Optimisation sous incertitudes
Rapport TP

Ordonnancement des atterrissages des avions

Dexter Stephane METSANOU TSAFACK

2 décembre 2023

1 Le problème statique déterministe

Soit le programme linéaire ci-dessous :

$$
\begin{array}{llrr}
\min & z & & (1) \\
\text{s.c.} & T_i \geq e_i & \forall i \in P & (2) \\
& T_i \leq d_i & \forall i \in P & (3) \\
& T_j \geq T_i + s_{ij}x_{ij} - M_{ij}(1 - x_{ij}) & \forall i, j \in P, i \neq j & (4) \\
& L_i \geq T_i - t_i & \forall i \in P & (5) \\
& E_i \geq t_i - T_i & \forall i \in P & (6) \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i, j \in P, i \neq j & (7) \\
& y_{ir} \in \{0, 1\} & \forall i \in P, \forall r \in R & (8) \\
& L_i, E_i, T_i \geq 0 & \forall i \in P & (9)
\end{array}
$$

1.1 Fonction objectif

L'objectif du programme linéaire ci-dessus est de minimiser la somme pondérée des coûts liés aux avances et retard. Nous avons donc

$$z = \sum_{i \in P} (g_i * L_i + h_i * E_i)$$

1.2 Contrainte de séquencement des avions et de leur affection aux pistes

1. Contraintes de séquencement des avoins

$$\forall i \in P, \forall j \in P, \forall r \in R, \quad x_{ij} + x_{ji} \geq y_{ir} + y_{jr} - 1$$

2. Contrainte d'affectation des avions aux pistes
   Un avion doit être affecté à une seule piste. Nous avons donc :

$$\forall i \in P, \quad \sum_{r \in R} y_{ir} = 1$$

1.3 Explication de la contrainte (4) et détermination des bornes pour M_{ij}

1. Pour deux avions i et j donnés
   - Si l'avion i atterrit avant l'avion j ($x_{ij} = 1$), l'heure d'atterrissage de l'avion j doit être au moins égale à l'heure d'atterrissage de l'avion i plus le temps de séparation minimum entre ces deux avions.
   - Dans le cas contraire ($x_{ij} = 0$),nous avons : $T_i - T_j \leq M_{ij} \quad (a)$. Cette contrainte de sera pas prise en compte car les M_{ij} sont très grand.
2. D'après les contraintes (2) et 3 , nous avons $T_i - T_j \leq d_i - e_j \quad (b)$.
   De (a) et (b) nous avons, $T_i - T_j \leq M_{ij}$ et $T_i - T_j \leq d_i - e_j$. Nous pouvons donc dire qu'une borne inférieure de M_{ij} est $d_i - e_j$.

1.4 Étude comparée des résultats sur différentes instances

Nombre d'avions	Nombre de piste	Max second	Objectif
10	1	60	700
10	2	60	90
10	3	60	0
20	1	60	820
20	2	60	60
20	3	60	0
50	2	60	Not solve
50	2	300	120645
50	3	300	110911
50	5	600	4615

TABLE 1 – Tableau comparatif des différentes instances

Au vu de $TABLE1$ ci dessus, nous constatons que le coût total décroît lorsque le nombre de piste d'atterrissage augmente et croit lorsque le nombre d'avion augmente et ce sur toute les instances étudiées. Nous remarquons également que le temps de calcul a un impact sur le résultat obtenu car pour un instance de 50 avions, 2 pistes et 60 secondes de temps de calcul nous n'avons pas pu avoir une solution. Ainsi il fallu augmenter ce temps de calcul à 300 secondes pour notre solution sur cet instance.

2 Le problème stochastique

2.1 Programme stochastique à deux niveaux

1. Variable de premiers niveaux : x_{ij}, y_{ir}
2. Variables de recours :$E_{is}, L_{is}, T_{is}, e_{is}, d_{is}, M_{is}$
3. Programme stochastique :

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{s \in S} \sum_{i \in P} (\pi_s (L_{is} * g_i + E_{is} * h_i)) && && (10)\\
\text{s.c.} \quad & T_{is} \geq \tilde{e}_{is} && \forall i \in P, \forall s \in S && (11)\\
& T_{is} \leq \tilde{d}_{is} && \forall i \in P, \forall s \in S && (12)\\
& x_{ij} + x_{ji} \geq y_{ir} + y_{jr} - 1 && \forall i, j \in P, \forall r \in R && (13)\\
& \sum_{r \in R} y_{ir} = 1 && \forall i \in P && (14)\\
& T_{js} \geq T_{is} + s_{ij} x_{ij} - M_{ijs}(1 - x_{ij}) && \forall i, j \in P, \forall s \in S, i \neq j && (15)\\
& L_{is} \geq T_{is} - \tilde{t}_{is} && \forall i \in P, \forall s \in S && (16)\\
& E_{is} \geq \tilde{t}_{is} - T_{is} && \forall i \in P, \forall s \in S && (17)\\
& x_{ij} \in \{0, 1\} && \forall i, j \in P, i \neq j && (18)\\
& y_{ir} \in \{0, 1\} && \forall i \in P, \forall r \in R && (19)\\
& L_{is}, E_{is}, T_{is} \geq 0 && \forall i \in P, \forall s \in S && (20)
\end{aligned}
$$

4. Justification de la modélisation

   - Le retard ou l'avance d'un avion i dépend d'un scenario s et ce scenario a un probabilité π_s de se produire d'où (10).

   - Les dates d'arrivée au plus tôt, au plus tard et préférentielles e_i, d_i et t_i des avions sont maintenant incertaines et remplacées par des variables aléatoires $\tilde{e}_i$,$\tilde{d}_i$,$\tilde{t}_i$ suivant des scénarios discrets. La date d'atterrissage d'un avion i dépend d'un scenario s et est comprise entre sa date d'arrivée au plus tôt et sa date d'arrivée au plus tard suivant ce même scenario d'où $(11), (12)$.

   - Si l'avion i atterrit avant l'avion j dans un scenario s, l'heure d'atterrissage de l'avion j doit être au moins égale à l'heure d'atterrissage de l'avion i suivant ce scenario plus le temps de séparation minimum entre ces deux avions. Dans le cas contraire l'heure d'atterrissage de l'avion j est toujours strictement inférieure à celle de l'avion i suivant ce scenario d'où (13).

   - Contrainte de séquencement des avions et de leur affection aux pistes : $(14), (15)$.

   - Les contraintes $(16), (17)$ définissent les retards et les avances des avions suivant un scenario s.

- Les domaines de définition des variables de décisions sont donnés par $(18), (19), (20)$.

2.2 Étude comparée des résultats sur différentes instances

$Instance_{scenario}$(Nombre d'avions)	Nombre de piste	Max second	Objectif
$airland1_1(10)$	1	60	1357
$airland1_1(10)$	2	60	293
$airland1_2(10)$	3	60	115
$airland2_2(15)$	2	60	285
$airland2_3(15)$	2	60	214
$airland2_3(15)$	4	60	2
$airland3_3(20)$	1	60	1895
$airland3_1(20)$	4	60	0
$airland3_1(20)$	1	300	1685
$airland3_2(20)$	3	60	4330

TABLE 2 – Tableau comparatif des différentes instances par scenario

Avec les instances étudiées ci-dessus($TABLE2$), nous constatons que plus nous avons de pistes et/ou de temps d'exécution, plus nous améliorons notre coût. A titre de comparaison, nous obtenons un coût de 0 avec plus de pistes que pour le problème statique. Cela s'explique par le fait que nous avons plusieurs scenarios et que notre solution doit satisfaire toute les contraintes dans le pire scenario.

3 Le problème robuste

3.1 Modélisation

En Optimisation robuste, Nous cherchons la solution qui minimise l'objectif dans le pire des cas. En l'absence d'opérateur *minmax*, nous introduisons une variable z à *minimiser* tel que z soit plus grande que notre objectif de départ sur l'ensemble des scenarios. Nous avons donc le modèle suivant :

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z && && (21)\\
\text{s.c.} \quad & z \geq \sum_{i \in P} (L_{is} * g_i + E_{is} * h_i) && \forall s \in S && (22)\\
& T_{is} \geq \tilde{e}_{is} && \forall i \in P, \forall s \in S && (23)\\
& T_{is} \leq \tilde{d}_{is} && \forall i \in P, \forall s \in S && (24)\\
& x_{ij} + x_{ji} \geq y_{ir} + y_{jr} - 1 && \forall i, j \in P, \forall r \in R && (25)\\
& \sum_{r \in R} y_{ir} = 1 && \forall i \in P && (26)\\
& T_{js} \geq T_{is} + s_{ij} x_{ij} - M_{ijs}(1 - x_{ij}) && \forall i, j \in P, \forall s \in S, i \neq j && (27)\\
& L_{is} \geq T_{is} - \tilde{t}_{is} && \forall i \in P, \forall s \in S && (28)\\
& E_{is} \geq \tilde{t}_{is} - T_{is} && \forall i \in P, \forall s \in S && (29)\\
& x_{ij} \in \{0, 1\} && \forall i, j \in P, i \neq j && (30)\\
& y_{ir} \in \{0, 1\} && \forall i \in P, \forall r \in R && (31)\\
& L_{is}, E_{is}, T_{is} \geq 0 && \forall i \in P, \forall s \in S && (32)
\end{aligned}
$$

3.2 Étude comparée

Différents résultat avec 3 pistes d'atterrissage, et un $maxSecond = 60$

$Instance_{scenario}$(Nombre d'avions)	Nombre de Statique	Stochastique	Robuste
$airland1_1(10)$	0	77	320
$airland2_2(15)$	0	40	120
$airland3_3(20)$	0	1137	1895

Table 3 – Tableau comparatif des solutions sur différents problèmes

Sur ces 3 instances, le problème robuste présente la valeur de coût la plus grande. Ceci est dù au fait que dans le cas robuste, on cherche à avoir la satisfaction dans le pire des cas contrairement à l'approche stochastique qui repose sur l'espérance de la fonction de coût en prenant en compte tous les scénarios. l'approche statique est optimale pour ces trois instances.

4 Le problème dynamique

4.1 Contrainte à ajouter

$$T_i^q = T_i^{q-1} \quad \forall i \in P(t_q) \cap P(t_{q-1})$$

avec

$$T_i^{q-1} \leq t_q + \Delta \quad et \quad \Delta \geq 0$$

Cette contrainte empêche l'attribution d'une nouvelle date à une avion déjà passe ou trop proche.

4.2 Étude comparée

Différents résultat avec un $maxSecond = 60$

Nombre d'avions	Nombre de piste	Δ	Dynamique	Statique
10	2	40	90	90
10	2	60	90	90
15	2	30	210	210
15	2	60	210	210
20	3	20	0	0
20	3	60	0	0

Table 4 – Tableau comparatif des solutions sur problème dynamique et statique

Conclusion

On observe que, bien que les valeurs de l'objectif soient les mêmes, les solutions diffèrent par rapport à celles trouvées pour le problème statique. Dans le problème statique, les réalisations sont préalablement connues, ce qui conduit à des solutions où un avion atterrit plus tôt pour éviter de retarder l'avion suivant. En revanche, dans le problème dynamique, cet écart se transforme en un retard qui se manifeste bien avant, car les décisions sont prises au fur et à mesure sans connaissance du futur. Ainsi, il n'est pas possible d'anticiper un retard à venir. Par ailleurs, on note qu'il y a davantage d'erreurs de replanification lorsque le delta est augmenté, car cela entraîne une période prolongée de gel de la planification. Ces erreurs diminuent également lorsque le nombre de pistes augmente.

Si nous définissons Δ sur une valeur négative suffisamment petite,un avion pourrais se voir attribuer indéfiniment à chaque planification différent heure d'atterrissage. ce qui n'est pas réalisable.