Questions de cours.

- Produit de deux matrices élémentaires.
- Transposée du produit de deux matrices. Généralisation à la transposée d'un produit fini de matrices (carrés)
- Formule de Leibniz pour les polynômes.
- Dérivées successives de X_n.
- Si $P \in \mathbf{R}[X]$, alors $z \in \mathbf{C}$ est racine de P ssi $\overline{z}$ est racine de P. Lorsque c'est le cas, montrer que z et $\overline{z}$ ont la même multiplicité.

Exercices.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On se donne N une matrice nilpotente de $M_n(\mathbf{C})$.

1. Montrer que $I - N$ est inversible et calculer son inverse.
2. Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. On suppose que A et N commutent. Montrer que A est inversible si et seulement si $A + N$ est inversible.

Exercice 2. Montrer que A définie ci dessous est inversible et calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Chercher les matrices $M \in M_2(\mathbf{C})$ vérifiant $M^2 = I_2$.

Exercice 4. On considère :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est inversible et calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$ puis $n \in \mathbf{Z}$.

Exercice 5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit une matrice symétrique.

Exercice 6. Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbf{R})$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 7. Soient A et B deux matrices nilpotentes. On suppose qu'elles commutent. Montrer que $A + B$ est nilpotente.

Exercice 8. On considère A une matrice antisymétrique réelle de taille n.

1. Montrer que $X^T AX = 0$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$.
2. En déduire que $I_n + A$ est inversible.
3. Montrer que $M = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ est orthogonale, c'est à dire que $M^T M = I_n$.

Exercice 9. Soit $A, B \in M_n(\mathbf{R})$. On suppose que $AB + BA = 0_n$. Proposer une formule de développement pour $(A + B)^n$.

Exercice 10. Déterminer les matrices A qui commutent avec toutes les matrices de $M_n(\mathbf{R})$.

Exercice 11. Décomposer $X^4 + 2X^3 - 2X - 2$ en facteur irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 12. Décomposer $X^4 + 1$ en facteur irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 13. Soit $\alpha \in]0, \pi[$. Décomposer $X^{2n} - 2\cos(\alpha)X^n + 1$ en facteur irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$.

Exercice 14. Déterminer les polynômes de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant : $P(X + 1) + P(X) = 0$.

Exercice 15. Calculer le quotient Q et le reste R de la division euclidienne de A par B dans chacun des des cas suivants :

1. $A = 2X^4 + X^3 - X^2 - X - 1 \quad et \quad B = X^3 + X^2 + X - 3$
2. $A = X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38 \quad et \quad B = X^2 - X - 7$
3. $A = X^5 - X^2 + 2 \quad et \quad B = X^2 + 1$

Exercices 16. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$. Calculer le reste de de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$, puis celui de P par $(X - a)^2$. (a, b sont deux complexes distincts)

Exercice 17. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$f_n : x \in [-1, 1] \longmapsto \cos(n \arccos(x))$$

1. Donner une expression simple de f_0, f_1 et f_2.
2. Pour $n \in \mathbf{N}^\star$ et $x \in [-1, 1]$, exprimer $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.
3. En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes (T_n) dont les fonctions polynomiale associées coïncide avec les f_n sur $[-1, 1]$.
4. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
5. Montrer que T_n est scindé à racine simple sur $[-1, 1]$.

Ces polynômes particuliers ont un nom : les polynômes de Tchebychev.