Stéphane Overlen

TRAVAUX PRATIQUES : INTEGRALES

INTRODUCTION THEORIQUE

Le but de l'intégration est de calculer l'aire sous une fonction f(x) dans un intervalle [a,b]. L'intégrale de f(x) sera notée $F=\int_a^b f(x).dx$. On dit que a et b sont les bornes d'intégration.
Le but de l'intégration numérique est de diviser la zone d'intégration [a,b] en N subdivisions égales. Nous calculons ensuite l'aire sous la courbe en cumulant l'aire de la fonction pour chaque subdivision. Nous utilisons pour cela les trois méthodes d'intégrations suivantes : méthode des **rectangles**, méthode des **trapèzes** et méthode de **Simpson**.
Ces calculs engendrent alors une erreur dépendant du nombre de subdivision que nous pourrons calculer grâce à la valeur réelle de l'intégrale. Pour finir, nous observerons le nombre de subdivisions nécessaires pour que la fonction soit convergente et mesurerons le temps nécessaire pour le calcul.

1) Méthode des rectangles :

Il s'agit d'approximer l'aire sous la courbe de chaque subdivision en calculant l'aire d'un rectangle de même largeur que la subdivision, et de hauteur égale à un point de la fonction dans la subdivision. Là encore, il existe trois « sous-méthodes » : point milieu, bord gauche et bord droit.

- **Point milieu** : la hauteur du rectangle est égale à la valeur de la fonction au centre de la subdivision. L'avantage du point milieu est qu'il améliore l'ordre de la méthode (polynômes de degré 1).
- **Bord gauche** : la hauteur du rectangle est égale à la valeur de la fonction au bord gauche de la subdivision.
- **Bord droit :** la hauteur du rectangle est égale à la valeur de la fonction au bord droit de la subdivision.

2) Méthode des trapèzes :

Cette fois, l'aire sous la courbe de chaque subdivision est approximée en traçant un segment entre les valeurs de la fonction aux points « a » et « b ». Nous obtenons alors un trapèze de hauteur égale à la largeur de la subdivision, et des bases égales aux valeurs de la fonction en « a » et en « b ».
En calculant les aires des trapèzes de chaque subdivision, nous obtenons une approximation de l'aire sous la fonction. Ainsi, l'aire d'un trapèze qui est :

Aire du trapèze = (Petite base + Grande base) x Hauteur / 2

devient :

Aire du trapèze = (f(a) + f(b)) * (b - a) / 2

3) Méthode de Simpson :

La méthode de Simpson est une approximation de la fonction dans chaque subdivision par une parabole. Le but est de calculer f(a), f(b) et f((a+b) / 2) (bord gauche, droit et point milieu) et ainsi obtenir 3 équations à 3 inconnues. Le calcul final est :

I(f) = ((b-a) / 6) * (f(a) + f(b) + (4 * f((a+b) / 2)))

ALGORITHME

Dans un soucis de modularité, le code a été écrit et enregistré dans plusieurs scripts Octave. La première chose à faire avant de lancer le programme est de définir la fonction dont nous souhaitons calculer l'intégrale. Elle se situe dans le fichier « fonction.m ». Attention à bien précéder chaque signe d'un « . » afin que le format du résultat de la fonction corresponde au vecteur sur lequel on l'applique.
Le programme s'exécute ensuite en écrivant la ligne de commande suivante :
>> overlen(a,b,N)
Les paramètres « a » et « b » sont les bornes d'intégration de la fonction et « N » est le nombre de subdivisions. Grâce à ces paramètres, nous pouvons déterminer la taille des subdivisions :

n = plage d'intégration / nombre de subdivisions

La taille des subdivisions est divisée par 4 pour les besoins des calculs de convergence.
L'utilisateur doit ensuite entrer la/les méthode(s) qu'il souhaite utiliser pour le calcul de l'intégrale. La/Les méthode(s) choisie(s) récupère(nt) la fonction et l'applique(nt) à toutes les valeurs de x dont nous aurons besoin pour les calculs (valeurs stockées dans le vecteur « y »). Après l'initialisation des variables, nous effectuons dans une boucle « for » le calcul de l'aire sous la courbe dans chaque subdivision et l'ajoutons à la somme des aires précédemment calculées. A l'intérieur de cette boucle « for » s'exécute une seconde boucle de deux itérations qui permet d'effectuer le même calcul pour des subdivisions deux fois plus petites.
Puis nous calculons l'intégrale exacte de la fonction grâce à la fonction « quadv » que j'ai choisie car elle est plus précise que la fonction « quad ». Celle-ci nous donne la valeur de Iexacte(a,b,f(x)) et nous permet donc de calculer l'erreur commise par la méthode choisie de la manière suivante :

Erreur(N) = | (Iexacte(a,b,f(x)) – I(a,b,f(x)) / Iexacte(a,b,f(x)) |

Nous calculons ensuite la convergence de la fonction avec la formule suivante :

converge = | (aire - aireConv) / aireConv |

Si celle-ci est inférieure à **ε**, alors la fonction est convergente.
Et pour finir, la fonction d'affichage est appelée avec en paramètres les valeurs à afficher.

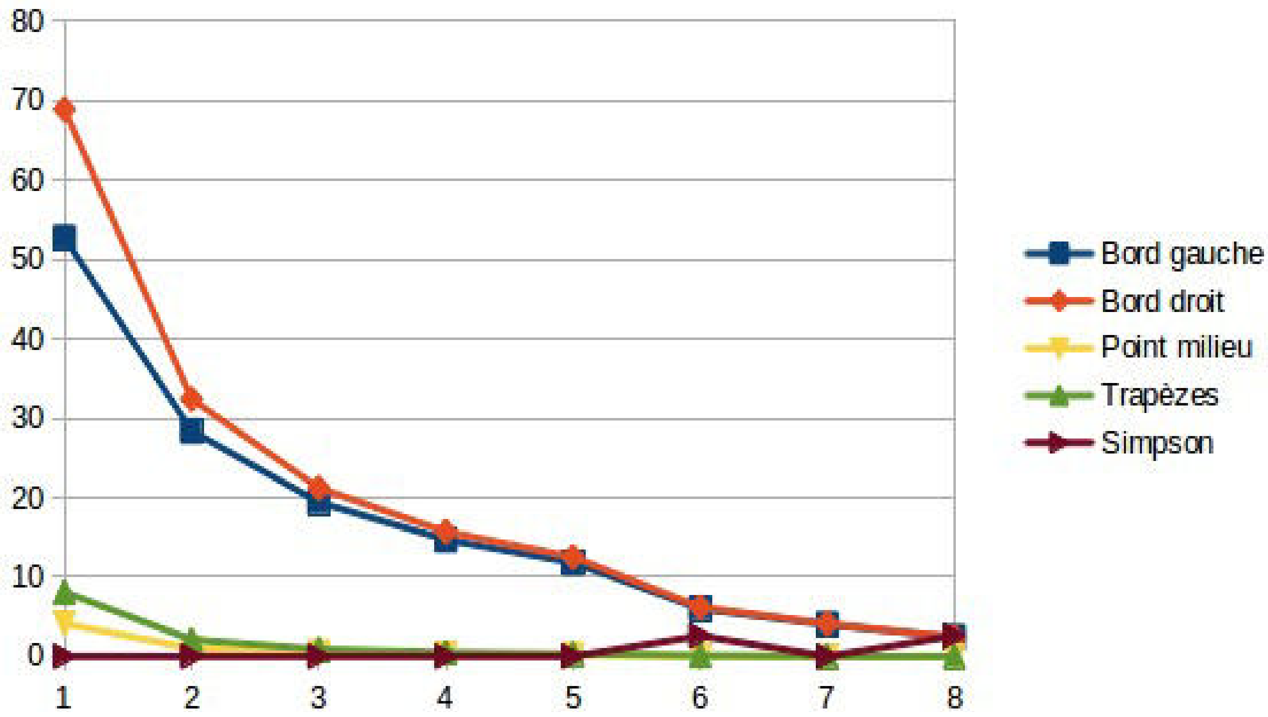
RESULTATS OBTENUS

La fonction que j'ai utilisée dans mes calculs est la suivante : $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$.
Les bornes d'intégrations sont $a = 0$ et $b = 6$.
On constate pour la plupart des méthodes de calculs que l'erreur diminue au fur et à mesure que l'on augmente le nombre de subdivisions (cf graphique page 3). Les méthodes des rectangles bord droit et bord gauche ne sont pas fiables, tandis que les méthodes des point milieu et trapèzes ont des résultats acceptbales. La méthode de Simpson est la plus fiable avec une erreur égale ou proche de 0 pour chaque valeur de N.

On constate également que le nombre de subdivisions influe sur la convergence de la fonction. Plus N est élevé, plus la fonction converge vers **ε**. En revanche, on constate que le temps d'exécution augmente proportionnelement au nombre de subdivisions. L'exécution de toutes les méthodes prend 14 ms pour seulement 10 subdivisions, et monte à presque 35 ms pour 200 subdivisions.

CONCLUSION

En conclusion, la méthode de Simpson semble la plus indiquée pour intégrer correctement une fonction. Son temps d'exécution est parfois moins élevé que des méthodes telles que celle des rectangles et sa précision est malgré tout nettement meilleure.



Légende :

abscisse = nombre de subdivisions (2, 4, 6, 8, 10, 20, 30, 50)
Ordonnée = erreur (%)