CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Statistik II

Einheit 3: Einfache lineare Regression (1)

08.05.2025 | Prof. Dr. Stephan Goerigk

Einfache lineare Regression

Zusammenhänge - Korrelation vs. Regression

Assoziations-maße

$X \leftrightarrow Y$

Ungerichteter Zusammenhang

Regression

$X \rightarrow Y$

Gerichteter Zusammenhang

$$X \rightarrow Y$$

Unabhängige Variable (UV) Abhängige Variable (AV)

X „erklärt“ Y
Y durch X „vorhergesagt“

> **Woher kommt die Richtung?**
>
> Welche Variable (Y) durch welche Variable (X) erklärt werden wird anhand inhaltlichen Kontexts (Theorie) entschieden.

Einfache lineare Regression

Zusammenhänge - Korrelation vs. Regression

Ungerichtete Zusammenhänge

- Wir haben uns bereits mit ungerichteten Zusammenhängen zwischen 2 Variablen beschäftigt
- ungerichtet: es könnte X auf Y wirken, Y aber auch auf X, oder die beiden könnten einfach parallel auftreten
- Um solche Zusammenhänge zu messen, gibt es sogenannte Assoziationsmaße z.B. Varianz oder Korrelation.

Gerichtete Zusammenhänge

- Jetzt wollen wir einen Schritt weiter gehen und unterstellen, dass der Zusammenhang eine Wirkrichtung hat
- D.h. X wirkt auf Y und eben nicht Y wirkt auf X
- Wenn wir diese Richtung unterstellen, kann man die lineare Regression anwenden

Einfache lineare Regression

Zusammenhänge - Korrelation vs. Regression

- Die Schreibweise $X \rightarrow Y$ soll also andeuten X wirkt auf Y (bzw. sagt Y vorher)
- Dabei ist X die unabhängige Variable (UV) und Y ist die abhängige Variable (AV)

Beispiel:

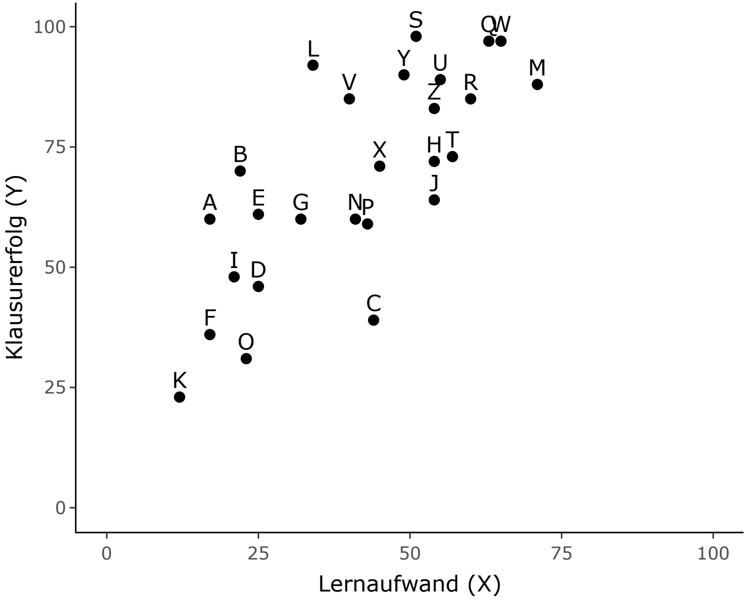
- Die Intensität des Sports wirkt sich auf den Puls aus, aber nicht umgekehrt
- Wenn wir so einen gerichteten Zusammenhang untersuchen, dann stellt sich die Frage, wo die Richtung herkommt

$\rightarrow$ Typischerweise müssen wir die Richtung aus der Theorie oder aus Plausibilitätsüberlegungen herleiten

Einfache lineare Regression

Einfache lineare Regression, Beispiel

Gegeben: Lernaufwand X (Stunden) und Klausurerfolg Y (Punkte: 0-100) von n = 26 Studierenden (hier Zeilen 1-13).

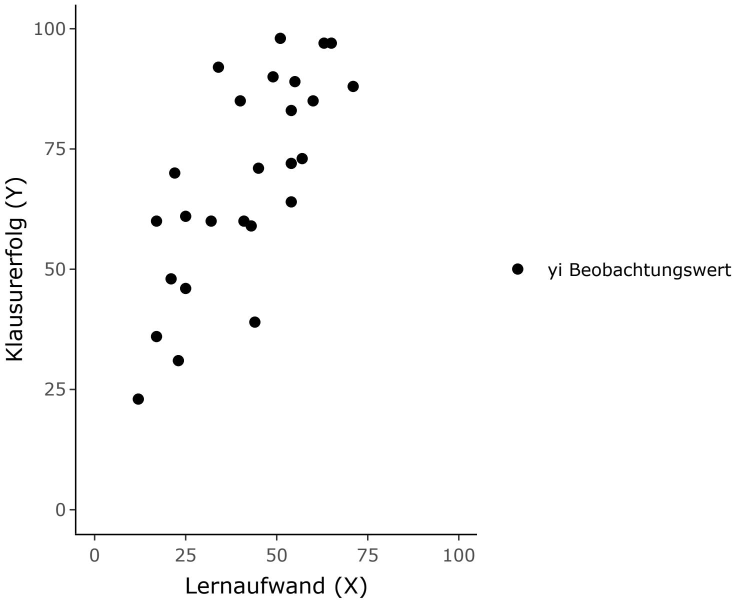


ID	X	Y
A	17	60
B	22	70
C	44	39
D	25	46
E	25	61
F	17	36
G	32	60
H	54	72
I	21	48
J	54	64
K	12	23
L	34	92
M	71	88

Einfache lineare Regression

Lineare Regressionsfunktion

$X \rightarrow Y$ Regressionsfunktion und Beobachtungswerte

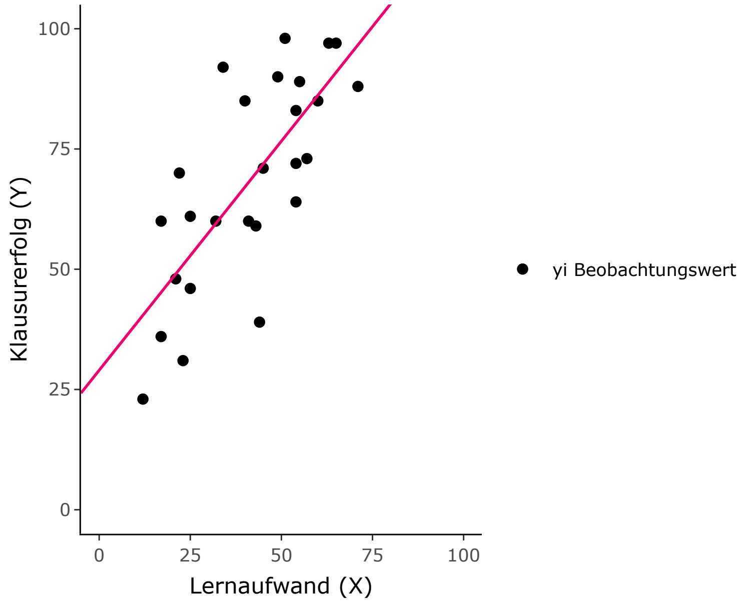


- Jeder Punkt repräsentiert eine Kombination aus X und Y Werten
- Wir könnten also sagen, jeder Punkt ist eine Person aus unserem Beispiel
- Es gilt, in der Regression eine Funktion zu finden, die diese Daten möglichst genau widerspiegelt

Einfache lineare Regression

Lineare Regressionsfunktion

$X \to Y$ Regressionsfunktion und Beobachtungswerte

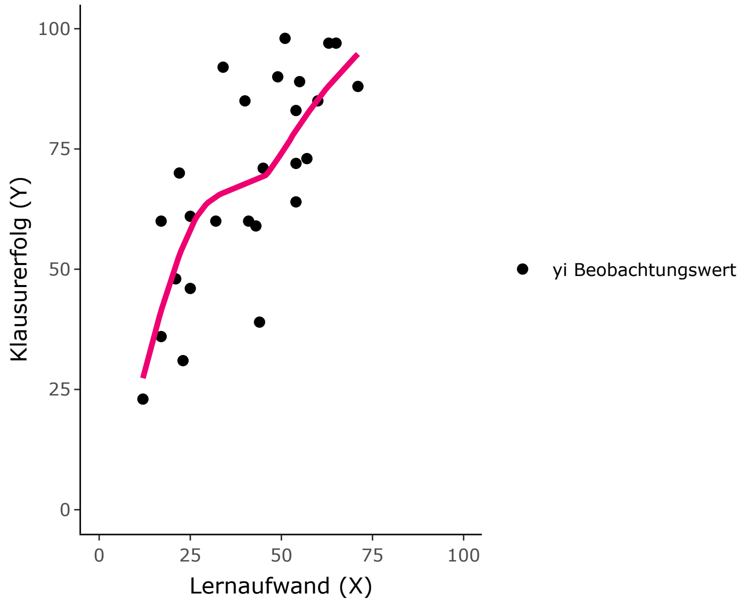


- Im Falle der *linearen* Regression wird unterstellt, dass diese Funktion linear, also eine Gerade ist

Einfache lineare Regression

Lineare Regressionsfunktion

$X \rightarrow Y$ Regressionsfunktion und Beobachtungswerte

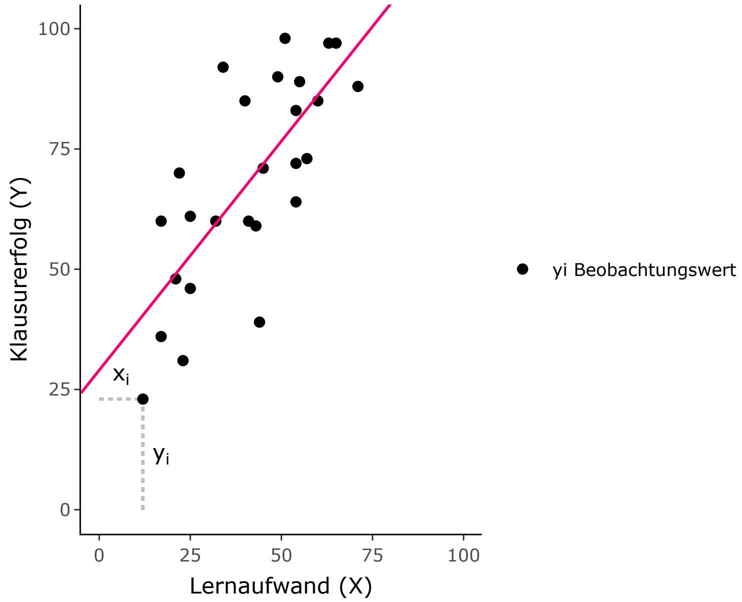


- Theoretisch wären allerdings auch andere Funktionen denkbar.
- Diese beschreiben die vorliegenden Daten ggf. besser, sind aber nicht so leicht interpretierbar/generalisierbar.

Einfache lineare Regression

Lineare Regressionsfunktion

$X \rightarrow Y$ Regressionsfunktion und Beobachtungswerte



- Jeder Beobachtungspunkt hat für den X Wert einen entsprechenden Y Wert.
- Er ist somit eindeutig für die beiden Variablen definiert.

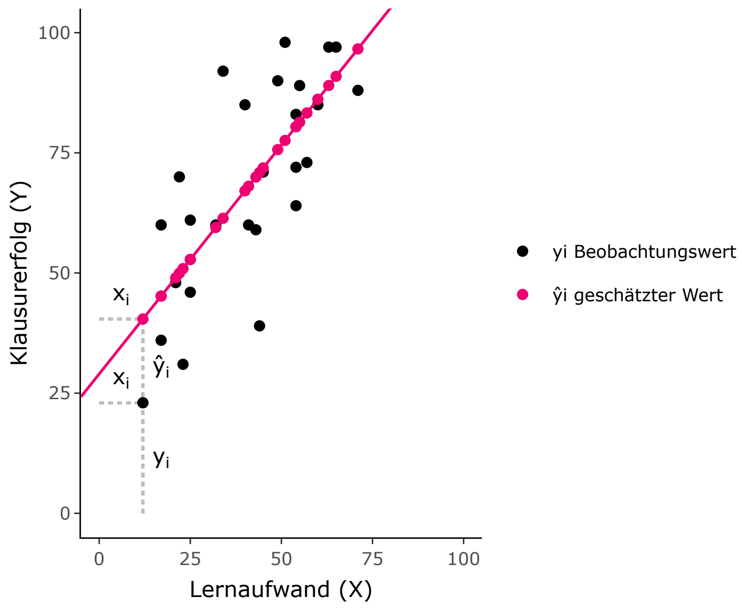
ABER:

- Für jeden gegebenen X Wert lässt sich ein Punkt auf der Geraden finden, der einen anderen Y Wert hat

Einfache lineare Regression

Lineare Regressionsfunktion

$X \rightarrow Y$ Regressionsfunktion und Beobachtungswerte

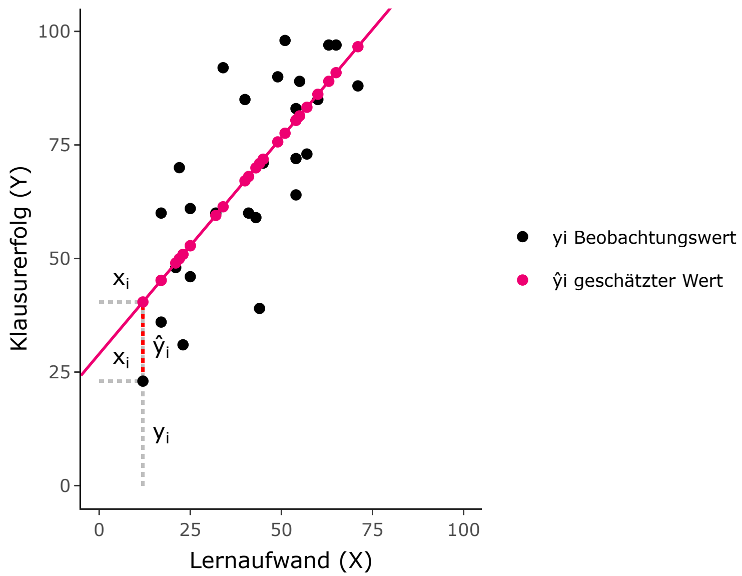


- Der pinke Punkt ist der gemäß der linearen Funktion geschätzte Y Wert für den Punkt X
- Es ist also der Wert, den man unter Annahme eines linearen Zusammenhangs **erwarten** würde
- Diese Punkte haben den X Wert gemeinsam aber sind unterschiedlich im Y Wert.

Einfache lineare Regression

Lineare Regressionsfunktion

$X \rightarrow Y$ Regressionsfunktion und Beobachtungswerte



- Wie wir aber sehen, gibt es hier einen Unterschied in den beiden Y Werten
- Dieser Unterschied ist unser sogenannter Vorhersagefehler oder auch **Residuum**
  - Differenz zwischen Beobachtungswert und vorhergesagtem Wert
  - Das Residuum wird mit ε_i bezeichnet

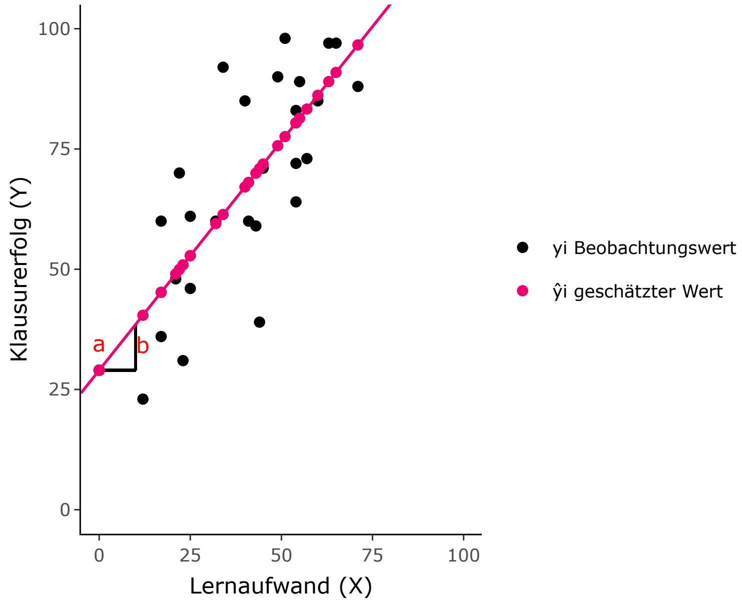
Formel für das Residuum:

$$\varepsilon_i = \hat{y}_i - y_i$$

Einfache lineare Regression

Lineare Regressionsfunktion

$X \rightarrow Y$ Regressionsfunktion und Beobachtungswerte



$$\hat{y}_i = a + b \cdot x_i + \varepsilon_i$$

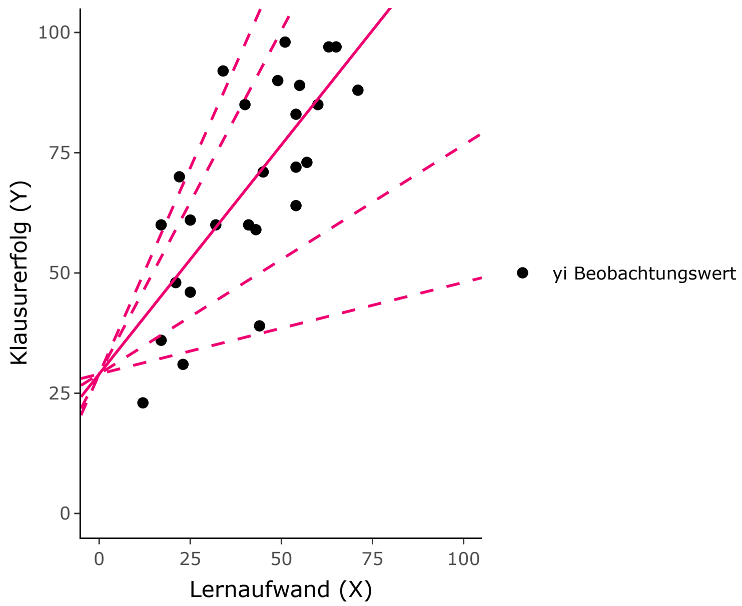
a : Y-Achsenabschnitt
b : Steigungsparameter

Interpretation:

a : Wert, den Y hat, wenn $X = 0$ ist
b : Veränderung von Y bei Zunahme von X um 1 Einheit

Einfache lineare Regression

Residuen und Zielfunktion



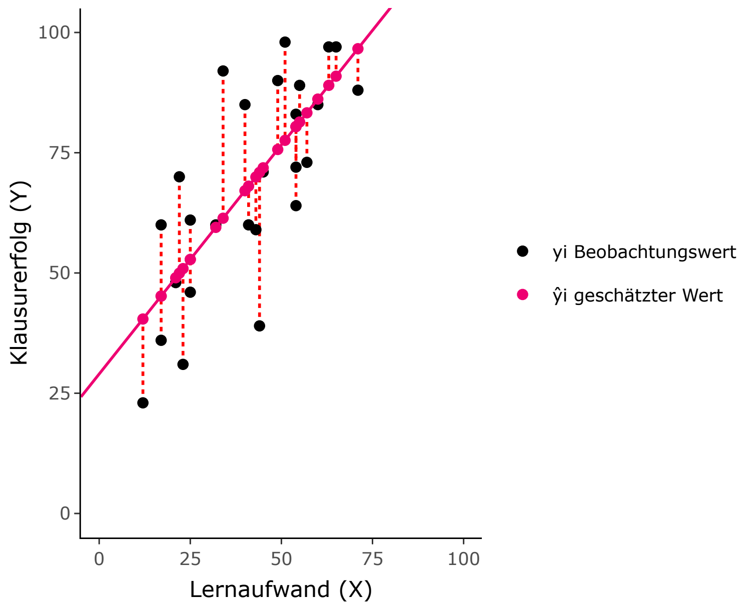
$$\hat{y}_i = a + b \cdot x_i + \varepsilon_i$$

a : Y-Achsenabschnitt
b : Steigungsparameter

- Theoretisch sind endlos viele Geraden denkbar, die die Punktewolke alle an unterschiedlichen Stellen durchschneiden
- Wir wollen aber genau die Gerade finden, welche die Daten am allerbesten beschreibt.

Einfache lineare Regression

Residuen und Zielfunktion



Ziel:

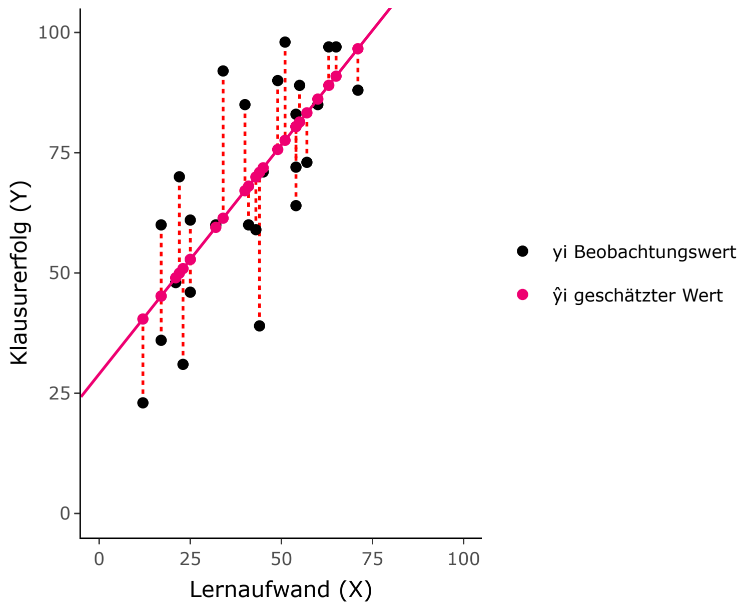
- Y-Achsenabschnitt und Steigung so wählen, dass die lineare Funktion die Punkte möglichst gut widerspiegelt
- gut widerspiegeln = Abstand zwischen dem Beobachtungswert und dem gemäß linearer Funktion geschätzten Wert möglichst klein halten

Bildliche Vorstellung:

Wenn ich die Residuen aller Beobachtungswerte zu einer Schnur aneinanderhänge, soll diese Schnur möglichst kurz sein

Einfache lineare Regression

Residuen und Zielfunktion



Es liegt ein Optimierungsproblem vor:

- Die Summe der quadrierten Residuen wird über alle Beobachtungswerte minimiert
- So werden die optimalen Werte für a und b gefunden
- Quadrierung verhindert, dass sich negative und positive Werte ausgleichen

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \ldots + \varepsilon_n^2 \rightarrow \min_{a,b}$$

Einfache lineare Regression

Bestimmung der zu schätzenden Parameter

- Schätzung von a und b $\rightarrow$ **Methode der kleinsten Quadrate**
- Ziel: Summe der quadrierten Residuen minimieren

Analytische Lösung des Optimierungsproblems:

1. Y-Achsenabschnitt (a)

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

1. Y-Steigungsparameter (b)

$$b = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2} = r_{XY} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

Einfache lineare Regression

Bestimmung der zu schätzenden Parameter

- Schätzung von a und b $\rightarrow$ **Methode der kleinsten Quadrate**
- Ziel: Summe der quadrierten Residuen minimieren

Analytische Lösung des Optimierungsproblems:

1. Y-Achsenabschnitt (a)

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

1. Y-Steigungsparameter (b)

$$b = \frac{\sigma^2_{XY}}{\sigma^2_X} = r_{XY} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

To Do - wir benötigen:

- Mittelwert von X : $\bar{x}$
- Mittelwert von Y : $\bar{y}$
- Kovarianz von XY : σ^2_{XY}
- Varianz von X : σ^2_X

Einfache lineare Regression

Bestimmung der zu schätzenden Parameter

X	17	22	44	25	25	17	32	54	21	54	12	34	71	41	23	43	63	60	51	57	55	40	65	45	49	54
Y	60	70	39	46	61	36	60	72	48	64	23	92	88	60	31	59	97	85	98	73	89	85	97	71	90	83

Mittelwert von $X = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Mittelwert von $Y = \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$

Kovarianz von $XY = \sigma_{xy}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{n-1}$

Varianz von $X = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Einfache lineare Regression

Bestimmung der zu schätzenden Parameter

X	17	22	44	25	25	17	32	54	21	54	12	34	71	41	23	43	63	60	51	57	55	40	65	45	49	54
Y	60	70	39	46	61	36	60	72	48	64	23	92	88	60	31	59	97	85	98	73	89	85	97	71	90	83

Mittelwert von $X = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ = 41.31

Mittelwert von $Y = \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ = 68.35

Kovarianz von $XY = \sigma_{xy}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{n-1}$ = 274.01

Varianz von $X = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ = 287.66

Einfache lineare Regression

Bestimmung der zu schätzenden Parameter

X	17	22	44	25	25	17	32	54	21	54	12	34	71	41	23	43	63	60	51	57	55	40	65	45	49	54
Y	60	70	39	46	61	36	60	72	48	64	23	92	88	60	31	59	97	85	98	73	89	85	97	71	90	83

$$b = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} = \frac{274.01}{287.66} = 0.95$$

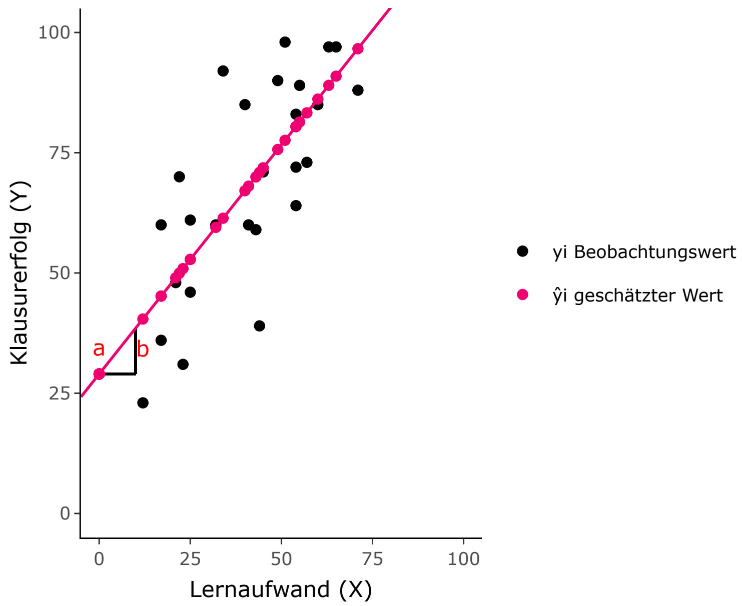
$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} = 29$$

$$y = a + b \cdot x$$

$$y = 29 + 0.95 \cdot x$$

Einfache lineare Regression

Lineare Regressionsfunktion



$$\hat{y} = 29 + 0.95 \cdot x$$

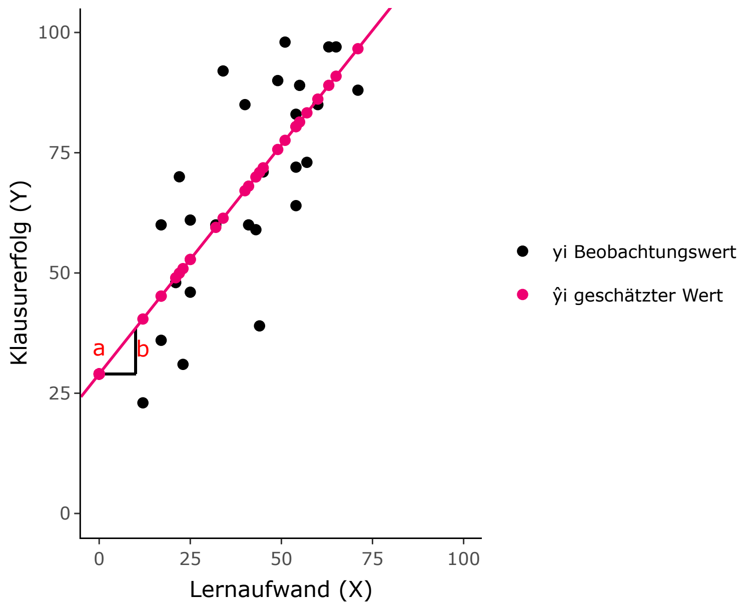
- Es ergibt sich also der geschätzte Y Wert $(\hat{y})$ aus a plus b mal x

Nochmal zurück zu unserer Interpretation:

- a ist also der Wert wo $X = 0$ ist. Also hat jemand mit 0 auf der UV einen AV Wert von 29.
- Wenn wir nun um 1 Einheit X nach rechts gehen (in welcher Einheit die UV auch immmer gemessen wird), nimmt $\hat{y}$ um b zu.

Einfache lineare Regression

Lineare Regressionsfunktion

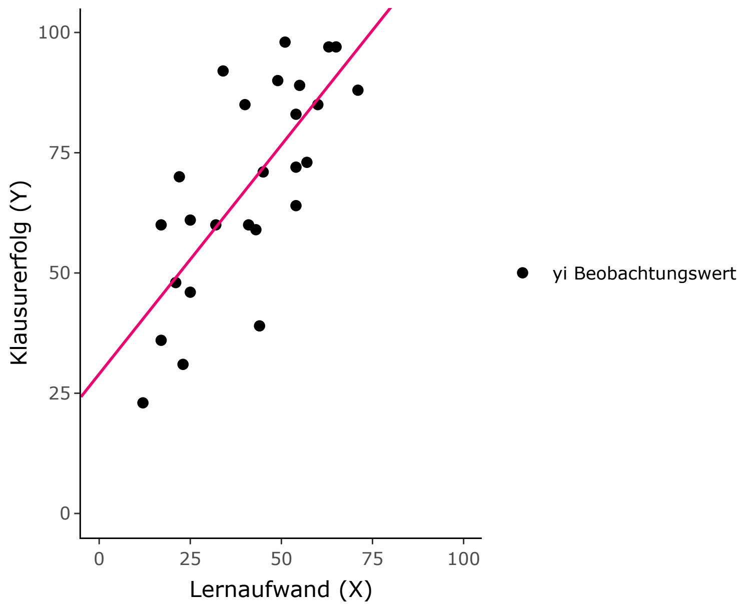


$$\hat{y} = 29 + 0.95 \cdot x$$

- Wir könnten nun ausrechnen, welchen Y Wert eine Person nach x Einheiten der UV hat.
- Welchen Wert erhalten wir z.B. für $X = 10$?

Einfache lineare Regression

Modellpassung



Nach Aufstellen des Modells:

- Abstände zwischen Beobachtungswerten und Regressionsgerade unterschiedlich groß

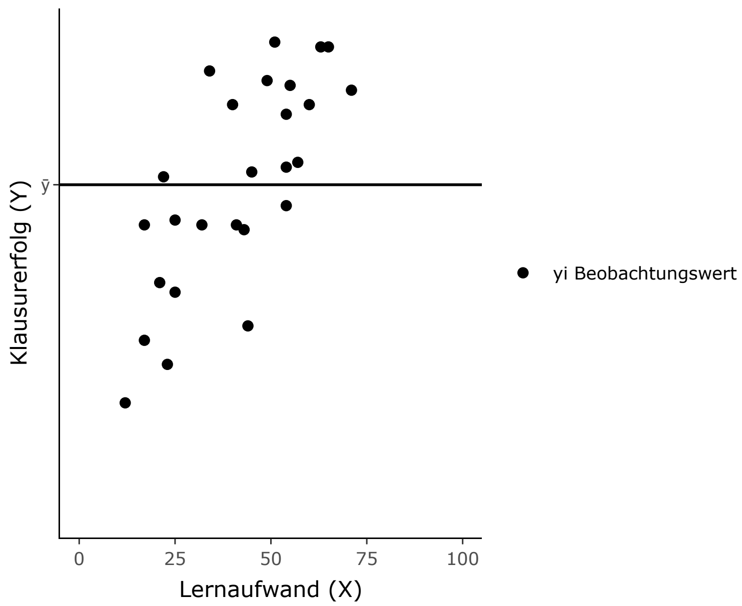
Frage:

- Wie gut passt unser Modell auf die Beobachtungswerte?
- Maß zur Bestimmung der Passung:

$\rightarrow$ Das Bestimmheitsmaß (R^2)

Einfache lineare Regression

Modellpassung



Frage:

- Wie gut passt unser Modell auf die Beobachtungswerte?
- horizontale Gerade = Mittelwert von Y (um welchen Werte streuen)

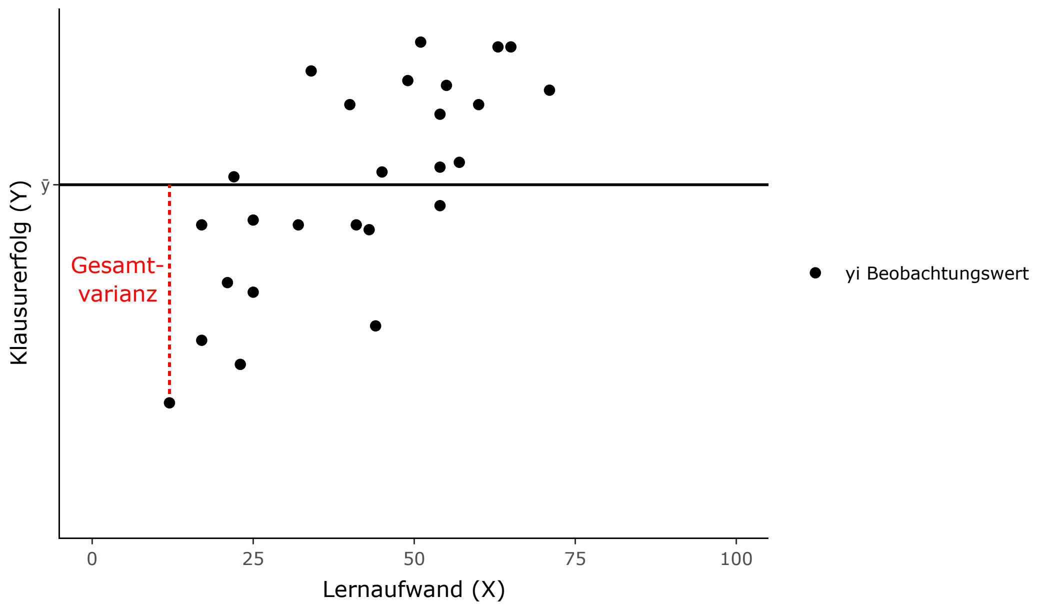
$\rightarrow$ **Gesamtvarianz**

Regressionsgerade kann einen Anteil der Streuung um den Mittelwert erklären:

$\rightarrow$ **Aufgeklärte Varianz**

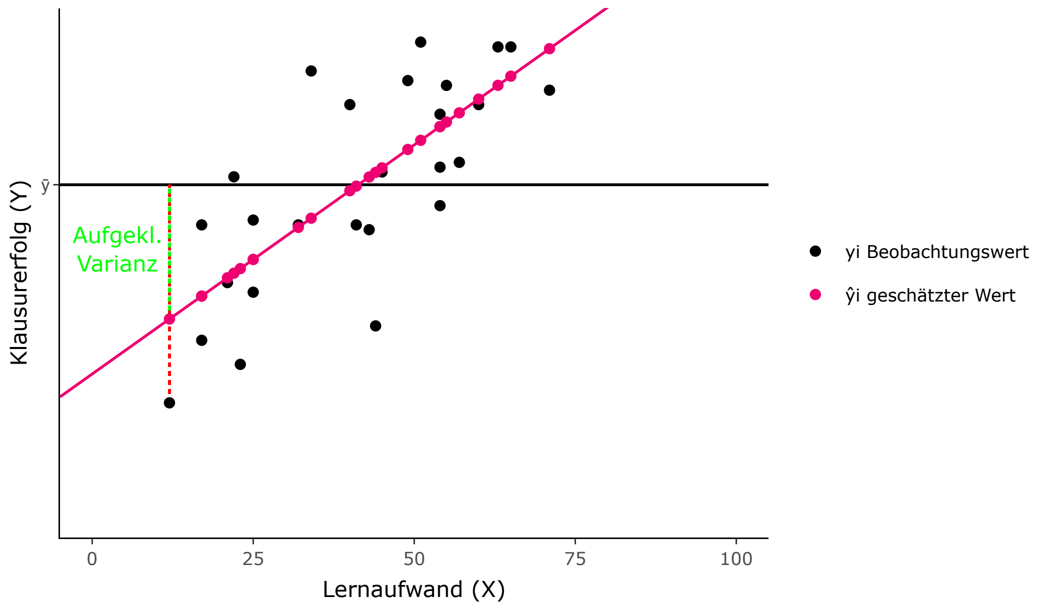
Einfache lineare Regression

Modellpassung



Einfache lineare Regression

Modellpassung



Einfache lineare Regression

Modellpassung

Das Verhältnis aufgeklärter zu gesamter Streuung nennt sich Bestimmtheitsmaß (R^2)

$$R^2 = \frac{\text{erklärte Varianz}}{\text{gesamte Streuung}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2} = (\frac{s_{XY}}{s_X \cdot s_Y})^2$$

LINK zu interaktivem Regressionsbeispiel

Einfache lineare Regression

Modellpassung

- $0 \leq R^2 \leq 1$
- Je näher R^2 an 1, desto besser passt sich Modell an Beobachtungspunkte an

X	17	22	44	25	25	17	32	54	21	54	12	34	71	41	23	43	63	60	51	57	55	40	65	45	49	54
Y	60	70	39	46	61	36	60	72	48	64	23	92	88	60	31	59	97	85	98	73	89	85	97	71	90	83

$$R^2 = (\frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y})^2$$

$$R^2 = (\frac{274.01}{16.96 \cdot 21.74})^2 = 0.74$$

Es können 74% der Streuung um den Mittelwert von Y durch die Gerade erklärt werden.

Einfache lineare Regression

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Einsatz der Regression

Wozu können wir die Regression nutzen?

1. Als **Hypothesentest** für eine wissenschaftliche Hypothese (Inferenz):
    - Schritt 1: Mittels Regression Assoziation in der Stichprobe identifizieren
    - Schritt 2: Mittels Signifikanztest prüfen, ob Assoziation wahrscheinlich auch außerhalb Stichprobe vorliegt
2. Als **Vorhersagemodell** für neue Datenpunkte (Prädiktion):
    - Schritt 1: Mittels Stichprobendaten Regressionsmodell anpassen (X und Y bekannt)
    - Schritt 2: Mittels Modell neue Werte vorhersagen (X bekannt, Y unbekannt).

Einfache lineare Regression

Berechnen der Regression in R

```r
model = lm(Y ~ X, data = sampledata) # Aufstellen des Modells

summary(model) # Anzeigen des Modelloutputs
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Y ~ X, data = sampledata)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -31.911  -9.051  -0.933   8.138  30.615
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  28.9989     7.7979   3.719  0.00107 **
## X             0.9525     0.1751   5.439 1.37e-05 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 14.85 on 24 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5521,    Adjusted R-squared:  0.5335
## F-statistic: 29.59 on 1 and 24 DF,  p-value: 1.372e-05
```

Einfache lineare Regression

Berechnen der Regression in R

```r
model = lm(Y ~ X, data = sampledata) # Aufstellen des Modells

summary(model) # Anzeigen des Modelloutputs
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Y ~ X, data = sampledata)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -31.911  -9.051  -0.933   8.138  30.615
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  28.9989     7.7979   3.719  0.00107 **
## X             0.9525     0.1751   5.439 1.37e-05 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 14.85 on 24 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5521,    Adjusted R-squared:  0.5335
## F-statistic: 29.59 on 1 and 24 DF,  p-value: 1.372e-05
```

- Regressionskoeffizienten (a und b) stehen in der Spalte "Estimate"
- Für jeden Koeffizienten wird ein spezieller t-Test (Wald-Test) gerechnet
    - H_0 a und b = 0
    - H_1 a und b $\neq$ 0

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Take-aways

- Zusammenhänge können neben Kovarianz/Korrelation auch mit der **Regression** quantifiziert werden.
- Regression ist sinnvoll, wenn aus den X-Werten auf die dazugehörigen Y-Werte **geschlossen** (diese vorhergesagt) werden soll.
- **Regressionsgerade** = graphische Veranschaulichung der Regressionsgleichung
- Regressionsgleichung ist definiert durch die **Regressionskoeffizienten** (Y-Achsenabschnitt und Steigung), welche aus Daten geschätzt werden müssen.
- **Y-Achsenabschnitt** ist der Startwert (wenn X = 0) und **Steigung** ist die Veränderung in der AV bei Zunahme der UV um 1 Einheit.
- Das **Bestimmtheitsmaß** (R^2) gibt an, wie viel Prozent (%) der Gesamtvarianz der AV durch die UV (also durch die das Regressionsmodell) aufgeklärt werden.