Questions de cours.

1. Unicité de la limite
2. TVI et algorithme de dichotomie.
3. L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.
4. Les applications lipschitzienne sur un intervalle sont continues.

Exercices.

Exercice 1. Étudiez les limites suivantes lorsque $x \to +\infty$

1. $3x^2 - e^x$
2. $\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$
3. $xe^{\sqrt{x}}$
4. $\frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$
5. $\frac{1}{x}\lfloor x \rfloor$
6. $x^2 + x\sin x$

Exercice 2. Étudiez les limites suivantes lorsque $x \to 0^+$

1. $\frac{1}{x} + \ln x$
2. $x^{\sqrt{x}}$
3. $|\ln(x)|^{\frac{1}{\ln x}}$
4. $\frac{\sin x}{x}$
5. $x\sin(\ln(x))$
6. $\frac{1}{x}\lfloor x \rfloor$

Exercice 3. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ strictement décroissante. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est toujours strictement supérieure à la limite.

Exercice 4. Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle nécessairement ses bornes ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction.

1. Rappeler les définitions de l'image réciproque et d'une partie bornée.
2. Montrer que :

$$|f| \underset{\pm\infty}{\longrightarrow} \infty \iff f^{-1}(B) \text{ est bornée pour toute partie bornée } B \subset \mathbf{R}$$

Exercice 6. *TVI généralisé.* Soit f une fonction admettant comme limites -1 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Montrer que f s'annule.

Exercice 7. On pose pour tout $x \in \mathbf{R}$: $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$. Montrer que f est continue.

Exercice 8. Soient $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues. Montrer que $h = \max(f, g)$ est continue.

Exercice 9. Soient $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues. On suppose que pour tout $r \in \mathbf{Q}$: $f(r) = g(r)$. Montrer que $f = g$.

Exercice 10. Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues en 0 telles que :

$$\forall x \in \mathbf{R} : f(2x) = f(x)$$

Exercice 11. Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues en 0 telles que :

$$\forall x, y \in \mathbf{R} : f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Exercice 12. On considère $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que

$$f(c) = f(c + \frac{1}{n})$$

Exercice 13. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que f n'est ni majorée ni minorée. Montrer que f est surjective.

Exercice 14. Dans cet exercice, on se propose de montrer que si une fonction continue est nulle sur une partie dense de $\mathbf{R}$, alors elle nulle sur $\mathbf{R}$ tout entier. Soit f une telle fonction et soit E une partie dense de $\mathbf{R}$, c'est à dire que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$: $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap E \neq \emptyset$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe une suite $(e_n)_{n \geq 0} \in E^{\mathbf{N}}$ telle que $e_n \longrightarrow x$.
2. En déduire le résultat voulu.