Questions de cours.

(a) Deux DL en 0 parmi exp, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \ln(1-x)$, cos, sin, tan, arctan, cosh, sinh, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$)

(b) i. DL de tan en 0 à l'ordre 5
ii. Limite de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$
iii. Formule de Taylor pour les polynômes
iv. DL à l'ordre 3 en 0 de $\sinh^{-1}$. (On montrera que sinh est bijective avant de calculer ce DL.)

Exercices.

Exercice 1. *Quelques DL :*

(a) A l'ordre 3 en $x=0$: $\sqrt{1+\sin(x)}$

(b) A l'ordre 6 en $x=0$: $\sin(x)\cos(2x)$

(c) A l'ordre 2 en $x=1$: $\exp(\sqrt{x})$

(d) A l'ordre 4 en $x=0$: $\frac{1}{x^2+x+1}$

(e) A l'ordre 3 en $x=0$: $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(f) A l'ordre 5 en $x=0$: $\cos(x)^{\sin(x)}$

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes en $+\infty$

(a) $n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\pi - 1\right)$

(b) $(n+1)(n^{\frac{1}{n}}-1)$

Exercice 3. Déterminer les limites suivantes.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$

Exercice 4. *Étude d'une suite implicite.*
On considère pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ l'équation $x+\ln(x)=n$.

(a) Montrer que cette équation admet une unique solution dans $\mathbf{R}_+^\star$ pour tout n. On la note x_n. Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante. En déduire sa limite.

(b) Montrer que $x_n \sim n$ en $+\infty$

(c) Montrer que $x_n = n - \ln(n) + o(\ln(n))$

(d) Montrer que $x_n = n - \ln(n) + \ln(n)/n + o(\ln(n)/n)$

Exercice 5. Déterminer un équivalent de la suite définie par

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Exercice 6. Déterminer un équivalent de arccos en 1^-

Exercice 7. Soit (u_n) une suite réelle décroissante telle que

$$u_n + u_{n+1} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Cherchez un équivalent simple de (u_n)

Exercice 8. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbf{R}$:

$$\left(1+\frac{\mathrm{i}\theta}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

Exercice 9. *Constante d'Euler-Mascheroni.*
On pose pour $n \geq 1$:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$$

(a) Montrer par la méthode de votre choix que :

$$\forall x \in \left]-1,\infty\right[\quad \ln(x+1) \leq x$$

(b) Justifier que (a_n) et (b_n) sont adjacentes. On notera γ [1] leur limite commune.

(c) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)_{n\geq 1}$. En déduire que cette suite diverge.

Exercice 10. Chercher un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction

$$x \mapsto \arctan(\mathrm{e}^x)$$

. Tracer l'allure de la courbe de cette fonction au voisinage de $x=0$.

Exercice 11. *Intégrales de Wallis.*
Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\mathrm{d}x$$

1. γ est appelé la constante d'Euler-Mascheroni.

(a) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ par $u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ est constante.

(b) En déduire un équivalent simple de (I_n).

Exercice 12. Soient a, b deux réels positifs. Étudiez

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n$$

Exercice 13. *Une autre suite implicite.*

On introduit pour tout entier naturel n le polynôme $P_n = X(X-1)(X-2)\cdots(X-n)$

(a) Montrer que P_n' admet une unique racine de $[0,1]$. On la note x_n. Ceci détermine une suite (x_n).

(b) Étudiez la monotonie de cette suite.

(c) Montrer que pour tout $x \neq 0, 1, 2, \ldots, n$:

$$\frac{P_n'(x)}{P_n(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k}$$

(d) Déterminez un équivalent de la suite (x_n). On admettra le résultat de l'exercice 9, à savoir

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \underset{\infty}{\sim} \ln(n)$$