Question de cours 1

Inégalités triangulaire dans $\mathbb{C}$.
Condition d'égalité. Interprétation géométrique.

Question de cours 2

Racine n-ième de l'unité.
Application : Tracer les racines 3-ième de l'unité dans le plan complexe.

Question de cours 3

Dérivabilité de $arcsin$.
Tracer la courbe représentative de $arcsin$ sur $[-1, 1]$.

Question de cours 4

Dérivabilité de $arccos$.
Tracer la courbe représentative de $arccos$ sur $[-1, 1]$.

Question de cours 5

Dérivabilité de $arctan$.
Tracer la courbe représentative de $arctan$ sur $\mathbb{R}$.

stephane.tholon@gmail.com

Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Linéariser $sin^3(x)$ et $cos^4(x)$.

2. Exprimer e^{i5x} en fonction de $sin(x)$ et $cos(x)$. En déduire des expressions de $sin(5x)$ et $cos(5x)$.

Exercice 2

Soit $a \in]0, +\infty[$
On note $z = a + i \in \mathbb{C}$ et ϕ l'argument de z dans $] - \pi, \pi]$

1. Montrer que $\phi = arctan(1/a)$. Que dire si $a < 0$?

2. *Application :* Calculer $arctan(1/2) + arctan(1/3)$

Exercice 3

Soient $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$

1. Montrer que

$$\mid z_1 + z_2 + \cdots + z_n \mid \ \leq \ \mid z_1 \mid + \mid z_2 \mid + \cdots + \mid z_n \mid$$

2. Montrer que l'on a égalité si et seulement si il existe $k \in [|1, n|]$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $l \in [|1, n|]$:

$$z_l = \lambda_l z_k$$

3. Interpréter graphiquement cette dernière condition.

Exercice 4

Pour la résolution de cet exercice, on admettra le résultat suivant:
Théorème: Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors l'équation $f(z) = 0$ admet exactement n solutions comptées avec multiplicité.

On pose $f : z \longmapsto z^3 + az + b$ où a et b sont deux réels.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$f(z) = 0 \Longleftrightarrow f(\overline{z}) = 0$$

En déduire que $f(z) = 0$ admet au moins une solution réelle. Auriez vous pu le démontrer d'une autre façon ?

2. On pose $b = 3$. Déterminer des conditions sur a pour que $f(z) = 0$ admette 3 solutions réelles distinctes. Comment procéderiez vous pour trouver un tel a ?

Exercice 5

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 2cos(\theta)z + 1 = 0$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
$$(\frac{z-1}{z+1})^n + (\frac{z+1}{z-1})^n = 2cos(\theta)$$

Exercice 6

Soit (E) l'équation :
$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0$$

1. Chercher une solution imaginaire pure (de la forme ai où a est un réel).

2. Montrer que l'on peut écrire (E) sous cette forme :
$$(z - ai)(z^2 + bz + c) = 0$$
où b et c sont des complexes.

3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 7

1. Montrer que pour pour tout réel x :
$$sin(x) \leq x$$

2. En déduire que pour tout réel t :
$$|e^{it} - 1| \leq |t|$$
Interpréter graphiquement.

Exercice 8

1. Montrer que pour pour tous réels x, y : $2xy \leq x^2 + y^2$

2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Etablir :
$$|a+b|^2 \leq (1 + |a|^2)(1 + |b|^2)$$

Exercice 9

1. Déterminer les $n \in \mathbb{Z}$ tels que $(1+i\sqrt{3})^n$ est un réel.

2. Calculer les racines carrées de $i+\sqrt{3}$ sous forme algébrique et trigonométrique. En déduire la valeur de $cos(\frac{\pi}{12})$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 + iz - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

4. Mettre sous forme algébrique $(2+2i)^6$, $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{20}$ et $\frac{(1+i)^{2000}}{(i-\sqrt{3})^{1000}}$.

5. Factoriser pour tout $x \in \mathbb{R}$: $cos(2x) + cos(3x)$