CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Statistik II

Einheit 10: Verfahren für Nominaldaten - χ^2-Test

Wintersemester 2025 | Prof. Dr. Stephan Goerigk

Verfahren für Nominaldaten

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Kurzvorstellung

Voraussetzungen bisher gelernter Tests:

- Wir kennen nun Hypothesentests für alle Kombinationen aus numerischen vs. kategorialen UVs

Hypothesentest	AV	UVs	Fragestellung	Teststatistik
Ein-Stichproben t-Test	Intervallskaliert	Keine UV, nur Referenzwert	Unterschied zwischen Stichprobenmittelwert und Referenzwert?	t-Wert
Unabhängiger t-Test	Intervallskaliert	1 kategoriale UV, 2 Stufen	Unterschied zwischen 2 Gruppen?	t-Wert
Abhängiger t-Test	Intervallskaliert	1 UV Messwiederholung, 2 Messungen	Unterschied zwischen 2 Messzeitpunkten?	t-Wert
Einfaktorielle ANOVA	Intervallskaliert	1 kategoriale UV, ≥2 Stufen	Unterschied zwischen ≥2 Gruppen?	F-Wert
ANOVA mit Messwiederholung	Intervallskaliert	1 UV Messwiederholung, ≥2 Messungen	Unterschied zwischen ≥2 Messzeitpunkten?	F-Wert
Einfache Regression	Intervallskaliert	1 kategoriale UV oder 1 stetige UV	Kann UV die AV vorhersagen?	t-Wert (Steigung) oder F-Wert (Omnibus)
Mehrfaktorielle ANOVA	Intervallskaliert	2 kategoriale UVs	Unterschiede zwischen der Stufen der Faktoren? Besteht Interaktion?	F-Wert
Multiple Regression	Intervallskaliert	2 kategoriale oder stetige UVs	Können UVs die AV vorhersagen? Besteht Interaktion?	t-Wert (Steigung) oder F-Wert (Omnibus)
Mixed ANOVA	Intervallskaliert	2 UVs, davon 1 kategoriale UV und eine Messwiederholung	Unterschiede zwischen Stufen und Zeitpunkten? Besteht Interaktion?	F-Wert

Verfahren für Nominaldaten

Kurzvorstellung

Voraussetzungen bisher gelernter Tests:

- ABER: Alle bislang kennengelernten statistischen Tests beinhalten **intervallskalierte AVs**
- Was können wir tun, wenn wie eine **nominalskalierte AV** haben?

Zunächst: nominalskalierte Variablen mit 2 Merkmalsausprägungen (dichotom aka. binär):

- Klassische Beispiele:
  - richtig vs. falsch
  - krank vs. gesund
  - rückfällig vs. nicht rückfällig
  - tod vs. lebendig

Verfahren für Nominaldaten

Kurzvorstellung - Zur Erinnerung:

- Nominalskalierte Variablen sind eine Art von Variablen, bei denen die Werte Kategorien oder Namen repräsentieren
- Die Kategorien oder Namen haben keine natürliche Ordnung oder Rangfolge (z.B. Geschlecht, Nationalität oder Augenfarbe).
- Es können nur Aussagen über die Gleichheit oder Ungleichheit der Kategorien gemacht werden.
- Es ist nicht möglich, Aussagen über die Größe oder den Abstand zwischen den Kategorien zu treffen.
- Die Umwandlung in andere Skalenniveaus wie ordinal oder metrisch ist nicht sinnvoll, da die Informationen über die Rangfolge oder die Abstände zwischen den Kategorien nicht vorhanden sind.
- Bei der Darstellung nominalskalierter Variablen werden häufig Balkendiagramme verwendet, um die Häufigkeit oder Verteilung der einzelnen Kategorien zu veranschaulichen.

Verfahren für Nominaldaten

Deskriptivstatistiken

- Lage- und Streuungsmaße lassen sich nicht berechnen
- ABER: Kategorien können ausgezählt werden (Häufigkeiten)

Absolute Häufigkeiten (n):

```
table(data$Behandlungserfolg)
```

```
##
##   ja nein
##    6    4
```

Relative Häufigkeiten (%):

```
prop.table(table(data$Behandlungserfolg))
```

```
##
##   ja nein
##  0.6  0.4
```

Beispiel - nominalskalierte Variablen:

Behandlung	Behandlungserfolg
Psychotherapie	ja
Psychotherapie	ja
Psychotherapie	nein
Psychotherapie	ja
Psychotherapie	ja
Warteliste	nein
Warteliste	nein
Warteliste	nein
Warteliste	ja
Warteliste	ja

Verfahren für Nominaldaten

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Kreuztabelle (aka. Kontingenztafel)

- Tabelle zur Verteilung von zwei oder mehr nominalskalierten Variablen.
- Werte beider Variablen in Zeilen und Spalten aufgeteilt
- Zellen enthalten Kombinationen beider Variablen.

Absolute Häufigkeiten (n):

```
table(data$Behandlungserfolg, data$Behandlung)
```

```
##
##         Psychotherapie Warteliste
##   ja                 4          2
##   nein               1          3
```

Relative Häufigkeiten (%):

```
prop.table(table(data$Behandlungserfolg, data$Behandlung))
```

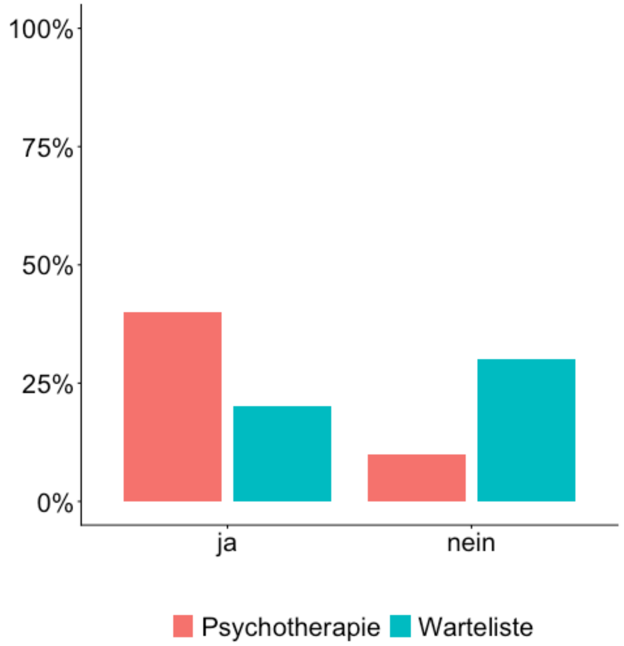
```
##
##         Psychotherapie Warteliste
##   ja               0.4        0.2
##   nein             0.1        0.3
```

Beispiel - nominalskalierte Variablen:

Behandlung	Behandlungserfolg
Psychotherapie	ja
Psychotherapie	ja
Psychotherapie	nein
Psychotherapie	ja
Psychotherapie	ja
Warteliste	nein
Warteliste	nein
Warteliste	nein
Warteliste	ja
Warteliste	ja

Verfahren für Nominaldaten

Visualisierung im Balkendiagramm (Wiederholung)



Beispiel - nominalskalierte Variablen:

Behandlung	Behandlungserfolg
Psychotherapie	ja
Psychotherapie	ja
Psychotherapie	nein
Psychotherapie	ja
Psychotherapie	ja
Warteliste	nein
Warteliste	nein
Warteliste	nein
Warteliste	ja
Warteliste	ja

Verfahren für Nominaldaten

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Hypothesentests für Nominaldaten

Wir werden 2 Arten von Tests kennenlernen:

1. χ^2-Tests

- Analyse von Häufigkeiten
- Aussagen über ein mehr oder weniger einer bestimmten Eigenschaft
- Ziel: Analyse der Häufigkeitsverteilung
- Logik: Hypothesentest ähnlich t-Tests und ANOVAs
- H_1 : "Es gibt Unterschiede in der **Verteilung** der Kategorien."

2. Logistische Regression (nächste Einheit)

- Regression mit kategorialer AV
- Ziel: Vorhersage der Wahrscheinlichkeit zu einer Kategorie zu gehören
- Logik: ähnlich einfacher/multipler Regression
- H_1 : "UV kann die **Gruppenzugehörigkeit** (AV) signifikant vorhersagen."

Verfahren für Nominaldaten

χ^2-Tests

- Relative Häufigkeit in Stichprobe dient als Schätzer für Auftretenswahrscheinlichkeit in Population

Logik ähnlich wie t-Test (H_0 des t-Tests: Mittelwerte sind gleich)

- H_0 : Beispiel: Kategorien sind **gleich verteilt** (Gleichverteilungshypothese).
- Die unter der H_0 erwarteten Häufigkeiten werden mit beobachteten Häufigkeiten (Stichprobe) verglichen
- Testverteilung: χ^2-Verteilung $\rightarrow$ hat eigene Tabelle
- Entscheidungslogik:
  - Vergleich empirischer χ^2-Wert (Berechnung aus Daten) vs. kritischer χ^2-Wert (aus Tabelle)
  - Wenn $\chi^2_{emp} > \chi^2_{krit}$ ist der Test signifikant

Verfahren für Nominaldaten

Eindimensionaler χ^2-Test

- Prüft Hypothesen über die Verteilung **einer** kategorialen Variablen
- Versuchspersonen hinsichtlich Merkmal mit k Stufen kategorisiert
- Stichprobe: Es liegt Verteilung mit absoluten Häufigkeiten vor (beobachtete Häufigkeiten)
- Aufgabe χ^2-Test: Ermitteln, ob Verteilung in Stichprobe Annahme über Population entspricht

Beispiel: Suizidraten bei Männern und Frauen

- Frage: Entsprechen in einer Stichprobe beobachtete Suizidraten von Männern und Frauen einer theoretisch erwarteten Verteilung?

Verfahren für Nominaldaten

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

χ^2-Tests

Nullhypothese:

- Entscheidung für H_1 über Ablehnung der $H_0 \rightarrow$ Wenn H_0 ausreichend unwahrscheinlich, wird H_1 angenommen.
- χ^2-Test prüft, ob beobachtete Häufigkeiten von erwarteten Häufigkeiten abweichen.
- Erwartete Häufigkeiten entsprechen der H_0 des Tests.
- Besonderheit χ^2-Test: Jede Annahme über Verteilung kann als H_0 dienen.

Gleichverteilungsannahme (häufig):

- H_0 : "Verteilung der Geschlechter in Population ist 50% vs. 50%."
- H_1 : "Geschlechter sind ungleich verteilt."

Nicht gleich verteilte Annahmen (denkbar):

- H_0 : "Verteilung der Geschlechter in Population ist 30% vs. 70%."
- H_1 : "Verteilung der Geschlechter weicht signifikant von dieser Annahme ab."

Verfahren für Nominaldaten

χ^2-Tests

Nullhypothese:

Gleichverteilungsannahme:

- Häufigkeiten (f) sind über alle Stufen des Merkmals hinweg gleich
- erwartete Häufigkeit jeder Zelle:

$$f_{e1} = f_{e2} = \ldots f_{ek} = \frac{N}{k}$$

Beispiel - Suizidrate nach Geschlecht:

In Stichprobe:

Frauen	Männer	Summe
101	223	324

Erwartete Werte unter Gleichverteilungsannahme:

Frauen	Männer	Summe
162	162	324

Verfahren für Nominaldaten

χ^2-Tests

Nullhypothese:

Nicht gleich verteilte Annahmen:

- Verteilung der Häufigkeiten (f) entspricht theoretischen Vorüberlegungen (begründete Festlegung der Verteilung)
- erwartete Häufigkeit jeder Zelle: Multiplikation mit angenommener Auftretenswahrscheinlichkeit (p_i)

$$f_{ei} = N \cdot p_i$$

Beispiel - Suizidrate nach Geschlecht:

In Stichprobe:

Frauen	Männer	Summe
101	223	324

Erwartete Werte nach theoretischer Vorüberlegung (Männer begehen 3x häufiger Suizid):

Frauen	Männer	Summe
`$324 \cdot 0.25 = 81$`	`$324 \cdot 0.75 = 243$`	324

Verfahren für Nominaldaten

χ^2-Wert

- Entscheidung über signifikante Unterschiede zwischen beobachteten und erwarteten Häufigkeiten erfolgt über **χ^2-Wert**
- Folgt der χ^2-Verteilung $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeit empirischer Werte unter Annahme der H_0 bestimmbar

Berechnung

- Was wird benötigt: beobachtete und erwartete absolute Häufigkeiten für alle Merkmalstufen
- χ^2-Wert gibt Abweichung der beobachteten von den erwarteten Häufigkeit an

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_{bi} - f_{ei})^2}{f_{ei}}$$

mit:

- k : Anzahl der Merkmalskategorien (Index i)
- f_{bi} beobachtete absolute Häufigkeit von Kategorie i
- f_{ei} unter H_0 erwartete absolute Häufigkeit von Kategorie i

Verfahren für Nominaldaten

χ^2-Wert

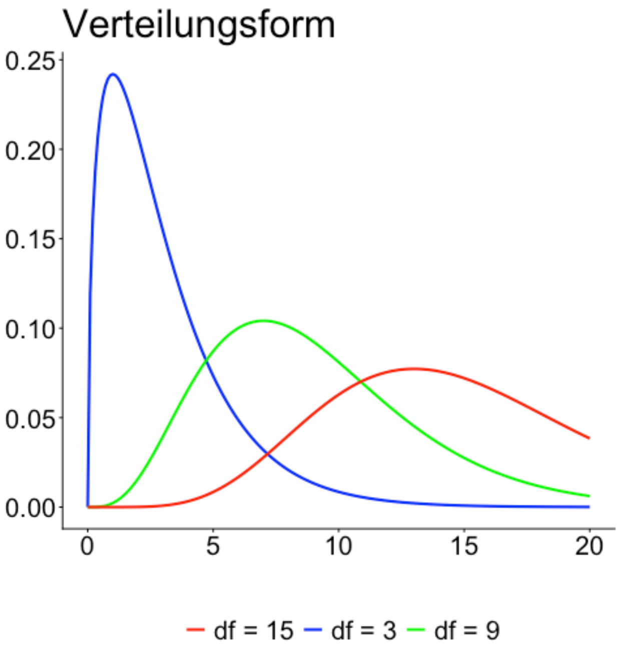
Eigenschaften des χ^2-Werts

- $\chi^2 = 0$, wenn beobachtete und erwartete Häufigkeiten in allen Zellen genau übereinstimmen
- Je größer die Abweichung der beobachteten von erwarteten Häufigkeiten, desto größer wird χ^2
- χ^2 kann aufgrund der Quadrierung in der Formel nur positive Werte annehmen
  - Informationen über Richtung der Abweichung geht verloren
  - unspezifischer Test $\rightarrow$ es können keine gerichteten Hypothesen getestet werden
  - Ausnahme: eindimensionaler χ^2-Test mit 2 Stufen

Verfahren für Nominaldaten

χ^2-Verteilung

- χ^2 kann aufgrund der Quadrierung in der Formel nur positive Werte annehmen
- Wertebereich von $0 \text{ bis } \infty$
- Form ist abhängig von Anzahl der Freiheitsgrade (df)
- Fläche unter der Kurve gibt an, wie wahrscheinlich ein χ^2-Wert ist



Verfahren für Nominaldaten

χ^2-Wert

Berechnung im Beispiel:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_{bi} - f_{ei})^2}{f_{ei}} = \frac{(101 - 81)^2}{81} + \frac{(223 - 243)^2}{243} = 6.58$$

- Für die H_0, dass die Häufigkeiten den theoretischen Annahmen entsprechen erhalten wir $\chi^2 = 6.58$
- Zur Interpretation dieses Werts benötigen wir noch die Freiheitsgrade (df)

Notation	Frauen	Männer
`$f_{bi}$`	`$101$`	`$223$`
`$f_{ei}$`	`$324 \cdot 0.25 = 81$`	`$324 \cdot 0.75 = 243$`
`$f_{bi} - f_{ei}$`	`$101 - 81 = -20$`	`$223 - 243 = -20$`
`$(f_{bi} - f_{ei})^2$`	`$-20^2 = 400$`	`$-20^2 = 400$`
`$\frac{(f_{bi}-f_{ei})^2}{f_{ei}}$`	`$\frac{400}{81} = 4.94$`	`$\frac{400}{243} = 1.65$`

Verfahren für Nominaldaten

χ^2-Wert

Bestimmung der Freiheitsgrade:

- Anzahl der Summanden in der Formel die unabhängig voneinander variieren können
- Für den eindimensionalen χ^2-Test:

$$df = k - 1$$

Berechnung im Beispiel:

$$df = k - 1 = 2 - 1 = 1$$

Verfahren für Nominaldaten

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

χ^2-Wert

Signifikanzprüfung:

- $\chi^2_{emp} = 6.58$
- $df = k - 1$
- $\alpha = .05$

Ablesen von χ^2_{krit} aus der Tabelle:

- $\chi^2_{df=1} = 3.84$

Vergleich χ^2_{emp} vs. χ^2_{krit} :

- $6.58 > 3.84 \rightarrow$ Test ist signifikant

Fläche df	0,750	0,900	0,950
1	1,32330	2,70554	3,84146
2	2,77259	4,60517	5,99147
3	4,10835	6,25139	7,81473
4	5,38527	7,77944	9,48773
5	6,62568	9,23635	11,0705
6	7,84080	10,6446	12,5916
7	9,03715	12,0170	14,0671
8	10,2188	13,3616	15,5073
9	11,3887	14,6837	16,9190
10	12,5489	15,9871	18,3070
11	13,7007	17,2750	19,6751
12	14,8454	18,5494	21,0261
13	15,9839	19,8119	22,3621
14	17,1170	21,0642	23,6848
15	18,2451	22,3072	24,9958
16	19,3688	23,5418	26,2962
17	20,4887	24,7690	27,5871
18	21,6049	25,9894	28,8693
19	22,7178	27,2036	30,1435

Verfahren für Nominaldaten

Eindimensionaler χ^2-Test in R

```
# Stichprobendaten erstellen (1 Vektor und keine Tabelle, da eindimensional)

x = c(rep("Männer", 223), rep("Frauen", 101))
table(x)
```

```
## x
## Frauen Männer
##    101    223
```

```
chisq.test(table(x), p = c(0.25, 0.75))
```

```
##
##      Chi-squared test for given probabilities
##
## data:  table(x)
## X-squared = 6.5844, df = 1, p-value = 0.01029
```

Verfahren für Nominaldaten

Gerichteter eindimensionaler χ^2-Test

- χ^2-Test ist normalerweise ungerichtet (wegen Quadrierung der Abweichungen)
- Spezialfall eindimensionaler χ^2-Test bei Variable mit genau 2 Stufen
- In diesem Fall ist die Richtung der Abweichung eindeutig
- Interpretation: "Merkmalsstufe 1 tritt öfter auf als Merkmalsstufe 2."
- VORSICHT: Signifikanzniveau (α) wird dann verdoppelt (z.B. wenn $\alpha = .05$ wird in der Tabelle $\alpha = .10$ angenommen)
- Folge: χ^2_{krit} verringert sich, Test wir eher signifkant (Teststärke nimmt zu)

Verfahren für Nominaldaten

Eindimensionaler χ^2-Test

Effekstärke:

- Wie immer: Standardisiertes Maß für Größe des systematischen Unterschieds
- Gängige Effektstärke beim χ^2-Test: w^2
- Schätzung von w^2 aus Stichprobendaten:

$$\hat{w}^2 = \frac{\chi^2}{N}$$

- Im Beispiel: $\hat{w}^2 = \frac{\chi^2}{N} = \frac{6.58}{324} = 0.02$
- VORSICHT: G*Power nutzt unquadrierte Größe w (aka "Phi": φ)

Konventionen nach Cohen (1988):

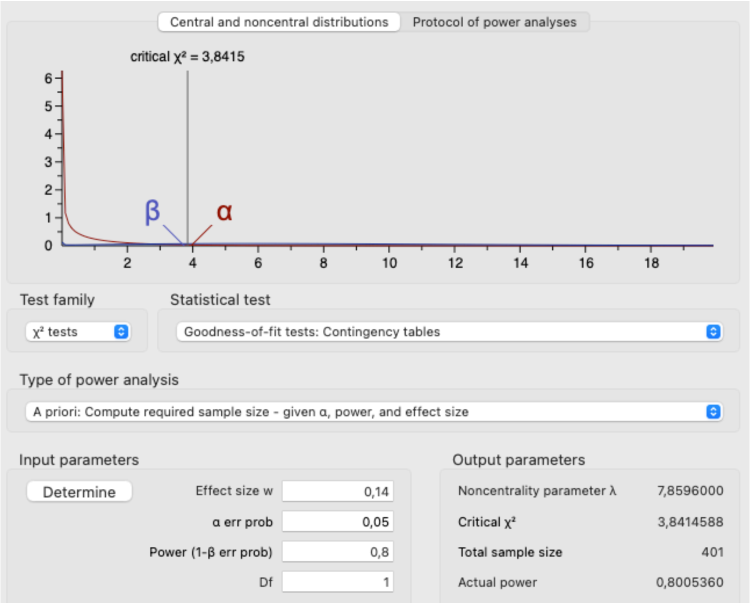
Effektstärke	Interpretation
0.01	kleiner Effekt
0.09	mittlerer Effekt
0.25	großer Effekt

$\rightarrow$ nach Cohen handelt es sich in unserem Beispiel um eine kleine Effektstärke.

Verfahren für Nominaldaten

Eindimensionaler χ^2-Test

Stichprobenumfangsplanung:



Verfahren für Nominaldaten

Zweidimensionaler χ^2-Test

- Erweiterung um eine weitere kategoriale Variable $(\geq$ 2 Stufen)
- Darstellung in Kreuztabelle (auch $k \text{ x } l - \chi^2$-Test)
  - Zeilen: Merkmal 1 mit k Stufen
  - Spalten: Merkmal 2 mit l Stufen)
- Wie zuvor: Vergleich theoretisch erwartete vs. beobachtete Häufigkeiten
- Klassische Anwendung: **Kontingenzanalyse**
  - Frage: Besteht ein stochastischer Zusammenhang zwischen den Merkmalen
  - z.B. "Sind Behandlungserfolge [nein vs. ja] zwischen Therapiemodalitäten [Therapie vs. Warteliste] gleich verteilt?"

Verfahren für Nominaldaten

Zweidimensionaler χ^2-Test

Hypothesenpaar H_0 vs. H_1 :

- Theoretisch unendlich viele H_0 (alle denkbaren theoretischen Annahmen)
- Bei Kontingenzanalyse:
  - H_0 : Merkmale sind stochastisch unabhängig.
  - H_1 : Es besteht irgendeine Art von Zusammenhang zwischen den Steufen des einen Merkmals und den Stufen des anderen Merkmals

Verfahren für Nominaldaten

Zweidimensionaler χ^2-Test

Berechnung erwarteter Häufigkeiten unter Annahme der H_0 :

- Zur Berechnung müssen wir wissen, wie sich jedes Merkmal alleine verteilen würde (Ignorieren des anderen Merkmals)
- Dies schätzen wir über die sogenannten **Randhäufigkeiten**
- relative Randhäufigkeiten (in %) dienen als Schätzer für die Wahrscheinlichkeit einer Merkmalsstufe in der Population (p_i bzw. p_j)

$$p_i = \frac{n_i}{N}, \text{ bzw. } p_j = \frac{n_j}{N}$$

Verfahren für Nominaldaten

Zweidimensionaler χ^2-Test

Berechnung erwarteter Häufigkeiten unter Annahme der H_0 :

Berechnung der Randhäufigkeiten:

```
addmargins(table(data$Behandlungserfolg, data$Behandlung), FUN = sum)
```

```
## Margins computed over dimensions
## in the following order:
## 1:
## 2:

##
##        Psychotherapie Warteliste sum
##   ja                4          2   6
##   nein              1          3   4
##   sum               5          5  10
```

Beispiel - Therapieerfolg $(N = 10)$:

Behandlung	Behandlungserfolg
Psychotherapie	ja
Psychotherapie	ja
Psychotherapie	nein
Psychotherapie	ja
Psychotherapie	ja
Warteliste	nein
Warteliste	nein
Warteliste	nein
Warteliste	ja
Warteliste	ja

Verfahren für Nominaldaten

Zweidimensionaler χ^2-Test

Berechnung erwarteter Häufigkeiten unter Annahme der H_0 :

Berechnung der Randhäufigkeiten:

```
addmargins(table(data$Behandlungserfolg, data$Behandlung), FUN = sum)
```

```
## Margins computed over dimensions
## in the following order:
## 1:
## 2:

##
##        Psychotherapie Warteliste sum
##   ja               36         13  49
##   nein             14         37  51
##   sum              50         50 100
```

Beispiel - Therapieerfolg in größerer Stichprobe $(N = 100)$:

- 45 Patient:innen hatten einen Therapieerfolg: $p_{ja} = \frac{49}{100} = 0.49$
- Gegenwahrscheinlichkeit: $p_{nein} = 1 - 0.49 = 0.51$
- 50 Patient:innen hatten einen Wartelistentherapie: $p_{Warteliste} = \frac{50}{100} = 0.50$
- Gegenwahrscheinlichkeit: $p_{Psychotherapie} = 1 - 0.50 = 0.50$

Verfahren für Nominaldaten

Zweidimensionaler χ^2-Test

- Was bedeutet Stochastische Unabhängigkeit?
    - Merkmale beeinflussen einander nicht
    - Ranghäufigkeiten müssen sich in jeder einzelnen Stufe des Merkmals widerspiegeln
    - Ändert sich Verhältnis ist H_0 verletzt

Berechnung erwarteter Häufigkeiten unter Annahme der H_0 :

$$f_{eij} = p_i \cdot n_j \text{ bzw. } f_{eij} = p_j \cdot n_i$$

mit:

- f_{eij} : erwartete Häufigkeit in Zelle ij der Kreuztabelle
- p_i Randwahrscheinlichkeit der Merkmalsausprägung i von Merkmal 1
- p_j Randwahrscheinlichkeit der Merkmalsausprägung j von Merkmal 2
- n_i Randhäufigkeit i von Merkmal 1
- n_j Randhäufigkeit j von Merkmal 2

Verfahren für Nominaldaten

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Zweidimensionaler χ^2-Test

Berechnung erwarteter Häufigkeiten unter Annahme der H_0 :

$$f_{eij} = p_i \cdot n_j \text{ bzw. } f_{eij} = p_j \cdot n_i$$

Beide Formeln führen zum selben Ergebnis (lassen sich ineinander überführen):

$$f_{eij} = \frac{n_i \cdot n_j}{N} \rightarrow \frac{\text{Zeilensumme} \cdot \text{Spaltensumme}}{N}$$

```
## Margins computed over dimensions
## in the following order:
## 1:
## 2:

##
##         Psychotherapie Warteliste sum
##    ja               36         13  49
##    nein             14         37  51
##    sum              50         50 100
```

- Verhältnis von Therapieerfolg ist 49% zu 51%
- Falls Merkmale stochastisch unabhängig, muss dieses Verhältnis sich in beiden Behandlungen zeigen

Verfahren für Nominaldaten

Zweidimensionaler χ^2-Test

Berechnung erwarteter Häufigkeiten unter Annahme der H_0 :

$$f_{eij} = p_i \cdot n_j \text{ bzw. } f_{eij} = p_j \cdot n_i$$

Beide Formeln führen zum selben Ergebnis (lassen sich ineinander überführen):

$$f_{eij} = \frac{n_i \cdot n_j}{N} \rightarrow \frac{\text{Zeilensumme} \cdot \text{Spaltensumme}}{N}$$

```
## Margins computed over dimensions
## in the following order:
## 1:
## 2:

##
##          Psychotherapie Warteliste sum
##    ja                36         13  49
##    nein              14         37  51
##    sum               50         50 100
```

- $f_{eTh/ja} = 50 \cdot 0.49 = 24.5$
- $f_{eTh/nein} = 50 \cdot 0.51 = 25.5$
- $f_{eWa/ja} = 50 \cdot 0.49 = 24.5$
- $f_{eWa/nein} = 50 \cdot 0.51 = 25.5$

$\rightarrow$ Beobachtete Werte weichen scheinbar von erwarteten ab. Ist diese Abweichung signifikant?

Verfahren für Nominaldaten

Zweidimensionaler χ^2-Test

Berechnung von χ^2_{emp} :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(f_{bij} - f_{eij})^2}{f_{eij}}$$

mit:

- k : Anzahl der Kategorien von Merkmal 1 (Index i)
- l : Anzahl der Kategorien von Merkmal 2 (Index j)
- f_{bij} beobachtete absolute Häufigkeit von Merkmalskombination ij
- f_{eij} unter H_0 erwartete absolute Häufigkeit von Merkmalskombination ij

und:

$$df = (k - 1) \cdot (l - 1)$$

Verfahren für Nominaldaten

Zweidimensionaler χ^2-Test

Signifikanzprüfung:

```
## Margins computed over dimensions
## in the following order:
## 1:
## 2:

##
##          Psychotherapie Warteliste sum
##    ja                36         13  49
##    nein              14         37  51
##    sum               50         50 100
```

- $f_{eTh/ja} = 50 \cdot 0.49 = 24.5$
- $f_{eTh/nein} = 50 \cdot 0.51 = 25.5$
- $f_{eWa/ja} = 50 \cdot 0.49 = 24.5$
- $f_{eWa/nein} = 50 \cdot 0.51 = 25.5$

$$\chi^2_{emp} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(f_{bij} - f_{eij})^2}{f_{eij}} = \frac{(36-24.5)^2}{24.5} + \frac{(13-25.5)^2}{25.5} + \frac{(14-24.5)^2}{24.5} + \frac{(37-25.5)^2}{25.5} = 21.17$$

mit:

$$df = (2-1) \cdot (2-1) = 1$$

Verfahren für Nominaldaten

Zweidimensionaler χ^2-Test

Signifikanzprüfung:

- $\chi^2_{emp} = 21.17$
- $df = 1$

Ablesen von χ^2_{krit} aus der Tabelle:

- $\chi^2_{df=1} = 3.84$

Vergleich χ^2_{emp} vs. χ^2_{krit} :

- $21.17 > 3.84 \rightarrow$ Test ist signifikant

Fläche df	0,750	0,900	0,950
1	1,32330	2,70554	3,84146
2	2,77259	4,60517	5,99147
3	4,10835	6,25139	7,81473
4	5,38527	7,77944	9,48773
5	6,62568	9,23635	11,0705
6	7,84080	10,6446	12,5916
7	9,03715	12,0170	14,0671
8	10,2188	13,3616	15,5073
9	11,3887	14,6837	16,9190
10	12,5489	15,9871	18,3070
11	13,7007	17,2750	19,6751
12	14,8454	18,5494	21,0261
13	15,9839	19,8119	22,3621
14	17,1170	21,0642	23,6848
15	18,2451	22,3072	24,9958
16	19,3688	23,5418	26,2962
17	20,4887	24,7690	27,5871
18	21,6049	25,9894	28,8693
19	22,7178	27,2036	30,1435

Verfahren für Nominaldaten

Zweidimensionaler χ^2-Test - R

Unser Ergebnis (händisch):

```
chisq.test(table(data$Behandlungserfolg, data$Behandlung), correct = FALSE)
```

```
##
##     Pearson's Chi-squared test
##
## data:  table(data$Behandlungserfolg, data$Behandlung)
## X-squared = 21.168, df = 1, p-value = 0.000004206
```

R führt standardmäßig für 2x2 Kreuztabellen die so genannte Yates-Kontinuitätskorrektur durch (Ergebnis etwas genauer):

```
chisq.test(table(data$Behandlungserfolg, data$Behandlung))
```

```
##
##     Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction
##
## data:  table(data$Behandlungserfolg, data$Behandlung)
## X-squared = 19.368, df = 1, p-value = 0.00001078
```

Verfahren für Nominaldaten

Zweidimensionaler χ^2-Test

Effekstärke w^2 :

- Auch hier lässt sich w^2 verwenden
- Schätzung von w^2 aus Stichprobendaten:

$$\hat{w}^2 = \frac{\chi^2}{N}$$

- Beispiel: $\hat{w}^2 = \frac{21.17}{100} = 0.21 \rightarrow$ nach Cohen ein mittlerer Effekt.

Verfahren für Nominaldaten

Zweidimensionaler χ^2-Test

Effekstärke Cramers Phi-Koeffizient (Cramers Index, CI)

- Empirisches Effektstärkemaß, baut auf w^2 auf
- Vorteil: Darf direkt wie Korrelationsmaß interpretiert werden
  - Wertebereich zwischen 0 und 1
  - 0 = stochastische Unabhängigkeit
  - 1 = perfekter Zusammenhang

$$CI = \sqrt{\frac{\chi^2}{N \cdot (R-1)}}$$

mit:

- $R = min(k; l)$

Verfahren für Nominaldaten

Zweidimensionaler χ^2-Test

Effekstärke Cramers Phi-Koeffizient (Cramers Index, CI)

$$CI = \sqrt{\frac{\chi^2}{N \cdot (R-1)}} = \sqrt{\frac{21.17}{100 \cdot (2-1)}} = 0.46$$

Konventionen nach Cohen (1988):

Effektstärke	Interpretation
0.1	kleiner Effekt
0.3	mittlerer Effekt
0.5	großer Effekt

$\rightarrow$ nach Cohen handelt es sich in unserem Beispiel um eine mittlere Effektstärke.

Verfahren für Nominaldaten

Der Vierfelder χ^2-Test

- Spezialfall des zweidimensionalen χ^2-Tests
- Beide Merkmale haben genau 2 Merkmalsstufen (2x2 Kontingenztabelle)

Dann kann Formel vereinfach werden (Vierfelder-Tafel):

	B1	B2
A1	a	b
A2	c	d

$$\chi^2 = \frac{N \cdot (a \cdot d - b \cdot c)^2}{(a+b) \cdot (c+d) \cdot (a+c) \cdot (b+d)}$$

mit:

$$df = (k-1) \cdot (l-1)$$

- Vorteil: Keine Berechnung von Randhäufigkeiten etc. notwendig

Verfahren für Nominaldaten

Der Vierfelder χ^2-Test

	B1	B2
A1	a	b
A2	c	d

```
table(data$Behandlungserfolg, data$Behandlung)
```

```
##
##          Psychotherapie Warteliste
##    ja                36         13
##    nein              14         37
```

$$\chi^2_{emp} = \frac{N \cdot (a \cdot d - b \cdot c)^2}{(a+b) \cdot (c+d) \cdot (a+c) \cdot (b+d)} = \frac{100 \cdot (36 \cdot 37 - 13 \cdot 14)^2}{(36+13) \cdot (14+37) \cdot (36+14) \cdot (13+37)} = 21.17$$

Verfahren für Nominaldaten

Der Vierfelder χ^2-Test

Effekstärke Phi-Koeffizient

- Effektstärke ϕ entspricht Korrelation von 2 dichotomen Variablen

$$\phi = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{\sqrt{(a+b) \cdot (c+d) \cdot (a+c) \cdot (b+d)}}$$

Verfahren für Nominaldaten

Voraussetzungen χ^2-Tests

- χ^2-Tests haben nur relativ wenige Voraussetzungen

  1. Einzelbeobachtungen sind unabhängig voneinander
  2. Jede Person kann eindeutig einer Kategorie (oder Kombination von Kategorien) zugeordnet werden
  3. Erwartete Häufigkeiten in den Zellen größer als 5 (sonst analoger Alternativtest "Exakter Test nach Fisher")

Take-aways

- χ^2-Tests beinhalten die **Analyse von Häufigkeiten**.
- Prinzip: Vergleich von **beobachteten vs. theoretisch erwarteten** Häufigkeiten.
- Für χ^2-Tests existieren theoreitsch **unendlich viele** H_0 Möglichkeiten (häufig: Gleichverteilungsannahme)
- **Eindimensionaler χ^2-Test** prüft, ob sich Verteilung der Kategorien einer nominalskalierten Variable unterscheiden.
- **Zweidimensionaler χ^2-Test** prüft Verteilung von 2 nominalskalierten Variablen (stochastische Unabhängigkeit).
- Spezialfall: **Vierfelder χ^2-Test** wenn 2 dichotome Merkmale vorliegen.
- **Effektstärkebestimmung** über w^2 oder Phi-Koeffizient (wie Korrelation interpretierbar)