Représentation locale des fonctions harmoniques

Projet de Master 1 de mathématiques

Stephane Robin

Table of Contents

1. Notations

Dans le cadre de ce projet nous travaillerons uniquement dans des espaces de dimension deux, isomorphes à $\mathbb{R}^2$ *que l'on identifiera à* $\mathbb{C}$. *Nous adopterons les notations suivantes :*

$B(z,\rho)$	disque de centre z et de rayon ρ
$\boldsymbol{D}$	disque unité ouvert qu'on appellera disque unité tout au long du projet
$\overline{\boldsymbol{D}}$	disque unité fermé
$\boldsymbol{T}$	cercle unité

$L^p(\boldsymbol{D})$ espace de Banach des fonctions p-intégrables pour la mesure de Lesbesgue sur $\boldsymbol{D}$

$L^\infty(\boldsymbol{D})$ espace de Banach des fonctions bornées sur $\boldsymbol{D}$

$C^0(\boldsymbol{T})$ espace vectoriel des fonctions continues sur $\boldsymbol{T}$

$(C^0(\boldsymbol{T}))^*$ dual topologique de l'ensemble des fonctions continues sur $\boldsymbol{T}$, c'est à dire l'ensemble des applications linéaires de $C^0(\boldsymbol{T})$ dans $\mathbb{C}$.

$C^0_+(\boldsymbol{T})$ cône des fonctions continues positives sur $\boldsymbol{T}$

$(C^0_+(\boldsymbol{T}))^*$ dual topologique de l'ensemble des fonctions continues positives sur $\boldsymbol{T}$

$Hol(\boldsymbol{D})$ cône des fonctions holomorphes sur $\boldsymbol{D}$

$Harm(\boldsymbol{D})$ cône des fonctions harmoniques sur $\boldsymbol{D}$

$Harm^\#(\boldsymbol{D})$ cône des fonctions harmoniques sur $\boldsymbol{D}$ vérifiant la condition de convergence radiale $\sup_{0\le r<1} \int_{\boldsymbol{T}} |f(r\, e^{is})|\, d\,\sigma(e^{is}) < \infty$.

$Harm_+(\boldsymbol{D})$ cône des fonctions harmoniques positives sur $\boldsymbol{D}$

$H^p(\boldsymbol{D})$ espace de Hardy des fonctions holomorphes sur $\boldsymbol{D}$ *(définition § 2.1 – partie 3)*

$H^\infty(\boldsymbol{D})$ espace de Hardy des fonctions holomorphes bornées sur $\boldsymbol{D}$ *(définition § 2.1 partie 3)*

$N(\boldsymbol{D})$ espace de Nevanlinna des fonctions holomorphes sur $\boldsymbol{D}$ *(définition § 2.3 – partie 3)*

$\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{T})$ espace vectoriel des mesures complexes sur $\boldsymbol{T}$

$\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$ espace vectoriel des mesures réelles sur $\boldsymbol{T}$

$\mathcal{M}_+(\boldsymbol{T})$ cône des mesures réelles positives sur $\boldsymbol{T}$

σ mesure de Lebesgue réelle sur $\boldsymbol{T}$, définie comme l'unique mesure borélienne positive de masse 2π telle que $\sigma(\{e^{is}\in\boldsymbol{T}\ ;\ a<s<b\})=b-a$. Dans ce cas, pour toute fonction continue $f:\boldsymbol{T}\to\mathbb{C}$ on obtient $\int_{\boldsymbol{T}} f(e^{is})\, d\,\sigma(e^{is}) = \int_0^{2\pi} f(e^{is})\, ds$.

$\gamma_{t,s} = \{e^{ix}\in\boldsymbol{T}\ ;\ t-s<x<t+s\}$ arc ouvert inclus dans $\boldsymbol{T}$ construit autour de e^{it}

D_{μ}	dérivée de Radon Nikodym de la mesure μ	*(définition § 3.7 – partie 1)*
$D_{\inf,\mu}$	dérivée inférieure de la mesure μ	*(définition § 3.3 – partie 1)*
$D_{\sup,\mu}$	dérivée supérieure de la mesure μ	*(définition § 3.3 – partie 1)*
$\|\mu\|$	norme de la mesure μ	*(définition § 3.2 – partie 1)*
$f^{\#}$	limite radiale de la fonction f au bord du disque unité	*(définition § 1.1 - partie 1)*
Γ_{α}^{t}	angle de Stolz au point e^{it} formant un angle α	*(définition § 1.2 – partie 1)*
$P_r(t)$	noyau de Poisson au point $r\,e^{it}$	*(définition § 1.1 – partie 2)*
$P[\mu]$	intégrale de Poisson de la mesure μ	*(définition § 1.3 – partie 2)*

On pourra rencontrer la notation $f_r : \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{T} \to \mathbb{R} \\ e^{it} \to f_r(e^{it}) = f(r\,e^{it}) \end{array} \right.$ pour $f : \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{D} \to \mathbb{R} \\ r\,e^{it} \to f(r\,e^{it}) \end{array} \right.$.

2. Introduction

L'étude du comportement à la frontière des fonctions harmoniques remonte aux travaux de Pierre Fatou au début du 20ème siècle dans lesquels il énonce qu'une fonction harmonique positive sur le disque unité admet en presque tout point du bord une limite radiale et même une limite non tangentielle. Par la suite, les mathématiciens se sont intéressés aux critères pour lesquels une fonction harmonique admet une limite radiale ou non tangentielle en un point du bord. En particulier, le critère de bornitude est dû aux travaux d'Alberto Calderon et Ivan Privalov, le critère de finitude de l'intégrale d'aire est dû aux recherches de Jozef Marcinkiewicz, Antoni Zygmund, Donald Spencer, Alberto Calderon et Elias Stein. Le comportement à la frontière des fonctions harmoniques a donné lieu par la suite à des interprétations géométriques variées, notamment dans le domaine des variétés riemaniennes, des arbres et des graphes.

3. Objet du projet

L'objet du projet est d'approfondir la représentation des fonctions harmoniques à l'aide de la formule de Poisson dans le cas spécial de la dimension deux d'espace.
Dans ce contexte le lien entre fonctions harmoniques et fonctions holomorphes est très clair et les théorèmes sur les fonctions harmoniques tendent naturellement à devenir des extensions des théorèmes correspondants concernant les fonctions holomorphes

4. Approche synthétique du projet

Ce projet se compose de quatre parties interdépendantes.
La première partie consiste essentiellement en des calculs sur les mesures, où l'on introduit les notions de mesure étangère et absolument continue, de dérivée supérieure et inférieure d'une mesure, ainsi que l'important théorème de Radon Nikodym. Cela nous permet de définir différents types de décompositions de mesures et propose un lien entre les fonctions intégrables sur le cercle unité et les mesures.
La deuxième partie est un travail sur les intégrales de Poisson par lequel on montre l'harmonicité de ces intégrales puis la convergence radiale des intégrales de Poisson. La formule de Poisson nous donne alors une représentation d'une certaine classe de fonctions harmoniques : les fonctions harmoniques sur le disque unité et continues sur le cercle unité. La recherche des fonctions

harmoniques qui sont des intégrales de Poisson nous conduit par la suite à définir les espaces de Hardy.
La troisième partie propose des représentations de fonctions des espaces de Hardy et de Nevanlinna.
Finalement la quatrième partie est une introduction vers une généralisation aux domaines de Jordan des notions abordées précédemment.
Les preuves qui enrichissent les théorèmes et propositions tout au long de ce projet sont librement inspirées du cours d'analyse fonctionnelle d'Isabelle Chalendar de l'Université de Lyon 1 et de l'ouvrage de Walter Rudin intitulé Real and complex analysis.

5. Remerciements

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Monsieur Matthieu Brassart maître de conférences à l'Université de Franche Comté pour m'avoir guidé, conseillé mais également soutenu tout au long de ce projet. Ses explications et sa disponibilité ont largement contribué à ma compréhension du sujet.

1ère PARTIE – PREREQUIS ET CALCULS PRELIMINAIRES

1. Comportement à la frontière – de quoi s'agit-il ?

Par comportement à la frontière, nous entendons étude des limites radiales et non-tangentielles des fonctions harmoniques. Nous allons définir ces notions dans les paragraphes qui suivent.

1.1. Limite radiale

La limite radiale d'une fonction f au bord du disque unité est une fonction définie par :

$$f^{\#} : \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{T} \to \mathbb{C} \\ e^{it} \to f^{\#}\left(e^{it}\right) = \lim\limits_{r \to 1^-} f\left(r\, e^{it}\right) \end{array} \right.$$

- Exemple -

Considérons l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et la détermination principale de la fonction logarithme complexe définie sur cet ouvert par $\log z = \ln|z| + i \arg z$ où $-\pi < \arg z < \pi$.
La limite radiale de $\log$ est donnée par $\lim\limits_{r \to 1^-} \log\left(r\, e^{it}\right) = \lim\limits_{r \to 1^-} \left(\ln r + it\right) = it$ pour $t \in]-\pi, \pi[$.

1.2. Limite non tangentielle

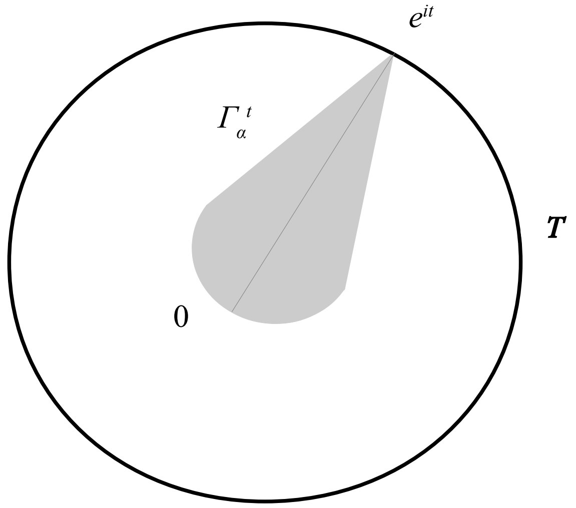
Nous allons introduire deux notions qui sont nécessaires à la définition d'une limite non tangentielle : le point de Lebesgue et l'angle de Stolz.

Soit une fonction $f \in L^1(\boldsymbol{T})$.
e^{it} est un point de Lebesgue de f si la fonction f varie très peu en moyenne au voisinage de

e^{it}, en d'autres termes $\lim\limits_{\gamma_{t,\frac{1}{n}} \to e^{it}} \dfrac{1}{\sigma(\gamma_{t,\frac{1}{n}})} \displaystyle\int_{\gamma_{t,\frac{1}{n}}} \left| f(e^{is}) - f(e^{it}) \right| d\sigma(e^{is}) = 0$.

Dans ce cas, la suite $(\gamma_{t,\frac{1}{n}})_n$ d'arcs ouverts inclus dans $\boldsymbol{T}$ construits autour de leur centre e^{it} est une suite décroissante. C'est en ces points de Lebesgue qu'on étudie les limites non tangentielles d'une fonction.

Soit $e^{it} \in \boldsymbol{T}$ un point de Lebesgue.
L'angle de Stolz au point e^{it} est le cône Γ_α^t basé en $e^{it} \in \boldsymbol{T}$ formant un angle α dont l'axe central est normal au cerle unité et dont les bords identiques ont une mesure égale à 1.
Nous représentons ci-dessous un angle de Stolz :



Nous pouvons maintenant définir la limite non tangentielle :

> Soit une fonction $f : \boldsymbol{D} \to \mathbb{C}$ et un point de Lebesgue e^{it} du cercle unité.
> La limite non tangentielle de f en e^{it} (au bord du disque unité) est une fonction définie par :
>
> $$\left| \begin{array}{l} \boldsymbol{T} \to \mathbb{C} \\ e^{it} \to \lim\limits_{\substack{z \to e^{it} \\ z \in \Gamma_\alpha^t}} f(z) \end{array} \right.$$

2. Rappels sur les fonctions harmoniques

Il convient de présenter brièvement la famille des fonctions harmoniques qui joue un rôle central dans ce projet.

2.1. Définition

On dit qu'une fonction $f : \boldsymbol{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est harmonique si et seulement si $f \in C^2(\boldsymbol{D})$ et $\Delta f = 0$ où Δ est l'opérateur laplacien. On peut également considérer qu'une fonction est harmonique sur $\boldsymbol{D}$ si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont harmoniques sur $\boldsymbol{D}$.

- Exemple -

La fonction $f : z \rightarrow log|z|$ est harmonique sur $\boldsymbol{D} \setminus \{0\}$.
En effet, passons des coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^2$ aux coordonnées polaires et réécrivons f sous la forme $f(z) = log|z| = log|r e^{it}| = ln\, r = F(r, \theta)$.
On voit que $\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{r}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = -\frac{1}{r^2}$ pour $r \neq 0$. Comme le laplacien en coordonnées polaires s'écrit $\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}$, on en déduit que $\Delta F = 0$ donc F est harmonique. Ainsi f est harmonique.

2.2. Harmonicité des fonctions holomorphes en dimension 2

Nous rappelons ici le lien entre fonctions harmoniques et fonctions holomorphes en dimension 2 :

Les fonctions holomorphes sont harmoniques. On en déduit que la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont harmoniques. Réciproquement, toute fonction harmonique est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Nous exploiterons cette dernière propriété tout au long du projet.

2.3. Propriété de la moyenne

La propriété de la moyenne caractérise les fonctions harmoniques.

Soit un ouvert U et une fonction f continue sur U, f est harmonique sur U si et seulement si pour tout $z \in U$ pour tout $\rho > 0$ tel que $\overline{B}(z, \rho) \subset U$ et $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{is}) ds$.

Ainsi $f(z)$ est représenté par la valeur moyenne de f sur le cercle $C(z, \rho)$.

Nous utiliserons principalement la relation $2\pi f(0) = \int_0^{2\pi} f(\rho e^{is}) ds$ *issue de la propriété de la moyenne.*

3. Prérequis sur les mesures

Dans toute notre étude, nous allons manipuler des mesures au sein des intégrales de Poisson. Il est donc important de définir certaines propriétés des dérivées de mesures et d'introduire deux décompositions de mesures permettant de simplifier les calculs : la décomposition d'une mesure complexe en mesures réelle et la décomposition de Lebesgue.

3.1. Decomposition d'une mesure complexe en mesures réelles

Soit $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{T})$ une mesure complexe. On peut toujours écrire μ sous la forme $\mu = \Re(\mu) + i\,\Im(\mu)$ où $\Re(\mu) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$ et $\Im(\mu) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$ sont des mesures réelles. De ce fait, pour prouver une relation utilisant une mesure complexe, il est suffisant de prouver cette relation à l'aide d'une mesure réelle.

En conséquence, dans tout ce qui suit, nous n'étudierons plus que les mesures réelles, sachant que nous pourrons toujours nous ramener aux mesures complexes sans restriction.

3.2. Norme d'une mesure

Soit $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$, on définit une norme sur $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$ par $\|\mu\| = |\mu|(X)$ où X est un borélien de $\boldsymbol{T}$ et $|\mu|$ est la variation totale de μ.
La variation totale de μ est bornée, c'est la plus petite mesure positive qui majore μ :

$$|\mu|(X) = \sup\{\sum_{k \geq 1} \left|\mu(X_k)\right| ;\ (X_k)_k \text{ partition dénombrable sur } X\}.$$

On retiendra une autre définition de la norme d'une mesure qui sera utilisée par la suite :

$$\|\mu\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \{\left|\int_{\boldsymbol{T}} f(e^{is})\, d\mu(e^{is})\right| ;\ f \in C^0(\boldsymbol{T})\}.$$

3.3. Dérivée supérieure, inférieure d'une mesure

Soit $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$.

On appelle dérivée supérieure de μ l'application définie par : $D_{\sup,\mu}(e^{it}) = \limsup_{\gamma_{t,s} \to e^{it}} \frac{\mu(\gamma_{t,s})}{\sigma(\gamma_{t,s})}$

On appelle dérivée inférieure de μ l'application définie par : $D_{\inf,\mu}(e^{it}) = \liminf_{\gamma_{t,s} \to e^{it}} \frac{\mu(\gamma_{t,s})}{\sigma(\gamma_{t,s})}$

3.4. Lemme d'existence d'un borélien

Soit $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$ telle que $\mu(K) < \infty$ pour tout compact K de $\boldsymbol{T}$, soit A un borélien de $\boldsymbol{T}$ tel que $\mu(A) = 0$. Alors il existe un borélien $B \subset A$ tel que $\sigma(B) = 0$ et $D_{\sup,\mu}(e^{it}) = 0$ pour $e^{it} \in A \setminus B$.

Ce lemme va nous permettre de déterminer la dérivée d'une mesure étrangère et la dérivée d'une mesure absolument continue.

- Preuve -

Nous allons construire un borélien de $\boldsymbol{T}$ *contenant un compact pour lequel nous allons utiliser la propriété caractéristique des compacts : de tout recouvrement d'un compact par des ouverts on peut extraire un sous recouvrement fini.*

Notons $\Lambda = \{ e^{it} \in \boldsymbol{T} ;\ D_{\sup,\mu}(e^{it}) > 0 \}$ un borélien de $\boldsymbol{T}$ et $B = A \cap \Lambda$

Comme $B \subset A$, si $e^{it} \in A \setminus B$ alors $e^{it} \notin \Lambda$ et donc $D_{\sup,\mu}(e^{it}) = 0$.

Notons $\Lambda_n = \{ e^{it} \in \boldsymbol{T} ;\ D_{\sup,\mu}(e^{it}) > \frac{1}{n} \}$ alors $\Lambda = \bigcup_{n \geq 1} \Lambda_n$ donc $B = \bigcup_{n \geq 1} (\Lambda_n \cap A)$

Considérons l'hypothèse de travail suivante :

Si $\sigma(\Lambda \cap A) > 0$ alors il existe un rang $n_0 \geq 1$ tel que $\sigma(\Lambda_{n_o} \cap A) > 0$

où $\sigma(\Lambda_{n_o} \cap A) = \{ \sigma(K) ;\ K \subset P_{n_0} \cap A,\ K \text{ compact de } \boldsymbol{T} \}$.

Donc il existe $K \subset \Lambda_{n_o} \cap A$ compact tel que $\sigma(K) > 0$.

Soit $\delta > 0$, comme $K \subset \Lambda_{n_o} = \{ e^{it} \in \boldsymbol{T} \, ; \, \limsup_{\gamma_{t,s} \to e^{it}} \frac{\mu(\gamma_{t,s})}{\sigma(\gamma_{t,s})} > \frac{1}{n_0} \}$, il existe $z = e^{i\theta} \in K$ tel que

$0 < s(z) < \delta$ et $\frac{\mu(\gamma_{\theta, s(z)})}{2 s(z)} > \frac{1}{n_0}$.

La famille $(\gamma_{\theta, s(z)})_{z \in K}$ forme un recouvrement ouvert du compact K, donc on peut en extraire un sous recouvrement fini $(\gamma_{\theta_i, s(z_i)})_{1 \le i \le p}$ tel que $s(z_p) \le \ldots \le s(z_1)$.

Considérons la suite croissante $(k_i)_{1 \le i \le q}$ où $1 \le q \le p$ définie par $k_1 = 1$ et $k_{i+1} = \inf \{ j \ge k_i \, ; \, \gamma_{\theta_j, s(z_j)} \cap (\cup_{r \le i} \gamma_{\theta_{k_r}, s(z_{k_r})}) = \emptyset \}$ pour $1 \le i \le q$.

Par construction, les arcs $\gamma_{\theta_{k_i}, s(z_{k_i})}$ sont deux à deux disjonts pour $1 \le i \le q$.

Considérons $\gamma_{\theta_{k_i}, 3 s(z_{k_i})}$ *et montrons que la famille* $(\gamma_{\theta_{k_i}, 3 s(z_{k_i})})_{1 \le i \le q}$ *forme un recouvrement ouvert de K :*

Si $j = k_i$ pour $1 \le i \le q$ alors $\gamma_{\theta_j, s(z_j)} \subset \gamma_{\theta_{k_i}, 3 s(z_{k_i})}$

si $j \ne k_i$ pour $1 \le i \le q$ notons i_0 le plus grand entier tel que $k_{i_0} < j$

alors $\gamma_{\theta_j, s(z_j)}$ rencontre $\gamma_{\theta_{k_i}, s(z_{k_i})}$ pour un certain $i \le i_0$

Comme $k_i \le k_{i_0} < j$, $\sigma(\gamma_{\theta_j, s(z_j)}) = 2 s(z_j) \le 2 s(z_{k_i})$.

Or $\sigma(\gamma_{\theta_{k_i}, s(z_{k_i})}) = 2 s(z_{k_i})$ la mesure de Lebesgue de $\gamma_{\theta_j, s(z_j)}$ vaut $2 s(z_j)$ donc inférieure à $2 s(z_{k_i})$ qui est la mesure de Lebesgue de $\gamma_{\theta_{k_i}, s(z_{k_i})}$. On a donc $\gamma_{\theta_j, s(z_j)} \subset \gamma_{\theta_{k_i}, 3 s(z_{k_i})}$

Donc les arcs $\gamma_{\theta_{k_i}, s(z_{k_i})}$ sont deux à deux disjoints et $(\gamma_{\theta_{k_i}, 3 s(z_{k_i})})_{1 \le i \le q}$ forme un recouvrement ouvert de K

Considérons maintenant le compact $K_\delta = \{ z \in \boldsymbol{T} \, ; \, d(z, K) \le \delta \}$:

Les arcs $\gamma_{\theta_{k_i}, s(z_{k_i})}$ sont centrés en des points de K et de mesure de Lebesgue strictement inférieure à 2δ, donc $\bigcup_{1\le i\le q} \gamma_{\theta_{k_i}, s(z_{k_i})} \subset K_\delta$

Comme les arcs $\gamma_{\theta_{k_i}, s(z_{k_i})}$ sont deux à deux disjoints, on obtient $\mu(K_\delta) \ge \sum_{1\le i\le q} \mu(\gamma_{\theta_{k_i}, s(z_{k_i})})$

Comme $\gamma_{\theta_{k_i}, s(z_{k_i})}$ est de la forme $\gamma_{t,s}$ avec $\dfrac{\mu(\gamma_{t,s})}{\sigma(\gamma_{t,s})} > \dfrac{1}{n_0}$, on obtient

$$\mu(\gamma_{\theta_{k_i}, s(z_{k_i})}) > \frac{\sigma(\gamma_{\theta_{k_i}, s(z_{k_i})})}{n_o} = \frac{\sigma(\gamma_{\theta_{k_i}, 3s(z_{k_i})})}{3n_0}$$

donc $\mu(K_\delta) > \sum_{1\le i\le q} \dfrac{\sigma(\gamma_{\theta_{k_i}, 3s(z_{k_i})})}{3n_0} \ge \dfrac{1}{3n_0} \sigma(\bigcup_{1\le i\le q} \gamma_{\theta_{k_i}, 3s(z_{k_i})}) \ge \dfrac{\sigma(K)}{3n_0}$ car

$(\gamma_{\theta_{k_i}, 3s(z_{k_i})})_{1\le i\le q}$ forme un recouvrement ouvert de K.

comme $K = \bigcap_{N\ge 1} K_{\frac{1}{N}}$ on obtient $\mu(K) = \lim_{N\to\infty} \mu(K_{\frac{1}{N}}) \ge \dfrac{\sigma(K)}{3n_0} > 0$ car $\sigma(K) > 0$

Comme $K \subset A$ avec $\mu(A) = 0$ on obtient $\mu(K) = 0$: contradiction avec le résultat de la ligne précédente.

on en déduit que l'hypothèse de travail $\sigma(A \cap \Lambda) > 0$ est fausse,

donc $\sigma(B) = \sigma(A \cap \Lambda) = 0$ ❑

3.5. Mesure étrangère à la mesure de Lebesgue

Soit $\mu_s \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$.

μ_s est étrangère à σ si et seulement si il existe un borélien A de $\boldsymbol{T}$ tel que $\mu_s(A) = 0$ et $\sigma(\boldsymbol{T} \setminus A) = 0$

Une propriété importante des mesures étrangères à la mesure de Lebesgue est la suivante :

Une mesure μ_s étrangère à σ est telle que $\mu_s(X) = \mu_s(X \cap A)$ pour tout borélien X de $\boldsymbol{T}$ et $\sigma(A) = 0$.

– Exemple –

Considérons la mesure de Dirac au point $a \in \boldsymbol{T}$ définie par $\begin{cases} \delta_a(X)=1 \text{ si } a \in X \\ \delta_a(X)=0 \text{ si } a \notin X \end{cases}$ pour X borélien de $\boldsymbol{T}$. Le support de δ_a est $\{a\}$. Ainsi il existe un borélien $\boldsymbol{T} \setminus \{a\}$ de $\boldsymbol{T}$ tel que $\delta_a(\boldsymbol{T} \setminus \{a\})=0$ et $\sigma(\boldsymbol{T} \setminus (\boldsymbol{T} \setminus \{a\}))=\sigma(\{a\})=0$. Donc la mesure de Dirac au point a est étrangère à la mesure de Lebesgue.

3.6. Mesure absolument continue

Soit $\mu_C \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$. μ_C est absolument continue par rapport à σ si $\sigma(X)=0$ implique $\mu_C(X)=0$ où X est un borélien de $\boldsymbol{T}$.

Une propriété importante des mesures absolument continues est la suivante :

Une mesure μ_C absolument continue par rapport à σ peut s'écrire de façon unique $\mu_C = f\,\sigma$ où $f \in L^1(\boldsymbol{T})$, c'est à dire $\mu_C(X)=\int_X f(e^{is})\,d\sigma(e^{is})$ pour tout X borélien de $\boldsymbol{T}$.

3.7. Théorème de Radon Nikodym

Soit $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$. On peut décomposer μ sous sa forme de Lebesgue, à savoir $\mu=\mu_S+\mu_C$ où $\mu_C \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et $\mu_S \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$ est une mesure étrangère à la mesure de Lebesgue. On a vu que μ_C peut s'écrire comme produit d'une fonction intégrable sur $\boldsymbol{T}$ et de la mesure de Lebesgue. On notera D_μ cette fonction intégrable qu'on appellera dérivée de la mesure μ par rapport à la mesure de Lebesgue ou encore dérivée de Radon Nikodym de μ.

Le théorème de Radon Nikodym permet dans un premier temps d'affirmer l'existence et l'unicité de la dérivée d'une mesure μ par rapport à la mesure de Lebesgue en écrivant $\mu=\mu_S+\sigma D_\mu$. Dans un second temps, il permet de caractériser la dérivée D_μ d'une mesure μ de la façon suivante : $D_\mu(e^{it}) = \lim_{\gamma_{t,s}\to e^{it}} \frac{\mu(\gamma_{t,s})}{\sigma(\gamma_{t,s})} = \lim_{\gamma_{t,s}\to e^{it}} \frac{\mu(\gamma_{t,s})}{2s}$

3.7.1. Dérivée d'une mesure étrangère

Soit $\mu_S \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$ une mesure étrangère à la mesure de Lebesgue, alors

$D_{\mu_S}(e^{it}) = \lim_{\gamma_{t,s}\to e^{it}} \frac{\mu_S(\gamma_{t,s})}{\sigma(\gamma_{t,s})} = 0$ presque partout

- Preuve -

Comme μ_S est une mesure étrangère par rapport à la mesure de Lebesgue, il existe un borélien A de $\boldsymbol{T}$ tel que $\sigma(A)=0$ et $\mu_S(X)=\mu_S(X\cap A)$ pour tout borélien X de $\boldsymbol{T}$. En particulier pour $B=\boldsymbol{T} \setminus A$, on obtient $\mu_S(B)=\mu_S(B\cap A)=\mu_S(\emptyset)$.
D'après le lemme d'existence d'un borélien 3.3, il existe un borélien $J\subset B$ tel que $\sigma(J)=0$ et $D_{\sup,\mu_S}(e^{it})=0$ pour $e^{it}\in B \setminus J$.

Comme $D_{\sup,\mu_S}(e^{it}) = \limsup_{\gamma_{t,s}\to e^{it}} \frac{\mu_S(\gamma_{t,s})}{\sigma(\gamma_{t,s})}$, on en déduit $\limsup_{\gamma_{t,s}\to e^{it}} \frac{\mu_S(\gamma_{t,s})}{\sigma(\gamma_{t,s})} = 0$ donc $\lim_{\gamma_{t,s}\to e^{it}} \frac{\mu_S(\gamma_{t,s})}{\sigma(\gamma_{t,s})} = 0$ pour $e^{it}\in B \setminus J$.

Par ailleurs comme $\sigma(A)=0=\sigma(J)$ on obtient $\sigma(A\cup J)=0$.
Or $\boldsymbol{T}-(B \setminus J)=\boldsymbol{T} \setminus ((\boldsymbol{T} \setminus A)\cap(\boldsymbol{T} \setminus J))=A\cup J$, donc $\sigma(\boldsymbol{T} \setminus (B \setminus J))=0$,
donc $\lim_{\gamma_{t,s}\to e^{it}} \frac{\mu_S(\gamma_{t,s})}{\sigma(\gamma_{t,s})} = 0$ sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle,

donc $D_{\mu_S}(e^{it}) = \lim_{\gamma_{t,s}\to e^{it}} \frac{\mu_S(\gamma_{t,s})}{\sigma(\gamma_{t,s})} = 0$ presque partout. ❑

3.7.2. Dérivée d'une mesure absolument continue

Soit $\mu_C \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$ une mesure absolument continue par rapport à la mesure de

Lebesgue telle que $\mu_C = f\,\sigma$. Alors $D_{\mu_C}(e^{it}) = \lim\limits_{\gamma_{t,s}\to e^{it}} \dfrac{\mu_C(\gamma_{t,s})}{\sigma(\gamma_{t,s})} = f(e^{it})$ presque partout

- Preuve -

Nous allons construire une mesure λ_q et un borélien de $\boldsymbol{T}$ dans lequel la dérivée supérieure de cette mesure s'annule. Puis nous allons comparer μ_C avec λ_q afin de déterminer la dérivée supérieure de μ_C en fonction de f. Finalement une minoration semblable de la dérivée inférieure de μ_C nous permettra d'obtenir la dérivée de μ_C.

Pour $q\in\mathbb{Q}$ considérons l'ensemble $A_q=\{e^{is}\in\boldsymbol{T}\,;\; f(e^{is})<q\}$.
Notons alors $J_q=\{e^{is}\in\boldsymbol{T}\,;\; f(e^{is})\geq q\}$ et λ_q la mesure réelle définie par
$\lambda_q(X)=\int\limits_{X\cap J_q}(f(e^{is})-q)\,d\,\sigma(e^{is})$ pour X borélien de $\boldsymbol{T}$. Comme
$\lambda_q(A_q)=\int\limits_{\emptyset}(f(e^{is})-q)\,d\,\sigma(e^{is})=0$, on en déduit en utilisant le lemme d'existence d'un borélien 3.3. qu'il existe un borélien $A'_q\subset A_q$ tel que $\sigma(A'_q)=0$ et $D_{\sup,\lambda_q}(e^{it})=0$ pour $e^{it}\in A_q\setminus A'_q$. Posons $E=\bigcup\limits_{q\in\mathbb{Q}}(A_q\setminus A'_q)$, comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, E est réunion dénombrable d'ensembles de mesure de Lebesgue nulle, donc $\sigma(E)=0$. Ainsi pour $e^{it}\notin E$ et $q\in\mathbb{Q}$ tel que $e^{it}\in A_q$, on obtient $D_{\sup,\lambda_q}(e^{it})=0$ pour $e^{it}\in A'_q$.

On va chercher maintenant à majorer la dérivée supérieure de μ_C :

Pour $e^{is}\in J_q$, $f(e^{is})-q\geq 0$, donc
$\lambda_q(\gamma_{t,s})=\int\limits_{\gamma_{t,s}\cap J_q}(f(e^{is})-q)\,d\,\sigma(e^{is})\geq\int\limits_{\gamma_{t,s}}(f(e^{is})-q)\,d\,\sigma(e^{is})$,
Par définition on sait que $\mu_C(\gamma_{t,s})=\int\limits_{\gamma_{t,s}}f(e^{is})\,d\,\sigma(e^{is})$
donc $\lambda_q(\gamma_{t,s})\geq\mu_C(\gamma_{t,s})-q\int\limits_{\gamma_{t,s}}d\,\sigma(e^{is})=\mu_C(\gamma_{t,s})-q\,\sigma(\gamma_{t,s})=\mu_C(\gamma_{t,s})-2\,s\,q$
d'où $\dfrac{\lambda_q(\gamma_{t,s})}{2s}+q\geq\dfrac{\mu_C(\gamma_{t,s})}{2s}$.

Nous avons montré plus haut que $D_{\sup,\lambda_q}(e^{it})=\limsup\limits_{\gamma_{t,s}\to e^{it}}\dfrac{\lambda_q(\gamma_{t,s})}{2s}=0$ pour $e^{it}\in A'_q$, donc pour $e^{it} \notin E$ on voit que $e^{it} \notin A_q$ où $q \in \mathbb{Q}$ vérifie $q \leq f(e^{it})$.

On obtient donc $\displaystyle \limsup_{\gamma_{t,s} \to e^{it}} \frac{\mu_C(\gamma_{t,s})}{2s} \leq f(e^{it})$ en dehors d'un borélien E de mesure de Lebesgue nulle.

On va chercher maintenant à minorer la dérivée inférieure de μ_C :

Le même raisonnement appliqué à la mesure $-\mu_C$ montre qu'il existe un borélien E^- de mesure de Lebesgue nulle tel que $\displaystyle \limsup_{\gamma_{t,s} \to e^{it}} \frac{-\mu_C(\gamma_{t,s})}{2s} \leq -f(e^{it})$ en dehors de E^-, donc

$$\liminf_{\gamma_{t,s} \to e^{it}} \frac{\mu_C(\gamma_{t,s})}{2s} = -\limsup_{\gamma_{t,s} \to e^{it}} \frac{-\mu_C(\gamma_{t,s})}{2s} \geq f(e^{it}).$$

Ainsi $\displaystyle \limsup_{\gamma_{t,s} \to e^{it}} \frac{\mu_C(\gamma_{t,s})}{2s} \leq f(e^{it}) \leq \liminf_{\gamma_{t,s} \to e^{it}} \frac{\mu_C(\gamma_{t,s})}{2s}$.

On en conclut que si μ_C est une mesure réelle absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors $\displaystyle \lim_{\gamma_{t,s} \to e^{it}} \frac{\mu_C(\gamma_{t,s})}{2s} = f(e^{it})$ en dehors d'un borélien $E \cup E^-$ de mesure de Lebesgue nulle, donc $\displaystyle \lim_{\gamma_{t,s} \to e^{it}} \frac{\mu_C(\gamma_{t,s})}{2s} = f(e^{it})$ presque partout. ❑

Nous voyons ainsi que la décomposition de Lebesgue d'une mesure μ sous la forme $\mu = \mu_S + \mu_C$ conduit au résultat suivant : $D_\mu = D_{\mu_S} + D_{\mu_C} = D_{\mu_C}$.

2ème PARTIE – COMPORTEMENT A LA FRONTIERE DE L'INTEGRALE DE POISSON

Dans cette partie nous introduirons l'intégrale de Poisson dont nous étudierons le comportement au bord du disque unité. Nous chercherons ensuite quelles sont les fonctions harmoniques qui sont des intégrales de Poisson. Nous en déduirons notamment la convergence radiale de deux classes particulières de fonctions harmoniques : les fonctions positives et les fonctions bornées, puis la convergence non tangentielle des fonctions harmoniques positives. Tous les résultats obtenus peuvent naturellement s'étendre à un disque quelconque par un changement de variable.

1. L'intégrale de Poisson

1.1. Le noyau de Poisson

Le noyau de Poisson constitue l'ossature de l'intégrale de Poisson qui est le moyen par lequel nous allons décrire les fonctions harmoniques. Nous définissons donc ici le noyau de Poisson et cherchons à en simplifier l'écriture.

Pour $z = r\, e^{it} \in \boldsymbol{D}$ où $0 \leq r < 1$, le noyau de Poisson dans le disque unité est l'application

$$P_r : \left| \begin{array}{l} [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \\ t \to P_r(t) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} \end{array} \right.$$

Une première propriété importante est la suivante :

Pour $0 \leq r < 1$ la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int}$ est normalement convergente.

Cherchons à expliciter l'écriture du noyau de Poisson :

Notons $z=r\,e^{it}\in\boldsymbol{D}$ où $0\leq r<1$ et $t\in[0,2\pi]$, on peut réécrire le noyau de Poisson de la façon suivante : $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} r^{|n|}\,e^{i\,n\,t}=\sum_{n=1}^{N} r^{n}\,e^{-i\,n\,t}+1+\sum_{n=1}^{N} r^{n}\,e^{i\,n\,t}$,

donc $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} r^{|n|}\,e^{i\,n\,t}=r\,e^{-i\,t}\frac{1-r^{N}\,e^{-i\,N\,t}}{1-r\,e^{-i\,t}}+1+r\,e^{i\,t}\frac{1-r^{N}\,e^{i\,N\,t}}{1-r\,e^{i\,t}}$.

Comme $\left|r^{N}\,e^{-i\,N\,t}\right|=\left|r^{N}\right|=r^{N}$ et $0\leq r<1$, on en déduit $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\left|r^{N}\,e^{-i\,N\,t}\right|=0$, ce qui entraîne $\displaystyle\lim_{N\to\infty} r^{N}e^{-i\,N\,t}=0$. On obtient de même $\displaystyle\lim_{N\to\infty} r^{N}\,e^{i\,N\,t}=0$,

donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\,e^{i\,n\,t}=\frac{r\,e^{-i\,t}}{1-r\,e^{-i\,t}}+1+\frac{r\,e^{i\,t}}{1-r\,e^{i\,t}}$,

donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\,e^{i\,n\,t}=\frac{r\,e^{i\,t}(1-r\,e^{-i\,t})+(1-r\,e^{i\,t})(1-r\,e^{-i\,t})+r\,e^{-i\,t}(1-r\,e^{i\,t})}{1-r\,e^{-i\,t}-r\,e^{i\,t}+r^{2}}$.

On en déduit une première simplification : $\displaystyle P_{r}(t)=\frac{1-r^{2}}{1-2\,r\cos t+r^{2}}$.

Comme $1-2\,r\cos t+r^{2}=\cos^{2} t-2r\cos t+r^{2}+\sin^{2} t=(\cos t-r)^{2}+\sin^{2} t=\left|e^{i\,t}-r\right|^{2}$, on obtient une autre simplification : $\displaystyle P_{r}(t)=\frac{1-r^{2}}{\left|e^{i\,t}-r\right|^{2}}$.

Cherchons maintenant à expliciter $P_{r}(s-t)$:

D'après ce qui précède, $\displaystyle P_{r}(s-t)=\frac{1-r^{2}}{1-2\,r\cos(s-t)+r^{2}}$.

Comme $1-2\,r\cos(s-t)+r^{2}=\cos^{2} t-2\,r\cos(s-t)+r^{2}+\sin^{2}(s-t)$, on obtient

$$1-2\,r\cos(s-t)+r^{2}=(\cos(s-t)-r)^{2}+\sin^{2}(s-t)=\left|e^{i(s-t)}-r\right|^{2}=\left|e^{i\,t}(e^{i(s-t)}-r)\right|^{2}=\left|e^{i\,s}-r\,e^{i\,t}\right|^{2}$$

donc $1-2\,r\cos(s-t)+r^{2}=\left|e^{i\,s}-z\right|^{2}$ et $\displaystyle P_{r}(s-t)=\frac{1-r^{2}}{\left|e^{i\,s}-r\,e^{i\,t}\right|^{2}}$.

On retiendra donc les formes suivantes du noyau de Poisson dans le disque unité :

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{\left|e^{it}-r\right|^2} = \frac{1-r^2}{1-2\,r\cos t + r^2}$$ où $r\,e^{it} \in \boldsymbol{D}$ avec $0 \le r < 1$ et $t \in [0,2\pi]$.

On en déduit que P_r est une application uniformément continue sur $[0,2\pi]$, $2\pi-$périodique, positive et paire.

$$P_r(s-t) = \frac{1-r^2}{\left|e^{is}-r\,e^{it}\right|^2} = \frac{1-|z|^2}{\left|e^{is}-z\right|^2}.$$ où $z, w \in \boldsymbol{D}$ tels que $z = r\,e^{it}$ et $w = r\,e^{is}$ avec $0 \le r < 1$ et $t, s \in [0,2\pi]$.

1.2. Moyenne du noyau de Poisson sur le cercle unité

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s)\,d\sigma(e^{is}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(s)\,ds = 1$$

Cette proposition sera utilisée fréquemment tout au long de l'étude.

- Preuve -

D'après la définition du noyau de Poisson $\int_0^{2\pi} P_r(s)\,ds = \int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{ins}\,ds$.

Comme pour $0 < r < 1$ la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int}$ est normalement convergente, on obtient

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{ins}\,ds = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} \int_0^{2\pi} e^{ins}\,ds = \int_0^{2\pi} ds + \sum_{n=-1}^{-\infty} r^{|n|}\left[\frac{e^{ins}}{i\,n}\right]_{s=0}^{s=2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{|n|}\left[\frac{e^{ins}}{i\,n}\right]_{s=0}^{s=2\pi} = 2\pi\,,$$

donc $$\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s)\,d\sigma(e^{is}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(s)\,ds = 1 \qquad \square$$

Nous pouvons maintenant introduire l'intégrale de Poisson :

1.3. Définition de l'intégrale de Poisson

Pour $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$, l'intégrale de Poisson par rapport à la mesure μ est définie par :

$$P[\mu] : \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{D} \to \mathbb{R} \\ r\, e^{it} \to P[\mu](r\, e^{it}) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\, d\,\mu(e^{is}) \end{array} \right. .$$

1.4. Harmonicité de l'intégrale de Poisson

Pour $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$, l'intégrale de Poisson $P[\mu]$ est harmonique sur $\boldsymbol{D}$.

Cette proposition montre en particulier qu'on peut construire une fonction harmonique à partir d'une mesure.

- Preuve -

Pour $z = r\, e^{it}$

on obtient $P_r(s-t) = \dfrac{1-|z|^2}{|e^{is}-z|^2} = \dfrac{1}{2} \dfrac{(2-2z\bar{z})}{(e^{is}-z)\overline{(e^{is}-z)}} = \dfrac{1}{2} \dfrac{(e^{is}+z)\overline{(e^{is}-z)} + (e^{is}-z)\overline{(e^{is}+z)}}{(e^{is}-z)\overline{(e^{is}-z)}}$,

ce qui entraîne $P_r(s-t) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{is}+z}{e^{is}-z} + \overline{\dfrac{e^{is}+z}{e^{is}-z}}\right) = \Re\left(\dfrac{e^{is}+z}{e^{is}-z}\right)$,

donc $P[\mu](z) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \Re\left(\dfrac{e^{is}+z}{e^{is}-z}\right) d\,\mu(e^{is}) = \Re\left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{e^{is}+z}{e^{is}-z}\, d\,\mu(e^{is})\right)$.

Or l'application $z \to \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{e^{is}+z}{e^{is}-z}\, d\,\mu(e^{is})$ est holomorphe sur $\boldsymbol{D}$ comme intégrale de la fonction holomorphe $z \to \dfrac{e^{is}+z}{e^{is}-z}$ sur $\boldsymbol{D}$. On en déduit que $P[\mu]$ est harmonique sur $\boldsymbol{D}$ comme partie réelle d'une fonction holomorphe. ❑

2. Convergence radiale de l'intégrale de Poisson

Nous allons tout d'abord montrer la convergence radiale presque partout au bord du disque unité de l'intégrale de Poisson d'une mesure vers sa dérivée de Radon Nikodym. Puis, nous en déduirons la convergence radiale presque partout au bord du disque unité de l'intégrale de Poisson d'une fonction intégrable.

2.1. Lemme de comparaison

Soit $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$, alors $\limsup_{r \to 1^-} P[\mu](r e^{it}) \le D_{\sup,\mu}(e^{it})$

Ce lemme va nous permettre de prouver la convergence radiale de l'intégrale de Poisson.

– Preuve –

Nous allons décomposer $P[\mu](e^{it})$ *en deux intégrales. Après avoir majoré chacune de ces intégrales, nous pourrons rendre la limite supérieure de* $P[\mu](e^{it})$ *inférieure à* $D_{\sup,\mu}(e^{it})$ *:*

Par définition $P[\mu](r e^{it}) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\, d\mu(e^{is})$. pour $r e^{it} \in \boldsymbol{D}$.

Notons $\Lambda_{\delta,\pi}^t = \{e^{is};\ \delta \le |s-t| \le \pi\}$ pour $0 < \delta < \pi$.

On peut réécrire $P[\mu]$ sous la forme :

$$P[\mu](r e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda_{0,\delta}^t} P_r(s-t)\, d\mu(e^{is}) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda_{\delta,\pi}^t} P_r(s-t)\, d\mu(e^{is}).$$

On remarque que $\Lambda_{0,\delta}^t = \{e^{is};\ 0 \le |s-t| \le \delta\} = \{e^{is};\ t-\delta \le s \le t+\delta\} = \gamma_{t,\delta}$,

donc $P[\mu](r e^{it}) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\gamma_{t,\delta}} P_r(s-t)\, d\mu(e^{is}) + \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\Lambda_{\delta,\pi}^t} P_r(s-t)\, d\mu(e^{is})$.

Nous allons commencer par majorer la première intégrale :

Notons $J = \displaystyle\int_0^\delta \int_{\gamma_{t,\eta}} P'_r(\eta)\, d\mu(e^{is})\, d\eta = \int_0^\delta \Big(\int_{\gamma_{t,\eta}} d\mu(e^{is}) \Big) P'_r(\eta)\, d\eta$

donc $J=\int_0^\delta \mu(\gamma_{t,\eta})P'_r(\eta)d\eta$.

Exprimons J d'une manière différente. Comme $t-\eta<s<t+\eta$ et $0<\eta<\delta$ on voit que $t-\delta<s<t+\delta$, $\eta>s-t$, $\eta>-(s-t)$ et $0<\eta<\delta$, c'est à dire $t-\delta<s<t+\delta$, et $|s-t|<\eta<\delta$. Ainsi, comme P'_r est intégrable, le théorème de Fubini appliqué au changement de bornes qu'on vient de déterminer, à savoir $]0,\delta[\times\gamma_{t,\eta}\to\gamma_{t,\delta}\times\{|s-t|<\eta<\delta\}$ montre que

$$\int_0^\delta \left(\int_{\gamma_{t,\eta}} d\mu(e^{is})\right)P'_r(\eta)d\eta=\int_{\gamma_{t,\delta}}\left(\int_{|s-t|}^{\delta} P'_r(\eta)d\eta\right)d\mu(e^{is})$$

donc $J=\int_{\gamma_{t,\delta}}(P_r(\delta)-P_r(|s-t|))d\mu(e^{is})$.

Comme P_r est paire $P_r(|s-t|)=P_r(s-t)$ donc $J=\int_{\gamma_{t,\delta}}(P_r(\delta)-P_r(s-t))d\mu(e^{is})$.

On en déduit une expression de la première intégrale :

$$\int_0^\delta \mu(\gamma_{t,\eta})P'_r(\eta)d\eta=J=\int_{\gamma_{t,\delta}}P_r(\delta)d\mu(e^{is})-\int_{\gamma_{t,\delta}}P_r(s-t)d\mu(e^{is})$$

donc $\displaystyle\int_{\gamma_{t,\delta}}P_r(s-t)d\mu(e^{is})=P_r(\delta)\int_{\gamma_{t,\delta}}d\mu(e^{is})-\int_0^\delta \mu(\gamma_{t,\eta})P'_r(\eta)d\eta$,

donc $\displaystyle\int_{\gamma_{t,\delta}}P_r(s-t)d\mu(e^{is})=P_r(\delta)\mu(\gamma_{t,\delta})+\int_0^\delta \mu(\gamma_{t,\eta})(-P'_r(\eta))d\eta$.

Puis une majoration de la première intégrale :

Comme P_r est décroissante sur $[0,\delta]$ avec $\delta\in]0,\pi[$, on en déduit que $-P'_r(\eta)\geq 0$ pour $\eta\in[0,\delta]$. Pour tout $\epsilon\leq D_{\sup,\mu}(e^{it})\overset{pp}{=}\lim\limits_{\gamma_{t,\eta}\to e^{it}}\dfrac{\mu(\gamma_{t,\eta})}{\sigma(\gamma_{t,\eta})}=\lim\limits_{\gamma_{t,\eta}\to e^{it}}\dfrac{\mu(\gamma_{t,\eta})}{2\eta}$, on peut choisir δ suffisamment petit pour que $\forall\eta\in[0,\delta]$, $\mu(\gamma_{t,\eta})\leq 2\eta\epsilon$ presque partout

donc $\displaystyle\int_{\gamma_{t,\delta}}P_r(s-t)d\mu(e^{is})\leq 2\delta\epsilon P_r(\delta)+\int_0^\delta 2\eta\epsilon(-P'_r(\eta))d\eta$ presque partout

donc $\displaystyle\int_{\gamma_{t,\delta}}P_r(s-t)d\mu(e^{is})\leq 2\epsilon\left(\delta P_r(\delta)+\int_0^\delta -\eta P'_r(\eta)d\eta\right)$ presque partout

Une intégration par parties donne

$$\int_0^\delta \eta P'_r(\eta)d\eta=[\eta P_r(\eta)]_0^\delta-\int_0^\delta P_r(\eta)d\eta=\delta P_r(\delta)-\int_0^\delta P_r(\eta)d\eta$$

donc $\int_{\gamma_{t,\delta}} P_r(s-t)\, d\mu(e^{is}) \leq 2\epsilon \int_0^{\delta} P_r(\eta)\, d\eta \leq 2\epsilon \int_0^{\pi} P_r(\eta)\, d\eta$ presque partout car P_r est positive.

Comme $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\eta)\, d\eta = 1$ et que P_r est paire, on en déduit $\int_0^{\pi} P_r(\eta)\, d\eta = \pi$, donc pour δ assez petit $\int_{\gamma_{t,\delta}} P_r(s-t)\, d\mu(e^{is}) \leq 2\epsilon\pi$ presque partout

Nous allons maintenant majorer la deuxième intégrale :

On a déjà vu que $P_r(s-t) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(s-t)+r^2}$,

donc $P_r(s-t) \leq \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\delta + r^2} = P_r(\delta)$ pour $\delta \leq |s-t| \leq \pi$,

donc $\left|\int_{\Lambda_{\delta,\pi}^t} P_r(s-t)\, d\mu(e^{is})\right| \leq P_r(\delta) \int_{\Lambda_{\delta,\pi}^t} d|\mu|(e^{is}) \leq P_r(\delta)\|\mu\|$ pour $\delta \leq |s-t| \leq \pi$.

On peut maintenant majorer $P[\mu](r e^{it})$:

On déduit de ce qui précède que pour tout $\epsilon \leq D_{\sup,\mu}(e^{it})$ et δ assez petit,

$$P[\mu](r e^{it}) \leq \epsilon + P_r(\delta)\frac{\|\mu\|}{2\pi} \leq D_{\sup,\mu}(e^{it}) + P_r(\delta)\frac{\|\mu\|}{2\pi} \text{ presque partout}$$

donc $\sup\limits_{r\to 1^-} P[\mu](r e^{it}) \leq D_{\sup,\mu}(e^{it}) + \sup\limits_{r\to 1^-} P_r(\delta)\dfrac{\|\mu\|}{2\pi}$.

Comme $\lim\limits_{r\to 1^-} P_r(\delta) = \lim\limits_{r\to 1^-} \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\delta + r^2} = 0$ avec $0 < \delta \leq \pi$, on en déduit que

$\lim\limits_{r\to 1^-}\sup P_r(\delta) = 0$ et $\lim\limits_{r\to 1^-}\sup P[\mu](r e^{it}) \leq D_{\sup,\mu}(e^{it})$ ❑

2.2. Convergence radiale de l'intégrale de Poisson

Soit $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$. Dans le cas où la dérivée de Radon Nikodym de μ existe, la limite radiale au bord du disque unité de l'intégrale de Poisson par rapport à μ existe presque partout et correspond à la dérivée de Radon Nikodym de μ : $\lim_{r \to 1^-} P[\mu](r e^{it}) \overset{pp}{=} D_\mu(e^{it})$.

– Preuve –

Comme $P[-\mu] = -P[\mu]$, on obtient $\limsup_{r \to 1^-} -P[\mu](r e^{it}) = -\liminf_{r \to 1^-} P[\mu](r e^{it})$ et $D_{\sup,-\mu} = -D_{\inf,\mu}$. Or d'après le lemme de comparaison 2.1. $\limsup_{r \to 1^-} P[\mu](r e^{it}) \leq D_{\sup,\mu}(e^{it})$ presque partout. On en déduit que $D_{\inf,\mu}(e^{it}) \leq \liminf_{r \to 1^-} P[\mu](r e^{it})$ presque partout.

Donc $D_{\inf,\mu}(e^{it}) \leq \liminf_{r \to 1^-} P[\mu](r e^{it}) \leq \limsup_{r \to 1^-} P[\mu](r e^{it}) \leq D_{\sup,\mu}(e^{it})$ presque partout.

Ainsi $D_{\inf,\mu}(e^{it}) \leq \lim_{r \to 1^-} P[\mu](r e^{it}) \leq D_{\sup,\mu}(e^{it})$ presque partout.

Pour $D_\mu < \infty$ on a $D_{\inf,\mu}(e^{it}) = D_{\sup,\mu}(e^{it}) = D_\mu(e^{it})$.

On en déduit de ce qui précède que $\lim_{r \to 1^-} P[\mu](r e^{it}) = D_\mu(e^{it})$ presque partout.

Ainsi dans le cas où la dérivée de Radon Nikodym de μ existe, la limite radiale au bord du disque unité de l'intégrale de Poisson par rapport à μ existe presque partout et correspond à la dérivée de Radon Nikodym de μ. ❑

Voici une conséquence directe de cette proposition : la limite radiale au bord du disque unité de l'intégrale de Poisson d'une fonction intégrable sur $\boldsymbol{T}$.

Remarquons que dans le cas particulier où μ_S est une mesure étrangère à la mesure de Lebesgue, on obtient $\lim_{r \to 1^-} P[\mu_S](r e^{it}) = D_{\mu_S}(e^{it}) = 0$ et dans le cas particulier où $f\sigma$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue avec $f \in L^1(\boldsymbol{T})$, on obtient

$$\lim_{r \to 1^-} P[f\sigma](r e^{it}) = D_{f\sigma}(e^{it}) = f(e^{it})$$

Par convention d'écriture, on parlera d'intégrale de Poisson de f plutôt que d'intégrale de Poisson de $f\sigma$.

Ainsi pour $f \in L^1(\boldsymbol{T})$ la limite radiale au bord du disque unité de l'intégrale de Poisson de f existe. Elle est définie par : $\lim_{r \to 1^-} P[f\sigma](r e^{it}) = f(e^{it})$

- Exemple -

Considérons la fonction $\boldsymbol{\Phi}:(x,y)\to\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctan(\frac{2y}{1-x^2-y^2})$ définie sur $\boldsymbol{D}$.

Montrons dans un premier temps que $\boldsymbol{\Phi}$ est harmonique :

On calcule $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{2y}{1-x^2-y^2})=\frac{4xy}{(1-x^2-y^2)^2}$ pour obtenir

$$\frac{\partial}{\partial x}(arctan(\frac{2y}{1-x^2-y^2}))=\frac{\frac{4xy}{(1-x^2-y^2)^2}}{1+(\frac{2y}{1-x^2-y^2})^2}=\frac{4xy}{1+x^4+y^4-2x^2+2y^2+2x^2y^2}$$ et

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(arctan(\frac{2y}{1-x^2-y^2}))=\frac{4y(1+x^4+y^4-2x^2+2y^2+2x^2y^2)-4xy(4x^3-4x+4xy^2)}{(1+x^4+y^4-2x^2+2y^2+2x^2y^2)^2}$$

donc $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(arctan(\frac{2y}{1-x^2-y^2}))=\frac{4y+8y^3+4y^5+8x^2y-8x^2y^3-12x^4y}{(1+x^4+y^4-2x^2+2y^2+2x^2y^2)^2}$$

de même on calcule $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{2y}{1-x^2-y^2})=\frac{2-2x^2+2y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$ pour obtenir

$$\frac{\partial}{\partial y}(arctan(\frac{2y}{1-x^2-y^2}))=\frac{2-2x^2+2y^2}{1+x^4+y^4-2x^2+2y^2+2x^2y^2}$$

et $$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(arctan(\frac{2y}{1-x^2-y^2}))=\frac{4y(1+x^4+y^4-2x^2+2y^2+2x^2y^2)}{(1+x^4+y^4-2x^2+2y^2+2x^2y^2)^2}$$

$$-\frac{(4y^3+4y+4x^2y)(2-2x^2+2y^2)}{(1+x^4+y^4-2x^2+2y^2+2x^2y^2)^2}$$

donc $$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(arctan(\frac{2y}{1-x^2-y^2}))=\frac{-4y-8y^3-4y^5-8x^2y+8x^2y^3+12x^4y}{(1+x^4+y^4-2x^2+2y^2+2x^2y^2)^2}$$

Ainsi $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=0$ donc $\Delta \Phi=0$ et Φ est une fonction harmonique sur $\boldsymbol{D}$.

Voyons maintenant que Φ s'écrit comme l'intégrale de Poisson d'une fonction :

Considérons la fonction $\phi : \begin{cases} \phi(s)=1 \text{ pour } 0<s<\pi \\ \phi(s)=0 \text{ pour } \pi<s<2\pi \end{cases}$.

Comme $\phi \in L^1(]0,2\pi[)$, l'intégrale de Poisson de ϕ est donnée par

$$P[\phi\sigma](z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(s-t)\phi(s)\,ds=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(s-t)+r^2}ds \text{ pour } z=r\,e^{it}.$$

Effectuons le changement de variable $v=s-t$ pour obtenir

$$P[\phi\sigma](z)=\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-t}^{\pi-t}\frac{dv}{1+r^2-2r\cos v}.$$

Posons $u=\tan\frac{v}{2}$, dans ce cas on obtient $\cos v=\frac{1-u^2}{1+u^2}$ avec $du=\frac{1+u^2}{2}dv$ et donc

$$P[\phi\sigma](z)=\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\tan t/2}^{\cotan t/2}\frac{2\,du}{(1+u^2)(1+r^2)-2r(1-u^2)}=\frac{1-r^2}{\pi}\int_{-\tan t/2}^{\cotan t/2}\frac{du}{(1-r)^2+(1+r)^2u^2}$$

$$P[\phi\sigma](z)=\frac{1-r^2}{\pi(1+r)^2}\int_{-\tan t/2}^{\cotan t/2}\frac{du}{\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2+u^2}=\frac{1-r^2}{\pi(1+r)^2}\frac{(1+r)}{(1-r)}\left[\operatorname{artan}\left(\frac{1+r}{1-r}u\right)\right]_{u=-\tan t/2}^{u=\cotan t/2}$$

$$P[\phi\sigma](z)=\frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\cotan t/2\right)+\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan t/2\right)\right)$$

Ainsi $P[\phi\sigma](z)=\frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{\frac{1+r}{1-r}\left(\frac{1}{\tan t/2}+\tan t/2\right)}{1-\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2}\right)+\pi\right)$, donc

$$P[\phi\sigma](z)=1+\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{(1-r^2)}{-4r}\left(\frac{1+\tan^2 t/2}{\tan t/2}\right)\right)=1-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{(1-r^2)}{4r}\frac{1}{\sin t/2\cos t/2}\right)$$

c'est à dire $P[\phi\sigma](z)=1-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{(1-r^2)}{2r}\frac{1}{\sin t}\right)=1-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{2r\sin t}{1-r^2}\right)\right)$

en utilisant la notation classique $z=x+i\,y$, sachant que $y=r\sin t$, $r^2=x^2+y^2$, on obtient $P[\phi\sigma](z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctan(\frac{2y}{1-x^2-y^2})=\Phi(x,y)$.

On voit donc que la fonction harmonique Φ est l'intégrale de Poisson de la fonction ϕ.

On remarque par ailleurs que $\frac{2r\,sin\,t}{1-r^2}\underset{r\to 1^-}{\to}+\infty$ pour $0<t<\pi$ car $sin\,t>0$,

donc $arctan(\frac{2r\,sin\,t}{1-r^2})\underset{r\to 1^-}{\to}\frac{\pi}{2}$ et $P[\phi\sigma](z)\underset{r\to 1^-}{\to}1$ pour $0<t<\pi$.

De même $\frac{2r\,sin\,t}{1-r^2}\underset{r\to 1^-}{\to}-\infty$ pour $\pi<t<2\pi$ car $sin\,t<0$,

donc $arctan(\frac{2r\,sin\,t}{1-r^2})\underset{r\to 1^-}{\to}-\frac{\pi}{2}$ et $P[\phi\sigma](z)\underset{r\to 1^-}{\to}0$ pour $\pi<t<2\pi$.

On retrouve donc $P[\phi\sigma](r\,e^{it})\underset{r\to 1^-}{\to}\phi(t)$

2.3. Le problème de Dirichlet au bord du disque unité

Nous avons établi que si une fonction est intégrable sur $\boldsymbol{T}$ alors son intégrale de Poisson converge de manière radiale vers cette fonction. Nous avons également montré que l'intégrale de Poisson est une fonction harmonique.

Nous allons maintenant évoquer le problème du prolongement harmonique des fonctions continues, appelé problème de Dirichlet : considérons une fonction f continue sur $\boldsymbol{T}$. Existe-t-il une fonction harmonique prolongeant f sur $\boldsymbol{D}$?

On sait qu'une fonction continue sur $\boldsymbol{T}$ est intégrable sur $\boldsymbol{T}$, donc son intégrale de Poisson existe et la limite radiale de cette intégrale au bord du disque unité est f. Comme par ailleurs l'intégrale de Poisson est une fonction harmonique, elle constitue bien un prolongement harmonique de f sur $\boldsymbol{D}$. Ainsi, l'intégrale de Poisson constitue une solution au problème de Dirichlet. Cette solution est unique lorsque la fonction f est continue.

- Exemple -

Nous présentons ici le cas particulier d'une fonction harmonique sur $\boldsymbol{D}$ mais non continue sur $\boldsymbol{T}$:

Considérons la fonction $f:(x,y)\rightarrow f(x,y)=\dfrac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}$ définie sur $\boldsymbol{D}$.

f est harmonique sur $\boldsymbol{D}$, mais ne peut pas être prolongée par continuité en une fonction nulle sur tout le cercle unité.

En effet : $\dfrac{1-z}{1+z}=\dfrac{1-x-i\,y}{1+x+i\,y}=\dfrac{(1-x-i\,y)(1+x-i\,y)}{(1+x)^2+y^2}=\dfrac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}-2i\dfrac{y}{(1+x)^2+y^2}$

pour $z\neq -1$,

donc f est la partie réelle de la fonction complexe $\phi:z\rightarrow\phi(z)=\dfrac{1-z}{1+z}$

Comme par ailleurs ϕ est analytique sur $\boldsymbol{D}$, on en déduit qu'elle est holomorphe et donc f est harmonique sur $\boldsymbol{D}$ comme partie réelle d'une fonction holomorphe.

On remarque par ailleurs qu'au point $(-1,0)\in\boldsymbol{T}$, la fonction f n'est pas définie et n'admet pas de limite.

2.4. Une représentation de certaines fonctions harmoniques par la formule de Poisson

Nous venons d'évoquer le prolongement harmonique des fonctions continues. Considérons maintenant le problème sous un autre angle : supposons que nous connaissions une fonction f continue sur $\overline{\boldsymbol{D}}$ et harmonique sur $\boldsymbol{D}$. Cherchons alors une représentation intégrale de cette fonction f .

La fonction f vérifie le problème de Dirichlet, et comme l'intégrale de Poisson en est une solution unique, on en déduit que f est égale à son intégrale de Poisson sur $\boldsymbol{D}$.

$$\forall z=r e^{it}\in\boldsymbol{D},\ f(re^{it})=P[f\sigma]=\frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{T}}P_r(s-t)f(e^{is})d\sigma(e^{is})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(s-t)f(e^{is})ds$$

Cette représentation intégrale des fonctions harmoniques sur $\boldsymbol{D}$, appelée formule de Poisson, joue le même rôle que la formule de Cauchy pour l'étude des fonctions holomorphes. On peut donc énoncer le théorème de Poisson de la façon suivante :

Pour une fonction f continue sur $\overline{\boldsymbol{D}}$ et harmonique sur $\boldsymbol{D}$,

pour tout $z=r e^{it}\in\boldsymbol{D}$, $f(re^{it})=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}P_r(s-t)f(e^{is})ds$

– Exemple –

Nous présentons ici le cas particulier d'une fonction f holomorphe sur $\overline{\boldsymbol{D}}$.

Considérons une fonction f holomorphe sur $\overline{\boldsymbol{D}}$. Dans ce cas, f est bien continue sur $\overline{\boldsymbol{D}}$ et harmonique sur $\boldsymbol{D}$.

Construisons la fonction F holomorphe sur $\boldsymbol{D}$ définie par $F(z)=\dfrac{f(z)}{1-\overline{a}z}$ où $a\in\boldsymbol{D}$.

Dans ce cas, on peut appliquer à F la formule de Cauchy pour obtenir

$$F(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_{T}\frac{F(z)}{z-a}dz.$$

Ainsi $F(a)=\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{T}\frac{f(z)}{(1-\overline{a}z)(z-a)}dz$

Comme pour $z\in\boldsymbol{T}$, $1-\overline{a}z=|z|^2-\overline{a}z=z\overline{z}-\overline{a}z=z(\overline{z}-\overline{a})$, on en déduit que

$$F(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_{T}\frac{f(z)}{(\overline{z}-\overline{a})(z-a)z}dz=\frac{1}{2\pi}\int_{T}\frac{f(z)}{|z-a|^2}\frac{dz}{iz}.$$

Comme par ailleurs pour $z\in\boldsymbol{T}$ on peut écrire $z=e^{is}$ donc $dz=i\,e^{is}\,ds=i\,z\,ds$, on en déduit par changement de variable que $F(a)=\dfrac{f(a)}{1-\overline{a}a}=\dfrac{f(a)}{1-|a|^2}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{is})}{|e^{is}-a|^2}ds$,

donc $f(a)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1-|a|^2}{|e^{is}-a|^2}f(e^{is})ds$ où l'on reconnaît la formule de Poisson pour $a\in\boldsymbol{D}$.

Une première conséquence du théorème de Poisson est la possibilité de résoudre l'équation de Laplace au bord du disque unité.

En effet, résoudre l'équation de Laplace $\begin{cases}\Delta u=0 \text{ dans } \boldsymbol{D}\\ u=f \text{ sur } \boldsymbol{T}\end{cases}$ où f est une fonction continue dépendant uniquement de s tel que $e^{is}\in\boldsymbol{T}$, revient à appliquer le théorème de Poisson à la fonction u et conduit donc au résultat : $u(r,t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(s-t)+r^2}f(s)\,ds$.

3. Quelles fonctions harmoniques sont des intégrales de Poisson ?

Grâce au théorème d'isomorphisme, nous allons définir quelles classes de fonctions harmoniques sont des intégrales de Poisson et déterminer leur comportement au bord du disque unité.
Les trois premiers paragraphes seront utilisés pour montrer le théorème d'isomorphisme 3.4.

3.1. Théorème de représentation de Riesz

Première forme :

L'application $L:\left|\begin{array}{l}\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})\to(C^0(\boldsymbol{T}))^* \\ \mu\to L_\mu\end{array}\right.$ est une isométrie bijective définie par
$L_\mu(f)=\int_{\boldsymbol{T}} f(e^{is})\,d\mu(e^{is})$ pour $f\in C^0(\boldsymbol{T})$.

L'application linéaire L_μ s'identifie donc à une mesure μ par la relation :

$$L_\mu(f)=\int_{\boldsymbol{T}} f(e^{is})\,d\mu(e^{is}) \text{ pour } f\in C^0(\boldsymbol{T}).$$

Deuxième forme :

L'application $L:\left|\begin{array}{l}\mathcal{M}_+(\boldsymbol{T})\to(C^0_+(\boldsymbol{T}))^* \\ \mu\to L_\mu\end{array}\right.$ est une isométrie bijective définie par
$L_\mu(f)=\int_{\boldsymbol{T}} f(e^{is})\,d\mu(e^{is})$ pour $f\in C^0_+(\boldsymbol{T})$.

L'application linéaire L_μ s'identifie donc à une mesure μ par la relation :

$$L_\mu(f)=\int_{\boldsymbol{T}} f(e^{is})\,d\mu(e^{is}) \text{ pour } f\in C^0_+(\boldsymbol{T}).$$

3.2. Densité d'un sous espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel normé et S un sous espace vectoriel de E.
Alors S est dense dans E si et seulement si $S^\perp=\{0\}$.

3.3. Lemme préliminaire

Soit f une fonction harmonique sur $\boldsymbol{D}$ continue sur $\boldsymbol{T}$ et $\mu\in\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$,
alors $\int_{\boldsymbol{T}} f(e^{is})\,d\mu(e^{is})=\lim_{r\to 1^-}\int_{\boldsymbol{T}} f(e^{is})P[\mu](re^{is})\,d\sigma(e^{is})$

- Preuve -

On sait d'après le théorème de Poisson que pour $f\in C^0(\boldsymbol{T})$ il existe une unique fonction h continue sur $\overline{\boldsymbol{D}}$ et harmonique sur $\boldsymbol{D}$ telle que $h_{|\boldsymbol{T}}=f$ et

$$h(re^{is})=\frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)f(e^{it})\,d\sigma(e^{it}),$$

donc $\int_{\boldsymbol{T}} h(re^{is})\,d\mu(e^{is})=\frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{T}}\left(\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)f(e^{it})\,d\sigma(e^{it})\right)d\mu(e^{is})$.

Par ailleurs le théorème de Fubini montre que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{T}}\left(\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)f(e^{it})\,d\sigma(e^{it})\right)d\mu(e^{is})=\int_{\boldsymbol{T}} f(e^{it})\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\,d\mu(e^{is})\right)d\sigma(e^{it})$$

donc $\int_{\boldsymbol{T}} h(re^{is})\,d\mu(e^{is})=\int_{\boldsymbol{T}} f(e^{it})P[\mu](re^{it})\,d\sigma(e^{it})=\int_{\boldsymbol{T}} f(e^{is})P[\mu](re^{is})\,d\sigma(e^{is})$. (1)

Comme h est continue sur le compact $\overline{\boldsymbol{D}}$, h est uniformément continue sur $\overline{\boldsymbol{D}}$. Donc pour $\epsilon>0$ il existe $\eta>0$ tel que $\forall z_1,z_2\in\overline{\boldsymbol{D}}$, $|z_1-z_2|<\eta$ entraîne $|h(z_1)-h(z_2)|<\epsilon$. En particulier $|h(re^{is})-h(e^{is})|=|h_r(e^{is})-f(e^{is})|<\epsilon$, donc $\|h_r-f\|_\infty<\epsilon$. On en déduit que $\lim_{r\to 1^-}\|h_r-f\|_\infty=0$.

On obtient alors $\lim_{r\to 1^-}\int_{\boldsymbol{T}} h(re^{is})\,d\mu(e^{is})=\int_{\boldsymbol{T}}\lim_{r\to 1^-} h_r(e^{is})\,d\mu(e^{is})=\int_{\boldsymbol{T}} f(e^{is})\,d\mu(e^{is})$. (2)

En combinant les résultats (1) et (2) on obtient :

$$\int_{\boldsymbol{T}} f(e^{is})\,d\mu(e^{is})=\lim_{r\to 1^-}\int_{\boldsymbol{T}} f(e^{is})P[\mu](re^{is})\,d\sigma(e^{is}) \qquad \square$$

3.4. Théorème d'isomorphisme

Ce théorème est fondamental car il permet d'identifier une certaine classe de fonctions harmoniques avec des mesures réelles sur $\boldsymbol{T}$. En conséquence, pour ces fonctions nous pourrons *appliquer les résultats de convergence radiale obtenus précédemment pour des mesures réelles.*

L'application $\zeta : \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T}) \to Harm^1(\boldsymbol{D}) \\ \mu \to \zeta(\mu) = P[\mu] \end{array} \right.$ est un isomorphisme du cône des mesures réelles sur $\boldsymbol{T}$ sur l'espace vectoriel des fonctions harmoniques f sur $\boldsymbol{D}$ vérifiant la condition :

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\boldsymbol{T}} \left| f(r e^{is}) \right| d\sigma(e^{is}) < \infty$$

L'espace vectoriel $Harm^1(\boldsymbol{D})$ joue donc un rôle primordial dans la convergence radiale des fonctions harmoniques. Il est à l'origine des espaces de Hardy que nous définirons plus loin dans le projet.

– Preuve –

Montrons que $P[\mu]$ est une fonction harmonique vérifiant la condition

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\boldsymbol{T}} \left| f(r e^{is}) \right| d\sigma(e^{is}) < \infty :$$

Nous avons adopté la notation $Harm^1(\boldsymbol{D})$ pour l'ensemble des fonctions harmoniques f sur $\boldsymbol{D}$ vérifiant la condition $\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\boldsymbol{T}} \left| f(r e^{is}) \right| d\sigma(e^{is}) < \infty$.

L'application $\mu \to P[\mu]$ est linéaire. Nous savons également que $P[\mu]$ est harmonique sur $\boldsymbol{D}$.

Par ailleurs $\int_{\boldsymbol{T}} \left| P[\mu](r e^{it}) \right| d\sigma(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} \left| \int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\, d\mu(e^{is}) \right| d\sigma(e^{it})$

et $\frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} \left| \int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\, d\mu(e^{is}) \right| d\sigma(e^{it}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} \left(\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\, d|\mu|(e^{is}) \right) d\sigma(e^{it})$ car P_r est une fonction positive.

Le théorème de Fubini Tonelli montre que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} \left(\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\, d|\mu|(e^{is}) \right) d\sigma(e^{it}) = \int_{\boldsymbol{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\, d\sigma(e^{it}) \right) d|\mu|(e^{is}).$$

Comme $\frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\, d\sigma(e^{it}) = 1$, on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} \left(\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\, d|\mu|(e^{is}) \right) d\sigma(e^{it}) = \int_{\boldsymbol{T}} d|\mu|(e^{is}) = |\mu|(\boldsymbol{T}) = \|\mu\|$$

où $\|\mu\| = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \{ \left| \int_{\mathbf{T}} f(e^{is}) d\,\mu(e^{is}) \right| ;\ f \in C^0(\mathbf{T}) \}$.

On en déduit $\int_{\mathbf{T}} \left| P[\mu](r\,e^{it}) \right| d\,\sigma(e^{it}) \le \|\mu\|$

donc $\sup_{0 \le r < 1} \int_{\mathbf{T}} \left| P[\mu](r\,e^{it}) \right| d\,\sigma(e^{it}) < \infty$ c'est à dire $P[\mu] \in Harm^1(\mathbf{D})$

Réciproquement, montrons que toute fonction de $Harm^1(\mathbf{D})$ est une intégrale de Poisson :

Nous allons d'abord établir un résultat préliminaire :

D'après le théorème de représentation de Riesz, μ s'identifie à une application linéaire L_μ telle

que $L_\mu(f) = \int_{\mathbf{T}} f(e^{is}) d\,\mu(e^{is})$ pour toute fonction $f \in C^0(\mathbf{T})$. Donc $\|\mu\| = \|L_\mu\|$ avec

$\|\mu\| = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \{ \left| \int_{\mathbf{T}} f(e^{is}) d\,\mu(e^{is}) \right| ;\ f \in C^0(\mathbf{T}) \}$. Comme d'après le lemme préliminaire

$\int_{\mathbf{T}} f(e^{is}) d\,\mu(e^{is}) = \lim_{r \to 1^-} \int_{\mathbf{T}} f(e^{is}) P[\mu](r\,e^{is}) d\,\sigma(e^{is})$, on obtient

$\left| \int_{\mathbf{T}} f(e^{is}) d\,\mu(e^{is}) \right| \le \lim_{r \to 1^-} \int_{\mathbf{T}} \left| f(e^{is}) P[\mu](r\,e^{is}) \right| d\,\sigma(e^{is}) \le \|f\|_\infty \lim_{r \to 1^-} \int_{\mathbf{T}} \left| P[\mu](r\,e^{is}) \right| d\,\sigma(e^{is})$.

On déduit de la définition de la norme de μ que

$$\|\mu\| \le \limsup_{r \to 1^-} \int_{\mathbf{T}} \left| P[\mu](r\,e^{is}) \right| d\,\sigma(e^{is}) \le \sup_{0 \le r < 1} \int_{\mathbf{T}} \left| P[\mu](r\,e^{is}) \right| d\,\sigma(e^{is}).$$

Comme on a déjà vu plus haut que $\int_{\mathbf{T}} \left| P[\mu](r\,e^{is}) \right| d\,\sigma(e^{is}) \le \|\mu\|$, on en déduit que

$\sup_{0 \le r < 1} \int_{\mathbf{T}} \left| P[\mu](r\,e^{is}) \right| d\,\sigma(e^{is}) \le \|\mu\|$ car la borne supérieure est le plus petit des majorants.

Ainsi $\|\mu\| \le \sup_{0 \le r < 1} \int_{\mathbf{T}} \left| P[\mu](r\,e^{is}) \right| d\,\sigma(e^{is}) \le \|\mu\|$.

D'où $\sup_{0 \le r < 1} \int_{\mathbf{D}} \left| P[\mu](r\,e^{is}) \right| d\,\sigma(e^{is}) = \|\mu\|$.

Nous allons construire un sous espace vectoriel dense dans $C^0(\mathbf{T})$ et une suite convergeant dans ce sous espace, puis raisonner par densité pour généraliser la convergence de cette suite à l'espace vectoriel $C^0(\mathbf{T})$:

Considérons la fonction $g_{r,t} \in C^0(\boldsymbol{T})$ définie par $g_{r,t} : \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{T} \to \mathbb{R} \\ e^{is} \to g_{r,t}(e^{is}) = P_r(s-t) \end{array} \right.$ pour

$0<r<1$ et $t \in \mathbb{R}$.

Notons S le sous espace vectoriel de $C^0(\boldsymbol{T})$ engendré par $\{ g_{r,t} ;\ 0<r<1,\ t \in \mathbb{R} \}$

Voyons que S est dense dans $C^0(\boldsymbol{T})$:

soit $\phi \in S^{\perp}$, d'après le théorème de représentation de Riesz, ϕ s'identifie à une mesure qu'on notera μ.

Comme $\phi \in S^{\perp}$, on obtient $\int_{\boldsymbol{T}} g_{r,t}(e^{is}) d\mu(e^{is}) = 0$

Or $\int_{\boldsymbol{T}} g_{r,t}(e^{is}) d\mu(e^{is}) = \int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t) d\mu(e^{is}) = P[\mu](r e^{it})$,

on en déduit que $P[\mu](r e^{it}) = 0$ et donc $\sup_{0 \le r<1} \int_{\boldsymbol{T}} \left| P[\mu](r e^{is}) \right| d\sigma(e^{is}) = 0$

ainsi grâce à la relation obtenue plus haut, on obtient $\|\mu\| = 0$

donc $\mu = 0$ donc $\phi = 0$.

La réciproque est immédiate : $\phi = 0$ entraîne $\mu = 0$, donc $\int_{\boldsymbol{T}} g_{r,t}(e^{is}) d\mu(e^{is}) = 0$ et $\phi \in S^{\perp}$

Ainsi, $S^{\perp} = \{0\}$

On en déduit que S est dense dans $C^0(\boldsymbol{T})$.

Soit maintenant $h \in E$, considérons l'application linéaire

$$R_\rho : \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{T} \to \mathbb{C} \\ f \to R_\rho(f) = \int_{\boldsymbol{T}} f(e^{is}) h(\rho e^{is}) d\sigma(e^{is}) \end{array} \right. \quad \text{pour } 0<\rho<1.$$

On notera $R[f] = \lim_{\rho \to 1^-} R_\rho(f)$.

Montrons que $R[f] = \lim_{\rho \to 1^-} R_\rho(f)$ existe pour tout $f \in S$:

On obtient $R_\rho(g_{r,t}) = \int_{\boldsymbol{T}} g_{r,t}(e^{is}) h(\rho e^{is}) d\sigma(e^{is}) = \int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t) h(\rho e^{is}) d\sigma(e^{is})$.

Comme la fonction $h_\rho : e^{is} \to h_\rho(e^{is}) = h(\rho e^{is})$ est continue sur $\overline{\boldsymbol{D}}$, harmonique sur $\boldsymbol{D}$, elle vérifie le théorème de Poisson. On en déduit que $h_\rho(r e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t) h_\rho(e^{is}) d\sigma(e^{is})$

donc $2\pi h(\rho r e^{it}) = \int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t) h(\rho e^{is}) d\sigma(e^{is})$.

Ainsi $R_\rho(g_{r,t})=2\pi h(\rho r e^{it})$.

Comme h est continue sur $\overline{B(0,r)}$, on obtient $R[g_{r,t}]=\lim_{\rho\to 1^-} R_\rho(g_{r,t})=2\pi h(r e^{it})$.

Comme R_ρ est linéaire, $R[f]=\lim_{\rho\to 1^-} R_\rho(f)$ existe pour tout $f\in S$.

Voyons par densité de S dans $C^0(\boldsymbol{T})$ que $R[f]=\lim_{\rho\to 1^-} R_\rho(f)$ existe pour tout $f\in C^0(\boldsymbol{T})$:

Par définition $\|R_\rho\|=\sup_{\|f\|_\infty=1}\left|\int_{\boldsymbol{T}} h(\rho e^{is})f(e^{is})d\sigma(e^{is})\right|$

donc $\|R_\rho\|\le\int_{\boldsymbol{T}}\left|h(\rho e^{is})\right|d\sigma(e^{is})\le\sup_{0\le\rho<1}\int_{\boldsymbol{T}}\left|h(\rho e^{is})\right|d\sigma(e^{is})<\infty$ car $h\in Harm^1(\boldsymbol{D})$.

Soit $f\in C^0(\boldsymbol{T})$, on a montré que S est dense dans $C^0(\boldsymbol{T})$, donc il existe $F\in S$ convergeant vers f dans $C^0(\boldsymbol{T})$. Ainsi pour $\epsilon'>0$, il existe $F\in S$ tel que

$$\|f-F\|_\infty<\epsilon'$$

Par ailleurs, on a montré plus haut que $R[F]=\lim_{\rho\to 1^-} R_\rho(F)$ existe car $F\in S$, donc pour $\epsilon''>0$, il existe $\eta>0$ tel que pour $1-\eta<\rho<1$, $\left|R_\rho(F)-R[F]\right|<\epsilon''$.

Par ailleurs pour $1-\eta<\rho_1,\rho_2<1$, on obtient

$$\left|R_{\rho_1}(f)-R_{\rho_2}(f)\right|\le\left|R_{\rho_1}(f)-R_{\rho_1}(F)\right|+\left|R_{\rho_1}(F)-R[F]\right|+\left|R[F]-R_{\rho_2}(F)\right|+\left|R_{\rho_2}(F)-R_{\rho_2}(f)\right|$$

Comme R_{ρ_1} et R_{ρ_2} sont des applications linéaires, on obtient $\left|R_{\rho_1}(f)-R_{\rho_1}(F)\right|\le\|R_{\rho_1}\|\|f-F\|_\infty$ et $\left|R_{\rho_2}(f)-R_{\rho_2}(F)\right|\le\|R_{\rho_2}\|\|f-F\|_\infty$.

Donc $\left|R_{\rho_1}(f)-R_{\rho_2}(f)\right|\le\|R_{\rho_1}\|\|f-F\|_\infty+2\epsilon''+\|R_{\rho_2}\|\|f-F\|_\infty$

donc $\left|R_{\rho_1}(f)-R_{\rho_2}(f)\right|\le\|f-F\|_\infty(\|R_{\rho_1}\|+\|R_{\rho_2}\|)+2\epsilon''$

donc $\left|R_{\rho_1}(f)-R_{\rho_2}(f)\right|\le\epsilon'(2\sup_{0\le\rho<1}\int_{\boldsymbol{T}}\left|h(\rho e^{is})\right|d\sigma(e^{is}))+2\epsilon''$

Si on prend $\epsilon'=\dfrac{\epsilon''}{2\sup_{0<\rho<1}\int_{\boldsymbol{T}}\left|h(\rho e^{is})\right|d\sigma(e^{is})}$ on obtient $\left|R_{\rho_1}(f)-R_{\rho_2}(f)\right|\le\epsilon''+2\epsilon''$

donc pour $\epsilon=3\epsilon''>0$, on obtient $\left|R_{\rho_1}(f)-R_{\rho_2}(f)\right|\le\epsilon$

ainsi la suite $(R_\rho)_{0\le\rho<1}$ vérifie le critère de Cauchy dans $(C^0(\boldsymbol{T}))^*$

Comme $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel complet, l'ensemble des applications linéaires de $C^0(\boldsymbol{T})$ dans $\mathbb{C}$ est un espace complet. Donc la suite $(R_\rho)_{0\le\rho<1}$ est convergente dans $(C^0(\boldsymbol{T}))^*$.

Ainsi $R[f]=\lim_{\rho\to 1^-} R_\rho(f)$ existe pour tout $f\in C^0(\boldsymbol{T})$.

Utilisons maintenant les résultats précédents pour prouver que toute fonction de E est une intégrale de Poisson :

On a montré plus haut que $\|R_\rho\|\le \sup_{0\le\rho<1}\int_{\boldsymbol{T}}|h(\rho e^{is})|\,d\sigma(e^{is})$

Comme $R[f]\in(C^0(\boldsymbol{T}))^*$, le théorème de représentation de Riesz montre qu'il existe une mesure ν telle qu'on puisse identifier $R[f]$ à ν par la relation $R[f]=\int_{\boldsymbol{T}} f(e^{is})\,d\nu(e^{is})$ pour $f\in C^0(\boldsymbol{T})$

Par ailleurs $P[\nu](r e^{it})=\dfrac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\,d\nu(e^{is})=\dfrac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{T}} g_{r,t}(e^{is})\,d\nu(e^{is})$

donc $P[\nu](r e^{it})=\dfrac{1}{2\pi}R[g_{r,t}]$

on déduit d'un résultat obtenu plus haut que $P[\nu](r e^{it})=\dfrac{1}{2\pi}2\pi\, h(r e^{it})$

donc $P[\nu]=h$ ❑

On en déduit la condition de convergence radiale d'une fonction harmonique :

Toute fonction f harmonique sur $\boldsymbol{D}$ vérifiant la condition 3.4. $\sup_{0\le r<1}\int_{\boldsymbol{T}}|f(r e^{is})|\,d\sigma(e^{is})<\infty$ est l'intégrale de Poisson d'une unique mesure μ sur $\boldsymbol{T}$. Il existe alors une fonction $D_\mu\in L^1(\boldsymbol{T})$ telle que $\mu=\mu_s+D_\mu\sigma$. La limite radiale de f au bord du disque unité existe presque partout et vaut

$$\lim_{r\to 1^-} f(r e^{it})=\lim_{r\to 1^-} P[\mu](r e^{it})\overset{pp}{=}D_\mu(e^{it}).$$

- Exemple -

Nous présentons ici une fonction non identiquement nulle dont les limites radiales sont toutes nulles.

Considérons la fonction f définie par $f(z)=\Im\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$ sur $\boldsymbol{D}$.

Cherchons les limites radiales de f :

f est harmonique sur $\boldsymbol{D}$ comme partie imaginaire de la fonction holomorphe $z \to (\frac{z+1}{z-1})^2$.

Pour $z \in \boldsymbol{T} \setminus \{1\}$, notons $z = e^{it}$ et considérons le prolongement de f sur $\boldsymbol{T} \setminus \{1\}$ défini par $\tilde{f}(e^{it}) = \Im(\frac{e^{it}+1}{e^{it}-1})^2$ pour $e^{it} \neq 1$.

On obtient $\tilde{f}(e^{it}) = \Im(\frac{e^{it/2}+e^{-it/2}}{e^{it/2}-e^{-it/2}})^2 = \Im(\frac{\cos t/2}{i \sin t/2})^2 = -\Im(\frac{\cos t/2}{\sin t/2})^2 = 0$ pour $e^{it} \neq 1$.

On en déduit pour z tendant vers e^{it} sans couper un voisinage quelconque de 1 :

$$\lim_{\substack{z \to e^{it} \\ z \notin V(1)}} f(z) = 0.$$

Par ailleurs, pour z tendant vers 1, $\lim_{z \to 1} f(z) = \lim_{z \to 1} \Im(\frac{z+1}{z-1})^2 = \lim_{r \to 1^-} \Im(\frac{r+1}{r-1})^2 = 0$.

On en conclut que les limites radiales de f sont identiquement nulles alors que f n'est pas identiquement nulle : $\lim_{r \to 1^-} f(z) = 0$, pour $f \neq 0$.

Voyons que f n'est l'intégrale de Poisson d'aucune mesure :

Supposons qu'il existe $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$, telle que $f = P[\mu]$. Dans ce cas, on sait que

$$\sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} \left| f(r e^{is}) \right| ds < \infty.$$

Si on note $z = r e^{it} = x + i y$ où $x = r \cos t$ et $y = r \sin t$, on obtient

$$f(z) = \Im(\frac{z+1}{z-1})^2 = \Im(\frac{1+x+iy}{1-x-iy})^2 = \Im(\frac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{(1-x)^2+y^2})^2 = \Im(\frac{1-x^2-y^2+2iy}{(1-x)^2+y^2})^2$$

$$f(z) = \Im(\frac{(1-x^2-y^2)^2-4y^2+i4y(1-x^2-y^2)}{((1-x)^2+y^2)^2}) = \frac{4y(1-x^2-y^2)}{((1-x)^2+y^2)^2} = \frac{4r(1-r^2)\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2}$$

donc $\int_0^{2\pi} \left| f(r e^{it}) \right| dt = \int_0^{2\pi} \frac{4r(1-r^2)\left|\sin t\right|}{(1+r^2-2r\cos t)^2} dt = \int_0^{\pi} \frac{4r(1-r^2)\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2} dt - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{4r(1-r^2)\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2} dt$

Comme $P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$, on en déduit $P'_r(t) = -\frac{2r(1-r^2)\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2}$

donc $\int_0^{2\pi} |f(r e^{it})| dt = -2\int_0^{\pi} P'_r(t)\,dt + 2\int_{\pi}^{2\pi} P'_r(t)\,dt = 2(P_r(0) - P_r(\pi) + P_r(2\pi) - P_r(\pi))$.

Comme $P_r(0) = P_r(2\pi)$, on obtient $\int_0^{2\pi} |f(r e^{it})| dt = 4(P_r(0) - P_r(\pi)) = 4(\frac{1-r^2}{(1-r)^2} - \frac{1-r^2}{(1+r)^2})$

donc $\int_0^{2\pi} |f(r e^{it})| dt = 4(\frac{1+r}{1-r} - \frac{1-r}{1+r}) = \frac{16r}{1-r^2}$

ainsi $\sup_{0\le r<1} \int_0^{2\pi} |f(r e^{is})| ds = \infty$, contradiction avec l'hypothèse de travail.

On en conclut que f n'est l'intégrale de Poisson d'aucune mesure sur $\boldsymbol{T}$.

3.5. Convergence radiale des fonctions harmoniques positives

Il s'agit d'une première classe de fonctions harmoniques vérifiant la condition de convergence radiale 3.4.

Considérons une fonction f harmonique positive sur $\boldsymbol{D}$.

La formule de la moyenne montre que $\int_0^{2\pi} |f(r e^{it})| dt = 2\pi f(0)$ et donc f vérifie la condition de convergence radiale 3.4 : $\sup_{0\le r<1} \int_0^{2\pi} |f(r e^{is})| ds < \infty$.

Ainsi toute fonction f harmonique positive sur $\boldsymbol{D}$ est l'intégrale de Poisson d'une unique mesure μ sur $\boldsymbol{T}$. Il existe alors une fonction $D_\mu \in L^1(\boldsymbol{T})$ telle que $\mu = \mu_S + D_\mu \sigma$. La limite radiale de f au bord du disque unité existe presque partout et vaut

$$\lim_{r\to 1^-} f(r e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} P[\mu](r e^{it}) \overset{pp}{=} D_\mu(e^{it}).$$

3.6. Convergence radiale des fonctions harmoniques bornées

Il s'agit d'une autre classe de fonctions harmoniques vérifiant la condition de convergence radiale 3.4.

Considérons une fonction f harmonique et bornée sur $\boldsymbol{D}$. Alors $\int_0^{2\pi} f(r e^{it}) dt \le 2\pi \|f\|_\infty$ donc f

vérifie la condition de convergence radiale 3.4 : $\sup_{0\leq r<1} \int_0^{2\pi} \left|f(r\,e^{is})\right| ds < \infty$

Ainsi toute fonction f harmonique bornée sur $\boldsymbol{D}$ est l'intégrale de Poisson d'une unique mesure μ sur $\boldsymbol{T}$. Il existe alors une fonction $D_\mu \in L^1(\boldsymbol{T})$ telle que $\mu = \mu_S + D_\mu \sigma$. La limite radiale de f au bord du disque unité existe presque partout et vaut

$$\lim_{r\to 1^-} f(r\,e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} P[\mu](r\,e^{it}) \overset{pp}{=} D_\mu(e^{it}).$$

4. Convergence non tangentielle d'une fonction harmonique positive

Nous avons étudié la convergence radiale de l'intégrale de Poisson puis de certaines classes de fonctions harmoniques. Nous allons présenter dans ce paragraphe la convergence non tangentielle de l'intégrale de Poisson et des fonctions harmoniques positives.

4.1. Comparaison des fonctions maximales

Soit $\mu \in \mathcal{M}^{+}(\boldsymbol{T})$, en chaque point e^{it} de $\boldsymbol{T}$ on peut écrire :

$$c_\alpha . N_\alpha(P[\mu])(e^{it}) \leq M(\mu(e^{it}))$$

où $M(\mu)(e^{it}) = \sup\limits_{0<R<\infty} \{ \dfrac{\mu(B(e^{it},R))}{\sigma(B(e^{it},R))}$ est la fonction maximale de μ

et $N_\alpha(P[\mu])(e^{it}) = \sup\limits_{z \in \Gamma_\alpha^t} \{ |P[\mu](z)| \}$ est la fonction maximale non tangentielle de μ,

et $0 < c_\alpha < 1$ une constante réelle

- Preuve -

Nous allons commencer par comparer $N_\alpha(P[\mu])(e^{it})$ *avec* $\sup\limits_{0 \leq r \leq 1} |P[\mu](e^{it})|$ *:*

Pour $z \in \Gamma_\alpha^t$ tel que $r \leq |z|$, on remarque que $|z| \leq 1$ donc $\dfrac{|z-r|}{1-r}$ est borné.

Notons $\dfrac{|z-r|}{1-r} \leq \lambda$. Comme $|e^{is} - r| \leq |e^{is} - z| + |z - r|$, on obtient

$$|e^{is} - r| \leq |e^{is} - z| + \lambda(1-r) \leq |e^{is} - z| + \lambda |e^{is} - z| \text{ donc } |e^{is} - r|^2 \leq (1+\lambda)^2 |e^{is} - z|^2.$$

D'où $\dfrac{1}{(1+\lambda)^2} \dfrac{1}{|e^{is} - z|^2} \leq \dfrac{1}{|e^{is} - r|^2} \leq \dfrac{1}{|e^{is} - |z||^2}$ car $r \leq |z|$.

Notons $c_\alpha = \dfrac{1}{2\pi(1+\lambda)^2}$ on obtient $2\pi c_\alpha \dfrac{1-r^2}{|e^{is} - z|^2} \leq \dfrac{1-r^2}{|e^{is} - |z||^2}$

donc $2\pi c_\alpha \displaystyle\int_{\boldsymbol{T}} \frac{1-r^2}{|e^{is} - z|^2} d\nu(e^{is}) \leq \int_{\boldsymbol{T}} \frac{1-r^2}{|e^{is} - |z||^2} d\nu(e^{is})$ où $\nu \in \mathcal{M}_{+}(\boldsymbol{T})$.

On en déduit $2\pi c_\alpha P[\nu](z) \leq P[\nu](|z|)$ donc $2\pi c_\alpha |P[\nu](z)| \leq |P[\nu](|z|)| \leq \sup\limits_{0 \leq r \leq 1} |P[\nu](|z|)|$, donc $2\pi c_\alpha \sup_{z\in\Gamma^t_\alpha} |P[\nu](z)| \leq \sup_{0\leq r\leq 1} |P[\nu](|z|)|$

c'est à dire $2\pi c_\alpha N_\alpha(P[\nu](e^{it})) \leq \sup_{0\leq r\leq 1} |P[\nu](|z|)|$ pour $z\in\Gamma^t_\alpha$ tel que $r\leq|z|$.

On obtient en particulier $2\pi c_\alpha N_\alpha(P[\nu](1)) \leq \sup_{0\leq r\leq 1} |P[\nu](1)|$ et le changement de mesure

$\mu(e^{it})=\nu(1)$ montre que $2\pi c_\alpha N_\alpha(P[\mu](e^{it})) \leq \sup_{0\leq r\leq 1} |P[\mu](e^{it})|$.

Nous allons maintenant comparer $\sup_{0\leq r\leq 1} |P[\mu](e^{it})|$ *avec* $M(\mu)(e^{it})$ *pour obtenir le résultat souhaité :*

Soit $(\gamma_{0,\frac{1}{n}})_{0<n\leq N}$ une suite finie croissante d'arcs ouverts inclus dans $\boldsymbol{T}$ construits autour de leur centre 1 et tels que $\gamma_{0,\frac{1}{N}}=\boldsymbol{T}$. Notons χ_n la fonction caractéristique de $\gamma_{0,\frac{1}{n}}$, et a_n le plus grand entier positif tel que $a_n\chi_n(e^{is})\leq P_r(s)$. Notons $K(e^{is})=\sum_{n=1}^{N}(a_n-a_{n+1})\chi_n(e^{is})$ avec $a_{N+1}=0$.

Comme P_r est paire et décroissante entre 0 et π on obtient $a_n\geq a_{n+1}$ donc $(a_n-a_{n+1})\chi_n(e^{is})\leq a_n\chi_n(e^{is})\leq P_r(s)$. On en déduit que $K(e^{is})\leq P_r(s)$. (1)

Comme $\int_{\boldsymbol{T}} K(e^{is})d\nu(e^{is})=\int_{\boldsymbol{T}}\sum_{n=1}^{N}(a_n-a_{n+1})\chi_n(e^{is})d\nu(e^{is})$ pour tout $\nu\in\mathcal{M}_+(\boldsymbol{T})$, on en déduit que $\int_{\boldsymbol{T}} K(e^{is})d\nu(e^{is})=\sum_{n=1}^{N}(a_n-a_{n+1})\int_{\boldsymbol{T}}\chi_n(e^{is})d\nu(e^{is})=\sum_{n=1}^{N}(a_n-a_{n+1})\nu(\gamma_{0,\frac{1}{n}})$

et en particulier $\sum_{n=1}^{N}(a_n-a_{n+1})\sigma(\gamma_{0,\frac{1}{n}})=\int_{\boldsymbol{T}} K(e^{is})d\sigma(e^{is})$. (2)

Comme par définition $M(\nu)(1)\geq\dfrac{\nu(\gamma_{0,\frac{1}{n}})}{\sigma(\gamma_{0,\frac{1}{n}})}$, on obtient $\nu(\gamma_{0,\frac{1}{n}})\leq M(\nu)(1)\sigma(\gamma_{0,\frac{1}{n}})$,

donc $\int_{\boldsymbol{T}} K(e^{is})d\nu(e^{is})\leq M(\nu)(1)\sum_{n=1}^{N}(a_n-a_{n+1})\sigma(\gamma_{0,\frac{1}{n}})$.

On déduit des résultats (1) et (2) que

$$\int_T K(e^{is})\,d\nu(e^{is}) \leq M(\nu)(1)\int_T K(e^{is})\,d\sigma(e^{is}) \leq M(\nu)(1)\int_T P_r(s)\,d\sigma(e^{is}).$$

Nous avons vu dans les propriétés du noyau de Poisson que $\int_T P_r(s)\,d\sigma(e^{is})=2\pi$ donc on obtient $\int_T K(e^{is})\,d\nu(e^{is}) \leq 2\pi M(\nu)(1)$.

Pour N assez grand on obtient des fonctions en escalier K convergeant vers P_r uniformément sur $\boldsymbol{T}$, donc $\lim_{N\to\infty}\int_T K(e^{is})\,d\nu(e^{is})=\int_T \lim_{N\to\infty} K(e^{is})\,d\nu(e^{is})=\int_T P_r(s)\,d\nu(e^{is})$. On en déduit que $\int_T P_r(0-s)\,d\nu(e^{is}) \leq 2\pi M(\nu)(1)$ donc $P[\nu](1) \leq 2\pi M(\nu)(1)$. Le changement de mesure $\mu(e^{it})=\nu(1)$ montre que $P[\mu](e^{it}) \leq 2\pi M(\mu)(e^{it})$,
donc $\sup_{0\leq r\leq 1}\left|P[\mu](e^{it})\right| \leq 2\pi M(\mu)(e^{it})$.

On en conclut $2\pi c_\alpha . N_\alpha(P[\mu])(e^{it}) \leq 2\pi M(\mu(e^{it}))$ donc $c_\alpha . N_\alpha(P[\mu])(e^{it}) \leq M(\mu(e^{it}))$ ❑

4.2. Convergence non tangentielle de l'intégrale de Poisson

Soit $f \in L^1(\boldsymbol{T})$, alors l'intégrale de Poisson de f admet une limite non tangentielle en chaque point de Lebesgue e^{it} de f. Cette limite vaut $f(e^{it})$.

- Preuve -

Nous allons introduire une mesure positive μ liée à $|f|$ et la décomposer sous sa forme de Lebesgue afin d'obtenir une majoration de la fonction maximale de μ :

Considérons la suite $(\gamma_{t,\frac{1}{n}})_n$ décroissante d'arcs ouverts inclus dans $\boldsymbol{T}$ construits autour de leur centre e^{it}. Comme $f \in L^1(\boldsymbol{T})$, on peut construire une mesure positive μ sur $\boldsymbol{T}$ définie par la décomposition de Lebesgue : $\mu(X)=\mu_S(X)+\int_X \left|f(e^{is})\right|\,d\sigma(e^{is})$ où X est un borélien de $\boldsymbol{T}$.

On en déduit $\dfrac{\mu(\gamma_{t,\frac{1}{n}})}{\sigma(\gamma_{t,\frac{1}{n}})}=\dfrac{\mu_S(\gamma_{t,\frac{1}{n}})}{\sigma(\gamma_{t,\frac{1}{n}})}+\dfrac{1}{\sigma(\gamma_{t,\frac{1}{n}})}\int_{\gamma_{t,\frac{1}{n}}}|f(e^{is})|\,d\sigma(e^{is})$. Pour tout point de Lebesgue

e^{it} de f, on peut écrire $\lim_{\gamma_{t,\frac{1}{n}}\to e^{it}}\dfrac{1}{\sigma(\gamma_{t,\frac{1}{n}})}\int_{\gamma_{t,\frac{1}{n}}}|f(e^{is})-f(e^{it})|\,d\sigma(e^{is})=0$,

donc $\lim_{\gamma_{t,\frac{1}{n}}\to e^{it}}\dfrac{1}{\sigma(\gamma_{t,\frac{1}{n}})}\int_{\gamma_{t,\frac{1}{n}}}|f(e^{is})|\,d\sigma(e^{is})=\lim_{\gamma_{t,\frac{1}{n}}\to e^{it}}\dfrac{1}{\sigma(\gamma_{t,\frac{1}{n}})}\int_{\gamma_{t,\frac{1}{n}}}|f(e^{it})|\,d\sigma(e^{is})$,

c'est à dire $\lim_{\gamma_{t,\frac{1}{n}}\to e^{it}}\dfrac{1}{\sigma(\gamma_{t,\frac{1}{n}})}\int_{\gamma_{t,\frac{1}{n}}}|f(e^{is})|\,d\sigma(e^{is})=\lim_{\gamma_{t,\frac{1}{n}}\to e^{it}}\dfrac{|f(e^{it})|}{\sigma(\gamma_{t,\frac{1}{n}})}\int_{\gamma_{t,\frac{1}{n}}}d\sigma(e^{is})$

donc $\lim_{\gamma_{t,\frac{1}{n}}\to e^{it}}\dfrac{1}{\sigma(\gamma_{t,\frac{1}{n}})}\int_{\gamma_{t,\frac{1}{n}}}|f(e^{is})|\,d\sigma(e^{is})=\lim_{\gamma_{t,\frac{1}{n}}\to e^{it}}\dfrac{|f(e^{it})|}{\sigma(\gamma_{t,\frac{1}{n}})}\sigma(\gamma_{t,\frac{1}{n}})=|f(e^{it})|$.

On en déduit que $c_\alpha D_\mu(e^{it})=c_\alpha\lim_{\gamma_{t,\frac{1}{n}}\to e^{it}}\dfrac{\mu(\gamma_{t,\frac{1}{n}})}{\sigma(\gamma_{t,\frac{1}{n}})}=c_\alpha\lim_{\gamma_{t,\frac{1}{n}}\to e^{it}}\dfrac{\mu_S(\gamma_{t,\frac{1}{n}})}{\sigma(\gamma_{t,\frac{1}{n}})}+c_\alpha|f(e^{it})|$ où c_α est la constante introduite au paragraphe 4.1. Nous avons déjà montré que la dérivée d'une mesure étrangère est nulle donc $\lim_{\gamma_{t,\frac{1}{n}}\to e^{it}}\dfrac{\mu_S(\gamma_{t,\frac{1}{n}})}{\sigma(\gamma_{t,\frac{1}{n}})}=0$. Ainsi pour tout $\epsilon>0$ il existe un rang N à partir duquel $c_\alpha D_\mu(e^{it})\le c_\alpha\epsilon+c_\alpha|f(e^{it})|$ où $0<c_\alpha<1$.
On en déduit $M(\mu)(e^{it})\le c_\alpha\epsilon+c_\alpha|f(e^{it})|$.

Afin de déterminer la limite radiale de $P[\mu]$, nous allons décomposer la mesure μ sous la forme $\mu=\mu_N+\nu_N$ où N est le rang introduit plus haut, μ_N est la restriction de μ à $\gamma_{t,\frac{1}{N}}$ et ν_N est la différence entre les deux mesures μ et μ_N. Cherchons d'abord la limite de $P[\mu_N](z_n)$:

La comparaison des fonctions maximales montre qu'il existe $0<c_\alpha<1$ tel que

$$c_\alpha\cdot N_\alpha(P[\mu_N])(e^{it})\le M(\mu_N)(e^{it}).$$

Comme par définition des fonctions maximales non tangentielles, pour $z_n \in \Gamma_\alpha^t$,

$P[\mu_N](z_n) \leq N_\alpha(P[\mu_N])(e^{it})$, on en déduit $P[\mu_N](z_n) \leq \dfrac{M(\mu_N)(e^{it})}{c_\alpha}$.

Or on vient de voir qu'à partir d'un certain rang N, $M(\mu)(e^{it}) \leq c_\alpha \epsilon + c_\alpha \left|f(e^{it})\right|$. On en déduit que $P[\mu_N](z_n) \leq \epsilon + \left|f(e^{it})\right|$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} P[\mu_N](z_n) = \left|f(e^{it})\right|$.

Cherchons maintenant la limite de $P[\nu_N](z_n)$ *:*

On a par définition $P[\nu_N](z_n) = P[\mu](z_n) - P[\mu_N](z_n) = \displaystyle\int_{T-\gamma_{t,\frac{1}{N}}} \frac{1-|z_n|^2}{|e^{is}-z_n|^2} d\nu_N(e^{is})$ pour ν_N mesure positive. Comme $(z_n)_n$ converge vers e^{it}, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-|z_n|^2}{|e^{is}-z_n|^2} = 0$ uniformément sur $T-\gamma_{t,\frac{1}{N}}$. On en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} P[\nu_N](z_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{T-\gamma_{t,\frac{1}{N}}} \frac{1-|z_n|^2}{|e^{is}-z_n|^2} d\nu_N(e^{is}) = \int_{T-\gamma_{t,\frac{1}{N}}} \lim_{n\to\infty} \frac{1-|z_n|^2}{|e^{is}-z_n|^2} d\nu_N(e^{is}) = 0.$$

Comme $P[\mu] = P[\mu_N] + P[\nu_N]$ on en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} P[\mu](z_n) = \left|f(e^{it})\right|$ pour $z_n \in \Gamma_\alpha^t$.

Nous pouvons maintenant revenir à l'intégrale de Poisson d'une fonction f :
Comme $\left|P[f]\right| \leq P[|f|] = P[\mu]$ on en conclut que $P[f]$ admet une limite non tangentielle en tout point de Lebesgue e^{it}. Cette limite vaut $f(e^{it})$ ❑

4.3. Théorème d'isomorphisme

Ce théorème est fondamental car il permet d'identifier les fonctions harmoniques positives avec les mesures positives sur $\boldsymbol{T}$*, et donc d'utiliser le résultat de convergence non tangentielle valable pour les mesures positives.*

L'application $\zeta : \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_+(\boldsymbol{T}) \to Harm_+(\boldsymbol{D}) \\ \mu \to \zeta(\mu) = P[\mu] \end{array} \right.$ est un isomorphisme du cône des mesures positives sur $\boldsymbol{T}$ vers le cône des fonctions harmoniques positives sur $\boldsymbol{D}$.

- Preuve -

Soit $\mu \in \mathcal{M}_+(\boldsymbol{T})$, comme $P[\mu](e^{it}) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\, d\mu(e^{is})$ et l'application $s \to P_r(s-t)$ est continue positive, on en déduit que $P[\mu]$ est une fonction positive. On a déjà vu que $P[\mu]$ est harmonique. Donc $P[\mu] \in Harm_+(\boldsymbol{D})$.

Réciproquement, soit $f \in Harm_+(\boldsymbol{D})$, alors $\int_0^{2\pi} \left| f(r\, e^{is}) \right| ds = \int_0^{2\pi} f(r\, e^{is})\, ds$, or d'après la propriété de la moyenne $\int_0^{2\pi} f(r\, e^{is})\, ds = 2\pi f(0)$, donc $\int_0^{2\pi} \left| f(r\, e^{is}) \right| ds = 2\pi f(0)$ et

$$\sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} \left| f(r\, e^{is}) \right| ds = 2\pi f(0) < \infty.$$

D'après le théorème d'isomorphisme 3.4. il existe $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$ telle que $f = P[\mu]$.
Comme pour toute fonction positive $h \in C^0_+(\boldsymbol{T})$ on a

$\int_0^{2\pi} h(e^{is})\, d\mu(e^{is}) = \lim_{r \to 1^-} \int_0^{2\pi} h(e^{is}) f(r\, e^{is})\, ds$ et comme $\int_0^{2\pi} h(e^{is})\, d\mu(e^{is}) \ge 0$, on en déduit que l'application L_μ définie par $L_\mu : \left| \begin{array}{l} C^0_+(\boldsymbol{T}) \to \mathbb{C} \\ h \to L_\mu(h) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} h(e^{is})\, d\mu(e^{is}) \end{array} \right.$ est continue positive avec $\|L_\mu\| = f(0)$. L'application L_μ étant linéaire par linéarité de l'intégrale, on en déduit que $L_\mu \in C^*_+(\boldsymbol{T})$.

Ainsi d'après le théorème de représentation de Riesz, on en conclut que $\mu \in \mathcal{M}_+(\boldsymbol{T})$ ❑

3ème PARTIE : CLASSE DE NEVANLINNA ET ESPACES DE HARDY

La condition de convergence radiale 3.4. étudiée précédemment a donné naissance à deux classes de fonctions holomorphes particulières possédant de "bonnes propriétés" au regard de l'intégrale de Poisson. L'objet de cette partie est l'étude de la classe de Nevanlinna et des espaces de Hardy afin de fournir une représentation intégrale des fonctions de ces espaces vectoriels.

1. Prérequis

Nous présentons ici sans démonstration quelques résultats utiles pour la suite de l'étude.

1.1. Fonction continue sous harmonique à valeurs réelles

Une fonction continue $f : \boldsymbol{D} \to \mathbb{R}$ est sous harmonique si et seulement si :
pour tout domaine U de $\boldsymbol{D}$ tel que $\overline{U} \subset \boldsymbol{D}$, pour toute fonction g continue sur $\overline{U}$,
harmonique sur $\boldsymbol{D}$ telle que $f(z) \leq g(z)$ pour $z \in \overline{U}$,
alors $f(z) \leq g(z)$ pour $z \in U$

1.2. Lemme de Fatou

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables *positives* et $\mu \in \mathcal{M}_+(\boldsymbol{T})$
alors $\int_{\boldsymbol{T}} \liminf_{n\to\infty} f_n(e^{is})\, d\mu(e^{is}) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{T}} f_n(e^{is})\, d\mu(e^{is})$.

1.3. Inégalité de Jensen

Soit $f \in L^1(\boldsymbol{T})$, g une fonction convexe et $\mu \in \mathcal{M}_+(\boldsymbol{T})$

alors $g(\int_{\boldsymbol{T}} f(e^{is})\, d\mu(e^{is})) \leq \int_{\boldsymbol{T}} g \circ f(e^{is})\, d\mu(e^{is})$

1.4. Inégalité de Harnack

Soit $f \in Harm_+(\boldsymbol{D})$ alors pour $0 \leq r < 1$ et $t \in [0, 2\pi]$, $\dfrac{1-r}{1+r} f(0) \leq f(r\, e^{it}) \leq \dfrac{1+r}{1-r} f(0)$

On utilisera plutôt l'inégalité de Harnack sous la forme suivante :

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \frac{1-r^2}{1-2r\cos(s-t)+r^2} \leq \frac{1+r}{1-r} \text{ où } 0 \leq r < 1 \text{ et } s, t \in [0, 2\pi].$$

En effet, on a déjà montré que $P_r(s-t) = \Re(\dfrac{e^{is}+z}{e^{is}-z})$. Comme la fonction $z \to \dfrac{e^{is}+z}{e^{is}-z}$ est holomorphe sur $\boldsymbol{D}$, on en déduit que le noyau de Poisson est harmonique comme partie réelle d'une fonction holomorphe. On a également vu que le noyau de Poisson est positif.

On peut donc appliquer l'inégalité de Harnack à $f(r\, e^{it}) = P_r(s-t)$ pour obtenir le résultat ci-dessus.

1.5. Proposition

L'objet des paragraphes suivants consiste à étudier certaines classes de fonctions harmoniques qui sont des intégrales de Poisson. Il convient tout d'abord d'introduire la fonction suivante :

Pour une fonction f continue à valeurs réelles sous harmonique sur $\boldsymbol{D}$, considérons

$m_p(f, r) = (\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(r\, e^{is})|^p\, ds)^{1/p}$ avec $0 \leq r < 1$ et $1 \leq p < \infty$,

alors $r \to m_p(f, r)$ est une fonction croissante sur $[0, 1[$.

– Preuve –

Soit $0 \leq r_1 < r_2 < 1$. Comme $f \in C^0(\boldsymbol{D})$, il existe une unique fonction g continue sur $\overline{B}(0, r_2)$ et harmonique sur $B(0, r_2)$ telle que $f(z) = g(z)$ pour $z \in C(0, r_2)$.
Comme f est sous harmonique, $f(z) \leq g(z)$ pour tout $z \in \overline{B}(0, r_2)$, donc

$$m_p(f, r_1) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r_1 e^{is}) ds .$$

Par ailleurs g s'identifie à son intégrale de Poisson sur le disque $B(0, r_1)$,

donc $g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r_1 e^{is}) ds$ ainsi $m_p(f, r_1) \leq g(0)$.

De même g s'identifie à son intégrale de Poisson sur le disque $B(0, r_2)$, donc

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r_2 e^{is}) ds .$$

Comme $f(z) = g(z)$ pour $z \in C(0, r_2)$, on en déduit que

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r_2 e^{is}) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r_2 e^{is}) ds = m_p(f, r_2).$$

On en conclut $m_p(f, r_1) \leq m_p(f, r_2)$
donc la fonction $r \rightarrow m_p(f, r)$ est croissante sur $[0,1[$ ❑

2. Classe de Nevanlinna et espaces de Hardy - définition

2.1. Espaces de Hardy

Pour $p \in [1, \infty[$, l'espace de Hardy $H^p(\boldsymbol{D})$ est l'espace vectoriel des fonctions $f \in Hol(\boldsymbol{D})$ telles que $\sup_{0 \le r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(r e^{it})\right|^p dt\right)^{1/p} < \infty$ c'est à dire $\sup_{0 \le r < 1} m_p(f, r) < \infty$.

Pour $p = \infty$, l'espace de Hardy $H^\infty(\boldsymbol{D})$ est l'espace vectoriel des fonctions $f \in Hol(\boldsymbol{D})$ telles que $\sup_{0 \le r < 1} \left(\sup_{t \in [0, 2\pi]} \left|f(r e^{it})\right|\right) < \infty$.

Etant donné que toute fonction holomorphe est harmonique, les espaces de Hardy constituent donc une classe particulière de fonctions harmoniques.
On remarque que l'espace de Hardy $H^p(\boldsymbol{D})$ est un sous espace vectoriel de $L^p(\boldsymbol{D})$.
Par ailleurs, l'espace de Hardy $H^\infty(\boldsymbol{D})$ s'identifie à l'espace vectoriel des fonctions holomorphes bornées sur $\boldsymbol{D}$.

2.2. Norme sur les espaces de Hardy

Afin de munir l'espace de Hardy $H^p(\boldsymbol{D})$ d'une structure d'espace de Banach, nous définirons $\|f\|_p = \sup_{0 \le r < 1} m_p(f, r)$ pour $f \in H^p(\boldsymbol{D})$ avec $p \in [1, \infty[$

Remarquons que dans le cas où $0 < p < 1$, cette définition ne constitue pas une norme. Pour cette raison, nous limiterons notre étude au cas où $p \in [1, \infty[$.

Afin de munir l'espace de Hardy $H^\infty(\boldsymbol{D})$ d'une structure d'espace de Banach, nous définirons $\|f\|_\infty = \sup_{0 \le r < 1} \left(\sup_{t \in [0, 2\pi]} \left|f(r e^{it})\right|\right)$ pour $f \in H^\infty(\boldsymbol{D})$

2.3. Classe de Nevanlinna

La classe de Nevanlinna $N(\boldsymbol{D})$ est l'espace vectoriel des fonctions $f \in Hol(\boldsymbol{D})$ telles que $\sup\limits_{0\le r<1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log^+\left|f(r\,e^{it})\right| dt\right)<\infty$ où la fonction log^+ est définie par :

$$log^+ : \left| \begin{array}{l}]0,\infty[\to \mathbb{R} \\ x \to \begin{array}{l} log^+(x)=log\,x \quad si\ \ x\ge 1 \\ log^+(x)=0 \quad si\ \ 0<x<1 \end{array} \end{array} \right.$$

Les fonctions de $N(\boldsymbol{D})$ étant holomorphes, ce sont des fonctions harmoniques sur $\boldsymbol{D}$.

Nous en profitons pour définir la fonction $log^- : \left| \begin{array}{l}]0,\infty[\to \mathbb{R} \\ x \to \begin{array}{l} log^-(x)=0 \quad si\ \ x\ge 1 \\ log^-(x)=log\,x \quad si\ \ 0<x<1 \end{array} \end{array} \right.$, ce qui conduit aux propriétés suivantes : $log\,x = log^+ x + log^- x$ et $\left|log\,x\right| = log^+ x - log^- x$.

L'intérêt de la classe de Nevanlinna vient du fait que toute fonction d'un espace de Hardy appartient à la classe de Nevanlinna et donc en vérifie les propriétés. Ce qui est expliqué dans la proposition suivante :

2.4. Liens entre les espaces de Hardy

pour $1\le q<p<\infty$, $\quad H^\infty(\boldsymbol{D})\subset H^p(\boldsymbol{D})\subset H^q(\boldsymbol{D})\subset H^1(\boldsymbol{D})\subset N(\boldsymbol{D})$

- Preuve -

Soit $f\in H^\infty(\boldsymbol{D})$, pour $1\le p<\infty$ on a $\left|f(r\,e^{it})\right|^p \le \|f\|_\infty^p$,

donc $\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(r\,e^{it})\right|^p dt\right)^{1/p} \le \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f\|_\infty^p\,dt\right)^{1/p} = \|f\|_\infty$.

Comme la borne supérieure est le plus petit des majorants, on en déduit $\|f\|_p \le \|f\|_\infty$,

donc $f\in H^p(\boldsymbol{D})$, ainsi $H^\infty(\boldsymbol{D})\subset H^p(\boldsymbol{D})$.

Soit $f\in H^p(\boldsymbol{D})$, l'inégalité de Holder montre que

$$\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^q dt \leq \left(\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^p dt\right)^{q/p} . \left(\int_0^{2\pi} dt\right)^{1-q/p}$$

donc $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^q dt \leq \frac{1}{(2\pi)^{q/p}}\left(\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^p dt\right)^{q/p}$

donc $\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^q dt\right)^{1/q} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^p dt\right)^{1/p} \leq \|f\|_p$.

Comme la borne supérieure est le plus petit des majorants, on obtient $\|f\|_q \leq \|f\|_p$

donc $f \in H^q(\boldsymbol{D})$ donc $H^p(\boldsymbol{D}) \subset H^q(\boldsymbol{D})$.

Soit $f \in H^q(\boldsymbol{D})$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^q} = 0$, donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $\frac{\log x}{x^q} < \epsilon$ pour $x \geq 1$.

Notons $A = \{ t \in [0, 2\pi] ;\ f(re^{it}) \geq 1 \}$,

alors $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{it})\right| dt = \frac{1}{2\pi}\int_A \log\left|f(re^{it})\right| dt \leq \frac{\epsilon}{2\pi}\int_A \left|f(re^{it})\right|^q dt \leq \frac{\epsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^q dt$, et

comme $f \in H^q(\boldsymbol{D})$, on obtient $\sup_{0\leq r<1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^q dt\right)^{1/q} < \infty$ donc

$\lim_{r\to 1^-} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f_r(e^{it})\right| dt\right) < \infty$ donc $f \in N(\boldsymbol{D})$ ❑

3. Représentation des fonctions de Nevanlinna

3.1. Décomposition de Jordan d'une mesure réelle

Nous abordons ici une autre forme de décomposition d'une mesure réelle, que nous utiliserons dans la décomposition d'une fonction de Nevanlinna.

Soit μ une mesure réelle, on définit la variation positive de μ notée μ^+ et la variation négative de μ notée μ^- par : $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ et $\mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$. La décomposition de μ sous la forme $\mu = \mu^+ - \mu^-$ est appelée décomposition de Jordan de μ.

3.2. Décomposition d'une fonction de Nevanlinna

Rappelons que $H^\infty(\boldsymbol{D})$ représente l'espace vectoriel des fonctions holomorphes bornées sur $\boldsymbol{D}$.

Pour $f \in N(\boldsymbol{D})$ ***ne s'annulant pas sur $\boldsymbol{D}$***, il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$ telle que $f(r e^{it}) = c \, . \, exp(\frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} \frac{e^{is} + r e^{it}}{e^{is} - r e^{it}} d\mu(e^{is}))$ où $c \in \boldsymbol{T}$.

ce qu'on peut également écrire :

Soit $f \in N(\boldsymbol{D})$ ***ne s'annulant pas sur $\boldsymbol{D}$***, il existe $c \in \boldsymbol{T}$ et $f_1, f_2 \in H^\infty(\boldsymbol{D})$ tels que $f = c \, . \, \frac{f_1}{f_2}$ et $\|f_1\|_\infty \leq 1$, $\|f_2\|_\infty \leq 1$.

Cette proposition va nous permettre de déterminer une représentation des fonctions de Nevanlinna ne s'annulant pas sur le disque unité.

- Preuve -

Nous allons tout d'abord montrer que $log|f|$ est une fonction harmonique vérifiant la condition de convergence radiale 3.4. Nous en déduirons que $log|f|$ est une intégrale de Poisson :

Comme $\boldsymbol{D}$ est simplement connexe, si f ne s'annule pas sur $\boldsymbol{D}$, alors il existe $g \in Hol(\boldsymbol{D})$ vérifiant $f = e^g$, donc $log|f| = \Re(g)$ et $log|f|$ est harmonique comme partie réelle d'une fonction holomorphe. On peut donc lui appliquer la propriété de la moyenne pour obtenir pour $0 \le r < 1$, $\int_0^{2\pi} log|f(r e^{it})| dt = 2\pi log|f(0)|$.

Comme $log|f(r e^{it})| = log^+|f(r e^{it})| + log^-|f(r e^{it})|$, on obtient

$$\int_0^{2\pi} log|f(r e^{it})| dt = \int_0^{2\pi} log^+|f(r e^{it})| dt + \int_0^{2\pi} log^-|f(r e^{it})| dt,$$ donc

$$\int_0^{2\pi} log^-|f(r e^{it})| dt = \int_0^{2\pi} log|f(r e^{it})| dt - \int_0^{2\pi} log^+|f(r e^{it})| dt = 2\pi log|f(0)| - \int_0^{2\pi} log^+|f(r e^{it})| dt.$$

Comme $f \in N(\boldsymbol{D})$, $\sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} log^+|f(r e^{it})| dt < \infty$, on déduit de la ligne précédente que

$$\sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} log^-|f(r e^{it})| dt < \infty.$$

De plus comme, $\left| log|f(r e^{it})| \right| = log^+|f(r e^{it})| - log^-|f(r e^{it})|$

on en déduit $\sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} \left| log|f(r e^{it})| \right| dt < \infty$, donc $log|f|$ vérifie la condition de convergence radiale 3.4. On en déduit qu'il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$ telle que

$$log|f(r e^{it})| = P[\mu](r e^{it}).$$

Nous en déduisons une première représentation de la fonction f :

Comme $log|f|$ est une fonction réelle, μ est une mesure réelle sur $\boldsymbol{T}$ et on obtient $P[\mu](r e^{it}) = \Re\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} \frac{e^{is} + r e^{it}}{e^{is} - r e^{it}} d\mu(e^{is})\right)$. Comme $\Re(g(z)) = log|f(z)|$, on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g(r e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} \frac{e^{is} + r e^{it}}{e^{is} - r e^{it}} d\mu(e^{is}) + i\lambda$

donc $f(r e^{it}) = e^{i\lambda} . exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} \frac{e^{is} + r e^{it}}{e^{is} - r e^{it}} d\mu(e^{is})\right)$.

Nous allons décomposer la mesure obtenue afin de faire ressortir les fonctions bornées recherchées :

La décomposition de Jordan de μ est de la forme $\mu = \mu^+ - \mu^-$ où μ^+ et μ^- sont les variations positives et négatives de μ. On en déduit

$$f(r\,e^{it})=e^{i\lambda}[\exp(\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{e^{is}+r\,e^{it}}{e^{is}-r\,e^{it}}d\,\mu^{+}(e^{is})-\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{e^{is}+r\,e^{it}}{e^{is}-r\,e^{it}}d\,\mu^{-}(e^{is}))],$$

donc $f(r\,e^{it})=c.\dfrac{\exp(-\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{e^{is}+r\,e^{it}}{e^{is}-r\,e^{it}}d\,\mu^{-}(e^{is}))}{\exp(-\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{e^{is}+r\,e^{it}}{e^{is}-r\,e^{it}}d\,\mu^{+}(e^{is}))}$ où $c\in\boldsymbol{T}$ qu'on notera $f(r\,e^{it})=c.\dfrac{f_1(r\,e^{it})}{f_2(r\,e^{it})}$.

Montrons que $\|f_1\|_\infty\leq 1$ *et* $\|f_2\|_\infty\leq 1$:

$$\left|\exp(-\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{e^{is}+r\,e^{it}}{e^{is}-r\,e^{it}}d\,\mu^{-}(e^{is}))\right|=\exp(\Re(-\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{e^{is}+r\,e^{it}}{e^{is}-r\,e^{it}}d\,\mu^{-}(e^{is}))),$$

donc $\left|\exp(-\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{e^{is}+r\,e^{it}}{e^{is}-r\,e^{it}}d\,\mu^{-}(e^{is}))\right|=e^{-P[\mu^{-}](r\,e^{it})}$ car μ^{-} est une mesure réelle positive.

Comme μ^{-} est une mesure positive, on obtient $P[\mu^{-}](r\,e^{it})\geq 0$ donc $e^{-P[\mu^{-}](r\,e^{it})}\leq 1$ et $\left|\exp(-\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{e^{is}+r\,e^{it}}{e^{is}-r\,e^{it}}d\,\mu^{-}(e^{is}))\right|\leq 1$, ainsi $\|f_1\|_\infty\leq 1$.

Le même raisonnement conduit à $\|f_2\|_\infty\leq 1$ donc $f\in N(\boldsymbol{D})$ est bien le quotient de deux fonctions de $H^\infty(\boldsymbol{D})$ telles que $\|f_1\|_\infty\leq 1$ et $\|f_2\|_\infty\leq 1$ ❑

3.3. Représentation intégrale des fonctions de Nevanlinna

Nous construisons ici une représentation intégrale qui concerne uniquement les fonctions de Nevanlinna ne s'annulant pas sur le disque unité.

Soit $f\in N(\boldsymbol{D})$ ***ne s'annulant pas sur D***, alors la limite radiale de f existe presque partout. Il existe $c\in\boldsymbol{T}$ et une mesure $\mu_S\in\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$ étrangère à la mesure de Lebesgue tels que :

$$f(r\,e^{it})=c\ .\ \exp(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{is}+r\,e^{it}}{e^{is}-r\,e^{it}}\log\left|f^{\#}(e^{is})\right|d\,s)\times\exp(\frac{1}{2\pi}\int_T\frac{e^{is}+r\,e^{it}}{e^{is}-r\,e^{it}}d\,\mu_S(e^{is}))$$

où $f^{\#}$ est la limite radiale de la fonction f.

– Preuve –

Nous commençons par utiliser la proposition préliminaire 3.2. pour prouver la convergence radiale des fonctions de la classe de Nevanlinna :

D'après la proposition préliminaire 3.2, comme $f \in N(\boldsymbol{D})$, il existe $f_1, f_2 \in H^\infty(\boldsymbol{D})$ et $c \in \boldsymbol{T}$ tels que $f_1(r e^{it}) \neq 0$, $f_2(r e^{it}) \neq 0$, $\|f_1\|_\infty \leq 1$, $\|f_2\|_\infty \leq 1$ et $f = c \cdot \dfrac{f_1}{f_2}$.

Comme f_1 et f_2 sont des fonctions holomorphes bornées, elles sont harmoniques bornées. Nous avons vu que de telles fonctions vérifient la condition de convergence radiale 3.4. Donc les limites radiales de f_1 et f_2 existent presque partout sur le disque unité. Nous les noterons $f_1^{\#}(e^{it}) = \lim_{r \to 1^-} f_1(r e^{it})$ et $f_2^{\#}(e^{it}) = \lim_{r \to 1^-} f_2(r e^{it})$.

Il nous faut maintenant montrer que $f_2^{\#} \neq 0$:

Comme f_2 ne s'annule par sur $\boldsymbol{D}$ ouvert simplement connexe, il existe une application $\phi \in Hol(\boldsymbol{D})$ telle que $f_2 = e^{\phi}$. La fonction $\Re(\phi) = log|f_2|$ est harmonique comme partie réelle d'une fonction holomorphe. Comme $\|f_2\|_\infty \leq 1$, l'application $log|f_2|$ est négative, donc la fonction $-log|f_2|$ est harmonique positive. Nous avons vu que de telles fonctions vérifient la condition de convergence radiale 3.4. Donc la limite radiale de $-log|f_2|$ existe presque partout sur le disque unité et il en est de même de la limite radiale de la fonction $log|f_2|$

Ainsi $f_2^{\#}(e^{it})$ et $\lim_{r \to 1^-} log|f_2(r e^{it})| = log|f_2^{\#}(e^{it})|$ existent, donc $f_2^{\#} \neq 0$.

Nous en déduisons la convergence radiale presque partout des fonctions de la classe de Nevanlinna :

Notons A le borélien de $\boldsymbol{T}$ de mesure de Lebesgue nulle tel que $\lim_{r \to 1^-} log|f_2(r e^{it})|$ et $f_2^{\#}(e^{it})$ existent sur $\boldsymbol{T} \setminus A$. On déduit de ce qui précède que $|f_2^{\#}(e^{it})| \neq 0$ sur $\boldsymbol{T} \setminus A$.

Notons B le borélien de $\boldsymbol{T}$ de mesure de Lebesgue nulle tel que $f_1^{\#}(e^{it})$ existe sur $\boldsymbol{T} \setminus B$.

On obtient $f^{\#}(e^{it}) = c \cdot \dfrac{f_1^{\#}(e^{it})}{f_2^{\#}(e^{it})}$ et $f^{\#}(e^{it}) = \lim_{r \to 1^-} f(r e^{it})$ existe sur $\boldsymbol{T} \setminus (A \cup B)$

donc $f^{\#}(e^{it})$ existe presque partout.

Nous allons utiliser la décomposition de Lebesgue pour obtenir la représentation intégrale de f souhaitée :

On a vu dans la preuve de la proposition préliminaire 3.2. que

$f(r\,e^{it}) = c\ .\ exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{T}} \frac{e^{it}+r\,e^{it}}{e^{it}-r\,e^{it}}\,d\,\mu(e^{is})\right)$ où μ est une mesure réelle sur $\boldsymbol{T}$ telle que $log\left|f\right| = P[\mu]$ sur $\boldsymbol{D}$.

On sait alors que $\lim\limits_{r\to 1^{*}} log\left|f(r\,e^{it})\right| = \lim\limits_{r\to 1^{-}} P[\mu](r\,e^{it}) \overset{pp}{=} D_{\mu}(e^{it})$

donc $D_{\mu}(e^{it}) \overset{pp}{=} log\left|f^{\#}(e^{it})\right|$.

On peut par ailleurs décomposer μ sous la forme $\mu = \mu_s + \sigma\,D_{\mu}$ où μ_s est une mesure étrangère à la mesure de Lebesgue et $D_{\mu} \in L^1(\boldsymbol{T})$.

On en déduit que $log\left|f^{\#}\right| \in L^1(\boldsymbol{T})$ et

$$f(r\,e^{it}) = c\ .\ exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{T}} \frac{e^{is}+r\,e^{it}}{e^{is}-r\,e^{it}}\,log\left|f^{\#}(e^{is})\right|d\,\sigma(e^{is})\right) \times exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{T}} \frac{e^{is}+r\,e^{is}}{e^{is}-r\,e^{is}}\,d\,\mu_s(e^{is})\right)$$

donc $f(r\,e^{it}) = c\ .\ exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}+r\,e^{it}}{e^{is}-r\,e^{it}}\,log\left|f^{\#}(e^{is})\right|d\,s\right) \times exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{T}} \frac{e^{is}+r\,e^{is}}{e^{is}-r\,e^{is}}\,d\,\mu_s(e^{is})\right)$ ❑

4. Représentation des fonctions de Hardy

4.1. Rappel : une propriété de la convergence uniforme

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur l'ouvert U telle que $\sum_{n\geq 1} |1-f_n(z)|$ converge uniformément sur tout compact de U.
Alors $\prod_{n\geq 1} f_n(z)$ converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction holomorphe.

Nous utiliserons ce rappel pour déterminer certaines propriétés du produit de Blaschke.

4.2. Limite radiale des fonctions de Hardy

La définition de l'espace $H^1(\boldsymbol{D})$ montre que toute fonction f de cet espace est holomorphe donc harmonique et vérifie la condition de convergence radiale 3.4. $\sup_{0\leq r<1} \int_0^{2\pi} |f(r\,e^{is})|\,ds<\infty$. Comme par ailleurs $H^\infty(\boldsymbol{D})\subset H^p(\boldsymbol{D})\subset H^1(\boldsymbol{D})$, nous en déduisons que :

Toute fonction d'un espace de Hardy est l'intégrale de Poisson d'une mesure sur $\boldsymbol{T}$. Ainsi si f est une fonction d'un espace de Hardy sur $\boldsymbol{D}$ alors sa limite radiale existe presque partout et il existe une mesure $\mu\in\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})$ telle que $\lim_{r\to 1^-} f(r\,e^{it}) \overset{pp}{=} D_\mu$.

4.3. Propriété de la limite radiale d'une fonction de Hardy

Pour $1\leq p\leq\infty$, et $f\in H^p(\boldsymbol{D})$, la limite radiale de f notée $f^\#$ vérifie $\log|f^\#|\in L^1(\boldsymbol{T})$ et $f^\#\in L^p(\boldsymbol{T})$.

– Preuve –

Etudions d'abord le cas où $1\leq p<\infty$:

Comme $f\in H^p(\boldsymbol{D})$, $f\in N(\boldsymbol{D})$ et $f^\#(r\,e^{it})$ est définie presque partout avec $\log|f^\#|\in L^1(\boldsymbol{T})$.

Pour $p\neq\infty$ le lemme de Fatou montre que $\int_0^{2\pi}\liminf_{r\to 1^-}\left|f(r e^{it})^p\right|dt\leq\liminf_{r\to 1^-}\int_0^{2\pi}\left|f(r e^{it})\right|^p dt$

donc $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^{\#}(e^{it})\right|^p dt\leq\lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(r e^{it})\right|^p dt$

donc si $f\in H^p(\boldsymbol{D})$, alors $f^{\#}\in L^p(\boldsymbol{T})$.

Etudions maintenant le cas où $p=\infty$:

Pour $p=\infty$, $\left|f(r e^{it})\right|\leq\|f\|_\infty$ sur $\boldsymbol{D}$ donc $\left|f^{\#}(e^{it})\right|\leq\|f\|_\infty$ presque partout.

donc $\|f^{\#}\|_\infty=\sup_{0\leq r<1}\left|f^{\#}(r e^{it})\right|\leq\|f\|_\infty$.

Comme $f\in H^\infty(\boldsymbol{D})$, f est bornée et on en déduit que $f^{\#}\in L^\infty(\boldsymbol{T})$. ❑

4.4. Le produit de Blaschke

On introduit ici le produit de Blaschke qui permet de factoriser les fonctions de Hardy.

Un produit de Blaschke sur le disque unité est une application de la forme

$$B:\left|\begin{array}{l}\boldsymbol{D}\to\mathbb{C}\\ z\to B(z)=c\,.\,z^p\,.\prod_k\frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k-z}{1-\overline{a_k}\,z}\end{array}\right.$$

où $c\in\boldsymbol{T}$, $p\in\mathbb{N}$, $(a_k)_k\in\boldsymbol{D}\setminus\{0\}$ tel que $\sum_k 1-|a_k|<\infty$.

Le produit de Blaschke appartient à $H^\infty(\boldsymbol{D})$ et ne possède pas d'autre zéro que les points a_k donc il existe des limites radiales $B^{\#}(e^{it})$ en presque tout point de $\boldsymbol{T}$.

4.4.1. Propriétés du produit de Blaschke

$\left|B(e^{it})\right|=1$

– Preuve –

$$\left|B(e^{it})\right|=|c|.\left|e^{ipt}\right|.\prod_k \frac{|a_k|}{|a_k|}\frac{\left|a_k-e^{it}\right|}{\left|1-\overline{a}_k e^{it}\right|}=\prod_k \frac{\left|a_k-e^{it}\right|}{\left|1-\overline{a}_k e^{it}\right|}=\prod_k \frac{\left|a_k-e^{it}\right|}{\left|e^{-it}-\overline{a}_k\right|}=\prod_k \frac{\left|a_k-e^{it}\right|}{\left|\overline{a_k-e^{it}}\right|}=1 .\ \square$$

$\left|B(r e^{it})\right|<1$ pour $r e^{it}\in \boldsymbol{D}$.

– Preuve –

Nous allons appliquer le principe du maximum à la fonction holomorphe B .
Voyons dans un premier temps que B est une fonction holomorphe :

Posons $\xi_k=\dfrac{|a_k|}{a_k}\dfrac{(a_k-r e^{it})}{(1-\overline{a}_k r e^{it})}$.

donc $1-\xi_k=\dfrac{a_k-a_k\overline{a}_k r e^{it}-a_k|a_k|+|a_k|r e^{it}}{a_k(1-\overline{a}_k r e^{it})}=\dfrac{(1-|a_k|)(a_k+|a_k|r e^{it})}{a_k(1-\overline{a}_k r e^{it})}$

$$1-\xi_k=\frac{(1-|a_k|)(1+\dfrac{|a_k|}{a_k}r e^{it})}{1-\overline{a}_k r e^{it}}.$$

Comme $a_k\in \boldsymbol{D}\setminus\{0\}$, on obtient $|a_k|<1$, donc $|\overline{a}_k|<1$,
ainsi $\left|1-|r e^{it}|\right|\le\left|1-|\overline{a}_k r e^{it}|\right|\le\left|1-\overline{a}_k r e^{it}\right|$.
Comme par ailleurs $\left|1-|r e^{it}|\right|=1-r$, on en déduit que $1-r\le\left|1-\overline{a}_k r e^{it}\right|$
On voit également que $\left|1+\dfrac{|a_k|}{a_k}r e^{it}\right|\le 1+r\le 2$,
donc $\left|1-\xi_k\right|\le\dfrac{2(1-|a_k|)}{\left|1-\overline{a}_k r e^{it}\right|}\le\dfrac{2(1-|a_k|)}{1-r}$
Ainsi la série $\sum_{k\ge1}\left|1-\xi_k\right|$ converge uniformément sur $\overline{B}(0,r)$ pour $0<r<1$ si $\sum_{k\ge1}1-|a_k|<\infty$. En utilisant la propriété 4.1. on en conclut que
$B(r e^{it})=c\, r^p e^{ipt}\prod_{k\ge1}\xi_k$ converge uniformément et est holomorphe.

Comme $\boldsymbol{D}$ est un domaine borné, le principe du maximum appliqué à la fonction B montre que le maximum de $|B|$ se trouve sur la frontière de $\boldsymbol{D}$.
Comme $\left|B(e^{it})\right|=1$, on en déduit que $\left|B(r e^{it})\right|<1$ pour $r e^{it}\in \boldsymbol{D}$. $\square$

$\left(\left|B_n\left(r\,e^{it}\right)\right|\right)_n$ est une suite décroissante pour $r\,e^{it}\in \boldsymbol{D}$

– Preuve –

$$\left|B_{n+1}\left(r\,e^{it}\right)\right|=|c|.\left|r^p\,e^{ipt}\right|.\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\left|a_k\right|}{\left|a_k\right|}\frac{\left|a_k-r\,e^{it}\right|}{\left|1-\overline{a_k}\,r\,e^{it}\right|}=\left|B_n\left(r\,e^{it}\right)\right|\frac{\left|a_{n+1}-r\,e^{it}\right|}{\left|1-\overline{a_{n+1}}\,r\,e^{it}\right|}$$

donc $\left|B_{n+1}\left(r\,e^{it}\right)\right|=\left|B_n\left(r\,e^{it}\right)\right|\frac{\left|a_{n+1}-r\,e^{it}\right|}{\left|\overline{a_{n+1}}\,r-e^{it}\right|}$.

donc $\left|B_{n+1}\left(r\,e^{it}\right)\right|^2=\left|B_n\left(r\,e^{it}\right)\right|^2\frac{\left|a_{n+1}-r\,e^{it}\right|^2}{\left|\overline{a_{n+1}}\,r-e^{it}\right|^2}=\left|B_n\left(r\,e^{it}\right)\right|^2\frac{\left(a_{n+1}-r\,e^{it}\right)\left(\overline{a_{n+1}}-r\,e^{-it}\right)}{\left(a_{n+1}\,r-e^{it}\right)\left(\overline{a_{n+1}}\,r-e^{-it}\right)}$.

donc $\left|B_{n+1}\left(r\,e^{it}\right)\right|^2=\left|B_n\left(r\,e^{it}\right)\right|^2\frac{a_{n+1}\overline{a_{n+1}}-r\,a_{n+1}\,e^{-it}-r\,\overline{a_{n+1}}\,e^{it}+r^2}{r^2\,a_{n+1}\overline{a_{n+1}}-r\,a_{n+1}\,e^{-it}-r\,\overline{a_{n+1}}\,e^{it}+1}$.

Comme $\left|a_{n+1}\right|^2<1$, on obtient $a_{n+1}\overline{a_{n+1}}<1$ donc $a_{n+1}\overline{a_{n+1}}\left(1-r^2\right)<1-r^2$ pour $0<r<1$

donc $a_{n+1}\overline{a_{n+1}}+r^2<r^2 a_{n+1}\overline{a_{n+1}}+1$

donc $a_{n+1}\overline{a_{n+1}}-r\,a_{n+1}\,e^{-it}-r\,\overline{a_{n+1}}\,e^{it}+r^2<r^2\,a_{n+1}\overline{a_{n+1}}-r\,a_{n+1}\,e^{-it}-r\,\overline{a_{n+1}}\,e^{it}+1$

donc $\frac{a_{n+1}\overline{a_{n+1}}-r\,a_{n+1}\,e^{-it}-r\,\overline{a_{n+1}}\,e^{it}+r^2}{r^2\,a_{n+1}\overline{a_{n+1}}-r\,a_{n+1}\,e^{-it}-r\,\overline{a_{n+1}}\,e^{it}+1}<1$.

Ainsi $\left|B_{n+1}\left(r\,e^{it}\right)\right|<\left|B_n\left(r\,e^{it}\right)\right|$

donc $\left(\left|B_n\left(r\,e^{it}\right)\right|\right)_n$ est une suite décroissante pour $r\,e^{it}\in \boldsymbol{D}$ ❑

4.5. Quotient d'une fonction de Hardy par son produit de Blaschke

Nous allons voir que le quotient d'une fonction de Hardy non nulle par son produit de Blaschke appartient encore à l'espace de Hardy.

soit $f \in H^p(\boldsymbol{D})$ non identiquement nulle avec $1 \leq p \leq \infty$ et B le produit de Blaschke construit à partir des zéros de f, alors $\frac{f}{B} \in H^p(\boldsymbol{D})$ et $\|\frac{f}{B}\|_p = \|f\|_p$

– *Preuve* –

Soit $(a_n)_n$ la suite des zéros de f et B_n le produit de Blaschke construit à partir des n premiers zéros de f.

Notons $g_n = \frac{f}{B_n}$ et $g(r e^{it}) = \lim_{n \to \infty} g_n(r e^{it})$ pour $r e^{it} \in \boldsymbol{D}$.

D'après les propriétés du produit de Blaschke, $(|B_n(r e^{it})|)_n$ est une suite décroissante pour $r e^{it} \in \boldsymbol{D}$. Donc $(|g_n(r e^{it})|)_n$ est une suite croissante pour $r e^{it} \in \boldsymbol{D}$,
Comme g est holomorphe sur $\boldsymbol{D}$, on en déduit

$$\lim_{n \to \infty} (\int_0^{2\pi} |g_n(r e^{it})|^p dt)^{1/p} = (\int_0^{2\pi} \lim_{n \to \infty} |g_n(r e^{it})|^p dt)^{1/p} = (\int_0^{2\pi} |g(r e^{it})|^p dt)^{1/p}$$

donc $m_p(g, r) = \lim_{n \to \infty} m_p(g_n, r)$ et

Par ailleurs $\lim_{r \to 1^-} m_p(g_n, r) = \lim_{r \to 1^-} (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_n(r e^{it})|^p dt)^{1/p} = (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{r \to 1^-} |g_n(r e^{it})|^p dt)^{1/p}$

donc $\lim_{r \to 1^-} m_p(g_n, r) = (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_n(e^{it})|^p dt)^{1/p} = (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(e^{it})|^p}{|B_n(e^{it})|^p} dt)^{1/p}$

d'où $\lim_{r \to 1^-} m_p(g_n, r) = (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt)^{1/p} = \|f\|_p$.

Comme l'application $r \to m_p(g_n, r)$ est croissante et que $0 \leq r < 1$, on en déduit que $\lim_{n \to \infty} m_p(g_n, r) \leq \lim_{r \to 1^-} m_p(g_n, r)$, donc $m_p(g, r) \leq \|f\|_p$.

Comme la borne supérieure est le plus petit des majorants, on en déduit que

$$\|g\|_p = \sup_{0 \leq r < 1} m_p(g, r) \leq \|f\|_p$$

donc $\|g\|_p \leq \|f\|_p$ et $g \in H^p(\boldsymbol{D})$.

Par ailleurs, comme d'après les propriétés du produit de Blaschke $\left|B(r\,e^{it})\right|<1$, on en déduit $\left|g(r\,e^{it})\right|>\left|f(r\,e^{it})\right|$ donc $\|g\|_p\geq\|f\|_p$.

Ainsi $\|g\|_p=\|f\|_p$ ❑

4.6. Fonction extérieure

Une fonction extérieure est une fonction $\Phi\in Hol(\boldsymbol{D})$ s'écrivant sous la forme

$$\Phi:\left|\begin{array}{l}\boldsymbol{D}\to\mathbb{C}\\ r\,e^{it}\to\Phi(r\,e^{it})=c\,.\exp\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}P_r(s-t)\log f(e^{is})\,ds\right)\end{array}\right.$$

où $c\in\boldsymbol{T}$ et $f\in L^1(\boldsymbol{T})$ est une fonction *positive* telle que $\log f\in L^1(\boldsymbol{T})$

Pour $1\leq p\leq\infty$ le facteur extérieur de la fonction $f\in H^p(\boldsymbol{D})$ non identiquement nulle est une fonction extérieure $\Phi_f\in H^p(\boldsymbol{D})$ définie par :

$$\Phi_f:\left|\begin{array}{l}\boldsymbol{D}\to\mathbb{C}\\ r\,e^{it}\to\Phi_f(r\,e^{it})=\exp\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}P_r(s-t)\log\left|f^{\#}(e^{is})\right|ds\right)\end{array}\right.$$

4.6.1. Limite radiale d'une fonction extérieure

Soit f une fonction *mesurable positive* telle que $\log f\in L^1(\boldsymbol{T})$.

Soit Φ une fonction extérieure associée à une fonction f, alors $\log|\Phi|$ est l'intégrale de Poisson de la mesure dont la dérivée de Radon Nikodym est $\log f$, c'est à dire $\log|\Phi|=P[\log f]$, de plus $\lim\limits_{r\to1^-}\left|\Phi(r\,e^{it})\right|=f(e^{it})$ presque partout sur le cercle unité.

Pour $1\leq p<\infty$, $\Phi\in H^p(\boldsymbol{D})$ si et seulement si $f\in L^p(\boldsymbol{T})$ et dans ce cas $\|\Phi\|_{H^p}=\|f\|_{L^p}$

- Preuve -

Montrons d'abord que $\log|\Phi|$ est l'intégrale de Poisson de la mesure dont la dérivée de Radon Nikodym est $\log f$:

Par définition des fonctions extérieures $\left|\Phi(r\,e^{it})\right|=exp(\Re(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(s-t)\log f(e^{is})\,ds))$

donc $\left|\Phi(r\,e^{it})\right|=exp(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Re(\frac{e^{is}+r\,e^{it}}{e^{is}-r\,e^{it}})\log f(e^{is})\,ds)$,

donc $\log\left|\Phi(r\,e^{it})\right|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(s-t)\log f(e^{is})ds$ et $\log|\Phi|$ est l'intégrale de Poisson de la mesure dont la dérivée de Radon Nikodym est $\log f$.

On en conclut que $\lim\limits_{r\to 1^-}\log\left|\Phi(r\,e^{it})\right|=\log f(e^{it})$ presque partout, donc
$\lim\limits_{r\to 1^-}\left|\Phi(r\,e^{it})\right|=f(e^{it})$ presque partout.

Montrons maintenant que $\Phi\in H^p(\boldsymbol{D})$ *si et seulement si* $f\in L^p(\boldsymbol{T})$:

Pour $p\neq\infty$ si $\Phi\in H^p(\boldsymbol{D})$, soit $(r_n)_n$ une suite croissante de $]0,1[$ tendant vers 1 et $(\Phi_n)_n$ une suite définie par $\Phi_n(e^{it})=\left|\Phi(r_n e^{it})\right|^p$.

Le lemme de Fatou montre que $\int_0^{2\pi}\liminf\limits_{n\to\infty}\Phi_n(e^{is})ds\le\liminf\limits_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\Phi_n(e^{is})ds$,

donc $\|\Phi^\#\|_{L^p}\le\|\Phi\|_{H^p}$.

On a montré plus haut que $\lim\limits_{r\to 1^-}\left|\Phi(r\,e^{it})\right|=f(e^{it})$ presque partout donc $\|\Phi^\#\|_{L^p}=\|f\|_{L^p}$.

On en déduit que $\|f\|_{L^p}\le\|\Phi\|_{H^p}$. Comme $\Phi\in H^p(\boldsymbol{D})$, on en déduit $f\in L^p(\boldsymbol{T})$.

Réciproquement, supposons $f\in L^p(\boldsymbol{T})$ alors

$$\left|\Phi(r\,e^{it})\right|^p=exp(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(s-t)\,p\log f(e^{is})\,ds)=exp(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(s-t)\log(f^p)(e^{is})ds).$$

L'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe exponentielle et à la mesure définie par $d\mu=\frac{1}{2\pi}P_r(s-t)ds$ montre que

$$exp(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(s-t)\log(f^p)(e^{is})\,ds)\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(s-t)f^p(e^{is})\,ds,$$

donc $\left|\Phi(r\,e^{it})\right|^p\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(s-t)f^p(e^{is})ds$.

On en déduit $\int_0^{2\pi} \left|\Phi(r e^{it})\right|^p dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(s-t) f^p(e^{is}) ds\, dt$ et d'après le théorème de

Fubini Tonelli $\int_0^{2\pi} \left|\Phi(r e^{it})\right|^p dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\int_0^{2\pi} P_r(s-t) dt) f^p(e^{is}) ds = \|f\|_{L^p}^p$.

Ainsi $m_p(\Phi, r) \leq \|f\|_{L^p}$ et $\sup_{0 \leq r < 1} m_p(\Phi, r) = \|\Phi\|_{H^p} \leq \|f\|_{L^p}$ car la borne supérieure est le plus petit des majorants.

Comme $f \in L^p(\boldsymbol{T})$, on en déduit que $\Phi \in H^p(\boldsymbol{D})$.

Ainsi $\Phi \in H^p(\boldsymbol{D})$ si et seulement si $f \in L^p(\boldsymbol{T})$ et dans ce cas $\|\Phi\|_{H^p} = \|f\|_{L^p}$ ❑

4.7. Fonction intérieure

Une fonction intérieure est une fonction $\psi \in H^\infty(\boldsymbol{D})$ telle que $\left|\psi^\#(e^{it})\right| = 1$ presque partout

4.7.1. Description d'une fonction intérieure

Toute fonction intérieure peut s'écrire sous la forme :
$\psi(r e^{it}) = c . B(r e^{it}) . exp(-\frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t) d\mu_S(e^{is}))$ où $c \in \boldsymbol{T}$, B est un produit de Blaschke, $\mu_S \in \mathcal{M}_+(\boldsymbol{T})$ étrangère par rapport à la mesure de Lebesgue

- Preuve -

Montrons que la fonction considérée est bien une fonction intérieure. Voyons tout d'abord qu'elle appartient à $H^\infty(\boldsymbol{D})$ *:*

Considérons ψ définie par $\psi(r e^{it}) = c . B(r e^{it}) . exp(-\frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t) d\mu_S(e^{is}))$

ψ est holomorphe sur $\boldsymbol{D}$. Posons $g = \frac{\psi}{B}$, on obtient

$g(r e^{it}) = c . exp(\frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)(-d\mu_S(e^{is})))$ et comme $|c| = 1$, on en déduit que $log|g|$ est l'intégrale de Poisson de la mesure négative $-\mu$, donc $log|g|$ est une fonction harmonique négative sur $\boldsymbol{D}$, donc $|g(z)|\leq 1$ sur $\boldsymbol{D}$, donc $g\in H^{\infty}(\boldsymbol{D})$. On en déduit que $\psi\in H^{\infty}(\boldsymbol{D})$.

Voyons que $|\psi^{\#}(e^{it})|=1$ *:*

Comme par ailleurs μ_S est une mesure étrangère à la mesure de Lebesgue, on obtient $\lim\limits_{r\to 1^-} P[\mu_S](e^{it})=0$ presque partout, donc $\lim\limits_{r\to 1^-} log|g(r\,e^{it})|=-\lim\limits_{r\to 1^-} P[\mu_S](r\,e^{it})=0$ presque partout.

De plus $\lim\limits_{r\to 1^-} log|g(r\,e^{it})|=log(\lim\limits_{r\to 1^-}|g(r\,e^{it})|)=log(|g^{\#}(e^{it})|)$,

donc $log(|g^{\#}(e^{it})|)=0$ presque partout, donc $|g^{\#}(e^{it})|=1$ presque partout.

Comme $|B(e^{it})|=1$, on obtient $|B^{\#}(e^{it})|=1$ presque partout et on en déduit que $|\psi^{\#}(e^{it})|=1$ presque partout donc ψ est une fonction intérieure.

Réciproquement, montrons que toute fonction intérieure peut s'écrire sous la forme de ψ *:*

Soit ζ une fonction intérieure. Comme $\zeta\in H^{\infty}(\boldsymbol{D})$, on a montré dans le paragraphe 4.5. que $g=\dfrac{\zeta}{B}\in H^{\infty}(\boldsymbol{D})$, $\|g\|_{\infty}=\|\zeta\|_{\infty}=1$ et g ne s'annule pas sur $\boldsymbol{D}$,

donc il existe $h\in Hol(\boldsymbol{D})$ tel que $log|g|=\Re(h)$ donc $log|g|$ est une fonction harmonique sur $\boldsymbol{D}$ comme partie réelle d'une fonction holomorphe.

Comme $\|g\|_{\infty}=1$ on en déduit que $log|g|$ est négative.

Comme $|B^{\#}(e^{it})|=1$ presque partout et $|\zeta^{\#}(e^{it})|=1$ presque partout, on en déduit que $|g^{\#}(e^{it})|=1$ presque partout, donc $log|g^{\#}(e^{it})|$ existe et $log|g^{\#}(e^{it})|=0$ presque partout.

Donc il existe une mesure μ_S étrangère à la mesure de Lebesgue, définie sur $\boldsymbol{T}$ et telle que $log|g|$ soit l'intégrale de Poisson de $-\mu_S$,

Ainsi $log|g(r\,e^{it})|=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\,d(-\mu_S)(e^{is})=\Re(-\dfrac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\,d\,\mu_S(e^{is}))$.

Comme $g=e^{h}$, on obtient $|g|=e^{\Re(h)}$ donc $\Re(h(r\,e^{it}))=\Re(-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\,d\,\mu_S(e^{is}))$

on en déduit $h(r\,e^{it})=-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\,d\,\mu_S(e^{is})+i\,\lambda$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

Donc $g(r\,e^{it})=c\,.\,exp(-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\,d\,\mu_S(e^{is}))$ avec $c\in\boldsymbol{T}$,

donc $\zeta(r\,e^{it})=c\,.B(r\,e^{it})\,.\,exp(-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\,d\,\mu_S(e^{is}))$ ❑

4.8. Représentation des fonctions de Hardy par leur factorisation

Toute fonction de Hardy peut se factoriser sous la forme du produit d'une fonction intérieure par le facteur extérieur de f, ce qui offre une caractérisation des espaces de Hardy.

Pour $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in H^p(\boldsymbol{D})$ non identiquement nulle, il existe une fonction intérieure ψ telle que $f = \psi . \Phi_f$ où Φ_f désigne le facteur extérieur de f.
On peut donc représenter f sous la forme :

$$f(r\,e^{it}) = c\,.\,B(r\,e^{it}).\,exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(s-t)\,log\left|f^{\#}(e^{is})\right|ds\right).\,exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\,d\,\mu_S(e^{is})\right)$$

où $\mu_S \in \mathcal{M}_+(\boldsymbol{T})$ est étrangère à la mesure de Lebesgue, $c \in \boldsymbol{T}$ et B désigne le produit de Blaschke associé aux zéros de f

- Preuve -

Soit $f \in H^1(\boldsymbol{D})$, le quotient de f par son produit de Blaschke montre que $\dfrac{f}{B} \in H^1(\boldsymbol{D})$ et $\|f\|_1 = \left\|\dfrac{f}{B}\right\|_1$. Par ailleurs, on a montré que le facteur extérieur de f vérifie $\Phi_f \in H^1(\boldsymbol{D})$.

En utilisant la définition d'un facteur extérieur, on trouve :

$$\left|\Phi_f(r\,e^{it})\right| = exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(s-t)\,log\left|f^{\#}(e^{is})\right|ds\right) = exp\left(P[log\left|f^{\#}\right|](r\,e^{it})\right)$$

donc $log\left|\Phi_f(r\,e^{it})\right| = P[log\left|f^{\#}\right|](r\,e^{it})$. (1)

Pour $\rho < 1$, la fonction $f_\rho : z \to f_\rho(z) = f(\rho z)$ est holomorphe dans $D(0, 1/\rho)$ et ne s'annule pas, donc la fonction $z \to log\left|f_\rho(z)\right|$ est harmonique dans $D(0, 1/\rho)$. Le théorème de Poisson montre que $log\left|f_\rho(r\,e^{it})\right| = P[log\left|f_\rho\right|](r\,e^{it}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(s-t)\,log\left|f_\rho(e^{is})\right|ds$.

On en déduit $log\left|f_\rho(r\,e^{it})\right| = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(log^+\left|f_\rho(e^{is})\right| + log^-\left|f_\rho(e^{is})\right|\right)P_r(s-t)\,ds$,

donc $log\left|f_\rho(r\,e^{it})\right| = P[log^+\left|f_\rho\right|](r\,e^{it}) + P[log^-\left|f_\rho\right|](r\,e^{it})$

le passage à la limite montre que

$$\lim_{\rho \to 1^-} log\left|f_\rho(r\,e^{it})\right| = \lim_{\rho \to 1^-} P[log^+\left|f_\rho\right|](r\,e^{it}) + \lim_{\rho \to 1^-} P[log^-\left|f_\rho\right|](r\,e^{it})$$

donc $\log\left|f(re^{it})\right| = \lim_{\rho\to 1^-} P[\log^+|f_\rho|](re^{it}) + \lim_{\rho\to 1^-} P[\log^-|f_\rho|](re^{it})$.

Cherchons d'abord $\lim_{\rho\to 1^-} P[\log^+|f_\rho|](re^{it})$:

Comme $\left|\log^+(x) - \log^+(y)\right| \leq |x-y|$, on en déduit

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\log^+|f_\rho(e^{is})| - \log^+|f^\#(e^{is})|\right| P_r(s-t)\,ds \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left||f_\rho(e^{is})| - |f^\#(e^{is})|\right| P_r(s-t)\,ds$$

donc $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\log^+|f_\rho(e^{is})| - \log^+|f^\#(e^{is})|\right| P_r(s-t)\,ds \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f_\rho(e^{is}) - f^\#(e^{is})\right| P_r(s-t)\,ds$

donc d'après l'inégalité de Harnack $P_r(s-t) \leq \dfrac{1+r}{1-r}$ on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\log^+|f_\rho(e^{is})| - \log^+|f^\#(e^{is})|\right| P_r(s-t)\,ds \leq \frac{1+r}{1-r}\|f_\rho - f^\#\|_1.$$

Comme $\left|P[\log^+|f_\rho|](re^{it}) - P[\log^+|f^\#|](re^{it})\right| = \dfrac{1}{2\pi}\left|\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\log^+|f_\rho(e^{is})| - \log^+|f^\#(e^{is})|\right) P_r(s-t)\,ds\right|$

on en déduit que :

$$\left|P[\log^+|f_\rho|](re^{it}) - P[\log^+|f^\#|](re^{it})\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\log^+|f_\rho(e^{is})| - \log^+|f^\#(e^{is})|\right| P_r(s-t)\,ds$$

donc $\left|P[\log^+|f_\rho|](re^{it}) - P[\log^+|f^\#|](re^{it})\right| \leq \dfrac{1+r}{1-r}\|f_\rho - f^\#\|_1$

Comme $\lim_{\rho\to 1^-} \|f_\rho - f^\#\|_1 = 0$, on en déduit $\lim_{\rho\to 1^-} P[\log^+|f_\rho|](re^{it}) = P[\log^+|f^\#|](re^{it})$.

On obtient donc $\log\left|f(re^{it})\right| = P[\log^+|f^\#|](re^{it}) + \lim_{\rho\to 1^-} P[\log^-|f_\rho|](re^{it})$.

Cherchons une majoration de $\lim_{\rho\to 1^-} P[\log^-|f_\rho|](re^{it})$:

$$P[\log^-|f^\#|](re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(s-t)\log^-|f^\#(e^{is})|\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(s-t)\liminf_{\rho\to 1^-}\log^-|f(\rho e^{is})|\,ds,$$

En appliquant le lemme de Fatou à la fonction positive $-log^{-}|f_{\rho}|$, on obtient :

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} P_r(s-t)\liminf_{\rho\to 1^-} log^{-}|f_{\rho}(e^{is})|\,ds \le -\liminf_{\rho\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} P_r(s-t)\,log^{-}|f_{\rho}(e^{is})|\,ds\,,$$

donc $\liminf_{\rho\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} P_r(s-t)\,log^{-}|f_{\rho}(e^{is})|\,ds \le \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} P_r(s-t)\liminf_{\rho\to 1^-} log^{-}|f_{\rho}(e^{is})|\,ds\,,$

donc $\liminf_{\rho\to 1^-} P[log^{-}|f_{\rho}|](r\,e^{it}) \le P[log^{-}|f^{\#}|](r\,e^{it})$

donc $\lim_{\rho\to 1^-} P[log^{-}|f_{\rho}|](r\,e^{it}) \le P[log^{-}|f^{\#}|](r\,e^{it})$

On obtient finalement $log|f(r\,e^{it})| \le P[log^{+}|f^{\#}|](r\,e^{it}) + P[log^{-}|f^{\#}|](r\,e^{it})$
donc $log|f(r\,e^{it})| \le P[log|f^{\#}|](r\,e^{it})$

En utilisant la relation (1) on en déduit $log|f(r\,e^{it})| \le log|\Phi_f(r\,e^{it})|$
donc $\lim_{r\to 1^-} log|f(r\,e^{it})| \le \lim_{r\to 1^-} log|\Phi_f(r\,e^{it})|$ ou encore $log|f^{\#}(e^{it})| \le log|\Phi_f^{\#}(e^{it})|$

Par ailleurs, comme Φ_f est une fonction extérieure associée à f, on obtient $\Phi_f \in H^1(\boldsymbol{D})$ et $|\Phi_f^{\#}(e^{it})| = |f^{\#}(e^{it})| \neq 0$.
On en déduit que $\left|\frac{f^{\#}(e^{it})}{\Phi_f^{\#}(e^{it})}\right| = 1$ donc $\frac{f}{\Phi_f}$ est une fonction intérieure,
donc il existe une fonction intérieure qu'on notera ψ telle que $f = \psi.\Phi_f$
On en déduit la réprésentation de f sous la forme

$$f(r\,e^{it}) = c\,.B(r\,e^{it}).\,exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} P_r(s-t)\,log|f^{\#}(e^{is})|\,ds\right).\,exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{T}} P_r(s-t)\,d\,\mu_S(e^{is})\right)$$

où $\mu_S \in \mathcal{M}_+(\boldsymbol{T})$ est étrangère à la mesure de Lebesgue, $c \in \boldsymbol{T}$ et B désigne le produit de Blaschke associé aux zéros de f

Pour $1 < p \le \infty$ comme $H^p(\boldsymbol{D}) \subset H^1(\boldsymbol{D})$ on en déduit que $\frac{f}{\Phi_f}$ est une fonction intérieure, ce qui conduit aux mêmes résultat que précédemment. ❑

- Exemple -

Considérons une fonction $f \in H^p(\boldsymbol{D})$ telle que $1/f \in H^q(\boldsymbol{D})$ où $p, q > 0$.
Comme $f \in H^p(\boldsymbol{D})$, on peut factoriser f en produit d'une fonction intérieure par son facteur extérieur : $f = \psi_1 . \Phi_f$
Comme $1/f \in H^q(\boldsymbol{D})$, on peut factoriser $1/f$ de la même façon : $1/f = \psi_2 . \Phi_{1/f}$
donc $1 = \psi_1 \psi_2 . \Phi_f \Phi_{1/f}$

Or les fonctions extérieures peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\Phi_f(r e^{it}) \Phi_{1/f}(r e^{it}) = exp(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(s-t) \log\left|f^{\#}(e^{is})\right| ds - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(s-t) \log\left|f^{\#}(e^{is})\right| ds)$$

$$\Phi_f(r e^{it}) \Phi_{1/f}(r e^{it}) = exp(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(s-t) (\log\left|f^{\#}(e^{is})\right| - \log\left|f^{\#}(e^{is})\right|) ds) = 1$$

on en déduit que $1 = \psi_1 \psi_2$

Comme ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions intérieures, elles peuvent s'écrire sous la forme
$$\psi_1 = c_1 B_1(r e^{it}) exp(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(s-t) \, d\mu_S(e^{is}))$$
et $\psi_2 = c_2 B_2(r e^{it}) exp(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(s-t) \, d\mu_S(e^{is}))$

Comme $1 = \psi_1 \psi_2$, on en déduit que ψ_1 peut également s'écrire
$$\psi_1 = \frac{1}{c_2} \frac{1}{B_2(r e^{it})} exp(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(s-t) \, d\mu_S(e^{is})).$$
On en déduit par identification que $\psi_1 = 1$ donc $f = \Phi_f$.
Ainsi une fonction f telle que $f \in H^p(\boldsymbol{D})$ et $1/f \in H^q(\boldsymbol{D})$ avec $p, q > 0$ est en fait une fonction extérieure.
Par exemple dans le cas de la fonction $f : z \to z+2$, on obtient
$\left|f(r e^{it})\right|^2 = \left|r e^{it} + 2\right|^2 = (r \cos t + 2)^2 + r^2 \sin^2 t \le (r+2)^2 + r^2$ donc $\left|f(r e^{it})\right|^2 \le 2r^2 + 4r + 4$.
Ainsi $(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(r e^{it})\right|^p dt)^{1/p} \le \frac{\sqrt{2r^2+4r+4}}{2\pi} 2\pi = \sqrt{2r^2+4r+4}$
donc $\sup_{0 \le r < 1} (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(r e^{it})\right|^p dt)^{1/p} < \infty$ et $f \in H^p(\boldsymbol{D})$

De plus $\left|\dfrac{1}{f(r\,e^{it})}\right|^2=\dfrac{1}{(2+r\cos t)^2+r^2\sin^2 t}\leq\dfrac{1}{(2-r)^2}$

Ainsi $\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{\left|f(r\,e^{it})\right|^q}dt\right)^{1/q}\leq\dfrac{1}{2-r}\,\dfrac{2\pi}{2\pi}=\dfrac{1}{2-r}$

donc $\sup\limits_{0\leq r<1}\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{\left|f(r\,e^{it})\right|^q}dt\right)^{1/q}<\infty$ et $1/f\in H^q(\boldsymbol{D})$

On en conclut que f est une fonction extérieure.

4ème PARTIE : VERS UNE GENERALISATION AUX DOMAINES DE JORDAN

L'objet de cette partie est d'évoquer l'extension de notre étude à des domaines simplements connexes en application du théorème de représentation conforme de Riemann. Nous admettrons les résultats énoncés.

1. Courbe de Jordan

Une courbe de Jordan est une courbe fermée du plan sans point double définie par une application injective $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(0)=\gamma(1)$.

2. Théorème de Jordan

Le complémentaire d'une courbe de Jordan γ^* dans $\mathbb{C}$ admet exactement deux composantes connexes, l'une bornée homéomorphe à D et d'adhérence homéomorphe à $\overline{D}$, l'autre non bornée. γ^* est la frontière de chacune d'entre elles.

Un domaine de Jordan est la composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ dont la frontière est γ^*. D'après le théorème de Jordan, un domaine de Jordan est un ouvert borné simplement connexe dont la frontière est une courbe de Jordan. On rappelle qu'un ouvert est simplement connexe si il est connexe et si toute courbe fermée dans cet ouvert est homotope à 0 .

3. Théorème de représentation conforme de Riemann

Tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et différent de $\mathbb{C}$ est conformément équivalent au disque unité.
En conséquence, tout domaine de Jordan est conformément équivalent au disque unité.

4. Le problème de Dirichlet dans un domaine de Jordan

Comme tout domaine de Jordan est conformément équivalent au disque unité, on en déduit :

Soit Ω un domaine de Jordan et f une fonction continue sur $\partial\Omega$. Il existe une unique solution au problème de Dirichlet sur Ω valant f sur $\partial\Omega$.

5. Conclusion

Les espaces de Hardy regroupent des domaines divers des mathématiques. Ils se développent depuis le début du 20ème siècle dans le cadre de l'analyse harmonique où ils trouvent leur application naturelle. On comprend donc qu'il s'agisse d'un sujet encore en pleine expansion de nos jours.

– – – – – –