Statistik II

Einheit 5: Mehrfaktorielle ANOVA

15.05.2024 | Prof. Dr. Stephan Goerigk

Mehrfaktorielle ANOVA

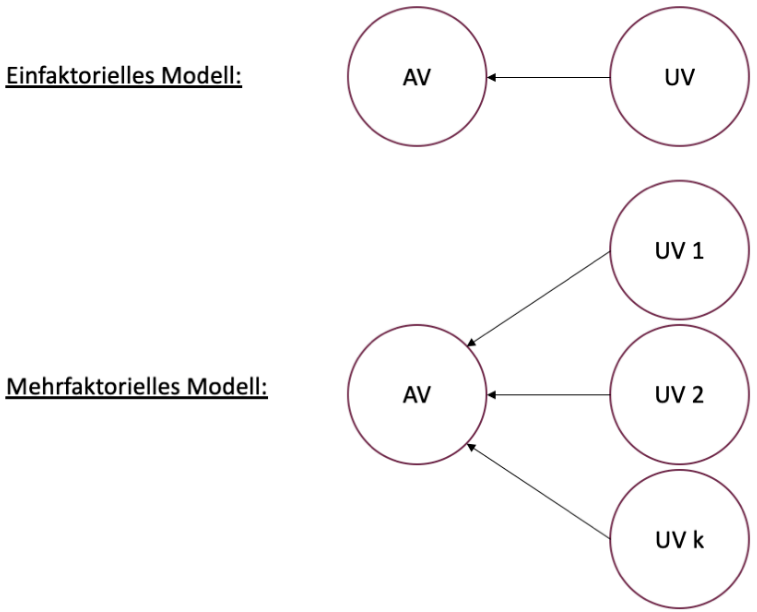
CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Einfaktorielle vs. Mehrfaktorielle ANOVA

- Einfaktorielle ANOVA: Einfluss **einer** UV a.k.a Faktor (i.d.R. $\geq$ 3 Stufen) auf eine AV
- Mehrfaktorielle ANOVA: Einfluss **mehrerer** UVs (beide zumindest 2 Stufen) auf eine AV

Psychologie:

- Verhalten wird (fast) immer von mehr als einem Faktor bestimmt
- Deshalb interessiert oft die Wirkung von nicht einem, sondern mehreren Faktoren auf die AV
- Von besonderem Interesse: Zusammenwirken der Faktoren (Wechselwirkung, Interaktion)



Mehrfaktorielle ANOVA

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nomenklatur

- Abhängige Variable (AV) auch Kriterium genannt
- Unabhängige Variablen (UV) in ANOVA-Sprache auch Faktoren genannt
- Die Stufenanzahl der Faktoren wird durch Indizes angegeben
    - Faktor A hat p Stufen (Laufindex i)
    - Faktor B hat q Stufen (Laufindex j)
- Benennung des Tests als **p x q ANOVA**
    - Beispiel: IQ (AV) wird durch Geschlecht $[UV_1$: 0=männlich, 1=weiblich] und Bildung $[UV_2$: 0=Hauptschule, 1=Realschule, 2=Gymnasium] vorhergesagt
    - UV_1 = 2-stufig, UV_2 = 3-stufig
    - Man spricht dann von einer 2 x 3 ANOVA

Mehrfaktorielle ANOVA

Vorgehen

- Mehrfaktorielle ANOVA ist in der Vorgehensweise analog zur Einfaktoriellen ANOVA
- Ziel: Prüfen von Mittelwertsunterschieden mit dem F-Test auf Signifikanz
- Jeder Faktor wird mit einem eigenen F-Test geprüft (Ergebnis: F-Wert mit df_1 und df_2 und p-Wert)
- Durch Hinzufügen des Interaktionseffekts gibt es bei 2 Faktoren 3 Arten von Mittelwertsunterschieden:
    - Haupteffekt UV_1
    - Haupteffekt UV_2
    - Interaktion UV_1 x UV_2

Mehrfaktorielle ANOVA

Effektarten

Haupteffekt UV_1

- Haupteffekt UV_1 beschreibt den Einfluss der UV_1 auf die AV unabhängig von der UV_2
- Mittelwertsunterschiede in den Stufen des Faktors UV_1 gemittelt über die Stufen der UV_2

Interpretation:

- UV_1 ist 2-stufig $\rightarrow$ das Ergebnis von Haupteffekt UV_1 entspricht einem unabhängigen t-Test
- UV_1 ist $\geq$ 3-stufig $\rightarrow$ das Ergebnis von Haupteffekt UV_1 einer einfaktoriellen ANOVA.

Mehrfaktorielle ANOVA

Effektarten

Haupteffekt UV_2

- Haupteffekt UV_2 beschreibt den Einfluss der UV_2 auf die AV unabhängig von der UV_1
- Mittelwertsunterschiede in den Stufen des Faktors UV_2 gemittelt über die Stufen der UV_1

Interpretation:

- UV_2 ist 2-stufig $\rightarrow$ das Ergebnis von Haupteffekt UV_2 entspricht einem unabhängigen t-Test
- UV_2 ist $\geq$ 3-stufig $\rightarrow$ das Ergebnis von Haupteffekt UV_2 einer einfaktoriellen ANOVA.

Mehrfaktorielle ANOVA

Effektarten

Interaktion UV_1 x UV_2

- Wechselwirkung von UV_1 x UV_2 (Interaktion) beschreibt gemeinsamen Einfluss von UV_1 und UV_2 auf die AV

Interpretation:

- Interaktion erfasst das Zusammenwirken der Faktorstufen beider Faktoren
- Sie quantifiziert Einflüsse, die nur durch die gemeinsame, simultane Wirkung zweier Faktorstufen entstehen $\rightarrow$ nicht durch die Haupteffekte alleine

Formell:

- Es wird geprüft, ob die Wirkung der UV_2 auf allen Stufen der UV_1 identisch ist.
- Der Interaktionseffekt wird mit einem eigenen F-Test geprüft

  $\rightarrow$ ANOVA mit 2 UVs enthält also 3 Signifikanztests

Mehrfaktorielle ANOVA

Formelnotation

Einfaktorielles Modell:

$$\underbrace{Y}_{\text{AV}} = \underbrace{X}_{\text{UV}} + \varepsilon$$

Zweifaktorielles Modell:

$$Y = \underbrace{X_1}_{\text{UV}_1} + \underbrace{X_2}_{\text{UV}_2} + \varepsilon$$

Zweifaktorielles Modell mit Interaktion:

$$Y = \underbrace{X_1 + X_2}_{\text{Haupteffekte 1 und 2}} + \underbrace{X_1 \cdot X_2}_{\text{Interaktion}} + \varepsilon$$

Mehrfaktorielle ANOVA

Beispiel: Klinische Studie mit 2 Gruppenfaktoren

- $N = 16$ Patient:innen
- Medikament: Behandlung mit Psychopharmakum vs. Placebo
- Dosis: hoch = 3x täglich, niedrig = 1x täglich
- Verbesserung: hohe Werte = viel Verbesserung

ID	UV1: Medikament	UV2: Dosis	AV: Verbesserung
1	Verum	niedrig	18
2	Verum	niedrig	19
3	Verum	niedrig	26
4	Verum	niedrig	20
5	Verum	hoch	36
6	Verum	hoch	42
7	Verum	hoch	37
8	Verum	hoch	30
9	Placebo	niedrig	12
10	Placebo	niedrig	13
11	Placebo	niedrig	20
12	Placebo	niedrig	16
13	Placebo	hoch	17
14	Placebo	hoch	15
15	Placebo	hoch	13
16	Placebo	hoch	22

Mehrfaktorielle ANOVA

Formelnotation - Beispiel

Einfaktorielles Modell:

$$\underbrace{Verbesserung}_{\text{AV}} = \underbrace{Medikament}_{\text{UV}} + \varepsilon$$

Zweifaktorielles Modell:

$$Verbesserung = \underbrace{Medikament}_{\text{UV}_1} + \underbrace{Dosis}_{\text{UV}_2} + \varepsilon$$

Zweifaktorielles Modell mit Interaktion:

$$Verbesserung = \underbrace{Medikament + Dosis}_{\text{Haupteffekte 1 und 2}} + \underbrace{Medikament \cdot Dosis}_{\text{Interaktion}} + \varepsilon$$

Mehrfaktorielle ANOVA

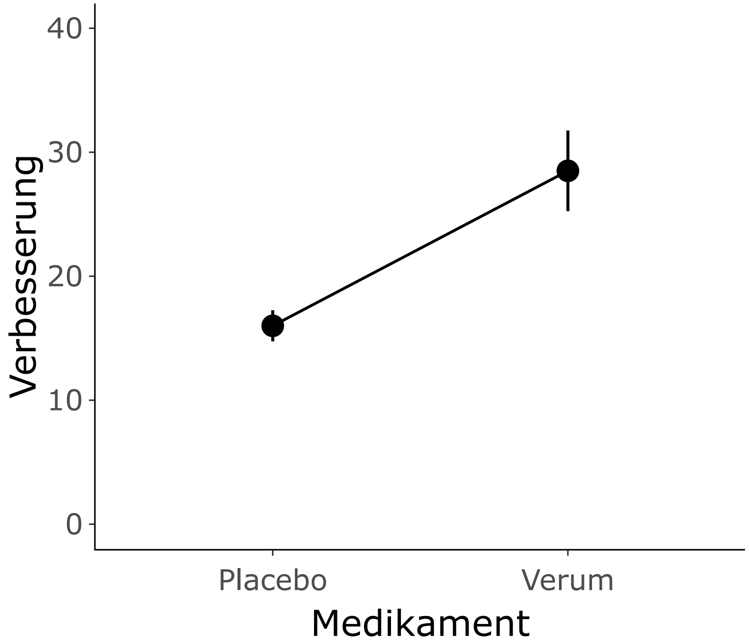
Beispiel: Klinische Studie mit 2 Gruppenfaktoren

Haupteffekt UV_1 : Medikament

$$Y = \color{red}{Medikament} + Dosis + Medikament \cdot Dosis + \epsilon$$

$$\downarrow$$

Medikament	N	Mittelwert	SD
Placebo	8	16.0	3.55
Verum	8	28.5	9.20



Mehrfaktorielle ANOVA

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Beispiel: Klinische Studie mit 2 Gruppenfaktoren

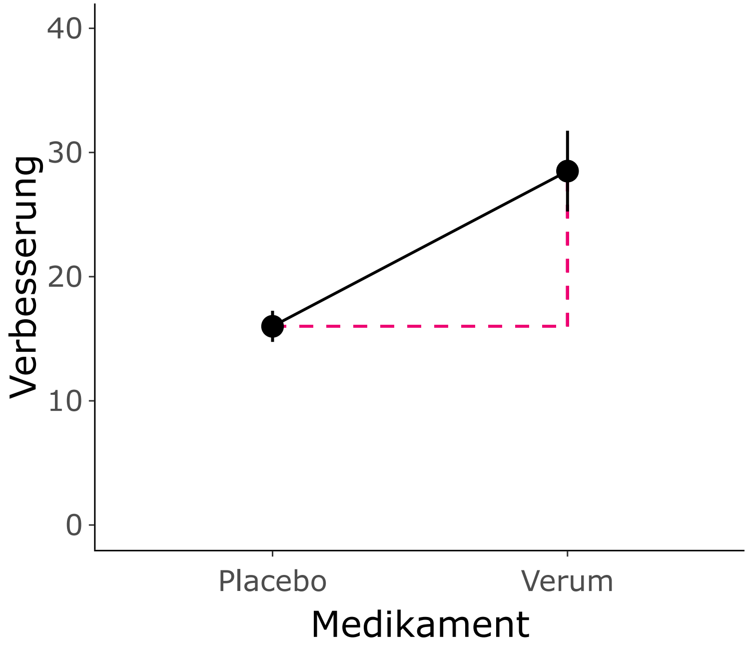
Haupteffekt UV_1 : Medikament

$$Y = \textcolor{red}{Medikament} + Dosis + Medikament \cdot Dosis + \epsilon$$

$$\downarrow$$

Medikament	N	Mittelwert	SD
Placebo	8	16.0	3.55
Verum	8	28.5	9.20

$\rightarrow$ Unterschied zwischen Verum und Placebo (ungeachtet der Dosis)



Mehrfaktorielle ANOVA

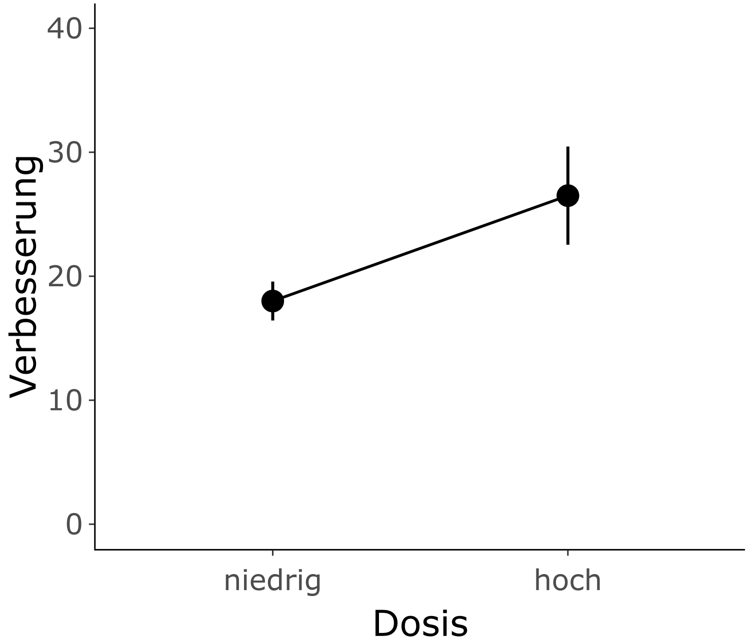
Beispiel: Klinische Studie mit 2 Gruppenfaktoren

Haupteffekt UV_2 : Dosis

$$Y = Medikament + \color{red}{Dosis} + Medikament \cdot Dosis + \epsilon$$

$$\downarrow$$

Dosis	N	Mittelwert	SD
niedrig	8	18.0	4.44
hoch	8	26.5	11.20



Mehrfaktorielle ANOVA

Beispiel: Klinische Studie mit 2 Gruppenfaktoren

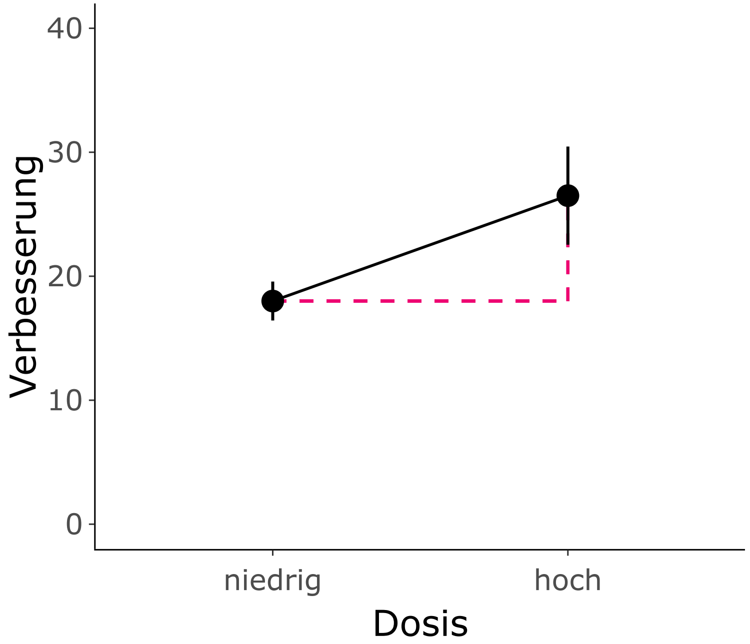
Haupteffekt UV_2 : Dosis

$$Y = Medikament + \color{red}{Dosis} + Medikament \cdot Dosis + \epsilon$$

$$\downarrow$$

Dosis	N	Mittelwert	SD
niedrig	8	18.0	4.44
hoch	8	26.5	11.20

$\longrightarrow$ Unterschied zwischen niedriger und hoher Dosis (ungeachtet des Medikaments)



Mehrfaktorielle ANOVA

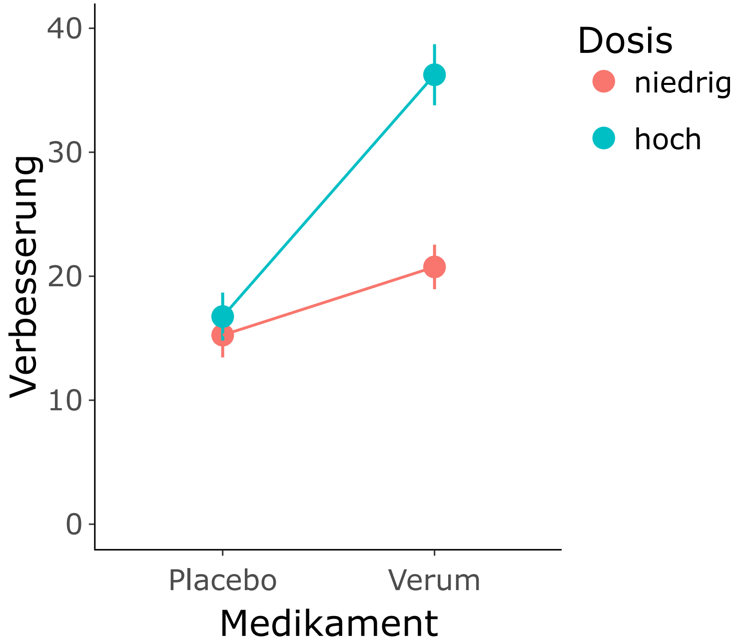
Beispiel: Klinische Studie mit 2 Gruppenfaktoren

Interaktion UV_1 x UV_2 : Medikament x Dosis

$$Y = Medikament + Dosis + Medikament \cdot Dosis + \epsilon$$

$$\downarrow$$

Medikament	Dosis	N	Mittelwert	SD
Placebo	niedrig	4	15.25	3.59
Placebo	hoch	4	16.75	3.86
Verum	niedrig	4	20.75	3.59
Verum	hoch	4	36.25	4.92



Mehrfaktorielle ANOVA

Beispiel: Klinische Studie mit 2 Gruppenfaktoren

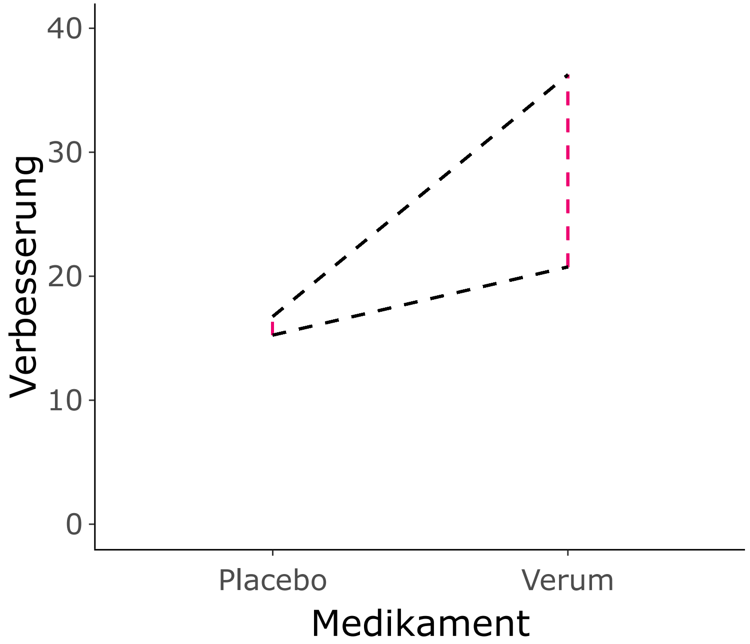
Interaktion UV_1 x UV_2 : Medikament x Dosis

$$Y = Medikament + Dosis + Medikament \cdot Dosis + \epsilon$$

$$\downarrow$$

Medikament	Dosis	N	Mittelwert	SD
Placebo	niedrig	4	15.25	3.59
Placebo	hoch	4	16.75	3.86
Verum	niedrig	4	20.75	3.59
Verum	hoch	4	36.25	4.92

$\longrightarrow$ Unterschied des Effekts der Dosis in der Verum-Gruppe vs. des Effekts der Dosis in der Placebo-Gruppe



Mehrfaktorielle ANOVA

Signifikanztest der Effekte

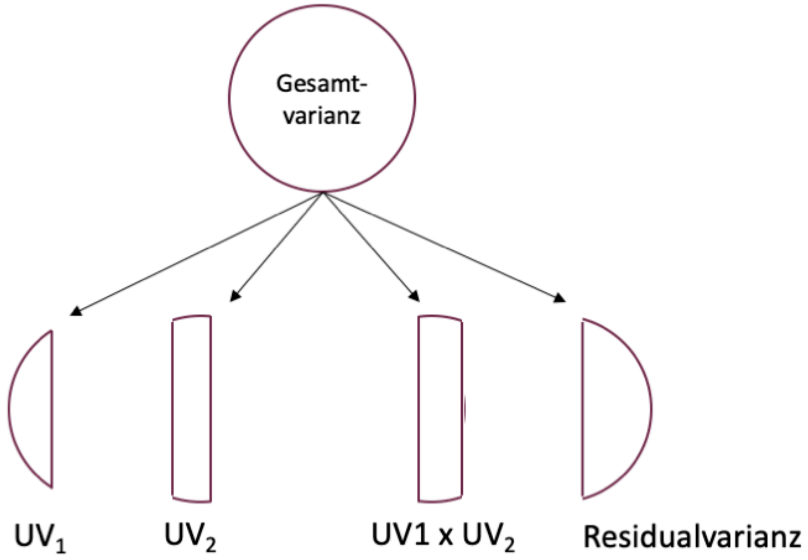
Zerlegung der Gesamtvarianz

- Signifikanzprüfung erfordert Zerlegung der Gesamtvarianz

Parallele zur einfaktoriellen ANOVA:

- Gesamtvarianz = systematische Varianz + Residualvarianz
- Systematische Varianz besteht nun aus 3 Teilen

$$\sigma^2_{sys} = \sigma^2_{UV_1} + \sigma^2_{UV_2} + \sigma^2_{UV_1 \text{x} UV_2}$$



Mehrfaktorielle ANOVA

Signifikanztest der Effekte

Signifikanztest der Effekte läuft nach (von der einfaktorielle ANOVA) bekanntem Prinzip der F-Bruchbildung ab:

$$F_{UV_1(df_{UV_1}, df_{Res})} = \frac{\hat{\sigma}^2_{UV_1}}{\hat{\sigma}^2_{Res}}$$

$$\text{mit } df_{UV_1} = p - 1 \text{ (dabei ist p die Anzahl der Stufen in } UV_1)$$

$$F_{UV_2(df_{UV_2}, df_{Res})} = \frac{\hat{\sigma}^2_{UV_2}}{\hat{\sigma}^2_{Res}}$$

$$\text{mit } df_{UV_2} = q - 1 \text{ (dabei ist q die Anzahl der Stufen in } UV_2)$$

$$F_{UV_1 \text{x} UV_2(df_{UV_1 \text{x} UV_2}, df_{Res})} = \frac{\hat{\sigma}^2_{UV_1 \text{x} UV_2}}{\hat{\sigma}^2_{Res}}$$

$$\text{mit } df_{UV_1 \text{x} UV_2} = (p - 1) \cdot (q - 1)$$

Mehrfaktorielle ANOVA

Signifikanztest der Effekte

Berechnung der Residualvarianz

- Auch hier: Residualvarianz wird geschätzt durch "Varianz innerhalb"
- Quadrierte Abweichung der einzelnen Personen von ihrem Gruppenmittelwert

$\rightarrow$ Die Varianzen werden addiert und durch die Anzahl der Zellen geteilt

$$\hat{\sigma}^2_{Res} = \hat{\sigma}^2_{innerhalb} = \frac{\hat{\sigma}^2_{11} + \hat{\sigma}^2_{12} + \ldots + \hat{\sigma}^2_{1q} + \hat{\sigma}^2_{21} + \hat{\sigma}^2_{22} + \ldots + \hat{\sigma}^2_{pq}}{p \cdot q}$$

$$df_{Res} = p \cdot q \cdot (n-1)$$

$$\hat{\sigma}^2_{Res} == \frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} QS_{ij}}{p \cdot q \cdot (n-1)} = \frac{QS_{Res}}{df_{Res}}$$

Mehrfaktorielle ANOVA

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Signifikanztest der Effekte

Berechnung der Residualvarianz

Medikament	Dosis	N	Mittelwert	SD
Placebo	niedrig	4	15.25	3.59
Placebo	hoch	4	16.75	3.86
Verum	niedrig	4	20.75	3.59
Verum	hoch	4	36.25	4.92

$$\hat{\sigma}^2_{Res} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} QS_{ij}}{p \cdot q \cdot (n-1)} = \frac{QS_{Res}}{df_{Res}}$$

ID	Medikament	Dosis	Verbesserung
1	Verum	niedrig	18
2	Verum	niedrig	19
3	Verum	niedrig	26
4	Verum	niedrig	20
5	Verum	hoch	36
6	Verum	hoch	42
7	Verum	hoch	37
8	Verum	hoch	30
9	Placebo	niedrig	12
10	Placebo	niedrig	13
11	Placebo	niedrig	20
12	Placebo	niedrig	16
13	Placebo	hoch	17
14	Placebo	hoch	15
15	Placebo	hoch	13
16	Placebo	hoch	22

Mehrfaktorielle ANOVA

Signifikanztest der Effekte

Berechnung der Residualvarianz

Medikament	Dosis	N	Mittelwert	SD
Placebo	niedrig	4	15.25	3.59
Placebo	hoch	4	16.75	3.86
Verum	niedrig	4	20.75	3.59
Verum	hoch	4	36.25	4.92

$$\hat{\sigma}^2_{Res} = \frac{(18-20.75)^2 + (19-20.75)^2 + \ldots + (22-16.75)^2}{2 \cdot 2 \cdot (4-1)} = 16.25$$

$$df_{Res} = 2 \cdot 2 \cdot (4-1) = 12$$

ID	Medikament	Dosis	Verbesserung
1	Verum	niedrig	18
2	Verum	niedrig	19
3	Verum	niedrig	26
4	Verum	niedrig	20
5	Verum	hoch	36
6	Verum	hoch	42
7	Verum	hoch	37
8	Verum	hoch	30
9	Placebo	niedrig	12
10	Placebo	niedrig	13
11	Placebo	niedrig	20
12	Placebo	niedrig	16
13	Placebo	hoch	17
14	Placebo	hoch	15
15	Placebo	hoch	13
16	Placebo	hoch	22

Mehrfaktorielle ANOVA

Signifikanztest der Effekte

Signifikanztest Haupteffekt UV_1 :

- Prüfung: Besteht ein systematischer Einfluss der UV_1 (Medikament) auf die AV (Verbesserung)?
- H_0 : Alle Populationsmittelwerte der Stufen des Faktors **Medikament** (gemittelt über die Stufen von Dosis) sind gleich.
- H_1 wie bei allen Varianzanalysen 2-seitig formuliert (Varianzen sind aufgrund der Quadrierung immer positiv)

Aufstellen des Hypothesenpaares (allgemein):

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_p$
- $H_1 : \neg H_0$ ($\neg$ bedeutet Negation)

Aufstellen des Hypothesenpaares (hier):

- $H_0 : \mu_{Placebo} = \mu_{Verum}$
- $H_1 : \neg H_0$

Mehrfaktorielle ANOVA

Signifikanztest der Effekte

Signifikanztest Haupteffekt UV_1 :

$$F_{UV_1(df_{UV_1}, df_{Res})} = \frac{\hat{\sigma}^2_{UV_1}}{\hat{\sigma}^2_{Res}}$$

- Trifft H_0 zu, sollte F-Wert den Wert 1 haben

  $\rightarrow$ Geschätzte Varianz des Haupteffekts der UV_1 bestünde nur aus Residualvarianz

- F-Verteilung (s.h. Einheit 1) gibt Auskunft, wie wahrscheinlich ein F-Wert unter Annahme der H_0 ist
- Ist er ausreichend unwahrscheinlich (p<.05) wird die H_0 verworfen

  $\rightarrow$ Der Haupteffekt der UV_1 ist signifikant (hat einen systematischen Einfluss auf die AV)

Mehrfaktorielle ANOVA

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Signifikanztest der Effekte

Signifikanztest Haupteffekt UV_1 :

Berechnung:

$$F_{UV1(df_{UV_1}, df_{Res})} = \frac{\hat{\sigma}^2_{UV_1}}{\hat{\sigma}^2_{Res}}$$

$$\hat{\sigma}^2_{UV_1} = \frac{QS_{UV_1}}{df_{UV_1}}$$

Die Quadratsumme entspricht der quadrierten Abweichung der Mittelwerte $(U\bar{V}_{1i})$ vom Gesamtmittelwert $(\bar{G})$ multipliziert mit der Zellgröße n und der Anzahl der Stufen der UV_2 :

$$\hat{\sigma}^2_{UV_1} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n \cdot q \cdot (U\bar{V}_{1i} - \bar{G})^2}{p-1}$$

Mehrfaktorielle ANOVA

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Signifikanztest der Effekte

Signifikanztest Haupteffekt UV_1 :

Berechnung - Beispiel:

Medikament	N	Mittelwert	SD
Placebo	8	16.0	3.55
Verum	8	28.5	9.20

$$\hat{\sigma}^2_{UV_1} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n \cdot q \cdot (U\bar{V}_{1i} - \bar{G})^2}{p-1}$$

$$\bar{G} = 22.25$$

$$\hat{\sigma}^2_{UV_1} = \frac{4 \cdot 2 \cdot [(16 - 22.25)^2 + (28.5 - 22.25)^2]}{2-1} = 625$$

$$F_{UV_1(1,12)} = \frac{\hat{\sigma}^2_{UV_1}}{\hat{\sigma}^2_{Res}} = \frac{625}{16.25} = 38.46$$

Mehrfaktorielle ANOVA

Signifikanztest der Effekte

Signifikanztest Haupteffekt UV_1 :

Berechnung - Beispiel:

Entscheidungsregel:

- Vergleich von $F_{emp} = 38.46$ mit F_{krit} für $df_1 = 1, df_2 = 12$ und $\alpha = .05$
- Wenn $F_{emp} > F_{krit} \rightarrow$ Test ist signifikant
- $38.46 > 4.75$

$\rightarrow$ Es besteht ein signifikanter Unterschied zwischen den Mittelwerten der Verum vs. Placebo Gruppe

Nenner-df	Fläche	Zähler-df 1	2	3	4
11	0,95	4,84	3,98	3,59	3,36
	0,99	9,65	7,21	6,22	5,67
12	0,75	1,46	1,56	1,56	1,55
	0,90	3,18	2,81	2,61	2,48
	0,95	4,75	3,89	3,49	3,26
	0,99	9,33	6,93	5,95	5,41
13	0,75	1,45	1,54	1,54	1,53
	0,90	3,14	2,76	2,56	2,43
	0,95	4,67	3,81	3,41	3,18
	0,99	9,07	6,70	5,74	5,21
14	0,75	1,44	1,53	1,53	1,52
	0,90	3,10	2,73	2,52	2,39
	0,95	4,60	3,74	3,34	3,11
	0,99	8,86	6,51	5,56	5,04
15	0,75	1,43	1,52	1,52	1,51
	0,90	3,07	2,70	2,49	2,36
	0,95	4,54	3,68	3,29	3,06
	0,99	8,68	6,36	5,42	4,89

Mehrfaktorielle ANOVA

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Signifikanztest der Effekte

Signifikanztest Haupteffekt UV_2 :

- Prüfung: Besteht ein systematischer Einfluss der UV_2 (Dosis) auf die AV (Verbesserung)?
- H_0 : Alle Populationsmittelwerte der Stufen des Faktors **Dosis** (gemittelt über die Stufen von Medikament) sind gleich.
- H_1 wie bei allen Varianzanalysen 2-seitig formuliert (Varianzen sind aufgrund der Quadrierung immer positiv)

Aufstellen des Hypothesenpaares (allgemein):

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_p$
- $H_1 : \neg H_0$ ($\neg$ bedeutet Negation)

Aufstellen des Hypothesenpaares (hier):

- $H_0 : \mu_{niedrig} = \mu_{hoch}$
- $H_1 : \neg H_0$

Mehrfaktorielle ANOVA

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Signifikanztest der Effekte

Signifikanztest Haupteffekt UV_2 :

Berechnung:

$$F_{UV_2(df_{UV_2}, df_{Res})} = \frac{\hat{\sigma}^2_{UV_2}}{\hat{\sigma}^2_{Res}}$$

$$\hat{\sigma}^2_{UV_2} = \frac{QS_{UV_2}}{df_{UV_2}}$$

Die Quadratsumme entspricht der quadrierten Abweichung der Mittelwerte $(U\bar{V}_{2j})$ vom Gesamtmittelwert $(\bar{G})$ multipliziert mit der Zellgröße n und der Anzahl der Stufen der UV_1 :

$$\hat{\sigma}^2_{UV_2} = \frac{\sum_{i=j}^{q} n \cdot p \cdot (U\bar{V}_{2j} - \bar{G})^2}{q-1}$$

Mehrfaktorielle ANOVA

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Signifikanztest der Effekte

Signifikanztest Haupteffekt UV_2 :

Berechnung - Beispiel:

$$\hat{\sigma}^2_{UV_2} = \frac{\sum_{j=1}^{q} n \cdot p \cdot (\bar{UV}_{2j} - \bar{G})^2}{q-1}$$

$$\bar{G} = 22.25$$

$$\hat{\sigma}^2_{UV_2} = \frac{4 \cdot 2 \cdot [(18 - 22.25)^2 + (26.5 - 22.25)^2]}{2-1} = 289$$

$$F_{UV_2(1,12)} = \frac{\hat{\sigma}^2_{UV_2}}{\hat{\sigma}^2_{Res}} = \frac{289}{16.25} = 17.79$$

Dosis	N	Mittelwert	SD
niedrig	8	18.0	4.44
hoch	8	26.5	11.20

Mehrfaktorielle ANOVA

Signifikanztest der Effekte

Signifikanztest Haupteffekt UV_2 :

Berechnung - Beispiel:

Entscheidungsregel:

- Vergleich von $F_{emp} = 17.79$ mit F_{krit} für $df_1 = 1, df_2 = 12$ und $\alpha = .05$
- Wenn $F_{emp} > F_{krit} \rightarrow$ Test ist signifikant
- $17.79 > 4.75$

$\rightarrow$ Es besteht ein signifikanter Unterschied zwischen den Mittelwerten der niedrigen vs. hohen Dosis Gruppe

Nenner-df	Fläche	Zähler-df 1	2	3	4
11	0,95	4,84	3,98	3,59	3,36
	0,99	9,65	7,21	6,22	5,67
12	0,75	1,46	1,56	1,56	1,55
	0,90	3,18	2,81	2,61	2,48
	0,95	4,75	3,89	3,49	3,26
	0,99	9,33	6,93	5,95	5,41
13	0,75	1,45	1,54	1,54	1,53
	0,90	3,14	2,76	2,56	2,43
	0,95	4,67	3,81	3,41	3,18
	0,99	9,07	6,70	5,74	5,21
14	0,75	1,44	1,53	1,53	1,52
	0,90	3,10	2,73	2,52	2,39
	0,95	4,60	3,74	3,34	3,11
	0,99	8,86	6,51	5,56	5,04
15	0,75	1,43	1,52	1,52	1,51
	0,90	3,07	2,70	2,49	2,36
	0,95	4,54	3,68	3,29	3,06
	0,99	8,68	6,36	5,42	4,89

Mehrfaktorielle ANOVA

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Signifikanztest der Effekte

Signifikanztest Interaktionseffekt UV_1 x UV_2

- Interaktion beschreibt Variabilität der Zellmittelwerte, die nicht durch die 2 Haupteffekte erklärt werden kann
- Formell: Interaktion betrachtet Abweichungen, der beobachteten Zellmittelwerte von den aufgrund der Haupteffekte zu erwartenden Zellmittelwerte

Frage: Welche Werte sind aufgrund der Haupteffekte zu erwarten?

Einfluss Haupteffekt UV_1:

$$\hat{\alpha}_i = U\bar{V}_1 i - \bar{G}$$

Einfluss Haupteffekt UV_2:

$$\hat{\beta}_j = U\bar{V}_2 j - \bar{G}$$

Laut Haupteffekten erwartete Zellmittelwerte:

$$UV_1\bar{U}V_{2ij;erwartet} = \bar{G} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j = \bar{G} + (U\bar{V}_1 i - \bar{G}) + (U\bar{V}_2 j - \bar{G}) = U\bar{V}_1 i + U\bar{V}_2 j - \bar{G}$$

Mehrfaktorielle ANOVA

Signifikanztest der Effekte

Signifikanztest Interaktionseffekt UV_1 x UV_2

Medikament	N	Mittelwert	SD
Placebo	8	16.0	3.55
Verum	8	28.5	9.20

Dosis	N	Mittelwert	SD
niedrig	8	18.0	4.44
hoch	8	26.5	11.20

Medikament	Dosis	N	Mittelwert	SD
Placebo	niedrig	4	15.25	3.59
Placebo	hoch	4	16.75	3.86
Verum	niedrig	4	20.75	3.59
Verum	hoch	4	36.25	4.92

Beispiel (nur für 2 der Zellen):

- Erwarteter Wert für Mittelwert von Placebo mit niedriger Dosis:

$$\bar{UV_1UV_2}_{1,1;erwartet} = 16 + 18 - 22.25 = 11.75$$

- Beobachteter Wert für Mittelwert von Placebo mit niedriger Dosis = 15.25
- Erwarteter Wert für Mittelwert von Verum mit hoher Dosis:

$$\bar{UV_1UV_2}_{2,2;erwartet} = 28.5 + 26.5 - 22.25 = 32.75$$

- Beobachteter Wert für Mittelwert von Verum mit hoher Dosis = 36.25

Mehrfaktorielle ANOVA

Signifikanztest der Effekte

Signifikanztest Interaktionseffekt UV_1 x UV_2

- Prüfung: Besteht ein systematischer Interaktionseinfluss der UV_1 (Medikament) und der UV_2 (Dosis) auf die AV (Verbesserung)?
- H_0 : Beobachtete Zellmittelwerte entsprechen den laut Haupteffekten erwartbaren Zellmittelwerten (keine Interaktion).
- H_1 Beobachtete Zellmittelwerte weichen systematisch von den laut Haupteffekten erwartbaren Zellmittelwerten ab (Interaktion)

Aufstellen des Hypothesenpaares (allgemein):

- $H_0 : \mu_{ij(beobachtet)} = \mu_{ij(erwartet)}$
- $H_1 : \neg H_0$

Mehrfaktorielle ANOVA

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Signifikanztest der Effekte

Signifikanztest Interaktionseffekt UV_1 **x** UV_2

$$F_{UV_1 \text{x} UV_2 (df_{UV_1 \text{x} UV_2}, df_{Res})} = \frac{\hat{\sigma}^2_{UV_1 \text{x} UV_2}}{\hat{\sigma}^2_{Res}}$$

- Trifft H_0 zu, sollte F-Wert den Wert 1 haben

  $\rightarrow$ Geschätzte Varianz des Interaktionseffekts bestünde nur aus Residualvarianz

- F-Verteilung (s.h. Einheit 1) gibt Auskunft, wie wahrscheinlich ein F-Wert unter Annahme der H_0 ist
- Ist er ausreichend unwahrscheinlich (p<.05) wird die H_0 verworfen

  $\rightarrow$ Der Interaktions ist signifikant (hat einen systematischen Einfluss auf die AV, der über reine Haupteffekte hinaus geht)

Mehrfaktorielle ANOVA

Signifikanztest der Effekte

Signifikanztest Interaktionseffekt UV_1 x UV_2

Berechnung:

$$F_{UV_1 \text{x} UV_2 (df_{UV_1 \text{x} UV_2}, df_{Res})} = \frac{\hat{\sigma}^2_{UV_1 \text{x} UV_2}}{\hat{\sigma}^2_{Res}}$$

$$\hat{\sigma}^2_{UV_1 \text{x} UV_2} = \frac{QS_{UV_1 \text{x} UV_2}}{df_{UV_1 \text{x} UV_2}}$$

Die Quadratsumme entspricht der Differenz der beobachteten Zellmittelwerte und der erwarteten Zellmittelwerte

$$\hat{\sigma}^2_{UV_1 \text{x} UV_2} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} n \cdot [UV_1 \bar{U} V_{2ij} - (U\bar{V}_{1i} + U\bar{V}_{2j} - \bar{G})]^2}{(p-1) \cdot (q-1)}$$

Mehrfaktorielle ANOVA

Signifikanztest der Effekte

Signifikanztest Interaktionseffekt UV_1 x UV_2

Berechnung - Beispiel:

$$\hat{\sigma}^2_{UV_1 x UV_2} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{1} n \cdot [U\bar{V_1}\bar{U}V_{2ij} - (U\bar{V}_{1i} + U\bar{V}_{2j} - \bar{G})]^2}{(p-1)\cdot(q-1)}$$

$$\bar{G} = 22.25$$

$$\hat{\sigma}^2_{UV_1 x UV_2} = \frac{4 \cdot [15.25 - (16 + 18 - 22.25)]^2 + \ldots + [36.25 - (28.5 + 26.5 - 22.25)]^2}{(2-1)\cdot(2-1)} = 196$$

$$F_{UV_1(1,12)} = \frac{\hat{\sigma}^2_{UV_1 x UV_2}}{\hat{\sigma}^2_{Res}} = \frac{196}{16.25} = 12.06$$

Medikament	N	Mittelwert	SD
Placebo	8	16.0	3.55
Verum	8	28.5	9.20

Dosis	N	Mittelwert	SD
niedrig	8	18.0	4.44
hoch	8	26.5	11.20

Mehrfaktorielle ANOVA

Signifikanztest der Effekte

Signifikanztest Interaktionseffekt UV_1 x UV_2

Berechnung - Beispiel:

Entscheidungsregel:

- Vergleich von $F_{emp} = 12.06$ mit F_{krit} für $df_1 = 1, df_2 = 12$ und $\alpha = .05$
- Wenn $F_{emp} > F_{krit} \rightarrow$ Test ist signifikant
- $12.06 > 4.75$

$\rightarrow$ Der Effekt der Dosis in der Verum Gruppe unterscheidet sich vom Effekt der Dosis in der Placebo Gruppe

Nenner-df	Fläche	Zähler-df 1	2	3	4
11	0,95	4,84	3,98	3,59	3,36
	0,99	9,65	7,21	6,22	5,67
12	0,75	1,46	1,56	1,56	1,55
	0,90	3,18	2,81	2,61	2,48
	0,95	4,75	3,89	3,49	3,26
	0,99	9,33	6,93	5,95	5,41
13	0,75	1,45	1,54	1,54	1,53
	0,90	3,14	2,76	2,56	2,43
	0,95	4,67	3,81	3,41	3,18
	0,99	9,07	6,70	5,74	5,21
14	0,75	1,44	1,53	1,53	1,52
	0,90	3,10	2,73	2,52	2,39
	0,95	4,60	3,74	3,34	3,11
	0,99	8,86	6,51	5,56	5,04
15	0,75	1,43	1,52	1,52	1,51
	0,90	3,07	2,70	2,49	2,36
	0,95	4,54	3,68	3,29	3,06
	0,99	8,68	6,36	5,42	4,89

Mehrfaktorielle ANOVA

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Berechnung in R

```
model = lm(Verbesserung ~ Medikament * Dosis, data = df)

anova(model)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Verbesserung
##                  Df Sum Sq Mean Sq F value     Pr(>F)
## Medikament        1    625  625.00  38.462 0.00004575 ***
## Dosis             1    289  289.00  17.785   0.001195 **
## Medikament:Dosis  1    196  196.00  12.062   0.004606 **
## Residuals        12    195   16.25
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Mehrfaktorielle ANOVA

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Effektstärke partielles ω^2 in R

```
ES = effectsize::omega_squared(model)

ES
```

```
## # Effect Size for ANOVA (Type I)
##
## Parameter         | Omega2 (partial) |       95% CI
## ---------------------------------------------------
## Medikament        |             0.70 | [0.40, 1.00]
## Dosis             |             0.51 | [0.15, 1.00]
## Medikament:Dosis  |             0.41 | [0.07, 1.00]
##
## - One-sided CIs: upper bound fixed at [1.00].
```

```
# Automatisches Anzeigen der Interpretation

effectsize::interpret_omega_squared(ES)
```

```
## # Effect Size for ANOVA (Type I)
##
## Parameter         | Omega2 (partial) |       95% CI | Interpretation
## --------------------------------------------------------------------
## Medikament        |             0.70 | [0.40, 1.00] |          large
## Dosis             |             0.51 | [0.15, 1.00] |          large
## Medikament:Dosis  |             0.41 | [0.07, 1.00] |          large
##
## - One-sided CIs: upper bound fixed at [1.00].
## - Interpretation rule: field2013
```

Mehrfaktorielle ANOVA

Effektstärke partielles η^2 in R

```
ES = effectsize::eta_squared(model)

ES
```

```
## # Effect Size for ANOVA (Type I)
##
## Parameter         | Eta2 (partial) |       95% CI
## ------------------------------------------------
## Medikament        |           0.76 | [0.50, 1.00]
## Dosis             |           0.60 | [0.25, 1.00]
## Medikament:Dosis  |           0.50 | [0.14, 1.00]
##
## - One-sided CIs: upper bound fixed at [1.00].
```

```
# Automatisches Anzeigen der Interpretation

effectsize::interpret_eta_squared(ES)
```

```
## # Effect Size for ANOVA (Type I)
##
## Parameter         | Eta2 (partial) |       95% CI | Interpretation
## -----------------------------------------------------------------
## Medikament        |           0.76 | [0.50, 1.00] |          large
## Dosis             |           0.60 | [0.25, 1.00] |          large
## Medikament:Dosis  |           0.50 | [0.14, 1.00] |          large
##
## - One-sided CIs: upper bound fixed at [1.00].
## - Interpretation rule: field2013
```

Take-aways

- Mit der mehrfaktoriellen ANOVA können Haupteffekte und Interaktionseffekte geprüft werden.
- Haupteffekte beschreiben Einfluss einer UV, ungeachtet des Einflusses der anderen UVs.
- Interaktionseffekte prüfen die Wechselwirkung der UVs auf die AV.
- Jeder Effekt hat einen eigenen Signifikanztest. Dieser wird mittels F-Bruch geprüft, in dem die Zwischenvarianzen an der geschätzten Residualvarianz geprüft werden.
- Der Hypothesentest der Interaktion nimmt an, dass die beobachteten von den erwarteten Zellmittelwerten abweichen.
- Als Effektstärken bieten sich die partiellen Maße von ω^2 und η^2 : ω_p^2 und η_p^2 an.