

Encadrant : Christine Letrou

Coordonnateur : Joséphine Kohlenberg

PRO 4501 - Projet Cassiopée - 2017

N° 55 - Catégorie recherche



**Étude de l'intérêt de la méthode
de Lancer de Faisceaux Gaussiens pour le
calcul de surface équivalente Radar
monostatique**

Stéphane KOMBO

stephane.kombo@telecom-sudparis.eu



Table des matières

1	Introduction	4
2	Définitions et cadre mathématique du problème	5
2.1	Repérage spatial (et temporel)	5
2.2	Modélisation, définitions	5
3	Décomposition de l'onde plane sur le frame de fenêtre gaussiennes	8
3.1	Simplifications préalables	8
3.2	Décomposition du spectre du terme ondulatoire	8
3.2.1	Calcul préliminaire	8
3.2.2	Retour à la décomposition du terme ondulatoire	8
3.3	Décomposition effective de l'onde	9
4	Implémentation - Validation numérique	10
4.1	Formules à implémenter	10
4.2	Calcul approché des fenêtres duales	12
4.2.1	$\nu_x = 0.25$	12
4.2.2	$\nu_x = 0.375$	13
4.2.3	$\nu_x = 0.5$	14
4.2.4	$\nu_x = 0.75$	15
4.3	Reconstruction globale du champ	15
5	Conclusion	16
A	Démonstrations	17
A.1	Frame transformé et frame dans le domaine transformé	17
A.2	Produits scalaires intra-frame dans le domaine spatial	17
A.3	Produits scalaires intra-frame dans le domaine spectral	18
A.4	Théorème de Parseval	18
B	Formulaire	19
	Références	20

Conventions et notations

Dans un contexte de physique, nous utiliserons presque exclusivement la notation impropre $w(x)$ pour désigner la fonction $x \rightarrow w(x)$, afin de mettre en évidence la variable x considérée.

Sauf mention contraire, toute relation dépendant d'une variable x sera valable pour toute autre variable. Selon le cadre (monovarié ou pas, ou en cas de notation supplémentaire), on désignera indifféremment w , w_x , w^x , $w(x)$, $w^x(x)$, ou $w_x(x)$, les indices supplémentaires étant utilisés surtout dans un contexte multivarié.

Afin de simplifier les notations, toute intégrale sans borne sera considérée sur \mathbb{R} entier : $\int = \int_{-\infty}^{\infty}$

De même, sans précision supplémentaire, toute somme est considérée sur l'ensemble d'indices de sommation le plus grand possible : pour a, \dots, z entiers, $\sum = \sum_{a, \dots, z} = \sum_{a=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{z=-\infty}^{\infty}$

Plus conventionnellement, nous adopterons les notations définies sur cette page. Pour celles présentées ensuite dans la suite du document, nous tenterons de rester en cohérence avec les thèses de Delphine Lugara et Ihssan Ghannoum (respectivement [1] et [2]), car le travail présenté ici se place dans la continuité de celles-ci.

i	Nombre imaginaire pur tel que $i^2 = -1$
h^*, f^*	Complexe, fonction conjugué.e
$e^{-i\omega t}$	Convention en régime harmonique
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Produit scalaire de deux vecteurs
$\langle f, g \rangle = \int f g^* = \int f(x) g(x)^* dx$	Produit scalaire de deux fonctions monovariées
$\langle f, g \rangle = \iint f(x, y) g(x, y)^* dx dy$	Produit scalaire de deux fonctions bivariées
$\tilde{f}(k_x) = \mathcal{F}[f(x)](k_x) = \int f(x) e^{-ixk_x} dx$	Transformée de Fourier de f
$\tilde{f}(k_x, k_y) = \iint f(x, y) e^{-i(xk_x + yk_y)} dx dy$	Transformée de Fourier 2D
$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}(k_x)](x) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{f}(k_x) e^{ixk_x} dx$	Transformée de Fourier inverse de f
$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \tilde{f}(k_x, k_y) e^{i(xk_x + yk_y)} dx dy$	Transformée inverse 2D
$\llbracket m, n \rrbracket$	Intervalle d'entiers
$\lfloor x \rfloor$	Partie entière par défaut
$\lceil x \rceil$	Partie entière par excès

Notons que cette convention, pour la transformée de Fourier et son inverse, a un impact sur certaines propriétés de la transformée. En cas de doute, on pourra consulter le formulaire en annexe B en plus de cette section de conventions.

1 Introduction

Ce rapport est une tentative de contribution aux travaux de Christine Letrou sur les faisceaux gaussiens. La méthode de Lancer de Faisceaux Gaussiens (LFG) permet de calculer des champs électromagnétiques se propageant dans des environnements complexes comportant des obstacles. La question principale qui a mené à la proposition de ce travail porte sur l'intérêt de cette méthode pour les calculs de Surface Équivalente Radar (SER) monostatique en environnement urbain. Le but est donc ici la détermination du nombre de faisceaux à lancer suivant le type d'environnement (densité et disposition des bâtiments) et selon le champ électromagnétique considéré, ici une onde électromagnétique plane progressive harmonique (OPPH).

La démarche justifiant l'approche utilisée dans ce travail est classique : afin de résoudre les problèmes de propagation d'un champ électromagnétique, il est d'usage de décomposer ce champ sur une « base » d'objets élémentaires dont on connaît le comportement, afin d'en déduire les propriétés globales par théorème de superposition. Il faut donc choisir la famille d'éléments de base de façon pertinente, afin de simplifier le problème étudié. On fait ici le choix d'un ensemble très particulier de fonctions gaussiennes, appelé un *frame de Gabor à fenêtres gaussiennes*, pour au moins ces deux raisons essentielles :

- Il existe plusieurs représentations et définitions des faisceaux gaussiens ; dans notre cas, chacun des faisceaux correspondra à une partie du champ incident, fenêtré par une fonction gaussienne. On dira alors que chaque fenêtre du frame rayonne sous la forme d'un faisceau gaussien.
- Dans un contexte d'analyse spectrale, incontournable en électromagnétisme, nous allons nous intéresser aux propriétés *spatiales* des faisceaux étudiés, et nous allons avoir besoin de conserver la connaissance de certaines propriétés des faisceaux dans le domaine spectral, ou domaine transformé. Il se trouve que les frames de Gabor à fenêtres gaussiennes sont les objets élémentaires qui nous accordent le meilleur compromis entre connaissance des objets globaux à la fois dans le domaine spatial et le domaine spectral (on parle de bonne localisation spatiale et spectrale).

Par soucis de concision, nous supposons connue la théorie générale des frames. Bien que [3] résume la plupart des résultats fondamentaux utilisés dans le présent rapport, il peut être profitable de se référer au premier chapitre de [4] pour avoir une introduction plus détaillée, incluant des prérequis d'algèbre linéaire.

[5] présente les éléments fondamentaux de la théorie des frames de manière plus théorique.

Pour réaliser ce projet de calcul de SER, il faut donc, pour cette OPPH représentée par sa composante électrique \vec{E} , déterminer une décomposition *exploitable* de la forme $\vec{E} = \sum \vec{A}_{mnpq} w_{mnpq}$, où le frame de Gabor $(w_{mnpq})_{m,n,p,q \in \mathbb{Z}}$ est construit à partir d'une fenêtre w gaussienne, et les \vec{A}_{mnpq} seront les coefficients de la décomposition, soit l'objet concret de tout le travail présenté dans ce rapport.

La proposition suivante, démontrée pas à pas dans [1], justifie la validité de notre démarche :

Proposition 1.1 *Les coefficients \vec{A}_{mnpq} caractérisent complètement \vec{E} , avec une reconstruction numériquement stable de \vec{E} à partir de ces coefficients, si et seulement si (w_{mnpq}) forme un frame de Gabor.*

De même pour le problème dual, tout champ \vec{E} est exprimable en tant que superposition de fenêtres w_{mnpq} si et seulement si (w_{mnpq}) forme un frame de Gabor.

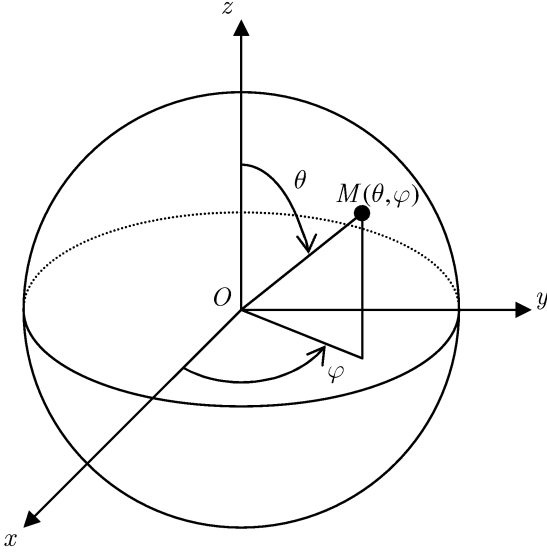
Dans un premier temps, la suite du document propose donc une expression la plus explicite possible des \vec{A}_{mnpq} . Leur expression faisant intervenir la fonction duale \hat{w} , pour laquelle on ne dispose pas d'expression analytique, nous seront amenés à l'approximer grâce à un algorithme itératif décrit dans [1]. Le second objectif de ce rapport sera donc la validation numérique de cette approximation, c'est-à-dire la vérification de la bonne reconstruction de notre OPPH avec une précision suffisante par utilisation de cette démarche.

2 Définitions et cadre mathématique du problème

Dans la mesure du possible, toutes les notations utilisées ici, au même titres que les conventions, seront maintenues dans l'ensemble de ce document.

2.1 Repérage spatial (et temporel)

On associe à l'espace un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_O = (O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ (coordonnées cartésiennes). À tout point $M(x, y, z)$ de l'espace on associe en coordonnées sphériques le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_M = (M, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ (notation rayon-colatitude-longitude).



On a donc les relations de passage suivantes :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \cos \varphi \sin \theta \\ z = r \sin \varphi \end{cases}, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$$

et

$$\begin{cases} \hat{r} = \sin \theta (\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}) + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\theta} = \cos \theta (\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}) - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y} \end{cases}$$

Les variables d'espace x, y, z seront respectivement conjuguées aux variables spectrales k_x, k_y, k_z par transformée de Fourier (TF).

Les variables d'intérêt étant ici les variables d'espace (et non pas le temps), nous considérerons implicitement que toutes les relations sont valables à tout instant t fixé. Nous travaillerons en régime harmonique (convention $e^{-i\omega t}$). Ainsi, les constantes seront considérées en amplitudes complexes, avec par exemple, $E_0 = E e^{-i\omega t}$ pour tout E_0 constant par rapport aux variables d'espace. Dans la suite du rapport, une variable sera dite constante lorsque qu'elle ne dépendra pas des variables d'espace.

2.2 Modélisation, définitions

Le milieu considéré, l'air, sera assimilé au vide dans tout le rapport.

Définition 2.1 (Onde plane étudiée) On étudie une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement (OPPHPR), représenté en 3 par la projection \vec{E} sur le plan (xOy) de sa composante électrique.¹

On peut donc écrire \vec{E} sous la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\vec{k}_i \cdot \vec{r})$, où :

- $\vec{E}_0 = E_0 \hat{u}$ désigne un champ électrique constant
- $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = r\hat{r}$ désigne le vecteur position du point de l'espace considéré
- $\vec{k}_i = k_0 \hat{k}_i$ désigne le vecteur d'onde initial, k_0 étant donc le nombre d'onde ($\hat{k}_i \perp \hat{u}$)
- $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$ désigne la longueur d'onde considérée.

Notons $k_{ix} = \vec{k}_i \cdot \hat{x}$, $k_{iy} = \vec{k}_i \cdot \hat{y}$, et $k_{iz} = \vec{k}_i \cdot \hat{z}$; alors on a :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp [i\vec{k}_i \cdot (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})] = \vec{E}_0 \exp [i(xk_{ix} + yk_{iy} + zk_{iz})] \quad (0)$$

1. En effet, toute onde électromagnétique est une superposition d'OPPHPR, comme expliqué dans [6]. De plus, à partir de cette projection, il est possible retrouver la composante du champ selon \hat{z} , et ainsi reconstituer le champ global.

Définition 2.2 (Frame de Gabor, pas de translations, limites) *Le frame de Gabor associé à la fenêtre $w(x)$ considérée est défini par l'ensemble des fonctions modulées et translatées $(w_{mn})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ tel que :*

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, w_{mn}(x) = w(x - m\bar{x})e^{inx\bar{k}_x} \quad (1)$$

où \bar{x} et \bar{k}_x sont respectivement les pas de translations spatiale et spectrale.

On notera A et B les limites respectivement inférieure et supérieure du frame.

$w_{mn}(x)$, \bar{x} , et \bar{k}_x seront respectivement notés $wmn(m, n, x)$, xb , et kxb dans le script associé au rapport.

Définition 2.3 (Frame de Gabor dans le domaine spectral) *Le frame de Gabor associé à la fenêtre $\tilde{w}(k_x)$ transformée est défini par l'ensemble des fonctions modulées et translatées $(\tilde{w}_{nm})_{n,m \in \mathbb{Z}}$ tel que :*

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \tilde{w}_{nm}(k_x) = w(k_x - n\bar{k}_x)e^{-im\bar{x}k_x} \quad (2)$$

Ce frame est de limites $2\pi A$ et $2\pi B$.

$w_{nm}(k_x)$ sera notée $wtnm(n, m, kx)$ dans le script associé au rapport.

Remarque 2.1 (Indices de translations) *Les indices m et n sont respectivement les indices de translations spatiale et spectrale, et ce, quelque soit le domaine dans lequel on considère notre fenêtre. L'inversion de l'ordre de m et n dans la notation de (\tilde{w}_{nm}) est donc cohérente avec le fait qu'une translation dans le domaine spatial correspond à une modulation dans le domaine spectral, et réciproquement.*

Nous tâcherons de respecter ces notations (translation sur la première variable, modulation sur la deuxième), notamment dans le programme associé à ce rapport.

Comme détaillé en 4.1, A et B dépendent du coefficient d'échantillonnage défini juste après.

Définition 2.4 (Coefficient d'échantillonnage) *Le coefficient d'échantillonnage associé au frame de Gabor précédent est :*

$$\nu_x = \frac{\bar{x}\bar{k}_x}{2\pi} \quad (3)$$

D'après le théorème de Balian-Low [7], les fenêtres considérées étant gaussiennes, il faut que $\nu_x < 1$ pour avoir effectivement des frames avec une bonne localisation dans les domaines spatial et spectral.

ν_x , A et B seront donc respectivement notés nux , $A[nux]$, et $B[nux]$ dans le script associé au rapport.

Définition 2.5 (Largeur de fenêtre gaussienne) *Notons $w(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{L_x}}e^{-\pi(\frac{x}{L_x})^2}$ toute fenêtre gaussienne de la variable x . Alors L_x désigne la largeur de fenêtre gaussienne.*

Dans toute la suite du rapport, on se place dans l'hypothèse du frame équilibré, on pose donc :

$$\bar{x} = \sqrt{\nu_x}L_x \quad (3.1)$$

Définition 2.6 (Largeur spectrale) *Notons $\tilde{w}(k_x) = \sqrt{\sqrt{2}L_x}e^{-\pi(\frac{k_x}{\Omega_x})^2}$ la transformée de Fourier de w . Alors Ω_x désigne la largeur spectrale. On a : $\Omega_x = \frac{2\pi}{L_x}$. L'hypothèse du frame équilibré donne donc la relation :*

$$\bar{k}_x = \sqrt{\nu_x}\Omega_x \quad (3.2)$$

Définition 2.7 (Frame dual dans le domaine spatial) *Le frame dual associé au frame (w_{mn}) est défini par l'ensemble des fonctions $(\widehat{w_{mn}})_{n,m \in \mathbb{Z}}$ tel que :*

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \widehat{w_{mn}}(x) = \widehat{w}_{mn}(x), \widehat{w} = S^{-1}(w) \quad (4)$$

S étant « l'opérateur de frame » (S et S^{-1} sont linéaires). Ce frame est de limites B^{-1} et A^{-1} .

Définition 2.8 (Frame dual dans le domaine spectral) *Le frame dual associé au frame (\tilde{w}_{nm}) est défini par l'ensemble des fonctions $(\widehat{\tilde{w}_{nm}})_{n,m \in \mathbb{Z}}$ tel que :*

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \widehat{\tilde{w}_{nm}}(k_x) = \widehat{\tilde{w}_{nm}}(k_x) \quad (5)$$

Ce frame est de limites $(2\pi B)^{-1}$ et $(2\pi A)^{-1}$.

$L_x, \tilde{w}(k_x), \Omega_x, \hat{w}(x)...$ seront respectivement notés $Lx, wd(kx), Ox, wd(x)...$ dans le script.

Remarque 2.2 (Extension en dimension 2 et 3 par séparabilité) *Dans la suite du rapport et notamment dans le 3, les formules utilisées seront des extensions en deux dimensions des formules issues de la théorie des frames, mais qui ne sont pas toutes reportées ici afin de ne pas alourdir le propos. La clé de cette extension est la séparabilité ; se référer à [1] pour plus de détails.*

3 Décomposition de l'onde plane sur le frame de fenêtre gaussiennes

3.1 Simplifications préalables

Considérons le champ $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(xk_{ix} + yk_{iy} + zk_{iz})]$ défini en (2.1). Pour sa composante vectorielle, on peut écrire $\vec{E}_0 = E_{0x}\hat{x} + E_{0y}\hat{y}$, avec E_{0x} et E_{0y} constants. Par linéarité des opérateurs que nous allons utiliser, il suffit de décomposer $f(x, y, z) = \exp[i(xk_{ix} + yk_{iy} + zk_{iz})]$ (terme ondulatoire) pour obtenir la décomposition du champ global.

Il suffit de le faire sur le plan d'équation $z = 0$; en effet, par définition de l'onde plane, la connaissance de celle-ci sur un front d'onde permet d'en déduire le champs en tout point $M(x, y, z)$ de l'espace par translation.

Considérons donc $f(x, y) = f(x, y, 0) = \exp[i(xk_{ix} + yk_{iy})]$.

3.2 Décomposition du spectre du terme ondulatoire

Pour le spectre \tilde{f} de cette fonction, la théorie des frames de Gabor nous garantit l'existence d'une décomposition sur le frame $(\tilde{w}_{nmpq}) = (\tilde{w}_{nm}^x \tilde{w}_{qp}^y)$ de la forme :

$$\tilde{f} = \sum \tilde{A}_{mnpq} \tilde{w}_{nm}^x \tilde{w}_{qp}^y, \text{ où } \tilde{A}_{mnpq} = \langle \tilde{f}, \widehat{\tilde{w}_{nm}^x \tilde{w}_{qp}^y} \rangle = \langle \tilde{f}, \widehat{\tilde{w}_{nm}^x} \widehat{\tilde{w}_{qp}^y} \rangle. \quad (a)$$

Il s'agit d'une réécriture de (23) et (24) vue depuis le domaine spectral. On a donc :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{mnpq} &= \int \tilde{f} \left(\widehat{\tilde{w}_{nm}^x} \widehat{\tilde{w}_{qp}^y} \right)^* && \text{par définition de } \langle \cdot, \cdot \rangle \\ &= \int \int \tilde{f}(k_x, k_y) \left(\widehat{\tilde{w}_{nm}}(k_x) \widehat{\tilde{w}_{qp}}(k_y) \right)^* dk_x dk_y \\ \tilde{A}_{mnpq} &= \int \int \tilde{f}(k_x, k_y) \widehat{\tilde{w}_{nm}}(k_x)^* \widehat{\tilde{w}_{qp}}(k_y)^* dk_x dk_y \end{aligned} \quad (6)$$

On cherche donc à calculer les coefficients $(\tilde{A}_{mnpq})_{m,n,p,q \in \mathbb{Z}}$ en utilisant (6).

3.2.1 Calcul préliminaire

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k_x, k_y) &= \int \int f(x, y) e^{-i(xk_x + yk_y)} dx dy && \text{par (TF)} \\ &= \int \int e^{i(xk_{ix} + yk_{iy})} e^{-i(xk_x + yk_y)} dx dy && \text{par réécriture de (2.1)} \\ &= \int \int e^{-ix(k_x - k_{ix})} e^{-iy(k_y - k_{iy})} dx dy \\ &= \int 1 \cdot e^{-ix(k_x - k_{ix})} dx \int 1 \cdot e^{-iy(k_y - k_{iy})} dy && \text{par théorème de Fubini} \\ &= \mathcal{F}[1](k_x - k_{ix}) \mathcal{F}[1](k_y - k_{iy}) && \text{où } 1 \text{ désigne la fonction constante égale à } 1 \\ \tilde{f}(k_x, k_y) &= \delta(k_x - k_{ix}) \delta(k_y - k_{iy}) && \text{par (19)} \end{aligned} \quad (7)$$

Cette expression va considérablement simplifier l'expression de \tilde{A}_{mnpq} , en réduisant l'intégrale double à la valeur de l'intégrande évaluée en un point du domaine spectral (propriété de l'impulsion de Dirac).

3.2.2 Retour à la décomposition du terme ondulatoire

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{mnpq} &= \int \int \delta(k_x - k_{ix}) \delta(k_y - k_{iy}) \widehat{\tilde{w}_{nm}}(k_x)^* \widehat{\tilde{w}_{qp}}(k_y)^* dk_x dk_y && \text{par (6) et (7)} \\ &= \int \delta(k_x - k_{ix}) \widehat{\tilde{w}_{nm}}(k_x)^* dk_x \int \delta(k_y - k_{iy}) \widehat{\tilde{w}_{qp}}(k_y)^* dk_y && \text{par théorème de Fubini} \end{aligned}$$

Or par définition, δ est telle que : $\int \delta(k_x - k_{ix}) \widehat{w}_{nm}(k_x)^* dk_x = \widehat{w}_{nm}(k_{ix})^*$

Et de même pour la variable y : $\int \delta(k_y - k_{iy}) \widehat{w}_{qp}(k_y)^* dk_y = \widehat{w}_{qp}(k_{iy})^*$

On obtient donc simplement l'expression :

$$\tilde{A}_{mnpq} = \widehat{w}_{nm}^*(k_{ix}) \widehat{w}_{qp}^*(k_{iy}) = \widehat{w}(k_{ix} - n\bar{k}_x)^* \widehat{w}(k_{iy} - q\bar{k}_y)^* e^{+i(m\bar{x}k_{ix} + p\bar{y}k_{iy})} \quad (8)$$

3.3 Décomposition effective de l'onde

On a donc, à l'issu de 3.2, la décomposition de \tilde{f} suivante :

$$\tilde{f}(k_x, k_y) = \sum \tilde{A}_{mnpq} \tilde{w}_{nm}^x(k_x) \tilde{w}_{qp}^y(k_y), \text{ où } \tilde{A}_{mnpq} = \widehat{w}_{nm}^*(k_{ix}) \widehat{w}_{qp}^*(k_{iy}) \quad (9)$$

Cette décomposition a son analogue dans le domaine spatial² (voir (23) et (24)) :

$$f(x, y) = \sum A_{mnpq} w_{mn}^x(x) w_{pq}^y(y), \text{ où } A_{mnpq} = \tilde{A}_{mnpq} e^{-i(mn\bar{x}k_x + pq\bar{y}k_y)} \quad (b)$$

La reconstruction de l'onde \vec{E} se fait donc finalement avec les formules :

$$\boxed{\vec{E}(x, y, z = 0) = \left(\sum A_{mnpq} w_{mn}^x(x) w_{pq}^y(y) \right) \vec{E}_0} \quad (10)$$

où :

$$\boxed{A_{mnpq} = \widehat{w}_{nm}^*(k_{ix}) \widehat{w}_{qp}^*(k_{iy}) e^{-i(mn\bar{x}k_x + pq\bar{y}k_y)}} \quad (11)$$

Dans le cadre d'un calcul formel, il est difficile de faire plus explicite et concis car le dual d'une fonction quelconque ne dispose pas d'expression analytique connue. Ce sont donc ces formules (encadrées) que nous utiliserons en 4 lors de la validation numérique : l'algorithme appliqué va nous permettre d'approximer numériquement \widehat{w} (consulter [1], [4] et [8] pour des démonstrations et détails sur cet algorithme).

2. (b) peut être vu comme la transformée de Fourier inverse de (a), réécrite grace à (14)

4 Implémentation - Validation numérique

4.1 Formules à implémenter

Pour utiliser (11), il nous faut donc calculer numériquement la quantité $\widehat{\tilde{w}}$, que l'on va approximer grâce à l'algorithme itératif déduit de la théorie des frames de Gabor, dont voici un rappel :

Proposition 4.1 (Calcul du frame dual) *Pour tout frame de Gabor $(\varphi_j)_{j \in J}$ de limites A_φ et B_φ , le frame dual $(\widehat{\varphi}_j)_{j \in J}$ peut être approximé à l'ordre N grâce à la formule :*

$$\widehat{\varphi}_j^N = \sum_{k \in J} \alpha_{jk}^N \varphi_k, \quad \alpha_{jk}^N = \frac{2}{A_\varphi + B_\varphi} \delta_{jk} + \alpha_{jk}^{N-1} - \frac{2}{A_\varphi + B_\varphi} \sum_{m \in J} \alpha_{jm}^{N-1} \langle \varphi_m, \varphi_k \rangle$$

Considérons donc le frame (\tilde{w}_{nm}^x) , de limites $2\pi A_x$ et $2\pi B_x$. Ces formules, appliquées à $\varphi_j = \tilde{w}_{00}^x = \tilde{w}^x$, en retirant le double-indice $j = \{0, 0\}$, et pour $k = \{s, r\}$, donnent donc :

$$\widehat{\tilde{w}}_x^N = \sum_{s,r} \alpha_{sr}^N \tilde{w}_{sr}^x \quad (12)$$

avec

$$\alpha_{sr}^N = \frac{2}{2\pi(A_x + B_x)} \delta_{0s} \delta_{0r} + \alpha_{sr}^{N-1} - \frac{2}{2\pi(A_x + B_x)} \sum_{n,m} \alpha_{nm}^{N-1} \langle \tilde{w}_{nm}, \tilde{w}_{sr} \rangle \quad (13)$$

où

$$\langle \tilde{w}_{nm}, \tilde{w}_{sr} \rangle = 2\pi e^{-\pi \left[\frac{(r-m)^2}{2} + \frac{(s-n)^2}{2} + i(m-r)(n+s) \right] \nu_x} \quad (\text{voir 17 pour démonstration}).$$

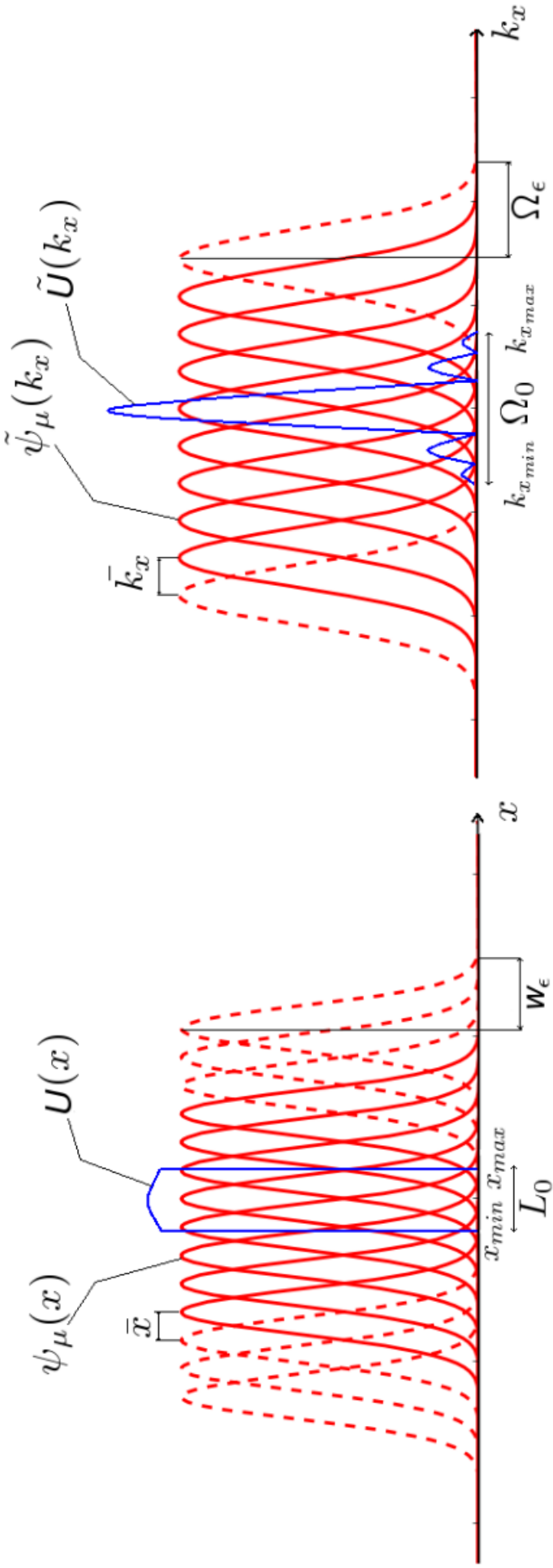
Dans le tableau ci-dessous sont répertoriées les valeurs des constantes A et B pour différentes valeurs de ν_x . Comme dans tout le rapport, on suppose que $\bar{x} = \sqrt{\nu_x} L_x$. Ces valeurs, ainsi que celles dans les cas où $\bar{x} \neq \sqrt{\nu_x} L_x$, sont obtenues dans le cas général par approximation, et sont déterminées de manière exacte par transformée de Zak dans les cas $\nu_x = 0, 25$ et $\nu_x = 0, 5$. Un résumé clair de la démarche est donné dans [1], avec les références aux sources donnant le calcul explicite de ces valeurs.

	A	B	B/A
$\nu_x = 0, 25$	3,9703	4,0299	1,0150
$\nu_x = 0, 375$	2,5025	2,8309	1,1312
$\nu_x = 0, 5$	1,6693	2,3607	1,4142
$\nu_x = 0, 75$	0,5954	2,0725	3,4809

Ces valeurs étant connues, le calcul numérique des fonctions duales devient faisable dès lors que l'on tronque correctement les sommes infinies définissant (12) et (13).

On montre que pour obtenir des estimations correctes, il suffit de sommer pour les termes tels que :
 $r \in \left[\left\lfloor \frac{x_{\min} - w_\varepsilon}{\bar{x}} \right\rfloor, \left\lceil \frac{x_{\max} + w_\varepsilon}{\bar{x}} \right\rceil \right]$, $s \in \left[\left\lfloor \frac{k_{\min} - \Omega_\varepsilon}{\bar{k}_x} \right\rfloor, \left\lceil \frac{k_{\max} + \Omega_\varepsilon}{\bar{k}_x} \right\rceil \right]$ dans (12) et, à $r, s \in \mathbb{Z}$ fixés :
 $m \in \left[\left\lfloor r - \frac{2w_\varepsilon}{\bar{x}} \right\rfloor, \left\lceil r + \frac{2w_\varepsilon}{\bar{x}} \right\rceil \right]$, $n \in \left[\left\lfloor s - \frac{2\Omega_\varepsilon}{\bar{k}_x} \right\rfloor, \left\lceil s + \frac{2\Omega_\varepsilon}{\bar{k}_x} \right\rceil \right]$ dans (13), où $w_\varepsilon = L_x \sqrt{\frac{-\log(\varepsilon)}{\pi}}$ et $\Omega_\varepsilon = \Omega_x \sqrt{\frac{-\log(\varepsilon)}{\pi}}$ représentent respectivement la demi-largeur de la fenêtre gaussienne au seuil ε dans le domaine spatial ou spectral. En effet, pour w , on a $w(x) < \varepsilon$ si $x \notin] - w_\varepsilon, w_\varepsilon [$, et $\tilde{w}(k_x) < \varepsilon$ si $k_x \notin] - \Omega_\varepsilon, \Omega_\varepsilon [$.

Notations: $\psi \equiv w$, $\varphi \equiv \hat{w}$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{Z}^2 \equiv (m, n)$



$$M_{min} = \left\lfloor \frac{x_{min} - w_{\epsilon_2}}{\bar{x}} \right\rfloor$$

$$N_{min} = \left\lfloor \frac{k_{min} - \Omega_{\epsilon_2}}{\bar{k}_x} \right\rfloor$$

$$M_{max} = \left\lceil \frac{x_{max} + w_{\epsilon_2}}{\bar{x}} \right\rceil$$

$$N_{max} = \left\lceil \frac{k_{max} + \Omega_{\epsilon_2}}{\bar{k}_x} \right\rceil$$

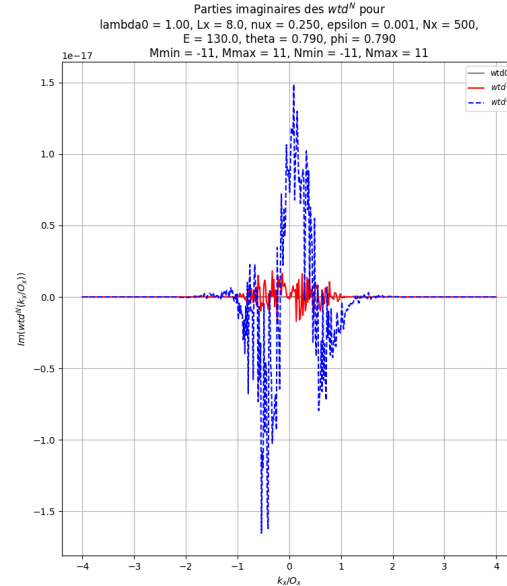
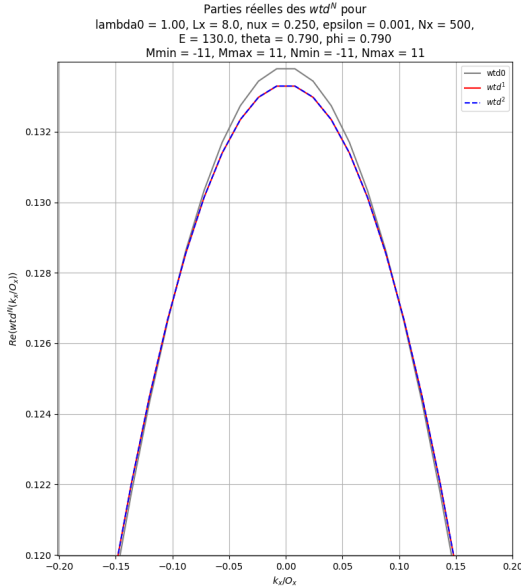
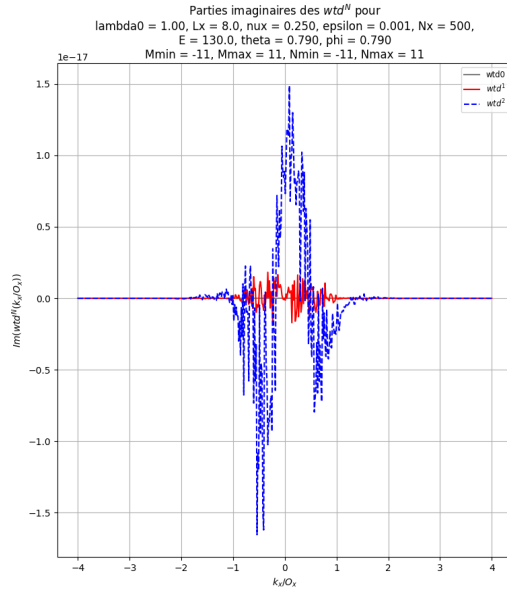
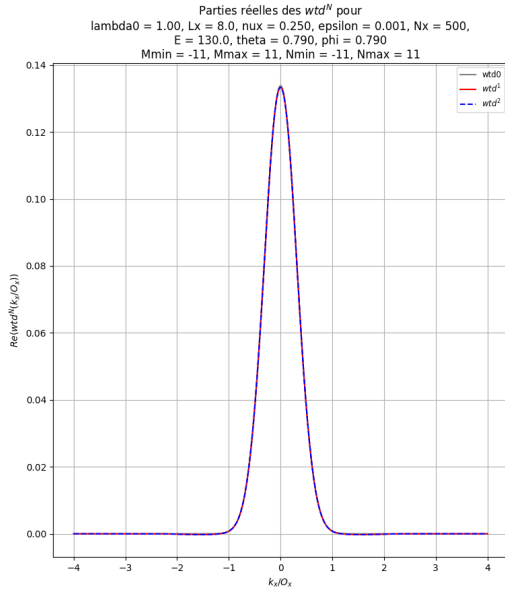
4.2 Calcul approché des fenêtres duales

Dans la suite, nous présentons sur les mêmes figures les fonctions duales approximées à différents ordres afin de valider la bonne reconstruction de ces fenêtres, avec selon les différentes valeurs de ν_x , principal paramètre agissant sur la convergence des fenêtres approximées vers la fonction duale.³ Dans les légendes des figures suivantes, les notations de variables se veulent « phonétiquement cohérentes » avec ce rapport. Précisons que ε et N_x désignent le seuil de précision et le nombre de points utilisés pour calculer $\hat{\tilde{w}}$.

4.2.1 $\nu_x = 0.25$

Comme annoncé dans [1], c'est le cas pour lequel la convergence de l'algorithme est la plus rapide.

Les ordres 1 et 2 d'approximations sont quasi-indistinctibles, et selon la précision souhaitée (ici 10^{-3}), l'approximation à l'ordre 0 peut-être acceptable : $\hat{\tilde{w}} \simeq \alpha_{00}^0 \tilde{w} = \frac{1}{\pi(A_x + B_x)} \tilde{w}$

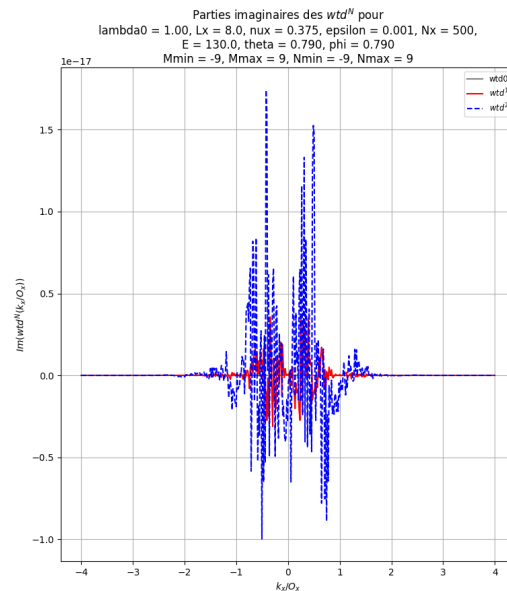
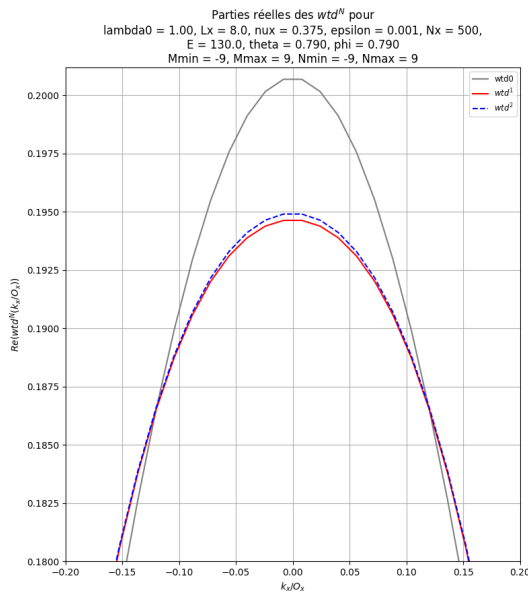
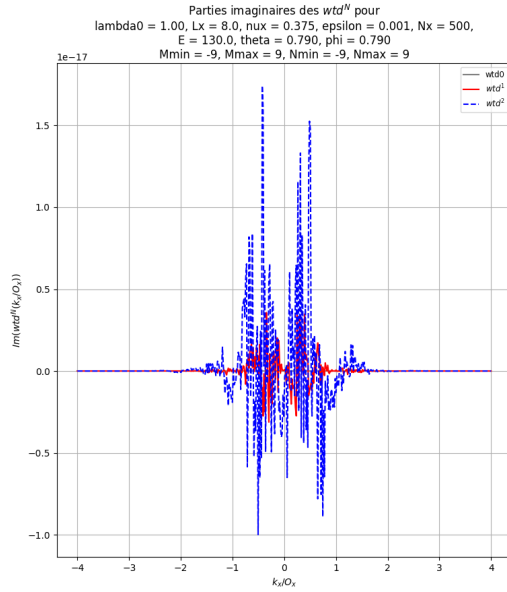
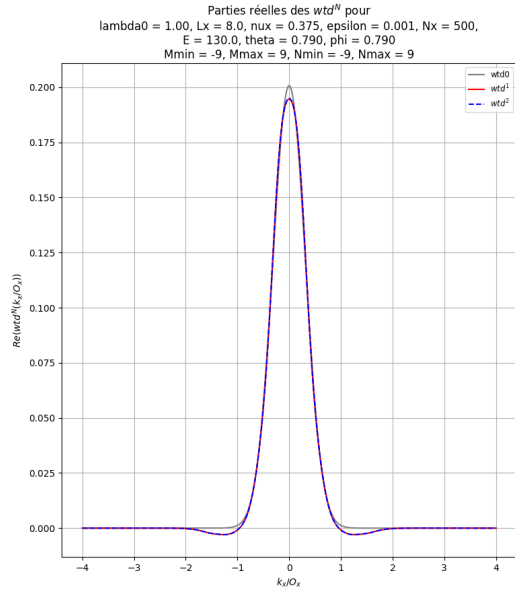


3. L'autre paramètre pertinent est \bar{x} , mais dans notre travail, celui-ci ne varie pas par hypothèse du frame équilibré (voir (3.1)).

Concernant la partie imaginaire de $\hat{\tilde{w}}$ ainsi approchée, il se trouve qu'elle est d'amplitude extrêmement faible (de l'ordre de 10^{-17} , ce qui est négligeable devant le seuil de précision choisi). Son irrégularité peut faire d'abord penser à des valeurs nulles, avec une erreur due à la résolution finie des faibles valeurs décimales que l'ordinateur garde en mémoire, mais il est possible d'atteindre une précision bien supérieure, même avec le langage Python, qui a été utilisé ici en raison de mes connaissances limitées en C++. On constate donc (pour toutes les valeurs de ν_x) que les parties imaginaires des $\hat{\tilde{w}}^N$ sont négligeables mais non nulles, ce qui est cohérent avec (13) (définie avec le terme comportant l'exponentielle).⁴

4.2.2 $\nu_x = 0.375$

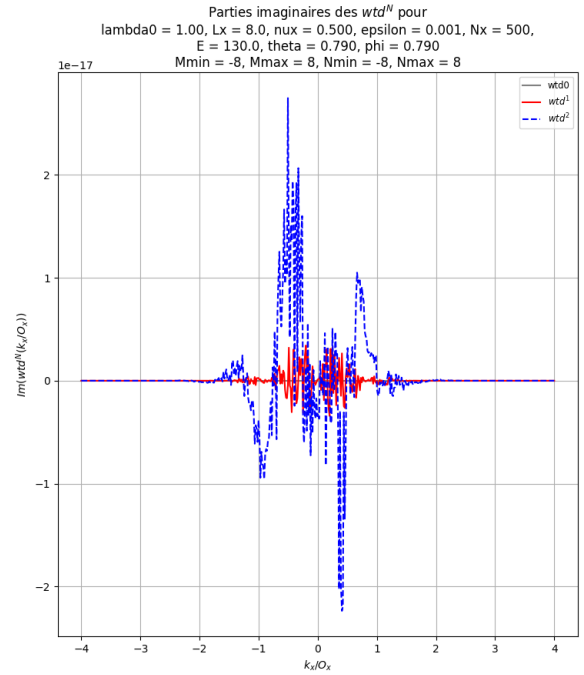
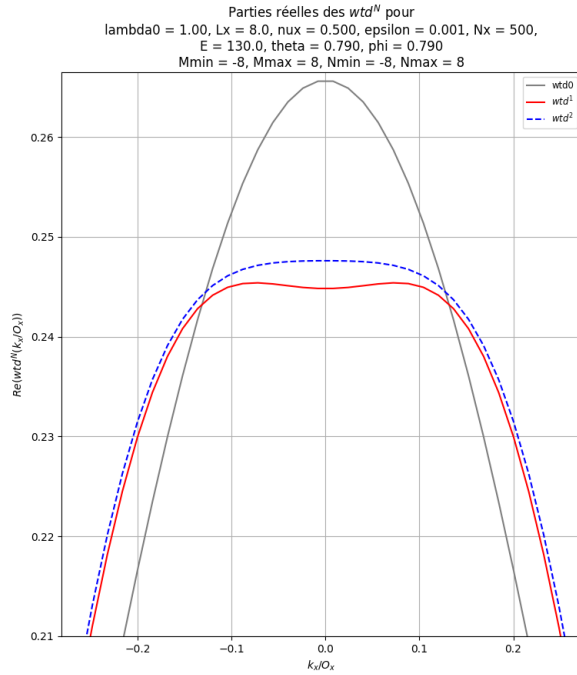
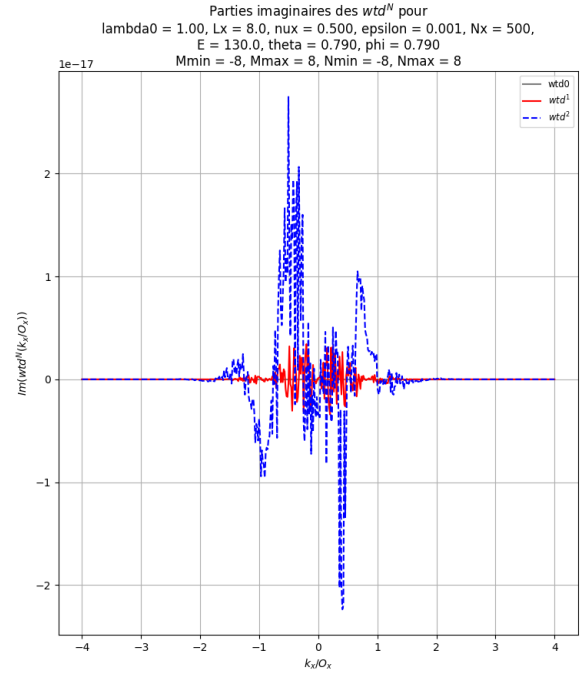
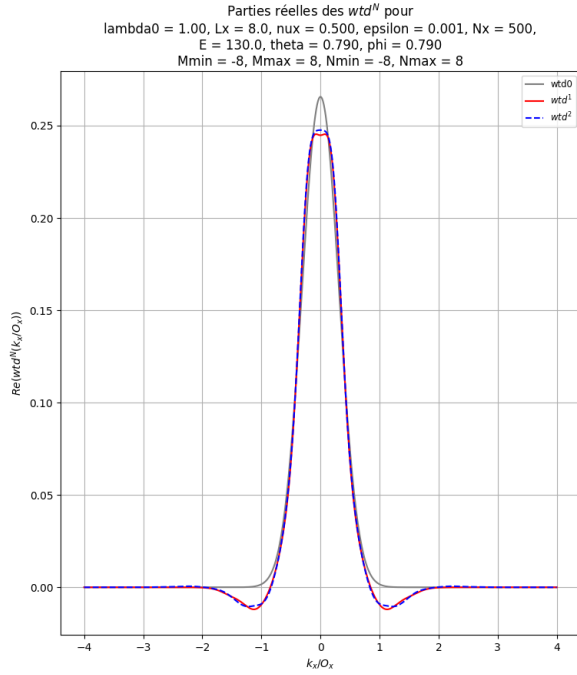
Pour cette faible valeur de ν_x , la ressemblance entre les $\hat{\tilde{w}}^N$, et la gaussienne initiale \tilde{w} est encore correcte. On commence certes à constater que l'ordre d'approximation nécessaire pour une bonne reconstruction de $\hat{\tilde{w}}$ augmente avec la valeur de ν_x , mais à ce seuil de précision, les faibles ordres 1 et 2 restent proches et satisfaisants.



4. Les figures pour les autres valeurs de ν_x étant donc similaires, elles n'ont pas été commentées dans la suite.

4.2.3 $\nu_x = 0.5$

À partir de $\nu_x = 0.5$, les $\hat{\tilde{w}}^N$ commencent à avoir une forme différant vraiment de \tilde{w} .

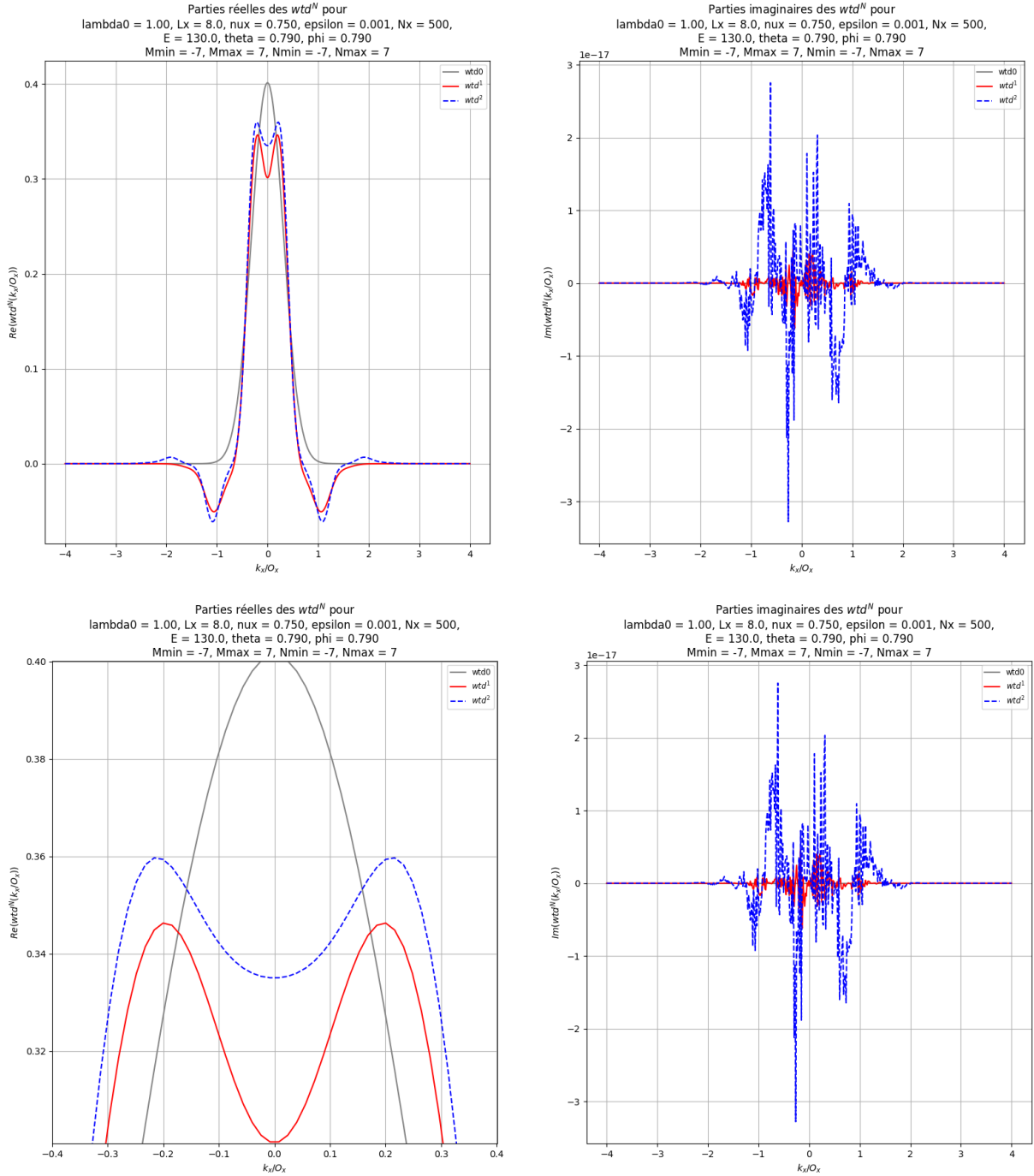


Ce constat, avec la plus grande différences entre les ordres 1 et 2 d'approximations, nous poussent donc à délaisser les valeurs de ν_x supérieures à 0.25 ou 0.375 pour la reconstruction de l'onde globale.⁵

5. Les résultats trouvés au 22 juin 2017 ont d'ailleurs été trouvés avec $\nu_x = 0.25$, pour des raisons de délais et de performances.

4.2.4 $\nu_x = 0.75$

Comme déjà su, lorsque ν_x se rapproche de 1, les fonctions duales se rapprochent de la fonction biorthogonale de la décomposition de Gabor (quand $\nu_x = 1$, à ne pas confondre avec la décomposition sur un frame de Gabor en général).



En conséquence de ces résultats, nous faisons donc le choix de tenter la reconstruction de \vec{E} avec $\nu_x = 0.25$, car c'est la valeur nous donnant le plus rapidement, à l'ordre le plus faible (dès l'ordre 0 voire l'ordre 1), la reconstruction la plus correcte de $\hat{\vec{w}}$.

4.3 Reconstruction globale du champ

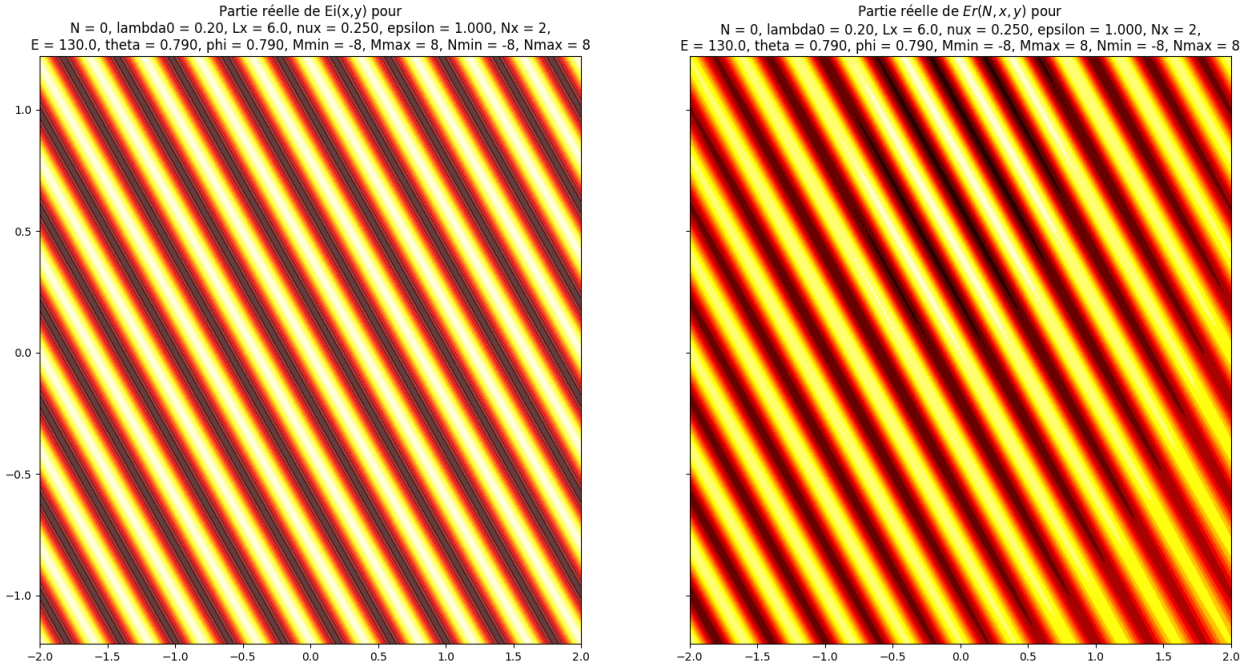
Les fenêtres duales se reconstruisent bien, les valeurs de $w_{mn}(x)$, $w_{pq}(y)$ et A_{mnpq} sont effectivement calculées, mais la reconstruction globale avec des paramètres physiquement cohérents prend trop de temps pour que je puisse finir le travail dans le temps imparti avec mes connaissances actuelles en programmation.

5 Conclusion

Au moment où ce rapport a été rendu, ce travail n'était plus qu'à une étape d'aboutir : la démarche d'approximation des fenêtres duales \widehat{w} est validée numériquement par 4, avec l'indication des paramètres à choisir pour obtenir les résultats souhaités pour une bonne reconstruction de \vec{E} :

Pour une précision de $\varepsilon = 10^{-3}$, une longueur d'onde $\lambda_0 = 1m$, une largeur de fenêtre $L_x = 8\lambda_0$, et surtout un coefficient du suréchantillonnage $\nu_x = 0.25$, le programme Python associé à ce travail est capable de calculer les coefficients $(A_{m,n,p,q})$ pour un nombre de termes assez significatif pour reconstruire correctement le champ global. Une simulation prenant un temps de calcul d'au moins une demi-journée pour l'ordre 0 d'approximation, ce rapport ne comportera pas les résultats finaux de cette recomposition. Ceux-ci seront surement disponibles juste après, dans un mail complémentaire ultérieur.

Cependant, la lecture de [1], de [2], ainsi que les résultats suivants, trouvés avec des paramètres assez faibles pour que le programme s'exécute (mais trop faibles pour avoir un sens physique), nous encourage à penser qu'il aurait suffi d'un peu plus de temps (ou d'un binôme sachant programmer un peu mieux) pour optimiser le programme à temps et obtenir la reconstruction du champ électromagnétique global dans le temps imparti.⁶



6. Ces figures ne comportent pas d'échelle d'amplitude des champs, mais cela a été corrigé dans le script final.

Annexes

A Démonstrations

A.1 Frame transformé et frame dans le domaine transformé

Proposition A.1 Pour $m, n \in \mathbb{Z}$, la transformée de Fourier de la fenêtre translatée et modulée dans le domaine spatial est différente de la fenêtre transformée puis translatée et modulée dans le domaine spectral. Plus précisément :

$$\widetilde{w_{mn}} = e^{imn\bar{x}\bar{k}_x} \widetilde{w_{nm}} \quad (14)$$

Preuve

$$\begin{aligned} \forall k_x \in \mathbb{R}, \widetilde{w_{nm}}(k_x) &= \int w_{nm}(x) e^{-ixk_x} dx && \text{par (TF)} \\ &= \int w(x - m\bar{x}) e^{inx\bar{k}_x} e^{-ixk_x} dx && \text{par (1)} \\ &= \int w(x - m\bar{x}) e^{-ix(k_x - n\bar{k}_x)} dx \\ &= \int w(x) e^{-i(x+m\bar{x})(k_x - n\bar{k}_x)} dx && \text{par changement de variable (translation)} \\ &= e^{-im\bar{x}(k_x - n\bar{k}_x)} \int w(x) e^{-ix(k_x - n\bar{k}_x)} dx && \text{par linéarité} \\ &= e^{imn\bar{x}\bar{k}_x} e^{-im\bar{x}k_x} \widetilde{w}(k_x - n\bar{k}_x) && \text{par (TF) et (20)} \\ \forall k_x \in \mathbb{R}, \widetilde{w_{nm}}(k_x) &= e^{imn\bar{x}\bar{k}_x} \widetilde{w_{nm}}(k_x) && \text{par (2)} \end{aligned}$$

A.2 Produits scalaires intra-frame dans le domaine spatial

Proposition A.2 On a montré manuscritement que :

$$\langle w_{mn}, w_{rs} \rangle = e^{-\pi \left[\frac{(r-m)^2}{2} + \frac{(s-n)^2}{2} + i(r+m)(s-n) \right] \nu_x} \quad (15)$$

Explication

$\langle w_{mn}, w_{rs} \rangle = e^{-\left[\frac{2\pi}{L_x^2} \left(\frac{(r-m)\bar{x}}{2} \right)^2 + \frac{L_x^2}{2\pi} \left(\frac{(s-n)\bar{k}_x}{2} \right)^2 + i \frac{(r+m)(s-n)\bar{x}\bar{k}_x}{2} \right]}$ d'après le résultat donné dans [1] et redémontré manuscritement.⁷ Cette dernière équation a été réécrite avec (3), (3.1) et (3.2), afin d'exprimer la dépendance en ν_x de ce produit scalaire. Sans entrer dans des détails trop fastidieux à recopier, rappelons que, par (1) :

$$\langle w_{mn}, w_{rs} \rangle = \int w(x - m\bar{x}) e^{inx\bar{k}_x} w^*(x - r\bar{x}) e^{-ixs\bar{k}_x} dx$$

d'où :

$$\langle w_{mn}, w_{rs} \rangle = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{L_x}} \int \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{L_x}} e^{-\frac{\pi}{L_x^2} [(x-m\bar{x})^2 + (x-r\bar{x})^2]} e^{-ix(s-n)\bar{k}_x} dx$$

soit, après mise sous forme canonique du trinôme $[(x - m\bar{x})^2 + (x - r\bar{x})^2]$:

$$\langle w_{mn}, w_{rs} \rangle = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{L_x}} e^{-\frac{\pi}{2}(r-m)^2\nu_x} \tilde{f}\left((s-n)\bar{k}_x\right) \quad (16)$$

où $f(x) = w\left(\sqrt{2}\left[x - \frac{(r+m)\bar{x}}{2}\right]\right)$. Ainsi :

7. La démonstration via 3 méthodes différentes a d'ailleurs confirmé une erreur de signe dans (1.44).

- Le terme $e^{-\frac{\pi}{2}(r-m)^2\nu_x}$ est identique dans (15) et (16) ;
 - Au cours du calcul de la transformée de f , la dilatation de facteur $\sqrt{2}$ fait apparaître un facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (voir (22)), et l'expression de \tilde{w} fait apparaître un facteur $\sqrt{\sqrt{2}L_x}$, qui vont compenser le terme $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{L_x}}$ dans (16)
 - Le terme $\tilde{f}\left((s-n)\bar{k}_x\right)$ introduit d'une part :
 - d'une part, le terme $(s-n)^2$ à cause du carré dans l'expression de \tilde{w} ,
 - d'autre part, par translation (voir (20)), le produit $(r+m)(s-n)$ dans une exponentielle complexe.
- On retrouve donc bien l'expression donnée dans [3].

A.3 Produits scalaires intra-frame dans le domaine spectral

Proposition A.3

$$\langle \tilde{w}_{nm}, \tilde{w}_{sr} \rangle = 2\pi e^{-\pi\left(\frac{(m-r)^2}{2} + \frac{(s-n)^2}{2} + i(m-r)(n+s)\right)\nu_x} \quad (17)$$

Preuve

$$\begin{aligned} \langle \tilde{w}_{nm}, \tilde{w}_{sr} \rangle &= \langle e^{-imn\bar{x}\bar{k}_x} \widetilde{w_{mn}}, e^{-irs\bar{x}\bar{k}_x} \widetilde{w_{rs}} \rangle && \text{par (14)} \\ &= e^{-i(mn-rs)\bar{x}\bar{k}_x} \langle \widetilde{w_{mn}}, \widetilde{w_{rs}} \rangle && \text{par sesquilinearité à droite de } \langle \cdot, \cdot \rangle \\ \langle \tilde{w}_{nm}, \tilde{w}_{sr} \rangle &= 2\pi e^{-i(mn-rs)\bar{x}\bar{k}_x} \langle w_{mn}, w_{rs} \rangle && \text{par (18)} \end{aligned}$$

D'ou finalement, par 15 et 3 :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{w}_{nm}, \tilde{w}_{sr} \rangle &= 2\pi e^{-\pi\left(\frac{(m-r)^2}{2} + \frac{(s-n)^2}{2} + i[(m+r)(s-n) + 2(mn-rs)]\right)\nu_x} \\ \langle \tilde{w}_{nm}, \tilde{w}_{sr} \rangle &= 2\pi e^{-\pi\left(\frac{(m-r)^2}{2} + \frac{(s-n)^2}{2} + i(m-r)(n+s)\right)\nu_x} \end{aligned}$$

A.4 Théorème de Parseval

Proposition A.4

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle \quad (18)$$

Preuve

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int f(x)g(x)^* dx && \text{par définition du produit scalaire} \\ &= \int \left(\frac{1}{2\pi} \int \tilde{f}(k_x) e^{ixk_x} dk_x \right) g(x)^* dx && \text{par (TF)} \\ &= \int \frac{1}{2\pi} \tilde{f}(k_x) \left(\int g(x)^* e^{ixk_x} dx \right) dk_x && \text{par théorème de Fubini} \\ &= \int \frac{1}{2\pi} \tilde{f}(k_x) \left(\int g(x) e^{-ixk_x} dx \right)^* dk_x && \text{par linéarité de la conjugaison} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{f}(k_x) \tilde{g}(k_x)^* dk_x && \text{par (TF)} \\ \langle f, g \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle && \text{par définition du produit scalaire} \end{aligned}$$

B Formulaire

Les formules ci-dessous sont redémontrées avec les conventions précédentes et présentées de manière à souligner la correspondance entre les domaines spatial et spectral.

Domaine spatial	Domaine spectral
Décomposition spatiale	Transformée de Fourier
$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{f}(k_x) e^{ixk_x} dk_x$	$\tilde{f}(k_x) = \int f(x) e^{-ixk_x} dx$ (TF)
$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{f}(k_x, k_y) e^{i(xk_x + yk_y)} dk_x dk_y$	$\tilde{f}(k_x, k_y) = \int f(x, y) e^{-i(xk_x + yk_y)} dx dy$ (T2D)
Fonctions constantes...	... et impulsions de Dirac
$f(x) = 1, g(x) = \delta(x)$	$\tilde{f}(k_x) = \delta(k_x), \tilde{g}(k_x) = 1$ (19)
Translation spatiale	Modulation spectrale
$f(x) \rightarrow f(x - x_0)$	$\tilde{f}(k_x) e^{-ix_0 k_x} = \mathcal{F}[f(x - x_0)]$ (20)
Modulation spatiale	Translation spectrale
$f(x) \rightarrow f(x) e^{ixk_0}$	$\tilde{f}(k_x - k_0) = \mathcal{F}[f(x) e^{ixk_0}]$ (21)
Dilatation spatiale	Dilatation spectrale
$f(x) \rightarrow f(ax)$	$\frac{1}{ a } \tilde{f}\left(\frac{k_x}{a}\right) = \mathcal{F}[f(ax)]$ (22)
Fenêtre gaussienne	Fenêtre transformée
$w(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{L_x}} e^{-\pi \left(\frac{x}{L_x}\right)^2}$	$\tilde{w}(k_x) = \sqrt{\sqrt{2} L_x} e^{-\pi \left(\frac{k_x}{\Omega_x}\right)^2}$
L_x largeur de fenêtre gaussienne	$\Omega_x = \frac{2\pi}{L_x}$ largeur spectrale
Frame de Gabor	Frame de Gabor dans le domaine transformé
$w_{mn}(x) = w(x - m\bar{x}) e^{ixn\bar{k}_x}$, limites $0 < A \leq B < \infty$	$\tilde{w}_{nm}(k_x) = \tilde{w}(k_x - n\bar{k}_x) e^{-im\bar{x}k_x}$, limites $0 < 2\pi A \leq 2\pi B < \infty$
Analyse et synthèse des frames	Analyse et synthèse spectrale des frames
$f = \sum A_{mn} w_{mn}$, où $A_{mn} = \langle f, \hat{w}_{mn} \rangle$	$\tilde{f} = \sum \tilde{A}_{mn} \tilde{w}_{nm} = \sum A_{mn} e^{imn\bar{x}\bar{k}_x} \tilde{w}_{nm}$ (23)
$A_{mn} = \int f(x) \hat{w}(x - m\bar{x})^* e^{-ixn\bar{k}_x} dx$	$A_{mn} = \frac{e^{-imn\bar{x}\bar{k}_x}}{2\pi} \int \tilde{f}(k_x) \widetilde{\hat{w}_{mn}}(k_x)^* dk_x$ (24)

Autres formule utile :

Si $(\bar{x}, \bar{k}_x) = \sqrt{\nu_x}(L_x, \Omega_x)$, alors

$$\tilde{\tilde{w}} = \frac{1}{2\pi} \hat{w} \quad (25)$$

Remarque : le slide 19 de [3] ainsi que la formule (1.44) de [1] comportent des erreurs.

Références

- [1] D. Lugara, “Modélisation d’antennes et de systèmes focaux par décomposition sur une famille de faisceaux gaussiens,” Ph.D. dissertation, Université de Marne-la-Vallée, 2000.
- [2] I. Ghannoum, “Etudes d’outils de calcul de propagation radar en milieu complexe (milieu urbain, présence de multi-trajets...) par des techniques de lancer de faisceaux gaussiens,” Ph.D. dissertation, Ecole doctorale EDITE, 2010.
- [3] C. Letrou, “Frame decomposition of fields and beam tracking in frequency domain,” presented at the European School of Antennas (ESoA), 2015.
- [4] P. Casazza, G. Kutyniok, and F. Philipp, *Finite Frames*. Birkhäuser Boston, 2013.
- [5] J.-P. Gabardo, D. Han, and D. R. Larson, “Gabor frames and operator algebras,” in *Proc. SPIE. 4119*, ser. Wavelet Applications in Signal and Image Processing, vol. VIII, 2000, pp. 337–345.
- [6] P.-Y. Turpin and T. Fouchet. (2009) Structure des ondes planes progressives harmoniques. chapitre3.pdf. [Online]. Available : <http://www.lesia.obspm.fr/perso/thierry-fouchet/optiqueI/>
- [7] R. Balian, “Un principe d’incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique,” in *Comptes-Rendus de l’Académie des Sciences*, ser. 292, 1981, pp. 1357–1362.
- [8] K. Gröchenig, “Acceleration of the frame algorithm,” in *IEEE. Trans. Signal Process.*, vol. 41, 1993, pp. 3331–3340.