ \phi_i(1) = -a(s^{(k)}, \phi_i) - \frac{s^{(k)}}{\varepsilon} H(u_{\varepsilon,h}^{(k)}(1))\phi_i(1).$$

2. *Fonction de Heaviside* : elle est définie par $H(x) = 0$ pour tout $x < 0$, $H(x) = 1$ pour tout $x > 0$ et $H(0) = \frac{1}{2}$

Explicitons $\frac{s}{\varepsilon}H(u_{\varepsilon,h}^{(k)}(1))\phi_i(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{H(u_{\varepsilon,h}^{(k)}(1))}{\varepsilon}s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{H(u_{\varepsilon,h}^{(k)}(1))}{\varepsilon} \end{pmatrix} S.$

L'équation précédente peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} AU_{\varepsilon,h}^{(k)} - C^{(k)} &= -AS^{(k)} - \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{s}{\varepsilon}H(u_{\varepsilon,h}^{(k)}(1)) \end{pmatrix} S^{(k)} \\ &= - \left(A + \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{H(u_{\varepsilon,h}^{(k)}(1))}{\varepsilon} \end{pmatrix} \right) S^{(k)} \end{aligned}$$

où l'on a repris les mêmes notations que dans la section 2 *Résolution par la méthode du point fixe*.

La méthode des éléments finis nous permet alors d'obtenir le système suivant à chaque étape k :

et

$$U_{\varepsilon,h}^{(k+1)} = U_{\varepsilon,h}^{(k)} + S^{(k)}$$

$$AU_{\varepsilon,h}^{(k)} - C^{(k)} = - \left(A + \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{H(u_{\varepsilon,h}^{(k)}(1))}{\varepsilon} \end{pmatrix} \right) S^{(k)}$$

où

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_{\varepsilon,h}^{(k)} = \begin{pmatrix} u_{\varepsilon,h,1}^{(k)} \\ \vdots \\ u_{\varepsilon,h,n}^{(k)} \end{pmatrix}, S^{(k)} = \begin{pmatrix} s_1^{(k)} \\ \vdots \\ s_n^{(k)} \end{pmatrix} \text{ et } C^{(k)} = \begin{pmatrix} L(\phi_1) \\ \vdots \\ L(\phi_{n-1}) \\ L(\phi_n) - \frac{1}{\varepsilon}[u(1)]_+ \end{pmatrix}$$

3. Algorithme de résolution par la méthode de Newton

Comme pour toute autre méthode de calcul numérique, nous allons tout d'abord nous assurer de la convergence de la méthode de Newton, sans quoi, les solutions trouvées n'auraient aucun

sens.

Pour cela, nous allons cette fois contrôler la différence $S^{(k)} = U^{(k+1)} - U^{(k)}$ à chaque itération k . Le calcul devra se terminer soit lorsque le nombre maximal d'itérations est atteint, auquel cas la convergence de la méthode n'est pas réalisée, soit lorsque le seuil que nous nous sommes fixés est atteint, à savoir $\|S^{(k)}\| < 10^{-8}$. Nous choisirons la norme l^2 comme norme du vecteur $S^{(k)}$. Ainsi

$$\|S^{(k)}\| = \left(\sum_{i=1}^n (S_i^{(k)})^2 \right)^{1/2}.$$

Nous garderons en mémoire chaque valeur de $\|S^{(k)}\|$ en fonction de k .

L'algorithme de résolution numérique devra donc effectuer les tâches suivantes au rang k :

- calculer $[u_{\varepsilon,h}^{(k)}(1)]_+$
- calculer $H(u_{\varepsilon,h}(1))$
- construire le vecteur $C^{(k)}$
- construire la matrice $-A$ dans laquelle on enlève $\frac{H(u_{\varepsilon,h}(1))}{\varepsilon}$ au terme $A_{n,n}$
- construire le résidu $AU_{\varepsilon,h}^{(k)} - C^{(k)}$
- construire le vecteur $S^{(k)}$ à partir de la matrice précédemment obtenue et du résidu
- construire la norme du vecteur $S^{(k)}$
- construire le vecteur $U_{\varepsilon,h}^{(k+1)}$ à partir de l'équation $U_{\varepsilon,h}^{(k+1)} = S^{(k)} + U_{\varepsilon,h}^{(k)}$
- condition d'arrêt : interrompre l'itération si $\|S^{(k)}\| < 10^{-8}$

Le processus se répète au rang $k+1$ et ainsi de suite jusqu'à ce que $\|S^{(k+1)}\|$ atteigne la valeur seuil que nous nous sommes fixés.

A la fin de ces itérations, l'algorithme devra effectuer les tâches suivantes :

- construire la solution approchée en rajoutant $u_{\varepsilon,h}(0)$. Rappelons que la solution approchée est représentée par un vecteur de taille $n+1$ alors que $U_{\varepsilon,h}$ est un vecteur de taille n , car $U_{\varepsilon,h}$ doit être de la même taille que A et C
- construire les points du maillage et les points du maillage déplacés $x_i + u_{\varepsilon,h,i}$ à partir de la solution approchée
- construire l'intensité de la contrainte $|u'_{\varepsilon,h}(x)|$
- représentation graphique de la solution approchée $u_{\varepsilon,h}$
- représentation graphique de la déformation du solide en tenant compte du déplacement

obtenu $u_{\varepsilon,h}$

- représentation graphique des contraintes exercées sur le solide

Le lecteur intéressé pourra retrouver en annexe *Programmation des solutions en Python* les lignes de commande de l'algorithme ci-dessus rédigé en *Python 3.4*.

4. Sensibilité au paramètre de pénalisation

Nous allons fournir plusieurs exemples de résolution numérique avec des forces volumiques positives et négatives. Au travers de ces exemples, nous allons voir que le paramètre de pénalisation ε influence directement les résultats obtenus. Pour cela, nous allons reprendre les valeurs que nous avons attribuées précédemment aux paramètres de calcul, à savoir :

- $n = 15$
- $\mu_L = 1, \lambda_L = 1$

4.a. Lorsque les forces volumiques sont positives

Nous considérons dans un premier temps des forces volumiques positives, que nous choisissons constantes et égales à $f(x) = 2$.

Nous allons faire évoluer le paramètre de pénalisation ε de 0.0001 à 100 pour observer les résultats obtenus. Nous devons tout d'abord nous assurer de la convergence de la norme de S , afin d'éliminer les solutions non admissibles.

Lorsque ε prend les valeurs successives 0.0001, 0.01, h , 0.1, 1, 10 puis 100, nous remarquons que la norme de S décroît rapidement après trois itérations, jusqu'à satisfaire la condition d'arrêt de l'algorithme, ce que nous représentons sur la figure 3.14 :

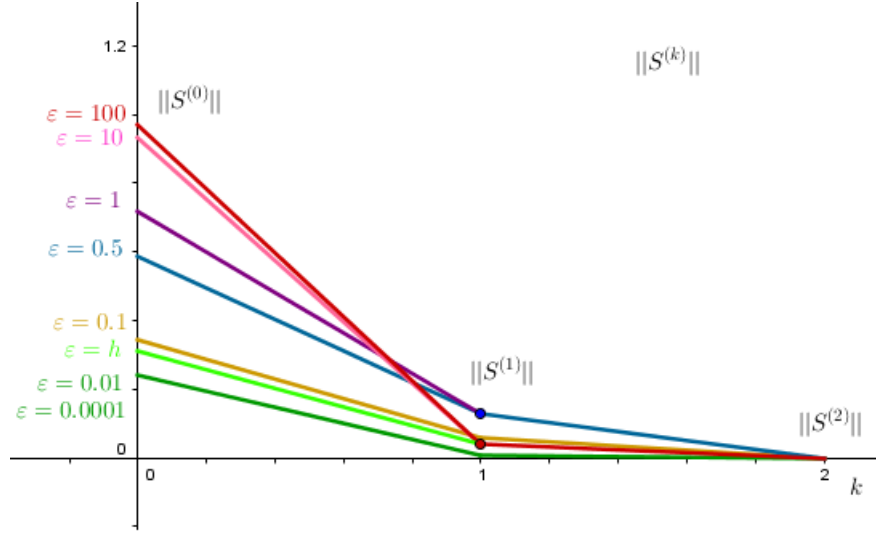


FIGURE 3.14: Evolution de $\|S^{(k)}\|$ pour chaque itération k en faisant varier ε pour f positif

Ainsi, quelle que soit la valeur de ε , dans le cas de forces volumiques positives, l'algorithme converge.

Cherchons maintenant si les solutions approchées obtenues sont toutes admissibles physiquement.

On remarque tout d'abord que les solutions approchées pour $\varepsilon = 0.0001$ et $\varepsilon = 0.01$ sont sensiblement identiques. On représente ci-dessous le cas où $\varepsilon = 0.01$:

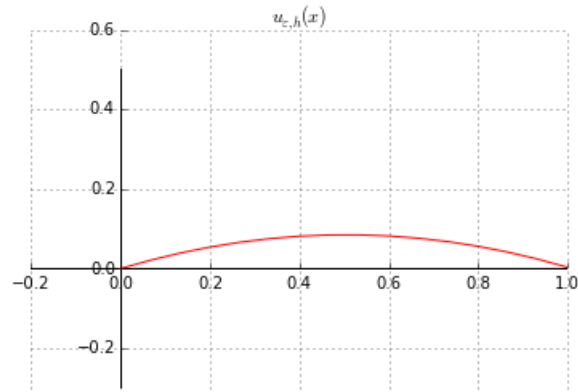


FIGURE 3.15: La solution numérique du problème pénalisé pour f positif et $\varepsilon = 0.01$

Cette solution approchée semble acceptable physiquement dans la mesure où $u_{\varepsilon,h}(1)$ est nul ou proche de 0. Connaissant maintenant les déplacements de chaque point du solide élastique, nous pouvons représenter la déformation de ce solide en remplaçant chaque point x par $x + u_{\varepsilon,h}(x)$:

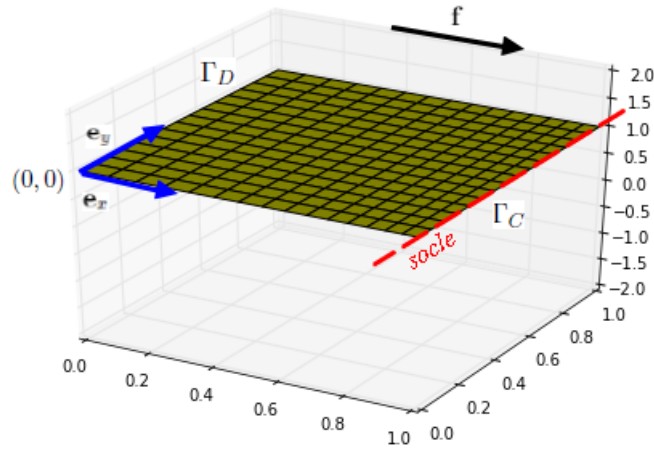


FIGURE 3.16: La déformation du solide élastique pour f positif et $\varepsilon = 0.01$

On observe clairement une compression à proximité du bord Γ_C et une dilatation à proximité du bord Γ_D .

Nous pouvons également en déduire l'intensité des contraintes exercées sur le solide élastique, en tenant compte d'une pondération $|u'(x)|$ en chaque point x_i du maillage. Dans la représentation graphique ci-dessous, les parties en mauve sont soumises aux plus fortes contraintes :

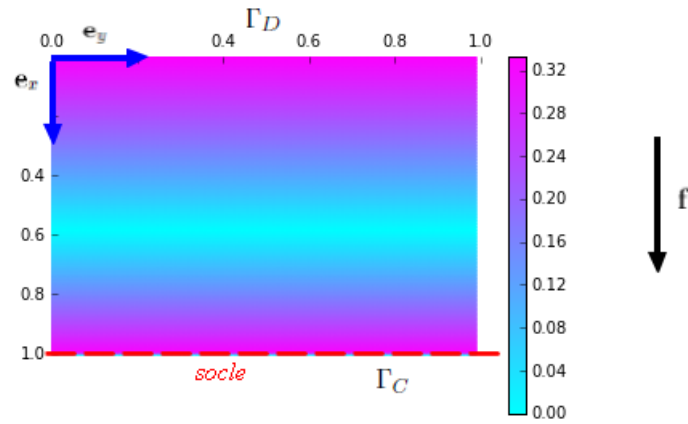


FIGURE 3.17: Les contraintes exercées sur le solide élastique pour f positif et $\varepsilon = 0.01$

On remarque que les plus fortes contraintes sont exercées sur la partie du solide Γ_D attachée au bord supérieur, comme on pouvait déjà le constater dans le cas du problème sans contact. On trouve également de fortes contraintes sur la partie Γ_C au contact du socle rigide. Ces résultats sont physiquement acceptables. En effet, à la base du solide élastique, c'est à dire au niveau de Γ_D , elles correspondent à une dilatation imposée par les forces volumiques positives. Toutefois, cette dilatation est contrainte dans l'espace par le contact avec le socle rigide, qui en réaction, crée une compression au niveau de Γ_C .

Lorsque $\varepsilon = h$ et autour de cette valeur, on se rend compte que les résultats obtenus restent sensiblement identiques.

En revanche, dès que $\varepsilon = 0.1$ et au-delà, on remarque un décollement de la solution approchée en $u_{\varepsilon,h}(1)$ qui s'éloigne de plus en plus de la valeur 0 (figure 3.18).

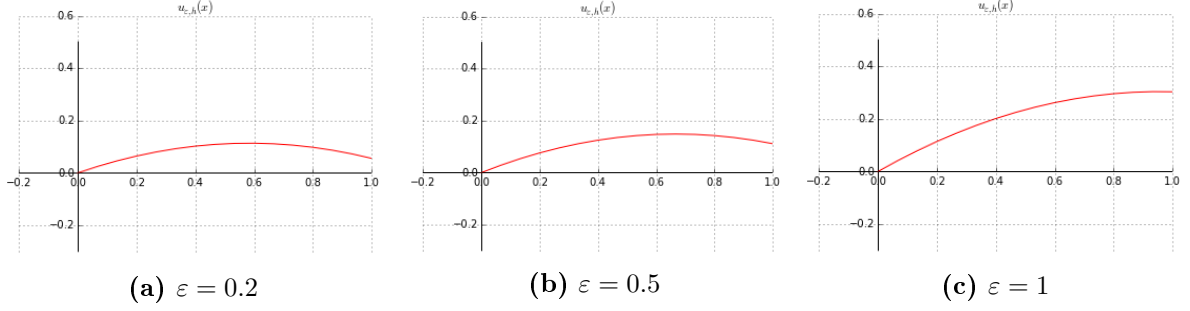


FIGURE 3.18: Variation des solutions obtenues en fonction des valeurs de ε

En conséquence, la représentation graphique de la déformation du solide révèle une pénétration non acceptable de celui-ci dans le socle rigide (figure 3.19) :

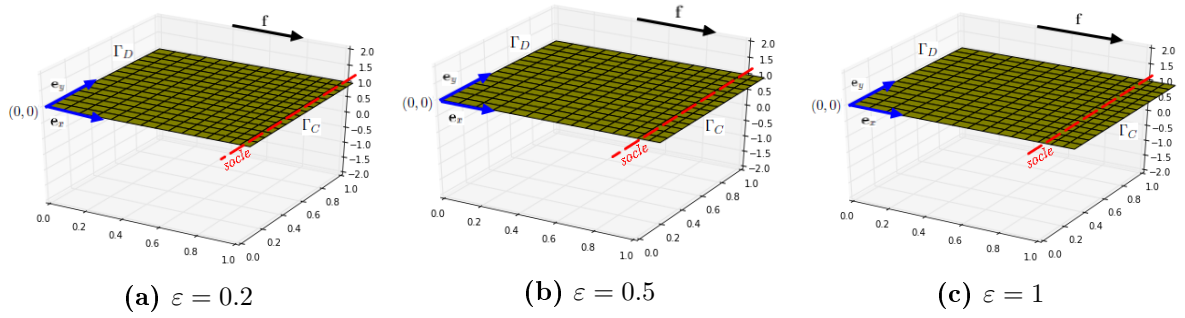


FIGURE 3.19: Déformation du solide en fonction des valeurs de ε

En fait, au-delà de $\varepsilon = 1$, on retrouve les mêmes résultats que ceux établis dans le cas du problème sans contact, ce qui est conforme aux conclusions du paragraphe 2.8 chapitre 2 *Que se passe-t-il lorsque le paramètre de pénalisation tend vers l'infini ?*.

4.b. Lorsque les forces volumiques sont négatives

Nous considérons maintenant les forces volumiques négatives, que nous choisissons constantes et égales à $f(x) = -2$.

Nous allons faire évoluer le paramètre de pénalisation ε de 0.0001 à 100 pour observer les résultats obtenus. Nous devons tout d'abord nous assurer de la convergence de la norme de S , afin d'éliminer les solutions non admissibles.

Lorsque ε prend les valeurs successives 0.0001, 0.01, h , 0.1, 1, 10 puis 100, nous remarquons que la norme de S décroît rapidement après trois itérations, jusqu'à satisfaire la condition d'arrêt de l'algorithme, ce que nous représentons sur la figure 3.20 :

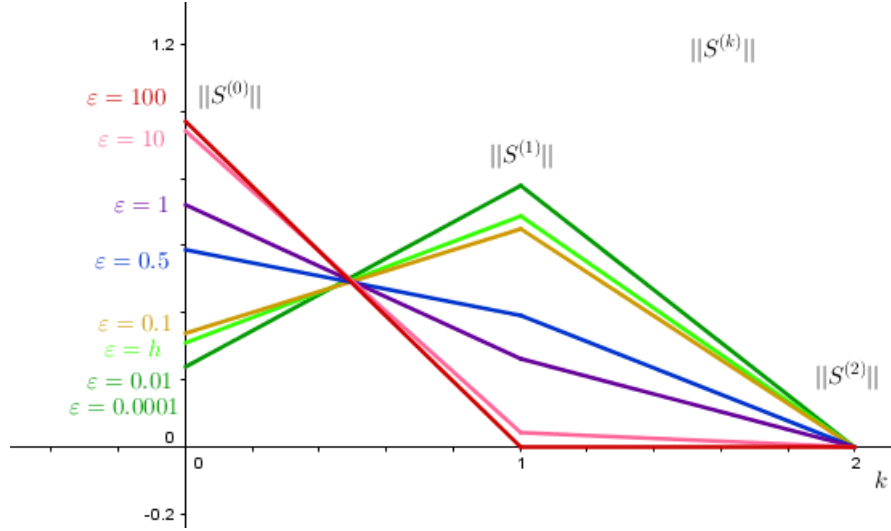


FIGURE 3.20: Evolution de $\|S^{(k)}\|$ pour chaque itération k en faisant varier ε pour f négatif

Ainsi, quelle que soit la valeur de ε , dans le cas de forces volumiques négatives, l'algorithme converge.

Cherchons maintenant si les solutions approchées obtenues sont toutes admissibles physiquement.

On remarque tout d'abord que les solutions approchées pour $\varepsilon = 0.0001$ et $\varepsilon = 0.01$ sont sensiblement identiques. On représente ci-dessous le cas où $\varepsilon = 0.01$:

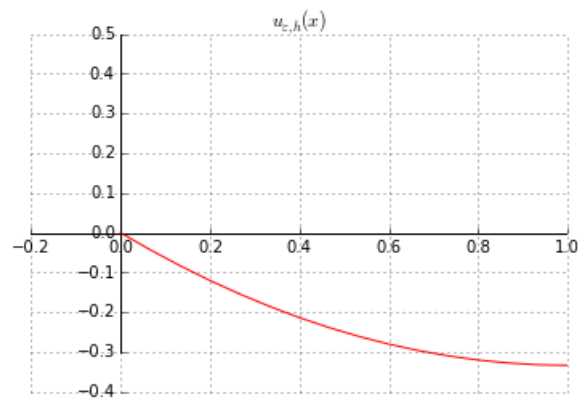


FIGURE 3.21: La solution numérique du problème pénalisé pour f négatif et $\varepsilon = 0.01$

La déformation du solide élastique peut alors être représentée de la façon suivante :

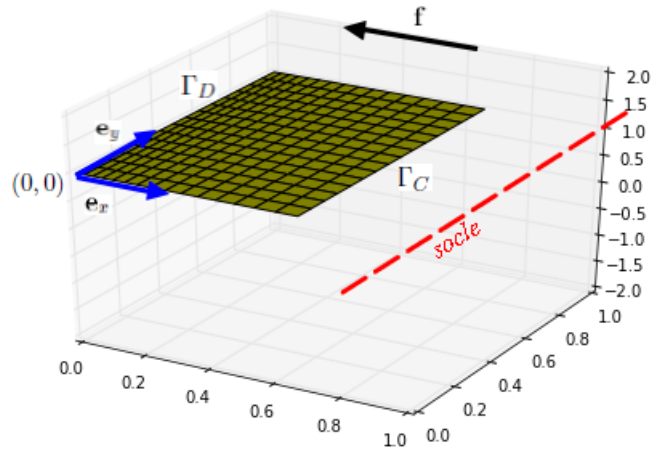


FIGURE 3.22: La déformation du solide élastique pour $f(x) = -2$ et $\varepsilon = 0.01$

Dans ce cas, notre solide élastique soumis à des forces volumiques négatives, perd le contact avec le socle rigide, et ce d'autant plus que l'intensité des forces augmente. En effet, si l'on change l'intensité des forces volumiques appliquées, en prenant par exemple $f(x) = -3$, on obtient une déformation accentuée du solide, représentée sur la figure 3.23 :

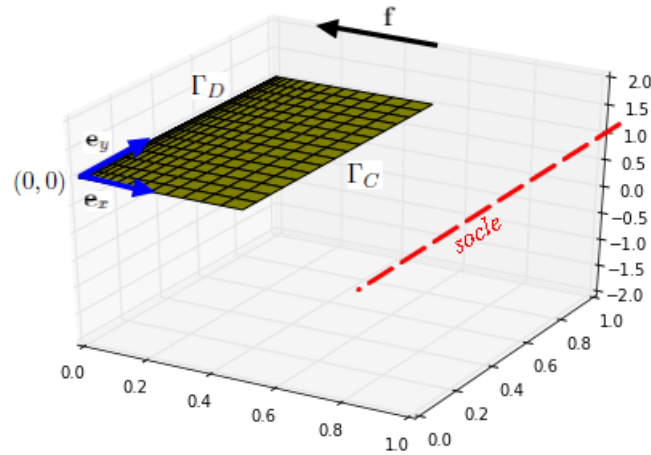


FIGURE 3.23: La déformation du solide élastique pour $f(x) = -3$ et $\varepsilon = 0.01$

Finalement, on observe les contraintes suivantes sur le solide élastique (les parties dessinées en mauve sont toujours soumises aux plus fortes contraintes) :

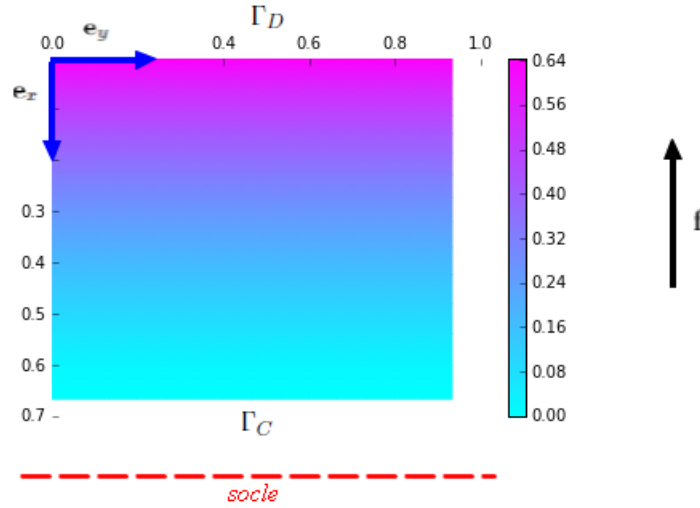


FIGURE 3.24: Les contraintes exercées sur le solide élastique pour f négatif et $\varepsilon = 0.01$

Comme on pouvait s'y attendre, on retrouve de fortes contraintes (en compression) le long du bord Γ_D , et plus aucune contrainte le long du bord Γ_C qui a perdu le contact avec le socle rigide.

On est maintenant en droit de se demander ce qui se produit lorsqu'on augmente la valeur de ε . En effet, dans le cas de forces volumiques positives, on avait observé un seuil pour ε au-delà duquel les solutions numériques n'étaient plus admissibles physiquement. On constate en fait que dans le cas de forces volumiques négatives, les solutions obtenues restent les mêmes pour $\varepsilon = 0.1, h, 0.5, 1, 10$ ou encore 100, comme le témoigne la courbe ci-dessous :

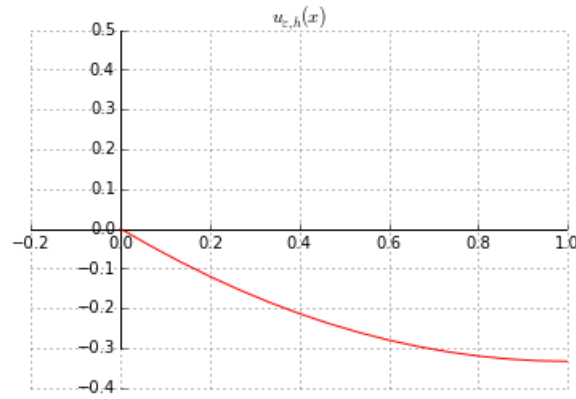


FIGURE 3.25: La solution numérique du problème pénalisé pour f négatif et $\varepsilon = 100$

4.c. Interprétation des résultats

Pour nous faire une idée de la pertinence de la méthode de Newton combinée à la méthode des éléments finis, nous avons choisi de donner certaines valeurs numériques à nos paramètres de calcul. Les résultats obtenus n'ont donc aucun caractère général. Toutefois, le fait qu'ils soient

cohérents avec la réalité physique est plutôt encourageant.

La variation du paramètre de pénalisation ε nous a appris que, dans le cas particulier étudié, la méthode converge rapidement et systématiquement. Nous retiendrons également que :

- si les forces volumiques sont positives, toute valeur de ε strictement comprise entre 0 et 0.1 convient parfaitement. Au-delà, les solutions numériques obtenues ne sont pas admissibles physiquement. En fait en choisissant le paramètre de pénalisation ε du même ordre de grandeur que le paramètre de discrétisation h , on obtient les meilleurs résultats.
- si les forces volumiques sont négatives, n'importe quelle valeur de ε strictement positive convient aux calculs et les solutions obtenues sont physiquement acceptables. On pourra également noter que le solide élastique se comprime et perd le contact avec le socle rigide.

Annexe

Programmation des solutions en *Python*

Nous utilisons la version 3.4 du langage *Python* et l'environnement de développement *Spyder*.



Notons quelques particularités du langage *Python*, qui vont apparaître dans les lignes de commande ci-dessous :

- les variables définies dans les fonctions sont des paramètres locaux alors que les paramètres définis en début de programme sont des paramètres globaux
- la boucle *for* s'arrête une itération avant le dernier terme mentionné, par exemple la boucle *for i in range(0,n)* donne au paramètre *i* les valeurs entières comprises entre 0 et $n - 1$
- les vecteurs et matrices sont numérotés à partir de 0 et non de 1. De ce fait $C_1^{(k)}$ correspond par exemple à $C[0]$ dans le programme.
- il n'est pas nécessaire d'utiliser une partie préliminaire de déclarations comme dans d'autres langages. En particulier, il n'est pas nécessaire de définir le type d'une variable avant son utilisation. En revanche, il est obligatoire de définir la taille d'une matrice ou d'un vecteur avant leur utilisation
- les représentations graphiques s'effectuent à partir de deux vecteurs de même taille, l'un ayant pour éléments des abscisses, l'autres ayant pour éléments des ordonnées.

Nous commençons par importer les bibliothèques qui seront utiles à notre travail, à savoir le package *numpy* pour les calculs numériques et les fonctions mathématiques, le package *pyplot* de *matplotlib* pour la construction graphique, le package *pylab* pour la gestion des bibliothèques *numpy* et *matplotlib*, et finalement le package *mpltoolkits.mplot3d* pour la construction 3D.

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DU PROBLÈME SANS CONTACT

Nous présentons ici les lignes de commande en *Python 3.4* relatives à la représentation graphique du problème sans contact, tout d'abord sans contrainte, puis avec des forces volumiques positives et négatives :

[illegible]


```
# fin script
```



```

plt.plot(x,U[i]*phi_croissante(i,x)+U[i-1]*phi_decroissante(i-1,x),'b',linewidth=2)

# dessin de la premiere partie du graphique car entre x_0 et x_1, phi_1 est
# uniquement croissante
x_init=np.linspace(0,h,10) # x_init prend 10 valeurs entre 0 et h
plt.plot(x_init,U[1]*x_init/h,'b',linewidth=2,label=r"$u_h$")

# dessin de la solution analytique en rouge
plt.plot(X_i,Uan,'g',linewidth=2,label="solution analytique")
plt.legend(loc='upper left')

# impression ecran
plt.show()

# fin script

```

LA MÉTHODE COMBINÉE DU POINT FIXE ET DES ÉLÉMENTS FINIS

Nous présentons ici les lignes de commande en *Python 3.4* relatives à la résolution du problème de contact faible pénalisé par la méthode combinée du point fixe et des éléments finis :

[illegible]


```

plt.title(r"$u_{\varepsilon,h}(x)$")
Xx=np.linspace(-0.2,1,10) # construction de l'axe des x
Xy=np.zeros(10)
Yx=np.zeros(10) # construction de l'axe des y
Yy=np.linspace(-0.3,0.5,10)
plt.ax=gca() # dessin des contours et des graduations
plt.ax.spines['right'].set_color('none')
plt.ax.spines['left'].set_color('none')
plt.ax.spines['top'].set_color('none')
plt.ax.spines['bottom'].set_color('none')
plt.ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
plt.ax.spines['bottom'].set_position(('data',0))
plt.ax.yaxis.set_ticks_position('left')
plt.ax.spines['left'].set_position(('data',0))
plt.plot(Xx,Xy,'k',Yx,Yy,'k',linewidth=1)
# dessin de la solution approchée en tenant compte de la base (phi_1,...,phi_n)
for i in range(2,n+1):
    X=np.linspace((i-1)*h,i*h,10) # x prend 10 valeurs entre x_{i-1} et x_i
    plt.plot(X,U_solution[i]*phi_croissante(i,X)+U_solution[i-1]*phi_decroissante(i-1,X),'g')
# dessin de la première partie du graphique car entre x_0 et x_1, phi_1 est
# uniquement croissante
X_init=np.linspace(0,h,10) # construction de l'abscisse
plt.plot(X_init,U_solution[1]*X_init/h,'g',linewidth=2)
plt.show() # impression écran

# représentation graphique de la déformation du solide
fig = figure(3)
ax = Axes3D(fig)
Y = np.linspace(0,1,n+1)
X_u, Y = np.meshgrid(X_u, Y)
Z = np.ones(n+1)
ax.plot_surface(X_u, Y, Z, rstride=1, cstride=1,color='yellow')
ax.set_zlim(-2,2)
ax.set_xlim(0,1)
show()

# représentation graphique des contraintes
fig = figure(4)
# construction des axes
plt.ax=gca()
plt.ax.invert_yaxis()
plt.ax.spines['right'].set_color('none')
plt.ax.spines['left'].set_color('none')
plt.ax.spines['top'].set_color('none')
plt.ax.spines['bottom'].set_color('none')
# position des marqueurs
plt.ax.xaxis.set_ticks_position('top')
plt.ax.spines['top'].set_position(('data',0))
plt.ax.yaxis.set_ticks_position('left')

```

```

plt.ax.spines['left'].set_position(('data',0))
# dessin du maillage
Y = np.arange(0,1,h) # valeurs prises par Y
X_couleur,Y = meshgrid(X_couleur,Y) # prise en compte du maillage
Z=X_couleur+Uprime-X_couleur # Z doit dépendre de X_couleur
pcolormesh(Y,X_couleur,Z,cmap=cm.cool,shading='gouraud') # couleur=winter,qualité=gouraud
# impression ecran
colorbar()
show()

# fin script

```

LA MÉTHODE COMBINÉE DE NEWTON ET DES ÉLÉMENTS FINIS

Nous présentons ici les lignes de commande en *Python 3.4* relatives à la résolution du problème de contact faible pénalisé par la méthode combinée de Newton et des éléments finis :

[illegible]


```

for i in range(2,n+1):
    X=np.linspace((i-1)*h,i*h,10) # x prend 10 valeurs entre xi-1 et xi
    plt.plot(X,U_solution[i]*phi_croissante(i,X)+U_solution[i-1]*phi_decroissante(i-1,X),'r')
# dessin de la premiere partie du graphique car entre x0 et x1, phi1 est
# uniquement croissante
X_init=np.linspace(0,h,10) # construction de l'abscisse
plt.plot(X_init,U_solution[1]*X_init/h,'r',linewidth=2)
plt.show() # impression ecran

# dessin de la deformation du solide
fig = figure(3)
# construction des axes
ax = Axes3D(fig)
# dessin du maillage
Y = np.linspace(0,1,n+1)
X_u, Y = np.meshgrid(X_u, Y)
Z = np.ones(n+1)
# dessin de la deformation
ax.plot_surface(X_u, Y, Z, rstride=1, cstride=1,color='yellow')
# limite des axes
ax.set_zlim(-2,2)
ax.set_xlim(0,1)
# impression ecran
show()

# dessin des contraintes exercees sur le solide
fig = figure(4)
# construction des axes
plt.ax=gca()
plt.ax.invert_yaxis()
plt.ax.spines['right'].set_color('none')
plt.ax.spines['left'].set_color('none')
plt.ax.spines['top'].set_color('none')
plt.ax.spines['bottom'].set_color('none')
# position des marqueurs
plt.ax.xaxis.set_ticks_position('top')
plt.ax.spines['top'].set_position(('data',0))
plt.ax.yaxis.set_ticks_position('left')
plt.ax.spines['left'].set_position(('data',0))
# dessin du maillage
Y = np.arange(0,1,h) # valeurs prises par Y
Xu,Y = meshgrid(Xu,Y) # prise en compte du maillage
Z=Xu+U_prime-Xu # Z doit dependre de X_u
pcolormesh(Y,Xu,Z,cmap=cm.cool,shading='gouraud') # couleur=winter,qualité=gouraud
# impression ecran
colorbar()
show()

# fin script

```


Conclusion

Notre étude nous a permis de modéliser le contact unilatéral d'un solide élastique en dimension un, en faisant ressortir différentes formulations faibles. Par la suite, nous avons mis en évidence les limites de la méthode du point fixe pour la simulation numérique des solutions, et la convergence de la méthode de Newton qui semble plus adaptée à la résolution de ce type de problème.

D'un point de vue purement mathématique, les hypothèses de travail utilisées pourraient sembler trop simples pour être adaptées à un phénomène physique concret. Nous avons en effet simplifié les conditions de bord et réduit le déplacement des points du solide dans un champ à une dimension. Toutefois, l'objectif principal de notre étude étant de mettre en place des protocoles de simulation, nous avons pu mettre en évidence les difficultés rencontrées lors de la résolution numérique d'un problème faible, et finalement obtenir les solutions numériques attendues.

Nous avons introduit des notions importantes d'analyse numérique, telles que :

- s'assurer que le problème considéré est bien posé,
- s'assurer de la convergence de la méthode utilisée avant de procéder aux calculs,
- estimer la rapidité de convergence à l'aide d'outils tels que le résidu,
- utiliser une technique de relaxation pour forcer la convergence dans un cas particulier.

Nous n'avons pas abordé le problème de l'espace mémoire occupé et du coût des calculs, car ceux-ci étaient toujours très rapides et ne consommaient que très peu les ressources de l'ordinateur. Toutefois, il convient de conserver à l'esprit le caractère omniprésent de cette problématique dans l'industrie où les algorithmes utilisés sont bien plus complexes. En effet, la modélisation d'un système est souvent très coûteuse en temps de calcul à cause du grand nombre de pas de temps nécessaires à la stabilité du modèle. C'est la raison pour laquelle il est utile d'adapter les algorithmes de modélisation à chaque système afin de diminuer la durée des calculs.

La méthode de pénalisation que nous avons étudiée présente des inconvénients en terme de stabilité et de précision numérique. Pour pallier ces insuffisances, une méthode du Lagrangien augmenté a été développée par P. Alart et A. Curnier qui utilise un algorithme de Newton généralisé. C'est devenu la méthode standard pour la résolution de ce type de problème. Citons

également la méthode de Nitsche qui reste proche de la méthode de pénalisation de par sa simplicité, mais présente l'avantage d'une stabilité accrue.

Ce document étant bien évidemment incomplet, le lecteur intéressé est invité à consulter les excellents ouvrages présentés dans la Bibliographie.

Bibliographie

- [1] Vincent Manet, *La méthode des éléments finis : vulgarisation des aspects mathématiques, illustration des capacités de la méthode*, archive ouverte HAL, décembre 2012
- [2] Franz Chouly, Patrick Hild, *On convergence of the penalty method for unilateral contact problems*, Applied numerical mathematics, an IMACS journal, <http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2012.10.003>, volume 65, mars 2013
- [3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, éditions Dunod, juillet 2011
- [4] H. Brezis, *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, annales de l'Institut Fourier de Grenoble, volume 18, 1968
- [5] Christine Bernardi, Vivette Girault, Frederic Hecht, *Choix du paramètre de pénalisation pour la discrétisation par éléments finis des équations de Navier-Stokes*, archive de www.sciencedirect.com, février 2003
- [6] Eric Goncalves, *Méthodes, analyse et calculs numériques*, archives de l'Institut Polytechnique de Grenoble, septembre 2005
- [7] L. Champaney, *Contact unilatéral entre solides élastiques*, notes du cours "Elements finis" de DESS.
- [8] François Dubois, *Introduction aux différences finies et aux éléments finis*, juin 2009
- [9] Michel Kern, *Introduction à la méthode des éléments finis*, INRIA, 2004
- [10] Khaled Saleh, *Introduction à la méthode des éléments finis*, Faculté d'ingénierie de l'université française d'Egypte, décembre 2011
- [11] Mourad Choulli, *Equations aux dérivées partielles*, Vuibert, janvier 2013
- [12] Brigitte Lucquin, *Equations aux dérivées partielles et leurs approximations*, Ellipses, janvier 2004
- [13] P.A Raviart, J.M Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, 1983

- [14] Manfred Gilli, *Méthodes numériques*, Université de Geneve, mars 2006
- [15] André Fortin, André Garon, *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*, Université de Laval, Ecole Polytechnique de Montreal, 2011
- [16] N. Kikuchi, J.T. Oden, *Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods*, volume 8 of Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia PA, 1988
- [17] G. Allaire, *Numerical analysis and optimization*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, Oxford, 2007

Index

Brezis-Lions (théorème de),	34
Cauchy-Schwarz (inégalité),	17
coercivité,	17
compliance normale (problème de),	30
continuité d'une forme bilinéaire,	17
continuité d'une forme linéaire,	18
contact sans frottement (problème de),	11
contraintes (champ des),	24
Dirichlet (condition de),	13
discontinuité de première espèce,	41
discrétisation par éléments finis,	40
énergie (théorème de l'),	19
estimation a priori,	21
forces volumiques,	12
formulation classique,	13
formulation faible,	15
formulation variationnelle,	15
Hadamard (problème bien posé),	20
Heaviside (fonction de),	59
hémicontinue (application),	33
Hilbert (espace de),	10
Hooke (loi de),	13
Kronecker (symbole de),	41
Lamé (coefficients de),	13
Lax Milgram (théorème de),	29
Newton (méthode de),	59
opérateur bijectif,	34
pénalisation,	30
Petre Tartar (lemme),	17
point fixe (méthode du),	49
Python (langage),	71
résidu,	50
tenseur des déformations,	13
tenseur des contraintes,	13
Rellich (théorème de),	18
Riesz (théorème de),	32
rigidité (matrice de),	42

Stampacchia (théorème de),	20
trace (théorème de),	15
Young (inégalité),	36