INFO-F-302

Problème des Poules

Rapport

Pietro Narcisi : 000567641

Chris Badi Budu : 000569082

Nicolas Ngando Ngena : 000577330

Université Libre de Bruxelles

À rendre pour le 23 Décembre 2025

Table des matières

Introduction

Le "problème des poules" consiste à faire traverser un groupe de poules d'une rive à l'autre à l'aide d'une seule barque, dont la capacité est limitée. La principale difficulté réside dans le fait que chaque poule détient un temps de traversée propre, que le temps nécessaire pour traverser en groupe est déterminé par la poule la plus lente, et que plusieurs aller-retours sont permis entre les deux rives. Le but de ce projet est donc de résoudre le problème à l'aide d'un solveur SAT, afin de déterminer le temps minimal nécessaire pour que toutes les poules traversent la rivière.

Ainsi, l'objectif de ce rapport est de formaliser la réduction de ce problème de poule, en problème SAT, mais également de discuter de ses contraintes et de la complexité.

Choix de littéraux et proposition

Soit n le nombre de poules, on fixe l'ensemble des poules

$$P = \{1, \ldots, n\}.$$

On utilise quatre états pour chaque poule : rive A, rive B, barque en aller (BA) et barque en retour (BR).
Ces états représentent les quatres endroits où une poule peut se situer.
On fixe l'ensemble des états

$$S = \{A, B, BA, BR\}.$$

On fixe l'ensemble de temps T.

Alors nous avons :

$$X = \{x_{p,s,t} \mid p \in \{1, ..., n\},\ s \in \{A, B, BA, BR\},\ t \in T\}.$$

Contraintes

Pour ce problème, nous allons définir sept contraintes :

contrainte 1 :

A l'instant t=0, toutes les poules sont sur la rive A (leur état s= A).
On obtient donc :

$$\phi_1 = \bigwedge_{p=1}^{n} x_{p,A,0}$$

contrainte 2 :

En tout moment, une poule p à maximum un seul état.
C'est-à-dire, qu'au temps t, une poule peut se trouver qu'à un seul endroit. Ce qui est assez trivial mais fondamental.

Formalisation

Pour une poule p et en un temps t :

$$x_{p,A,t} \vee x_{p,B,t} \vee x_{p,BA,t} \vee x_{p,BR,t}$$

Pour chaque poule :

$$\bigwedge_{p=1}^{n} (x_{p,A,t} \vee x_{p,B,t} \vee x_{p,BA,t} \vee x_{p,BR,t})$$

En tout temps :

$$\bigwedge_{t \in T} \bigwedge_{p=1}^{n} (x_{p,A,t} \vee x_{p,B,t} \vee x_{p,BA,t} \vee x_{p,BR,t})$$

On obtient :

$$\bigwedge_{t \in T} \bigwedge_{p=1}^{n} \bigvee_{s \in \{A,B,BA,BR\}} x_{p,s,t}$$

Pour vérifier chaque poule est exactement dans un seul état, on obtient finalement :

$$\phi_2 = \bigwedge_{t \in T} \bigwedge_{p=1}^{n} \left(\bigvee_{s \in \{A,B,BA,BR\}} x_{p,s,t} \;\wedge\; \bigwedge_{s \neq s'} \neg(x_{p,s,t} \wedge x_{p,s',t}) \right)$$

contrainte 3 :

En tout moment, il y a maximum C poules dans la barque Aller ou barque Retour.
Avec E un ensemble et

$$|E| = C$$

Formalisation

En tout temps, et pour le nombre limité de place dans la barque. Pour la barque Aller :

$$\bigwedge_{t \in T} \bigwedge_{|E|=C+1} \bigvee_{p \in E} \neg x_{p,BA,t}$$

En tout temps, et pour le nombre limité de place dans la barque. Pour la barque Retour :

$$\bigwedge_{t \in T} \bigwedge_{|E|=C+1} \bigvee_{p \in E} \neg x_{p,BR,t}$$

On obtient, en tout temps, et pour le nombre limité de place dans la barque. Pour la barque Aller ou barque Retour :

$$\phi_3 = \bigwedge_{t \in T} \bigwedge_{|E|=C+1} \bigvee_{p \in E} \neg x_{p,BA,t} \wedge \bigvee_{p \in E} \neg x_{p,BR,t}$$

contrainte 4 :

A l'instant t, si toutes les poules ont leur état s = B, alors elles ne peuvent plus changer d'état par après (donc en $t' > t$). Elles doivent rester en état B (rive B).
C'est-à-dire, qu'une fois que toutes les poules sont arrivées sur la rive B (état s = B), elles ont fini leur traversée, donc elles ne doivent plus repartir et changer leur état.

Formalisation

A l'instant t, chaque poule est sur la rive B (donc leur état s = B) :

$$\bigwedge_{p=1}^{n} x_{p,B,t}$$

A l'instant t' supérieur à t, chaque poule doit rester sur la rive B :

$$\left(\bigwedge_{p=1}^{n} x_{p,B,t}\right) \rightarrow \neg x_{p,s,t'}$$

En FNC, puisque $A \rightarrow B = \neg A \vee B$, alors nous avons :

$$\neg\left(\bigwedge_{p=1}^{n} x_{p,B,t}\right) \vee \neg x_{p,s,t'}$$

On obtient :

$$\phi_4 = \bigwedge_{t \in T} \bigwedge_{t' > t} \bigwedge_{p=1}^{n} \left(\bigvee_{p'=1}^{n} \neg x_{p',B,t}\right) \vee \neg x_{p,B,t'}$$

contrainte 5 :

Si à l'instant t, une poule est dans la barque (ALLER) (état s = BA), alors il ne peut y avoir aucune autre poule dans la barque Retour.
Cela permet de dire qu'il n y a qu'il n'existe qu'une seule barque dans le problème, à chaque fois un aller, puis un retour, etc.

Formalisation

Nous avons :

$$x_{p,BA,t} \rightarrow \bigwedge_{p'=1,\, p' \neq p}^{n} \neg x_{p',BR,t}$$

Nous obtenons en FNC :

$$\neg x_{p,BA,t} \vee \bigwedge_{p'=1,\; p' \neq p}^{n} \neg x_{p',BR,t}$$

En supprimant l'implication :

$$\phi_5 = \bigwedge_{p'=1,\, p' \neq p}^{n} (\neg x_{p,BA,t} \vee \neg x_{p',BR,t})$$

contrainte 6 :

Le temps du trajet est égale, au temps de la poule la plus lente. C'est-à-dire que sur la barque Aller (BA) ou sur la barque Retour (BR), le temps (de la poule) le plus élevé, représente le temps du trajet.

Formalisation

En sachant que p' représente la poule la plus lente du groupe sur la barque, on obtient :

$$\phi_6 = \bigwedge_{s \in \{BA, BR\}} \bigwedge_{t} \bigwedge_{p,p'=1}^{n} (\neg x_{p,s,t} \vee x_{p',s,t})$$

contrainte 7 :

Si en t, on est sur la barque ALLER (état s = BA), alors en t' on sera sur la barque Retour, et aisi de suite.

Formalisation

En tout moment, et Avec $t' > t$ (un temps ultérieur) et chaque poule, on obtient :

$$\phi_7 = \bigwedge_{t} \bigwedge_{t'>t} \bigwedge_{p,p'=1}^{n} (\neg x_{p,BA,t} \vee \neg x_{p',BA,t'}) \wedge (\neg x_{p,BR,t} \vee \neg x_{p',BR,t'})$$

Réduction en problème SAT

La réduction en problème SAT est donnée en faisant la conjonction de chaque formules trouvées précédement :

$$\phi = \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \phi_4 \wedge \phi_5 \wedge \phi_6 \wedge \phi_7$$

Conclusion et Discussion sur la complexité

En ce qui concerne la complexité spatiale de notre réduction du problème, nous parvenons à le résoudre en temps polynomial par l'algorithme que nous avons implémenté via nos contraintes SAT. Si nous nous conformons à la définition, u représente l'instance du problème en entrée que nous utilisons pour notre algorithme, soient la capacité maximale de la barque, les durées des poules et le temps maximal. Enfin, suivant notre implémentation, k représente la constante telle que le temps d'exécution revient à $O(N^2 \cdot T)$.