# Questions de cours.

1. Énoncé et démonstration du théorème de Rolle.
2. Énoncé et démonstration du théorème des accroissements finis.
3. Énoncé et démonstration du théorème de la limite de la dérivée.
4. Énoncé et démonstration de la formule de Leibniz.
5. On pose $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^n(\mathbf{R}_+^\star)$ et que pour tout $n$ il existe $P_n \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $f^{(n)} = \frac{P_n}{X^{2n}} f$

# Exercices.

***Exercice 1.*** Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions suivantes :

1. cos et sin. On proposera une formule qui ne dépend pas de la classe de $n$ modulo 4.
2. $x \mapsto x^p$ pour $p \in \mathbf{Z}$
3. $x \mapsto (x^2 - x - 1)e^x$
4. $x \mapsto \cos(x)e^x$
5. $x \mapsto \frac{1}{x-\lambda}$

***Exercice 2.*** *Théorème de Darboux.*
Soit $f : ]a, b[ \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Soient $x, y \in ]a, b[$. On suppose que $f'(x) < 0$ et $f'(y) > 0$. Montrer que $f'$ s'annule. Proposez une généralisation de ce résultat.

***Exercice 3.*** *Vrai ou faux ?*
Pour chacune de ses affirmations, fournissez un contre-exemple ou une preuve.

1. Une fonction dérivable sur $\mathbf{R}^\star$ de dérivée nulle sur $\mathbf{R}^\star$ est constante.
2. Si $f$ est convexe sur $[a, b]$ alors elle est continue sur $]a, b[$.
3. Si $f$ et $g$ sont convexes, alors $g \circ f$ est convexe.
4. Si $f : [0, \infty[ \to \mathbf{R}$ est convexe décroissante, alors elle est minorée.
5. Une fonction dérivable en 0 est continue sur un voisinage de 0.

***Exercice 4.*** Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Montrer que $f$ est lipschitzienne si et seulement si $f'$ est bornée.

***Exercice 5.*** Soit $f$ dérivable en $a \in \mathbf{R}$. Étudiez

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$$

***Exercice 6.*** On pose $f = \ln \circ \ln$, défini sur $]1, \infty[$.

1. Justifier que $f$ est bien défini et montrer que $f$ est concave.
2. En déduire que

$$\forall x, y \in ]1, \infty[ : \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$

***Exercice 7.*** Soit $f : \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}$ une fonction bornée et dérivable. On suppose que $f$ admet une limite $\ell$ en $+\infty$. Déterminer la valeur de $\ell$.

***Exercice 8.*** Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ dérivable. On pose

$$\forall x \in [0,1] : \varphi(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ f(2x-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

A quelle(s) condition(s) $\varphi$ est-elle continue ? Dérivable ?

***Exercice 9.*** On pose $f : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$.

1. Montrer que $f$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et qu'il existe une suite de polynômes $(P_n) \in \mathbf{R}[X]^{\mathbf{N}}$ telle que :
   (a) $f^{(n)}(x) = P_n(x) f(x)$
   (b) $P_{n+1} = P_n' - XP_n$

   Calculer les premiers termes de cette suite.
2. Déterminer le coefficient dominant de $P_n$, son degré et ses limites en $\pm\infty$.
3. On suppose $P_n$ scindé à racines simples. On note $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ ses racines. Déterminer le signe de $P_n'(\alpha_i)$ pour tout $i$.

***Exercice 10.*** *Théorème du point fixe de Banach-Picard.*
Soit $f : [a,b] \mapsto [a,b]$ une fonction $\mathcal{C}^1$ vérifiant $|f'| < 1$.

1. Montrer que $f$ admet un unique point fixe. On le notera $\alpha$.
2. Étudiez la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} & u_0 \in [a,b] \\ \forall n \in \mathbf{N} : & u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

***Exercice 11.*** *Théorème de Rolle généralisé.*
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable et $\ell$ un réel. On suppose que

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = \ell$$

Montrer que $f'$ s'annule. Proposer et démontrer une généralisation analogue pour le théorème des accroissements finis.