Multivariate Verfahren

Einheit 7: Gruppieren: Multivariate (latente) Modellierung (1)

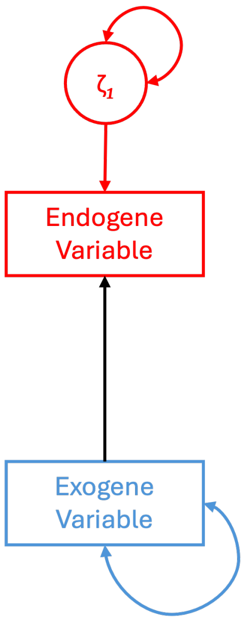
Wintersemester 2025 | Prof. Dr. Stephan Goerigk

Multivariate (latente) Modellierung

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Endogene vs. exogene Variablen

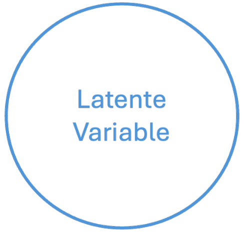
1. **Endogene Variable** = AV: Variable, die durch andere Variablen erklärt wird
    - die meisten manifesten Variablen
    - manche latenten Variablen
    - grafisch: mind. 1 gerichteter Pfeil zeigt auf die endogene Variable (Doppelpfeile gelten nicht!)
    - Benötigen zugehörige Fehlervariable (da wir nie Variablen perfekt aus anderen vorhersagen)
2. **Exogene Variable** = UV: Variable, die nicht durch andere Variablen erklärt wird
    - alle Residuen
    - manche latente Variablen
    - manche manifeste Variablen
    - grafisch: kein gerichteter Pfeil zeigt auf die exogene Variable



Multivariate (latente) Modellierung

Manifeste vs. latente Variablen

1. **Manifeste Variable:** Variable, die direkt beobachtbar ist.
    - z.B. einzelne Fragebogenitems
    - „Physische“ Merkmale von Personen (Gewicht, Größe, etc.)
    - Sonstige beobachtbare Indikatoren wie Krankheitstage, Anzahl der Freunde, Bildung)
2. **Latente Variable:** Variable, die nicht direkt beobachtbar ist.
    - Psychologische Konstrukte wie Intelligenz oder Persönlichkeit
    - Nur indirekt beobachtbar, durch die Messung einer manifesten Variable (die auf Ausprägung der latenten Variable zurückzuführen ist)



Multivariate (latente) Modellierung

Gerichtete vs. ungerichtete Zusammenhänge

1. Gerichteter Zusammenhang:
    - Grafische Darstellung: einfacher Pfeil ($\rightarrow$)
    - Statistik: Regressionsgewicht (synonym: Ladung, Gewicht/Weight, Pfad)
2. Ungerichteter Zusammenhang:
    - Grafische Darstellung: Doppelpfeil ($\leftrightarrow$)
    - Statistik: Kovarianz/Korrelation

Vorsicht!

- Ein gerichteter Zusammenhang muss theoretisch/inhatlich begründet sein
- Das erfordert Vorwissen

Multivariate (latente) Modellierung

Darstellung und Bezeichnungen im SEM

□ beobachtete, so genannte manifeste Variable

◯ latente Variable/Fehlervariable

$\leftrightarrow$ Kovarianz oder Korrelation

$\leftarrow$ semipartielles Regressionsgewicht oder Ladung (λ, Lambda) für Items β für manifeste und γ (Gamma) für latente Variablen

ε Fehlervariable einer manifesten Variablen (Epsilon)

ζ Fehlervariable einer latenten abhängigen Variablen (Zeta)

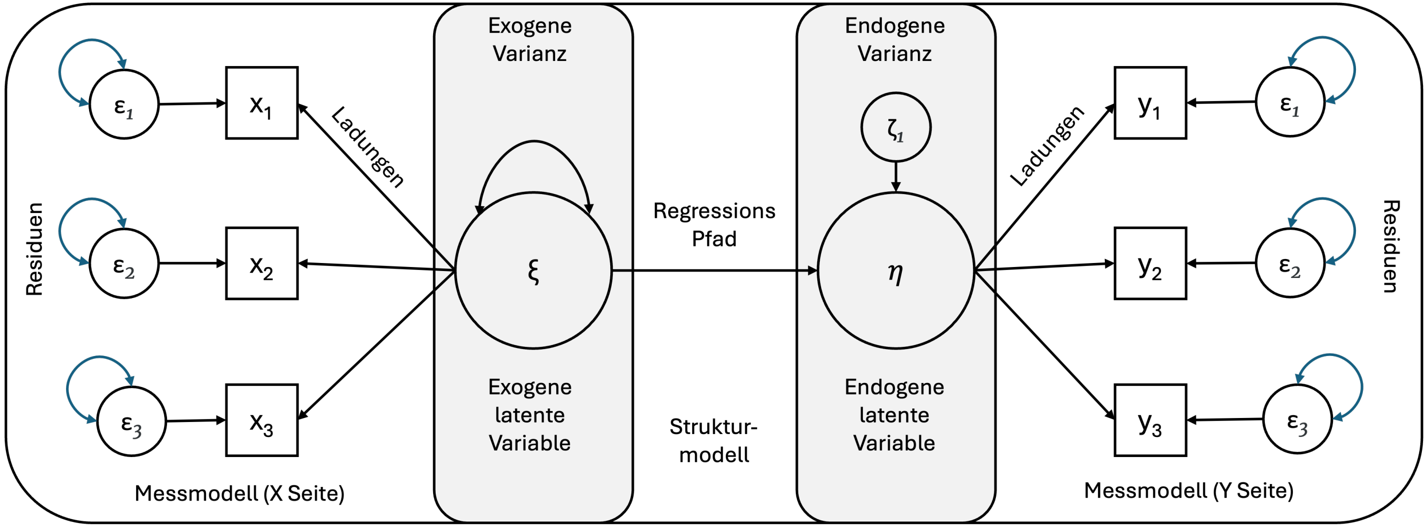
ξ latente unabhängige Variable (Ksi), von der ein Pfeil ausgeht und auf die kein Pfeil zeigt

η latente abhängige Variable (Eta), auf die ein Pfeil zeigt

X Indikatoren der latenten Variablen

Multivariate (latente) Modellierung

Univariate und Multivariate Modelle - Übersicht



Multivariate (latente) Modellierung

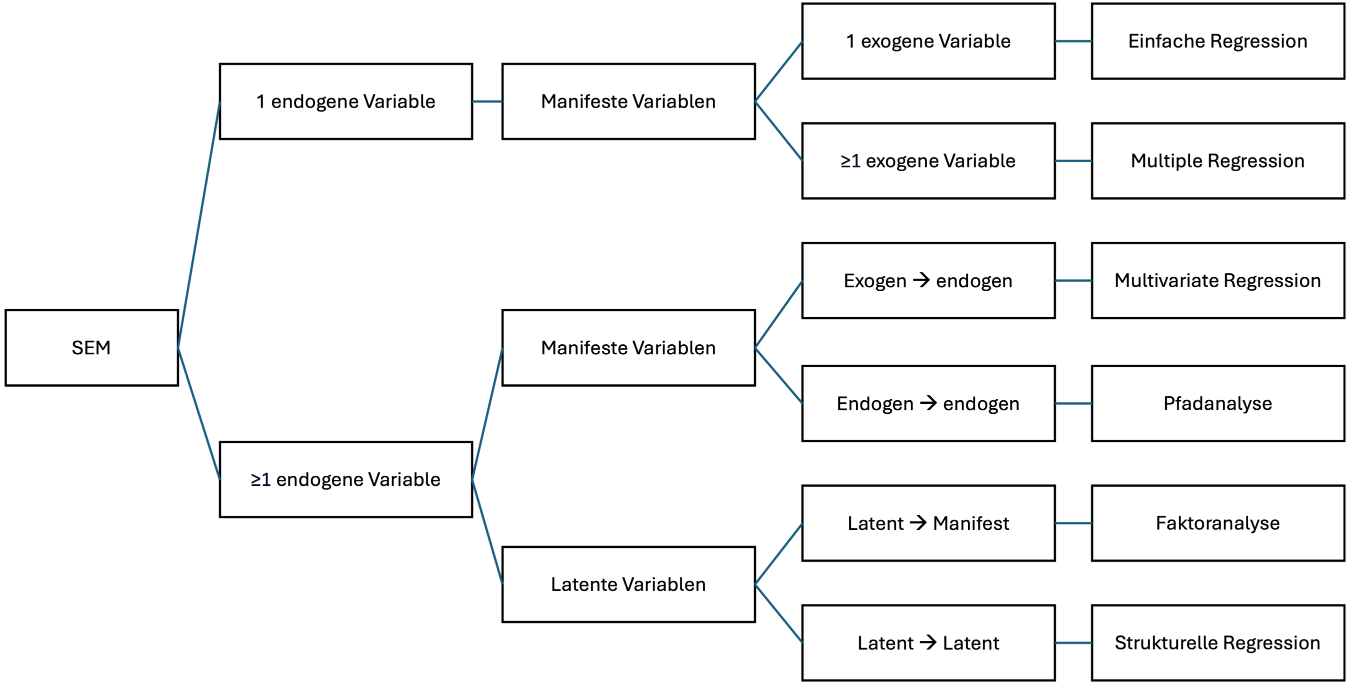
Messmodell vs. Strukturmodell

1. Messmodell:
    - beschreibt die Verknüpfung zwischen einer latenten Variable und ihren Indikatoren bzw. manifesten Variablen
    - spezifiziert die Operationalisierung des Konstrukts
2. Strukturmodell:
    - beschreibt die Verknüpfung zwischen latenten Variablen, oder zwischen latenten Variablen und manifesten Variablen, welche nicht als Indikatoren für latente Variablen verwendet werden
    - Regression zwischen mehreren latenten Variablen

Multivariate (latente) Modellierung

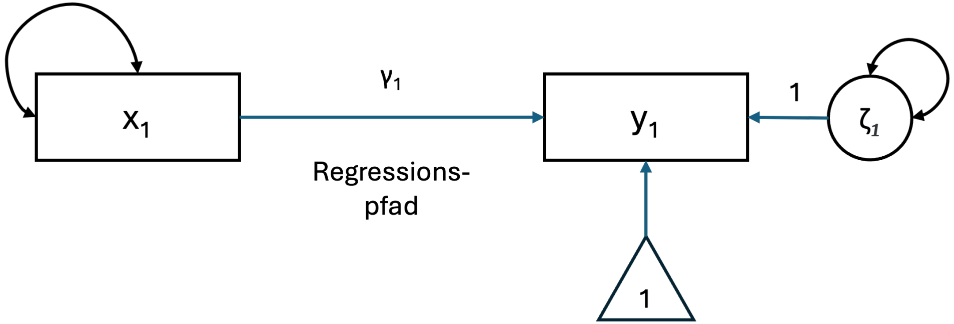
CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Univariate und Multivariate Modelle - Übersicht



Multivariate (latente) Modellierung

Einfache Regression



- Das einfache Regressionsmodell beschreibt die Beziehung zwischen einer beobachteten exogenen Variable und einer beobachteten endogenen Variable.
- Für eine einzelne Person wird die einfache lineare Regressionsgleichung üblicherweise definiert als:

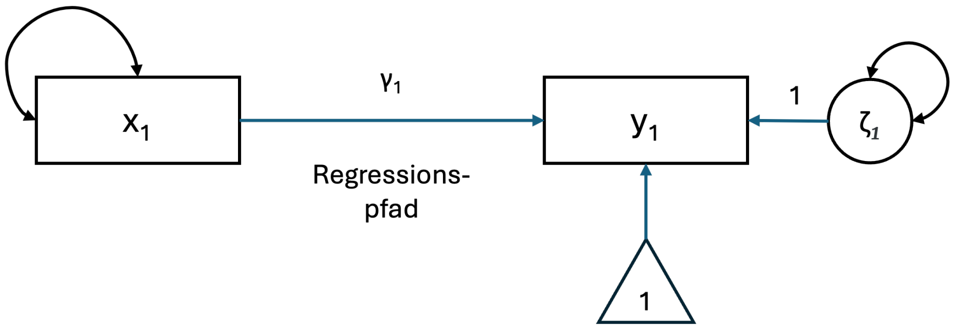
$$y_1 = b_0 + b_1 x_1 + \varepsilon_1$$

wobei b_0 der Achsenabschnitt (Intercept) ist, b_1 der Regressionskoeffizient, x_1 eine beobachtete Prädiktorvariable und ε_1 der Residuenwert.

Multivariate (latente) Modellierung

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Einfache Regression



In der multivariaten Statistik wird für dasselbe Modell oft eine spezielle Notation verwendet:

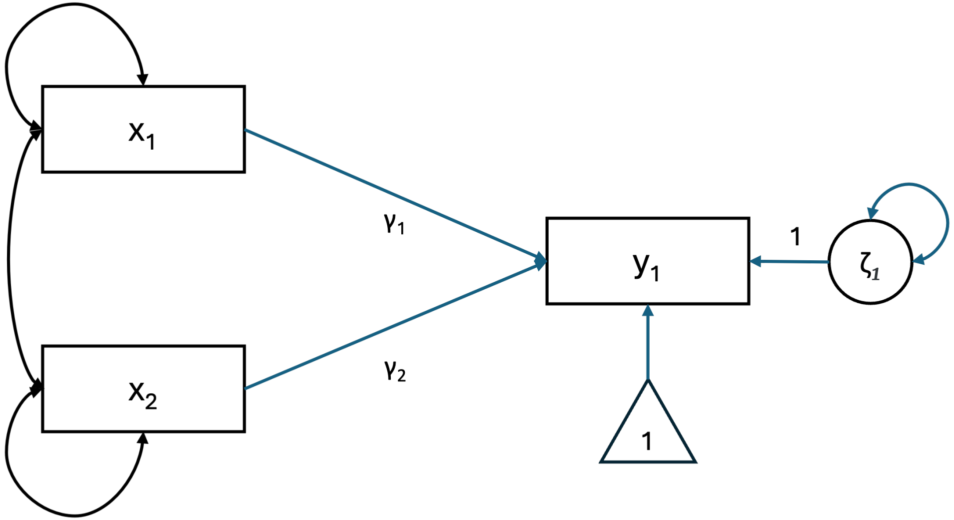
$$y_1 = \alpha + \gamma x_1 + \zeta_1$$

Definitionen

- x_1: Einzelne exogene Variable
- y_1: Einzelne endogene Variable
- b_0, α: Achsenabschnitt (Intercept) von y_1, genannt „Alpha“
- b_1, γ: Regressionskoeffizient, genannt „Gamma“
- ε, ζ_1: Residuen von y_1, genannt „Epsilon“ und „Zeta“

Multivariate (latente) Modellierung

Multiple Regression

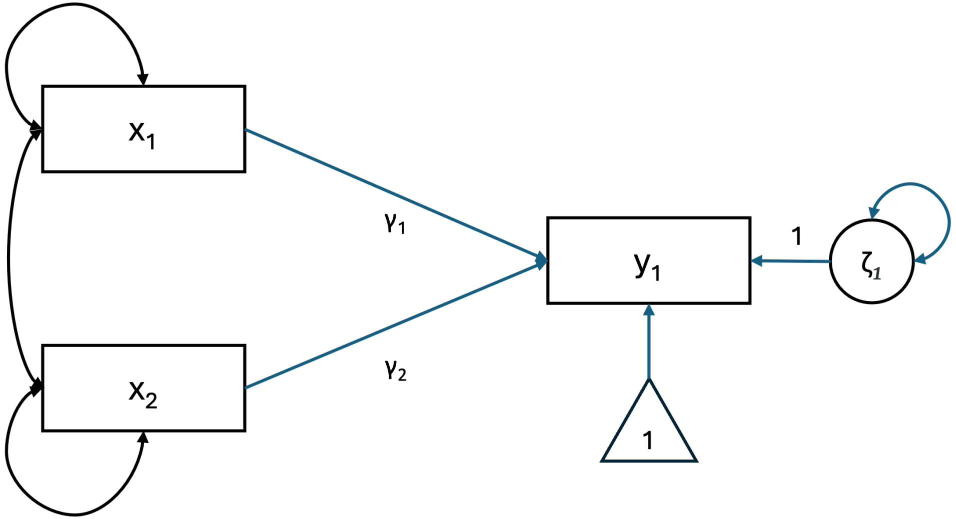


- Die einfache Regression ist auf eine einzelne exogene Variable beschränkt.
- Bei einem endogenen Outcome, aber zwei exogene Prädiktoren liegt eine multiple Regression vor:

$$y_1 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \varepsilon_1$$

Multivariate (latente) Modellierung

Multiple Regression



- Die Matrixnotation ermöglicht es uns, die Gleichung für alle Beobachtungen kompakt darzustellen:

$$y_1 = \alpha_1 + \mathbf{X}\gamma + \zeta_1$$

Definitionen

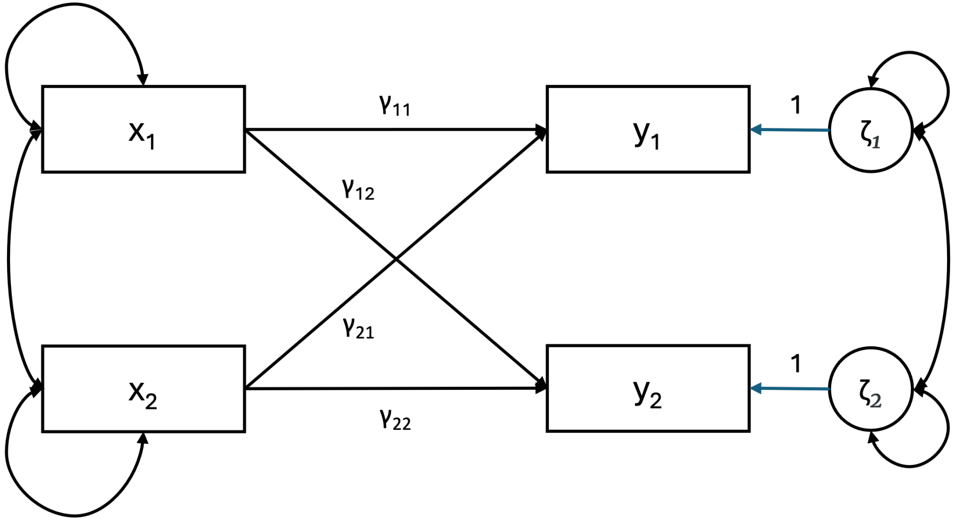
- y_1: Einzelne endogene Variable
- α_1: Achsenabschnitt (Intercept) für y_1
- $\mathbf{X}$: Vektor $(1 \times q)$ der exogenen Variablen
- γ: Vektor $(q \times 1)$ der Regressionskoeffizienten, wobei q die Gesamtanzahl der exogenen Variablen ist
- ζ_1: Residuum von y_1, gesprochen „Zeta"

Annahmen

- $E(\zeta) = 0$: Der Mittelwert der Residuen ist null
- ζ ist unkorreliert mit $\mathbf{X}$

Multivariate (latente) Modellierung

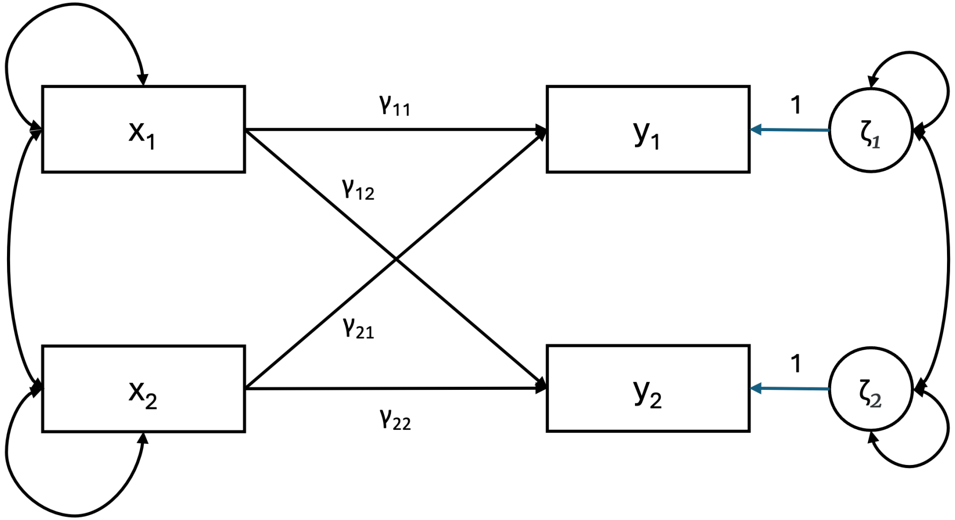
Multivariate Regression



- Einfache und multiple Regressionsmodelle betrachten jeweils ein Outcome (y) zur gleichen Zeit.
- In der multivariaten Regression werden mehrere Outcomes ($y_1, y_2, \ldots, y_k$) gleichzeitig modelliert.

Multivariate (latente) Modellierung

Multivariate Regression



System von Regressionsgleichungen

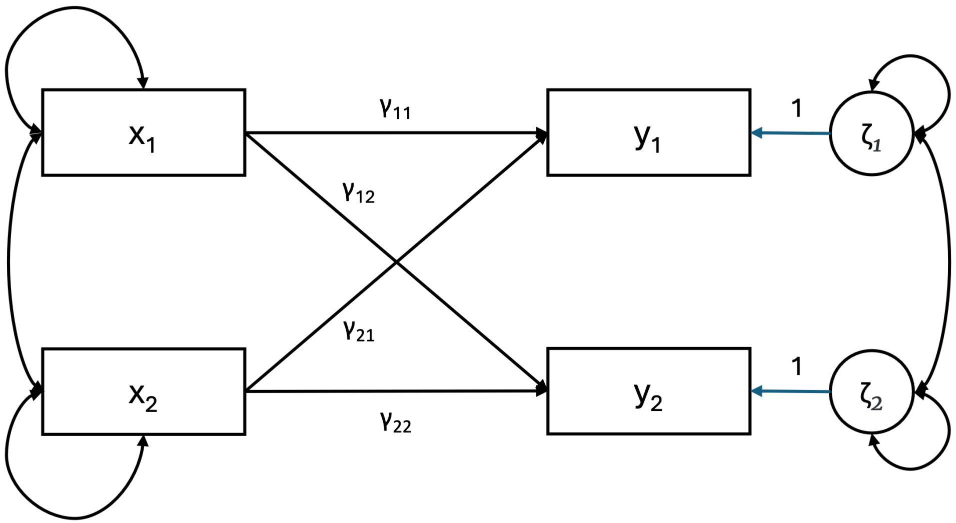
$$y_1 = \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_1 + \zeta_1$$

$$y_2 = \gamma_{21}x_1 + \gamma_{22}x_2 + \zeta_2$$

Multivariate (latente) Modellierung

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Multivariate Regression



Das allgemeine multivariate lineare Modell wird definiert als:

$$\mathbf{y} = \alpha + \Gamma\mathbf{x} + \zeta$$

Um die Matrixnotation klarer zu veranschaulichen, betrachten wir zwei (bivariate) endogene Variablen (y_1, y_2), die durch zwei exogene Prädiktoren (x_1, x_2) vorhergesagt werden:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

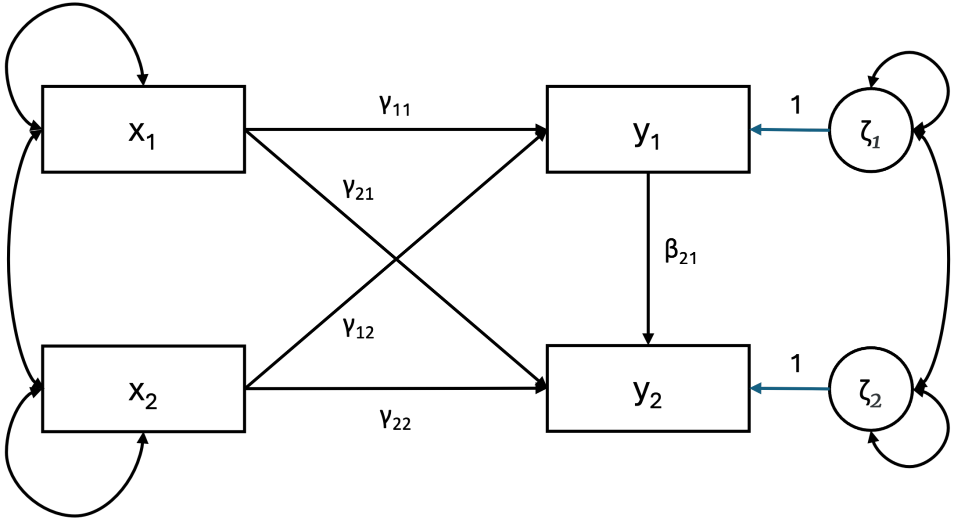
Definitionen:

- $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p)'$: Vektor der p endogenen Variablen (nicht die Anzahl der Beobachtungen!)
- $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_q)'$: Vektor der q exogenen Variablen
- α: Vektor der p Achsenabschnitte (Intercepts)
- Γ: Matrix der Regressionskoeffizienten ($p \times q$), wobei die i-te Zeile die endogene Variable und die j-te Spalte die exogene Variable beschreibt
- $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_p)'$: Vektor der p Residuen (für die Anzahl der endogenen Variablen, nicht der Beobachtungen)

Multivariate (latente) Modellierung

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

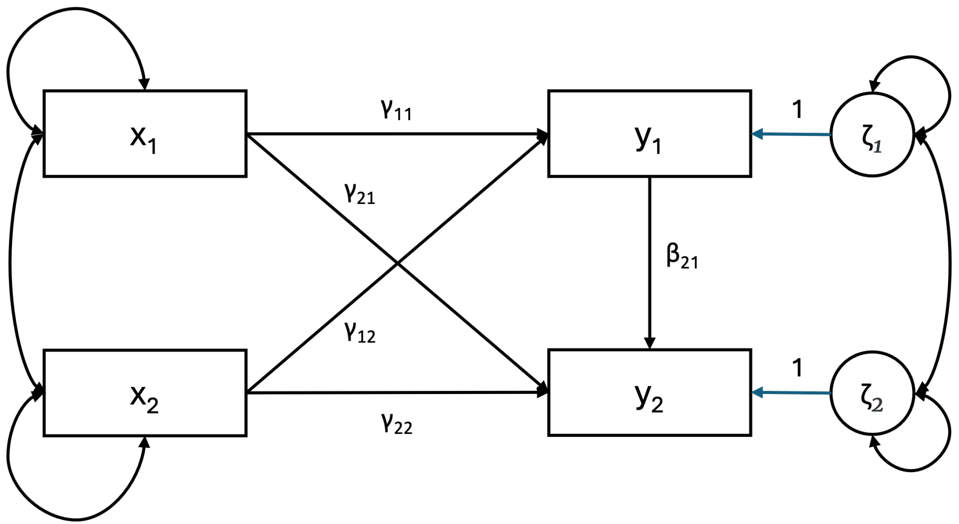
Pfadanalyse



- Die multivariate Regression ist ein Sonderfall der Pfadanalyse, bei der ausschließlich exogene Variablen endogene Variablen vorhersagen.
- Die Pfadanalyse ist ein allgemeineres Modell, in dem alle Variablen weiterhin manifest sind, jedoch endogene Variablen auch andere endogene Variablen erklären dürfen.

Multivariate (latente) Modellierung

Pfadanalyse



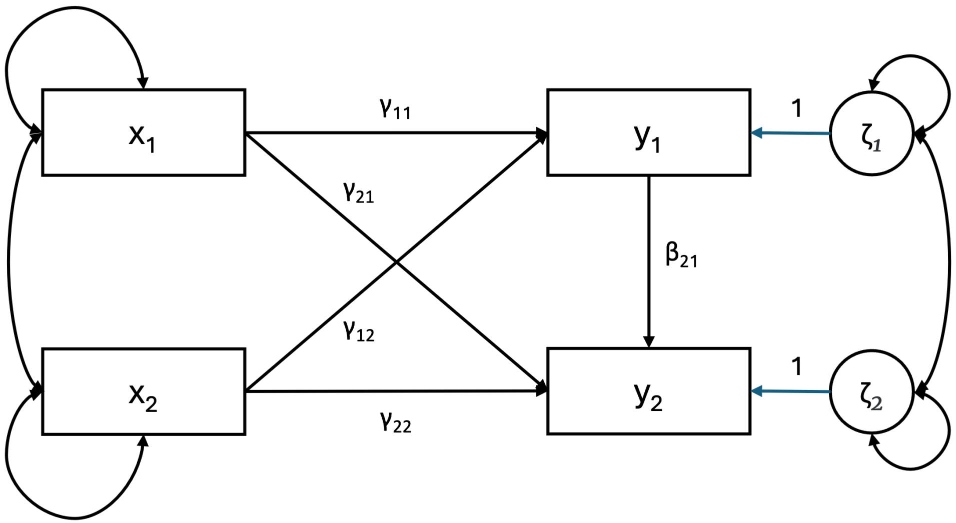
System von Regressionsgleichungen

$$y_1 = \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_1 + \zeta_1$$

$$y_2 = \gamma_{21}x_1 + \gamma_{22}x_2 + \beta_{21}y1 + \zeta_2$$

Multivariate (latente) Modellierung

Pfadanalyse



Matrixnotation:

$$\mathbf{y} = \alpha + \Gamma\mathbf{x} + B\mathbf{y} + \zeta$$

Matrixnotation:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

Definitionen:

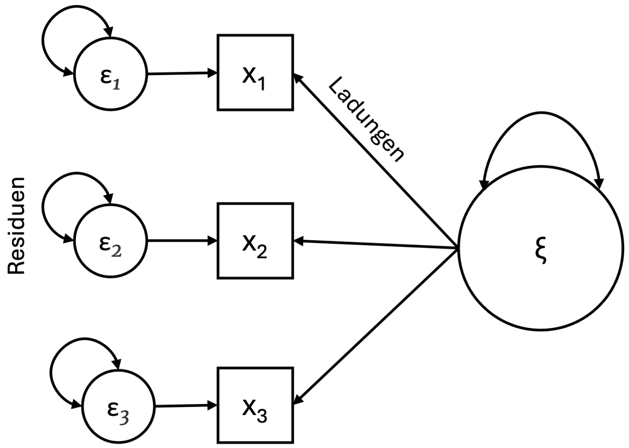
- $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p)'$: Vektor der p endogenen Variablen
- $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_q)'$: Vektor der q exogenen Variablen
- α: Vektor der p Achsenabschnitte (Intercepts)
- Γ: Matrix der Regressionskoeffizienten ($p \times q$) von exogenen zu endogenen Variablen, wobei die i-te Zeile die endogene Variable und die j-te Spalte die exogene Variable beschreibt
- B: Matrix der Regressionskoeffizienten ($p \times p$) von endogenen zu endogenen Variablen, wobei die i-te Zeile die Zielvariable und die j-te Spalte die Quelle beschreibt
- $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_p)'$: Vektor der Residuen

Annahmen:

- $E(\zeta) = 0$: Der Mittelwert der Residuen ist null
- ζ ist unkorreliert mit $\mathbf{x}$
- $(I - B)$ ist invertierbar (zum Beispiel $B \neq I$)

Multivariate (latente) Modellierung

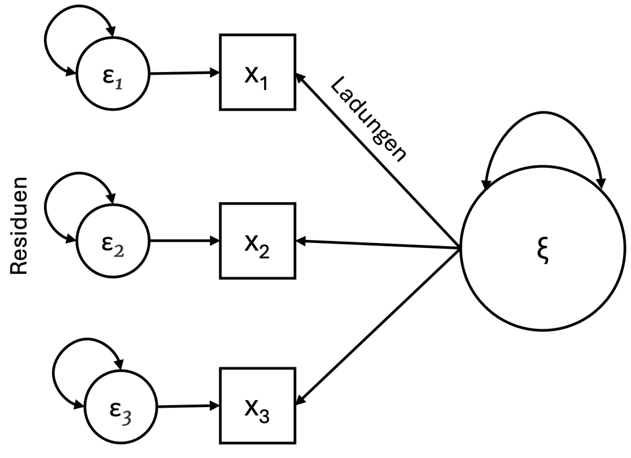
Konfirmatorische Faktorenanalyse



- Eine CFA ist im Wesentlichen ein multivariates Regressionsmodell, bei dem der Prädiktor eine exogene oder endogene latente Variable (Faktor) ist.

Multivariate (latente) Modellierung

Konfirmatorische Faktorenanalyse



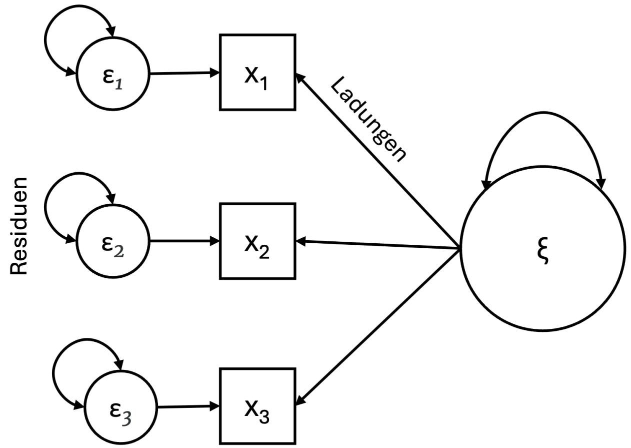
$$\mathbf{x} = \tau_x + \Lambda_x \xi + \varepsilon$$

Definitionen:

- $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_q)'$: Vektor der Indikatoren auf der x-Seite
- τ_x: Vektor der q Achsenabschnitte (Intercepts) für die Indikatoren auf der x-Seite
- ξ: Vektor der n latenten exogenen Variablen
- $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)'$: Vektor der Residuen für die Indikatoren auf der x-Seite
- Λ_x: Matrix der Ladungen ($q \times n$), die den latenten exogenen Variablen entsprechen

Multivariate (latente) Modellierung

Konfirmatorische Faktorenanalyse



$$\mathbf{x} = \tau_x + \Lambda_x \xi + \varepsilon$$

Matrixnotation:

$$\Sigma(\theta) = \begin{pmatrix} \lambda_1^x \\ \lambda_2^x \\ \lambda_3^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^x & \lambda_2^x & \lambda_3^x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_{11}^\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{22}^\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{33}^\varepsilon \end{pmatrix}$$

- θ_ε: Varianz oder Kovarianz der Residuen für die Indikatoren auf der x-Seite

Multivariate (latente) Modellierung

Konfirmatorische Faktorenanalyse

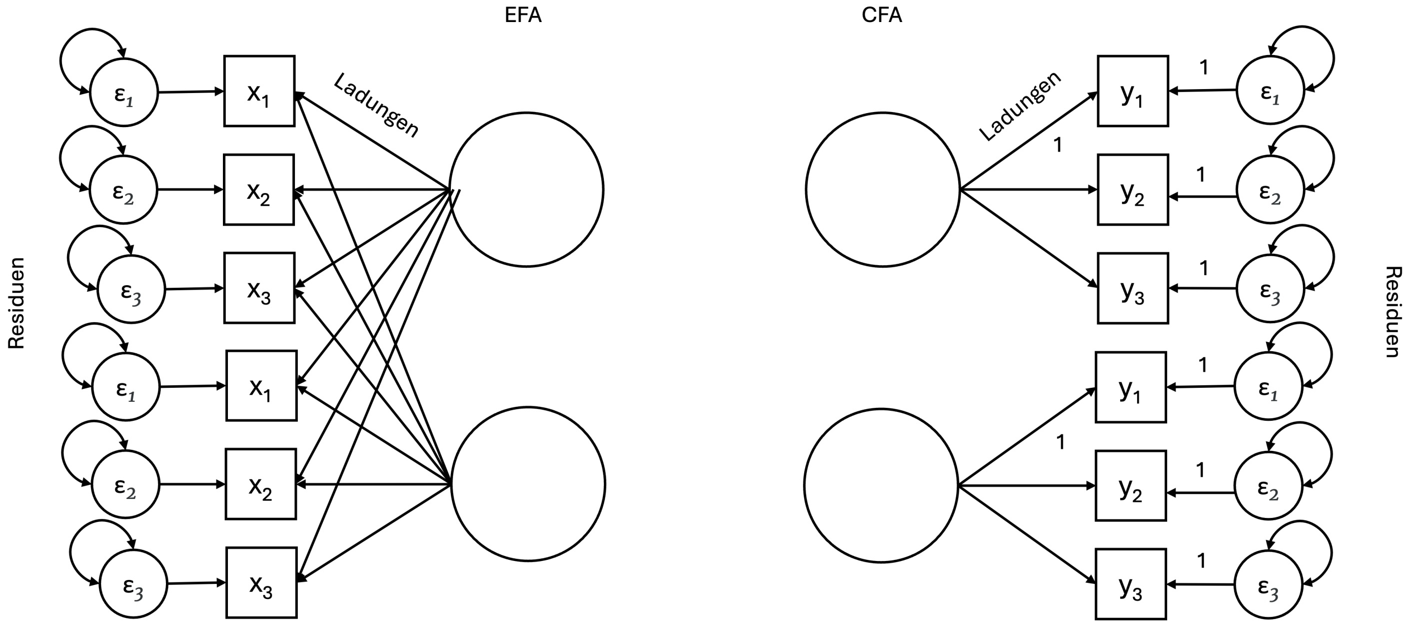
Exploratorische vs. Konfirmatorische Faktorenanalyse

1. Exploratorischen Faktorenanalyse (EFA)
    - Bei der EFA wird für jedes Item auf jedem Faktor eine Ladung zugelassen und geschätzt.
    - „Nebenladungen“ sind erlaubt
2. Konfirmatorische Faktorenanalyse (CFA)
    - Bei der CFA werden nur theoretisch begründete Ladungen geschätzt
    - Ladungen des manifesten Indikators auf den latenten Faktor werden "forciert"

Multivariate (latente) Modellierung

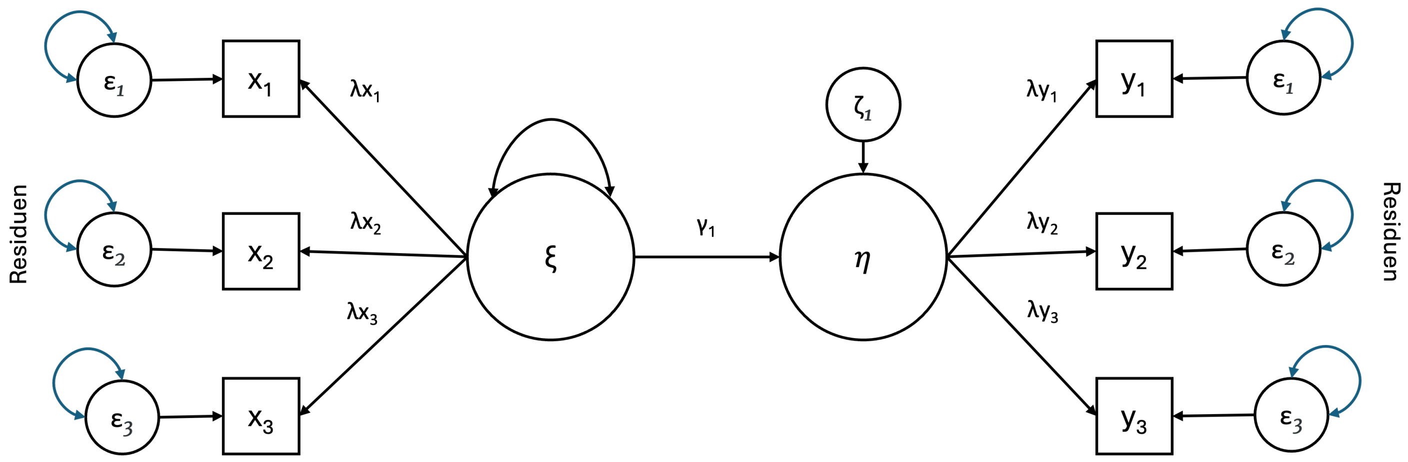
Konfirmatorische Faktorenanalyse

Exploratorische vs. Konfirmatorische Faktorenanalyse



Multivariate (latente) Modellierung

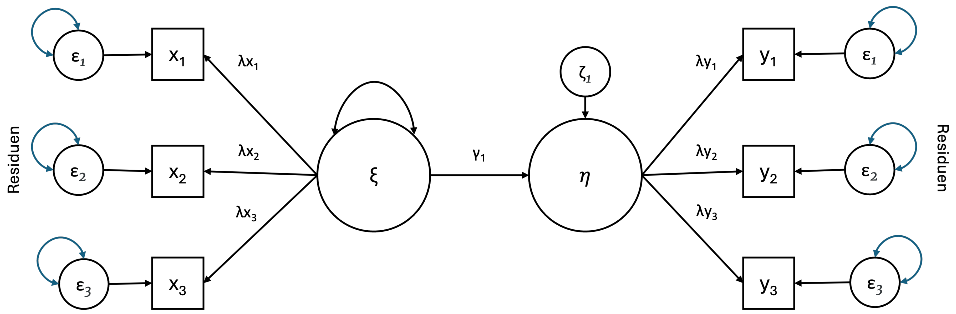
Strukturelle Regression (volles Strukturgleichungsmodell)



- Strukturelle Regression vereint Mess- und Strukturmodelle, um latente Variablen – sowohl endogene als auch exogene – als erklärende Variablen zu berücksichtigen.

Multivariate (latente) Modellierung

Strukturelle Regression (volles Strukturgleichungsmodell)



Matrixnotation:

$$\mathbf{x} = \tau_x + \Lambda_x \xi + \varepsilon$$

$$\mathbf{y} = \tau_y + \Lambda_y \eta + \varepsilon$$

$$\eta = \alpha + B\eta + \Gamma\xi + \zeta$$

Definitionen:

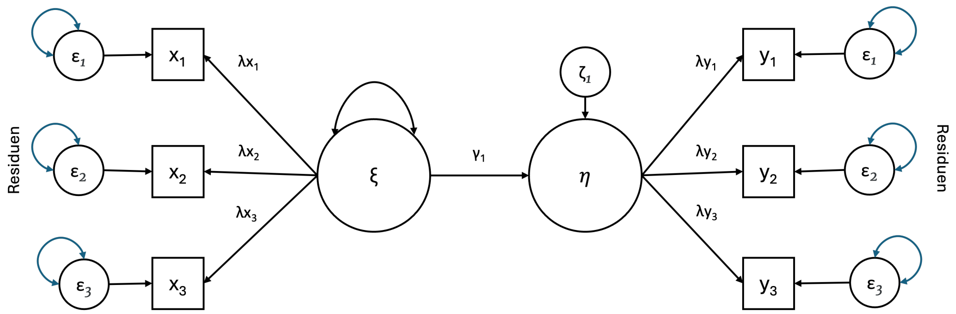
Messmodell:

- $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_q)'$: Vektor der Indikatoren auf der x-Seite
- $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p)'$: Vektor der Indikatoren auf der y-Seite
- τ_x: Vektor der q Achsenabschnitte (Intercepts) für die Indikatoren auf der x-Seite
- τ_y: Vektor der p Achsenabschnitte (Intercepts) für die Indikatoren auf der y-Seite
- ξ: Vektor der n latenten exogenen Variablen
- η: Vektor der m latenten endogenen Variablen

Multivariate (latente) Modellierung

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Strukturelle Regression (volles Strukturgleichungsmodell)



Matrixnotation:

$$\mathbf{x} = \tau_x + \Lambda_x \xi + \varepsilon$$

$$\mathbf{y} = \tau_y + \Lambda_y \eta + \varepsilon$$

$$\eta = \alpha + B\eta + \Gamma\xi + \zeta$$

Definitionen:

Strukturmodell

- α: Vektor der m Achsenabschnitte (Intercepts)
- Γ: Matrix der Regressionskoeffizienten von latenten exogenen zu latenten endogenen Variablen, wobei die i-te Zeile die latente endogene Variable und die j-te Spalte die latente exogene Variable beschreibt
- B: Matrix der Regressionskoeffizienten von latenten endogenen zu latenten endogenen Variablen, wobei die i-te Zeile die Zielvariable und die j-te Spalte die Ursprungsvariable beschreibt
- $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m)'$: Vektor der Residuen für die latenten endogenen Variablen

Annahmen

- η und ξ werden nicht beobachtet
- ε sind Messfehler für $\mathbf{y}$ und $\mathbf{x}$ entsprechend
- ε sind unkorreliert

Multivariate (latente) Modellierung

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Strukturelle Regression (volles Strukturgleichungsmodell)

Spezifikation des vollständigen strukturellen Regressionsmodells:

- Um ein vollständiges strukturelles Regressionsmodell zu spezifizieren, ist es sinnvoll, mit dem Messmodell zu beginnen
- Anschließend zu definieren, wie die latenten Variablen miteinander in Beziehung stehen (das Strukturmodell).
- Damit latente exogene Variablen latente endogene Variablen erklären können, müssen zwei separate Messmodelle aufgestellt werden.

Multivariate (latente) Modellierung

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Strukturelle Regression (volles Strukturgleichungsmodell)

Messmodell für latente exogene Variable:

- Zunächst spezifizieren wir das Messmodell für latente exogene Variablen mit sechs Indikatoren.
- Die ersten drei Indikatoren (x_1, x_2, x_3) werden durch ξ_1 gemessen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{x1} \\ \tau_{x2} \\ \tau_{x3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_{11}^x \\ \lambda_{21}^x \\ \lambda_{31}^x \end{pmatrix} (\, \xi_1 \,) + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Multivariate (latente) Modellierung

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Strukturelle Regression (volles Strukturgleichungsmodell)

Messmodell für latente endogene Variable:

- Nachdem das exogene Messmodell definiert wurde, gehen wir zum Messmodell für endogene Variablen über.
- Die drei Indikatoren (y_1, y_2, y_3) werden durch einen Faktor η_1 gemessen:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{y1} \\ \tau_{y2} \\ \tau_{y3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_{11}^y \\ \lambda_{21}^y \\ \lambda_{31}^y \end{pmatrix} \eta_1 + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Multivariate (latente) Modellierung

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Strukturelle Regression (volles Strukturgleichungsmodell)

Strukturmodell:

- Analog zum Strukturmodell in der multivariaten Regression und Pfadanalyse, das Beziehungen zwischen **beobachteten** Variablen beschreibt, spezifiziert die strukturelle Regression die Beziehung zwischen **latenten** Variablen.
- Im Modell haben wir eine latente exogene Variablen (ξ_1), die eine latente endogene Variable (η_1) vorhersagt:

$$\eta_1 = \alpha_1 + \gamma_{11}\xi_1 + \zeta_1$$

Multivariate (latente) Modellierung

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Strukturgleichungsmodell (SEM)

Eigenschaften eines Strukturgleichungsmodells

- engl. Structural euqation model (SEM)
- Ein Strukturgleichungsmodell dient als formale Darstellung einer Theorie oder eines Modells.

Ziele der Analyse von Strukturgleichungsmodellen:

- Schätzung unbekannter Parameter, wie z. B. Pfade, Varianzen und Kovarianzen.
- Prüfung der zugrunde liegenden Theorie auf ihre Gültigkeit (Modellpassung).
- Vergleich konkurrierender Modelle
- Multivariate Hypothesen prüfen (z.B. Mediation)

Multivariate (latente) Modellierung

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Metrik latenter Variablen

- Manifeste Variablen besitzen eine Einheit, die durch das jeweilige Messinstrument vorgegeben ist (z.B. Meter, richtig gelöste Aufgaben...).
- Latente Variablen hingegen werden nicht direkt gemessen und besitzen daher keine festgelegte Einheit.
- Ein Unterschied von 1 bei einer latenten Variable hat demnach keine klar definierte Bedeutung.
- Die Varianz einer Variable ist immer an ihre Einheit gekoppelt. Fehlt die Einheit – wie bei latenten Variablen – ist nicht eindeutig bestimmbar, wie groß die Varianz sein sollte.

→ Jede latente Variable braucht eine Metrik.

→ Diese muss von uns festgelegt werden

Multivariate (latente) Modellierung

Metrik latenter Variablen

Zwei unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten, um Metrik zu definieren:

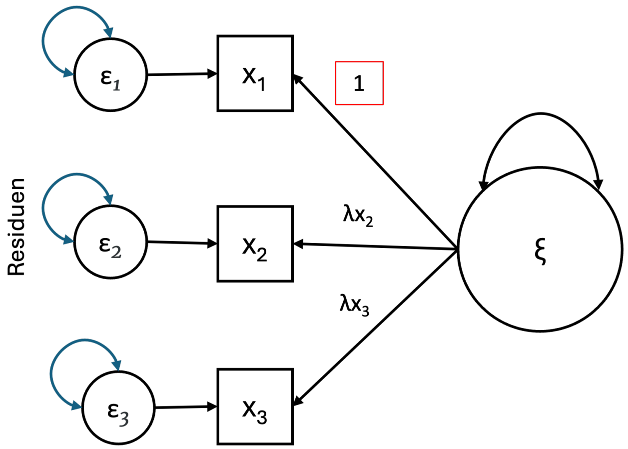
1. Wir definieren, dass wir bei einem Unterschied von 1 in der latenten Variable auch einen Unterschied von 1 in einer bestimmten manifesten Variable erwarten.
    - Metrik der latenten Variable wird durch Metrik eines Indikators definiert.
    - Unit Loading Identification (ULI)
2. Wir definieren, dass die Varianz der latenten Variable einen bestimmten Wert erhält (z.B. 1).
    - Fixierung der Varianz auf festen Wert $\rightarrow$ damit ist sie definiert
    - Unit Variance Identification (UVI)

Multivariate (latente) Modellierung

Metrik latenter Variablen

Unit Loading Identification (ULI)

- Ladung von x_1 (oder eines anderen Indikators) auf die latenten Variable ξ wird 1 gesetzt (ULI).
- In R wird standardmäßig der 1. Indikator gewählt.
- Variable, deren Ladung auf 1 fixiert wird, wird Referenzvariable genannt (Normierung)
- Vorschläge zur Auswahl der Referenzvariable:
- bester Indikator (höchstes Regressionsgewicht)
- höchste Reliabilität bei Messung des Indikators
- inhaltlich wichtigste Indikatorvariable

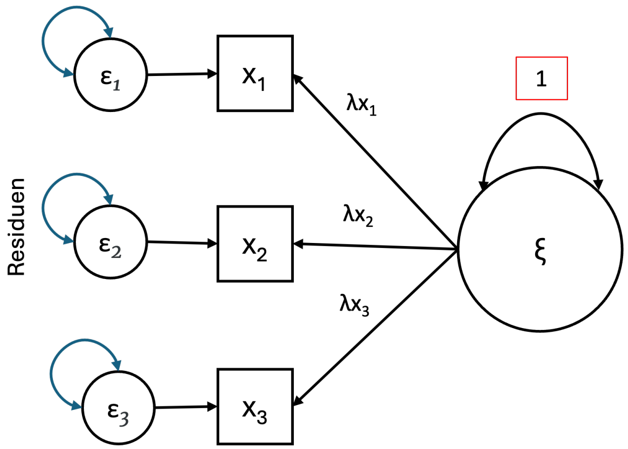


Multivariate (latente) Modellierung

Metrik latenter Variablen

Unit Variance Identification (UVI)

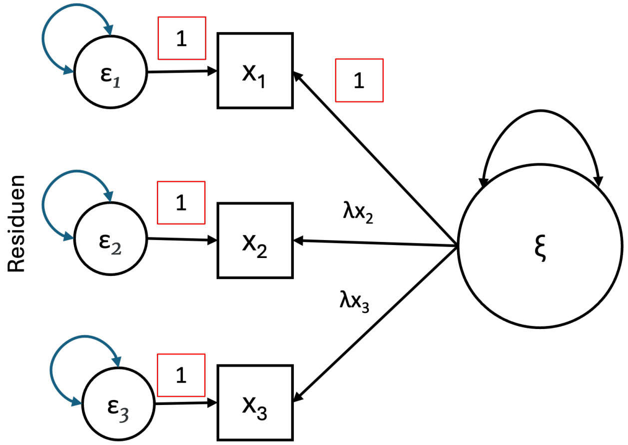
- Varianz der latenten Variablen auf 1 fixieren
- Vorteil: Alle Ladungen werden frei geschätzt und können auf Signifikanz geprüft werden
- Nachteil: Varianz kann nicht mehr auf Signifikanz geprüft werden
- Latente Variable ist dann standardisiert und wird in z-Einheiten angegeben (MW = 0, SD = 1)



Multivariate (latente) Modellierung

Metrik von Fehlern

- Residuen sind latente Variablen → Schätzung notwendig!
- Es muss ebenfalls eine Metrik zugewiesen werden
- Bei Fehlertermen wird stets ULI verwendet
- Residuen haben die selbe Metrik wie die vorhergesagte Variable.



Multivariate (latente) Modellierung

Strukturgleichungsmodell

Zusammenfassung - Vorteile des SEM

- Berücksichtigung von Messfehlern durch Messmodell.
- Analyse komplexer Beziehungen: SEM ermöglicht die Untersuchung komplexer Zusammenhänge, einschließlich indirekter Effekte und Mediationen.
- Latente Variablen: Konstrukte analysieren, die nicht direkt beobachtbar sind.
- Theorietests: SEM erlaubt die Überprüfung theoretischer Modelle gegen die empirischen Daten.
- Gleichzeitige Schätzung mehrerer Beziehungen: Mehrere Abhängigkeiten und Pfade können in einem einzigen Modell geschätzt werden.
- Modellvergleich: SEM bietet Werkzeuge zur Bewertung und zum Vergleich alternativer Modelle (z. B. über Fit-Indizes).
- Anwendung bei verschiedenen Datentypen: SEM kann mit unterschiedlichen Datentypen wie metrischen, ordinalen oder dichotomen Variablen umgehen.
- Grafische Darstellung: SEM ermöglicht eine intuitive und visuell verständliche Darstellung von theoretischen Modellen.

Multivariate (latente) Modellierung

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Strukturgleichungsmodelle in R - `lavaan`

- Strukturgleichungsmodelle werden in R mit dem Paket `lavaan` berechnet
- Installation:

```r
install.packages("lavaan")
library(lavaan)
```

- In `lavaan` werden die Modelle mit einer spezielle Modellsyntax geschrieben (s.h. nächste Folie)
- Das definierte Modell wird dann mit einer Modellfunktion wie `cfa()` oder `sem()` berechnet
- Das Aufstellen des Modells erfolgt als character Vektor

Multivariate (latente) Modellierung

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Strukturgleichungsmodelle in R - `lavaan`

- In `lavaan` hat eine **Regressionsformel** die folgende Form:

```
y ~ x1 + x2 + x3 + x4
```

- In dieser Formel ist die Tilde (~) der Regressionsoperator.
- Auf der linken Seite des Operators steht die abhängige Variable (y)
- Auf der rechten Seite die unabhängigen Variablen, getrennt durch den +- Operator, aufgeführt sind.

- Ein typisches (multivariates) Modell besteht aus einem System von Regressionsformeln
- Dabei können einige Variablen (beginnend mit einem „f“ wie Faktor im Beispiel unten) latent sein. Zum Beispiel:

```
y ~ f1 + f2 + x1 + x2

f1 ~ f2 + f3

f2 ~ f3 + x1 + x2
```

Multivariate (latente) Modellierung

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Strukturgleichungsmodelle in R - `lavaan`

- Wenn latente Variablen in einer der Regressionsformeln vorkommen, müssen diese definiert werden
- Sie werden definiert, indem ihre (manifesten oder latenten) Indikatoren angegeben werden.
- Dies geschieht mit dem speziellen Operator =~, der gelesen werden kann als „wird gemessen durch".
- Zum Beispiel können wir die drei latenten Variablen f1, f2 und f3 wie folgt definieren:

```
f1 =~ y1 + y2 + y3

f2 =~ y4 + y5 + y6

f3 =~ y7 + y8 + y9 + y10
```

Multivariate (latente) Modellierung

Strukturgleichungsmodelle in R - `lavaan`

- Varianzen und Kovarianzen mit dem Operator ~~ (doppelte Tilde) spezifiziert. Zum Beispiel:

```
y1 ~~ y1   # Varianz
y1 ~~ y2   # Kovarianz
f1 ~~ f2   # Kovarianz
```

- Achsenabschnitte (Intercepts) für beobachtete und latente Variablen werden durch einfache Regressionsformeln angegeben
- Dabei wird nur ein Achsenabschnitt (explizit durch die Zahl 1 dargestellt) als Prädiktor aufgeführt:

```
y1 ~ 1
f1 ~ 1
```

Multivariate (latente) Modellierung

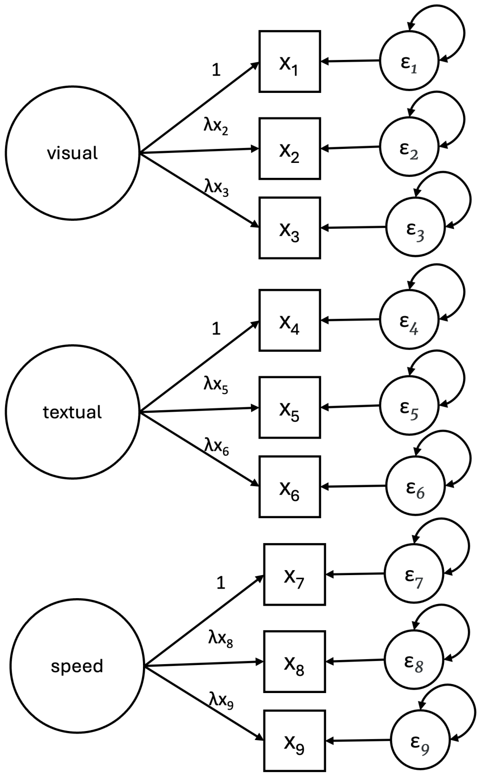
Strukturgleichungsmodelle in R - CFA Beispiel

- Das Modell (rechts) stellt die CFA für einen Kognitionstest dar (Holzinger & Swineford, 1939).
- Ein visueller Faktor, gemessen durch die 3 Variablen: x_1, x_2 und x_3.
- Ein textueller Faktor, gemessen durch die 3 Variablen: x_4, x_5 und x_6.
- Ein Geschwindigkeitsfaktor, gemessen durch die 3 Variablen: x_7, x_8 und x_9.

Modell in `lavaan`:

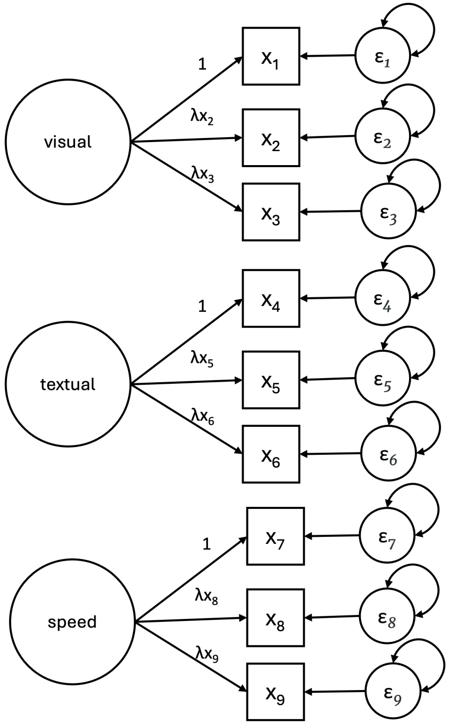
```r
model <- 'visual  =~ x1 + x2 + x3
          textual =~ x4 + x5 + x6
          speed   =~ x7 + x8 + x9'

fit <- cfa(model, data = HolzingerSwineford1939)
```



Multivariate (latente) Modellierung

Strukturgleichungsmodelle in R - CFA Beispiel




```
parameterEstimates(fit)
```

```
Latent Variables:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)
  visual =~
    x1                1.000
    x2                0.554    0.100    5.554    0.000
    x3                0.729    0.109    6.685    0.000
  textual =~
    x4                1.000
    x5                1.113    0.065   17.014    0.000
    x6                0.926    0.055   16.703    0.000
  speed =~
    x7                1.000
    x8                1.180    0.165    7.152    0.000
    x9                1.082    0.151    7.155    0.000

Covariances:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)
  visual ~~
    textual           0.408    0.074    5.552    0.000
    speed             0.262    0.056    4.660    0.000
  textual ~~
    speed             0.173    0.049    3.518    0.000

Variances:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)
   .x1                0.549    0.114    4.833    0.000
   .x2                1.134    0.102   11.146    0.000
   .x3                0.844    0.091    9.317    0.000
   .x4                0.371    0.048    7.779    0.000
   .x5                0.446    0.058    7.642    0.000
   .x6                0.356    0.043    8.277    0.000
   .x7                0.799    0.081    9.823    0.000
   .x8                0.488    0.074    6.573    0.000
   .x9                0.566    0.071    8.003    0.000
    visual            0.809    0.145    5.564    0.000
    textual           0.979    0.112    8.737    0.000
    speed             0.384    0.086    4.451    0.000
```

Multivariate (latente) Modellierung

lavaan Syntax

Am häufigsten verwendeten Syntaxelemente in `lavaan`:

- $\sim$ Vorhersage, wird für die Regression eines beobachteten Outcomes auf beobachtete Prädiktoren verwendet (z. B. $y \sim x$).
- $=\sim$ Indikator, wird für die Zuordnung einer latenten Variablen zu beobachteten Indikatoren in Messmodellen der Faktorenanalyse verwendet (z. B. $f =\sim q + r + s$).
- $\sim\sim$ Kovarianz (z. B. $x \sim\sim x$).
- ~ 1 Intercept oder Mittelwert (z. B. $x \sim 1$ schätzt den Mittelwert der Variablen x).
- $1*$ Fixiert einen Parameter oder eine Ladung auf den Wert 1 (z. B. $f =\sim 1 * q$).
- $NA*$ Lässt einen Parameter oder eine Ladung frei (nützlich, um die Standard-Marker-Methode zu überschreiben, z. B. $f =\sim NA * q$).
- $a*$ Vergibt ein Label für den Parameter „a“, das für Modellrestriktionen verwendet werden kann (z. B. $f =\sim a * q$).

Take-aways

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

- SEM erlauben multivariate Modelle mit Messfehlerkorrektur - diese werden multideterministischen Theorien in der Psychologie oft eher gerecht als einfache Regressionsmodelle.
- Grundkonzepte von SEM:
  - manifeste vs. latente Variable
  - endogene vs. exogene Variablen
  - gerichtete vs. ungerichtete Zusammenhänge
- Messmodell vs. Strukturmodell
- Parameter: Frei geschätzt oder fixiert?
- Metrik von latenten Variablen festlegen – Unit Loading Identification (ein Pfad wird auf 1 fixiert) – Unit Variance Identification (eine Varianz wird auf 1 fixiert)