CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Statistik II

Einheit 12: Robuste Tests

10.07.2024 | Prof. Dr. Stephan Goerigk

Robuste Tests

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Notwendigkeit

- t-Test, ANOVA, etc. sind **parametrische Verfahren**
- Parametrische Verfahren: Verfahren, die bestimmte **Verteilungseigenschaften** der Daten voraussetzen
    - Normalverteilung
    - Varianzhomogenität
    - ...
- PROBLEM: Sind diese Voraussetzungen verletzt, liefern Sie keine akkuraten Ergebnisse
- Was macht man, wenn diese Voraussetzungen verletzt sind?

$\rightarrow$ Alternative Verfahrensklasse: **nonparametrische Verfahren**

Robuste Tests

Nonparametrische Verfahren

- Stellen keine so rigiden Anforderungen an die Daten
  - Normalverteilung (in der Population) in der Regel nicht erfordert
  - benötigen kein Intervallskalenniveau

ABER:

- gelockerte Ansprüche führen zu eingeschränkten Aussagemöglichkeiten
- Reduzierte Annahmen im Vergleich zu parametrischen Verfahren:
  - Ordinalskalenniveau
  - zufällige Zuordnung von Versuchspersonen
- Daher: Falls möglich werden parametrische Verfahren bevorzugt (beziehen mehr Informationen ein)

Robuste Tests

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nonparametrische Verfahren

Logik nonparametrischer Tests:

- Nonparametrische Tests setzen in der Regel Ordinalskalenniveau voraus
    - Arbeiten mit der Betrachtung von Rangplätzen
    - Versuchspersonen werden aufgrund ihrer Messwerte einem Rang zugeordnet
    - durch Verwendung von Rängen wird künstliche Äquidistanz zwischen Werten erzeugt (Rangabstand von genau 1)

$\rightarrow$ Nonparametrische Verfahren Arbeiten nicht mit Populationsverteilungen, sondern legen eigene Verteilung (Rangverteilung) zugrunde

Robuste Tests

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nonparametrische Verfahren

- Parametrische Verfahren haben häufig ein nonparametrisches Äquivalent
- Es gilt als Alternative, wenn Voraussetzungen verletzt oder Stichproben sehr klein sind

Parametrisch	Nonparametrisch
Unabhängiger t-Test	Mann-Whitney U-Test
Abhängiger t-Test	Wilcoxon Test
ANOVA ohne Messwiederholung	Kruskal-Wallis H-Test
ANOVA mit Messwiederholung	Fridman-Test

Robuste Tests

Nonparametrische Verfahren

Mann-Whitney U-Test

- Test zum Vergleich von zwei Gruppen/Kategorien
- Wird dem unabhängigen t-Test in folgenden Szenarien vorgezogen
  - kein Intervallskalenniveau der AV
  - Merkmal ist in der Population nicht normalverteilt (Test der NV auf Basis der Stichprobendaten)
  - Varianzhomogenität nicht gegeben
- H_0 : Es besteht kein Unterschied zwischen den beiden Gruppen hinsichtlich der AV.
- Methode: Vergleich der Rangplätze der Personen innerhalb der beiden Gruppen im Vergleich zur Gesamtstichprobe
- Teststatistik: U-Wert (sagt aus, ob sich die beiden Gruppen in der Rangplatzverteilung signifikant unterscheiden)

Robuste Tests

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nonparametrische Verfahren

Mann-Whitney U-Test

Bestimmung der Rangplätze:

- Jede Person erhält basierend auf ihrem Messwert einen Rangplatz
  - Person mit dem niedrigsten Messwert auf der AV erhält Rangplatz 1
  - Nächste Person erhält Platz 2
  - ...
- WICHTIG: Bei der Zuordnung des Ranges einer Person spielt ihre Gruppenzugehörigkeit zunächst keine Rolle

$\rightarrow$ Erstellung **einer** Rangreihe für alle Personen in der Stichprobe

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nonparametrische Verfahren

Mann-Whitney U-Test

Gruppenspezifische Zusammenfassung:

- Nach Bildung der Rangreihe für jede Gruppe
  - Summe der Rangplätze berechnen
  - durchschnittlichen Rangplatz der Gruppe berechnen

Summe der Rangplätze einer Gruppe berechnen:

$$T_i = \sum_{m=1}^{n_i} R_{mi}$$

mit:

- i : Gruppe
- n_i : Anzahl der Personen in Gruppe i
- R_{mi} : Rang der m-ten Person in Gruppe i

Mittlere Rangsumme einer Gruppe berechnen:

$$\bar{R}_i = \frac{T_i}{n_i}$$

Robuste Tests

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nonparametrische Verfahren

Mann-Whitney U-Test

Beispiel: "Mentaler Schmerz"

- Hypothese: *Depressive Patient:innen geben höhere Werte bei "Mentalen Schmerzen" an als Patient:innen mit Zwangsstörungen.*
- AV : Mentale Schmerzskale (0-30 Punkte)
- $UV : Diagnose$
- Normalverteilung fraglich $\rightarrow$ U-Test soll verwendet werden

Mentaler Schmerz (Dep.)	Rang (Dep.)	Mentaler Schmerz (Zw.)	Rang (Zw.)
24	15.	14	7.
18	10.	8	3.
21	13.	16	8.
28	18.	5	2.
17	9.	22	14.
9	4.	12	6.
20	12.	25	16.
26	17.	3	1.
		11	5.
		19	11.

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
D	D	Z	D	Z	D	D	Z	D	D	Z	Z	Z	Z	D	Z	Z	Z

Robuste Tests

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nonparametrische Verfahren

Mann-Whitney U-Test

Berechnung Summe der Rangplätze:

$$T_D = \sum_{m=1}^{8} R_{mD} = 15 + 10 + 13 + 18 + \ldots = 98$$

$$T_Z = \sum_{m=1}^{10} R_{mZ} = 7 + 3 + 8 + 2 + \ldots = 73$$

Mentaler Schmerz (Dep.)	Rang (Dep.)	Mentaler Schmerz (Zw.)	Rang (Zw.)
24	15.	14	7.
18	10.	8	3.
21	13.	16	8.
28	18.	5	2.
17	9.	22	14.
9	4.	12	6.
20	12.	25	16.
26	17.	3	1.
		11	5.
		19	11.

Robuste Tests

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nonparametrische Verfahren

Mann-Whitney U-Test

Berechnung durchschnittliche Rangplätze:

$$\bar{R}_D = \frac{T_D}{n_D} = \frac{98}{8} = 12.25$$

$$\bar{R}_Z = \frac{T_Z}{n_Z} = \frac{73}{10} = 7.3$$

Mentaler Schmerz (Dep.)	Rang (Dep.)	Mentaler Schmerz (Zw.)	Rang (Zw.)
24	15.	14	7.
18	10.	8	3.
21	13.	16	8.
28	18.	5	2.
17	9.	22	14.
9	4.	12	6.
20	12.	25	16.
26	17.	3	1.
		11	5.
		19	11.

Robuste Tests

Nonparametrische Verfahren

Mann-Whitney U-Test

Berechnung von U und U':

- Der Wert U ist die Summe der Rangplatzüberschreitungen

- Rangplatzüberschreitungen = Anzahl der Personen aus der anderen Gruppe die den Rang einer Person überschreiten

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
D	D	Z	D	Z	D	D	Z	D	D	Z	Z	Z	Z	D	Z	Z	Z

- z.B.: D18 wird von keinem Rangplatz der Zwangspatien:innen überschritten (0 Rangplatzüberschreitungen)
- D17 wird von keinem Rangplatz der Zwangspatien:innen überschritten (0 Rangplatzüberschreitungen)
- D15 wird von einem Rangplatz der Zwangspatien:innen überschritten (1 Rangplatzüberschreitungen)
- ...

$$U = 0 + 0 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 7 = 18$$

Oder einfacher (ohne Einzelwerte): $U = n_D \cdot n_Z + \frac{n_D \cdot (n_D + 1)}{2} - T_D = 8 \cdot 10 + \frac{8 \cdot (8+1)}{2} - 98 = 18$

$\rightarrow$ Zwangspatient:innen überschreiten Ränge der Depressiven sehr selten.

Robuste Tests

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nonparametrische Verfahren

Mann-Whitney U-Test

Berechnung von U und U':

- Der Wert U' ist die Summe der Rangplatzunterschreitungen
- Rangplatzunterschreitungen = Anzahl der Personen aus der anderen Gruppe die den Rang einer Person unterschreiten

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
D	D	Z	D	Z	D	D	Z	D	D	Z	Z	Z	Z	D	Z	Z	Z

- z.B.: D18 wird von allen Zwangspatien:innen unterschritten (10 Rangplatzunterschreitungen)
- D17 wird von allen Zwangspatien:innen unterschritten (10 Rangplatzunterschreitungen)
- D15 wird von 9 Zwangspatien:innen unterschritten (9 Rangplatzunterschreitungen)
- ...

$$U' = 10 + 10 + 9 + 8 + 8 + 7 + 7 + 3 = 62$$

Oder einfacher (ohne Einzelwerte): $U' = n_D \cdot n_Z + \frac{n_Z \cdot (n_Z + 1)}{2} - T_Z = 8 \cdot 10 + \frac{10 \cdot (10+1)}{2} - 73 = 62$

$\longrightarrow$ Zwangspatient:innen unterschreiten Ränge der Depressiven sehr häufig.

Robuste Tests

Nonparametrische Verfahren

Mann-Whitney U-Test - Signifikanzprüfung

- H_0 : Kein bedeutsamer Unterschied in den Rangplatzüber- und unterschreitungen der Gruppen
- Stichprobenkennwerteverteilung der U-Werte erlaubt Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines empirischen Ergebnisses unter Annahme der H_0

Vorgehen:

1. Berechnung von U bzw. U'
2. Berechnung des, unter H_0 erwarteten mittleren U-Werts (μ_U)
3. Berechnung der Streuung der Stichprobenkennwerteverteilung
4. Empirischen und kritischen Wert berechnen (und diese vergleichen)

Robuste Tests

Nonparametrische Verfahren

Mann-Whitney U-Test - Signifikanzprüfung

H_0 des U-Tests:

- Beziehung zwischen U und U' :

$$U = n_D \cdot n_Z - U'$$

- Je stärker der Gruppenunterschied, desto mehr Rangüberschreitungen und weniger Rangunterschreitungen gibt es.
- Gleich viele Rangüberschreitungen und - unterschreitungen $\rightarrow$ Kein Gruppenunterschied
- Folglich ist lautet die H_0 des U-Tests:

$$U = U'$$

Robuste Tests

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nonparametrische Verfahren

Mann-Whitney U-Test - Signifikanzprüfung

Berechnung des, unter H_0 erwarteten mittleren U-Werts (μ_U) :

- Unter Annahme der $H_0 : U = U'$ ergibt sich μ_U aus:

$$\mu_U = \frac{n_D \cdot n_Z}{2}$$

- Im Beispiel:

$$\mu_U = \frac{8 \cdot 10}{2} = 40$$

- Eigenschaften von μ_U :
  - Enspricht dem Mittelwertsunterschied von 0 in der Stichprobenkennwerteverteilung des unabhängigen t-Tests
  - Starke Abweichungen des empirischen U-Werts von μ_U in positive/negative Richtung sprechen gegen H_0
  - Theoretische widerholte Stochprobenziehung resultiert in symmetrische Verteilung um μ_U (rechts: Rangüberschreitungen; links: Rangunterschreitungen)

Robuste Tests

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nonparametrische Verfahren

Mann-Whitney U-Test - Signifikanzprüfung

Berechnung der Streuung der Stichprobenkennwerteverteilung:

- Frage: Welche Awreichung des empirischen U-Werts von μ_U ist ausreichend für signifikantes Ergebnis?
- Alle denkbaren Werte von U und U' verteilen sich symmetrisch um μ_U
- Streuung der U-Werte um μ_U wir berechnet als:

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{n_D \cdot n_Z \cdot (n_D + n_Z + 1)}{12}}$$

Im Beispiel:

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{8 \cdot 10 \cdot (8 + 10 + 1)}{12}} = 11.25$$

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nonparametrische Verfahren

Mann-Whitney U-Test - Signifikanzprüfung

U-Test bei großen Stichproben:

- Was heißt groß? $\rightarrow$ Einzelgruppengrößen > 20 (und ca. gleich groß)
- Es ist dann von Approximation an Normalverteilung anzunehmen
- Günstige Folge: Standardnormalverteilung darf als Prüfverteilung herangezogen werden
- empirischer U-Wert, μ_U und σ_U können in Formel zur z-Standardisierung eingesetzt werden:

$$z_U = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U}$$

Nonparametrische Verfahren

Mann-Whitney U-Test - Signifikanzprüfung

U-Test bei großen Stichproben - Beispiel:

$$z_U = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U} = \frac{18 - 40}{11.25} = -1.96$$

- Nachsehen kritischer z-Wert in Tabelle (gerichtete Hypothese, $\alpha = .05$)

$$z_{krit} = -1.65$$

Test auf Signifikanz:

$$|-1.96| > |-1.65|$$

- $z_U > z_{krit} \rightarrow$ Gruppenunterschied ist signifikant (H_0 verwerfen).

z-Wert*	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,00	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,10	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,20	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,30	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,40	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,50	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,60	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,70	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,80	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,90	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,00	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,10	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,20	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,30	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,40	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,50	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,60	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,70	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,80	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,90	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750

Anders gesagt: Signifikant weniger Rangplatzüberschreitungen der Zwangspatient:innen als Rangplatzunterschreitungen

Robuste Tests

Nonparametrische Verfahren

Mann-Whitney U-Test - Signifikanzprüfung

U-Test bei kleinen Stichproben (beide n < 20):

- Approximation an Normalverteilung nicht anzunehmen
- U-Tabelle enthält exakte Wahrscheinlichkeiten der U-Werte unter der H_0
- U_{krit} muss aus dieser Tabelle abgelesen werden (eine Tabelle für einseitige und eine für zweiseitige Tests)

U-Tabelle für gerichtete Hypothesen (einseitig):

n_2	α	n_1									
		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	.05	0	0	1	2	2	3	4	4	5	5
	.01	--	0	0	0	0	0	1	1	1	2
4	.05	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	.01	--	--	0	1	1	2	3	3	4	5
5	.05	1	2	4	5	6	8	9	11	12	13
	.01	--	0	1	2	3	4	5	6	7	8
6	.05	2	3	5	7	8	10	12	14	16	17
	.01	--	1	2	3	4	6	7	8	9	11
7	.05	2	4	6	8	11	13	15	17	19	21
	.01	0	1	3	4	6	7	9	11	12	14
8	.05	3	5	8	10	13	15	18	20	23	26
	.01	0	2	4	6	7	9	11	13	15	17
9	.05	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30
	.01	1	3	5	7	9	11	14	16	18	21
10	.05	4	7	11	14	17	20	24	27	31	34
	.01	1	3	6	8	11	13	16	19	22	24

Robuste Tests

Nonparametrische Verfahren

Mann-Whitney U-Test - Signifikanzprüfung

U-Test bei kleinen Stichproben (beide n < 20):

- Relevante Größen für die U-Verteilung:
  - $\mu_U = 40$ (Mitte der U-Verteilung)
  - $U_{emp} = 18$ (liegt links der Mitte)
  - $U'_{emp} = 62$ (liegt rechts der Mitte)
  - $U_{krit} = 20$
- $U_{emp} = 18$ weiter weg von μ_U als $U_{krit} = 20$

$\rightarrow$ Auch exakter Test ist signifikant.

U-Tabelle für gerichtete Hypothesen (einseitig):

n_2	α	n_1									
		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	.05	0	0	1	2	2	3	4	4	5	5
	.01	--	0	0	0	0	0	1	1	1	2
4	.05	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	.01	--	--	0	1	1	2	3	3	4	5
5	.05	1	2	4	5	6	8	9	11	12	13
	.01	--	0	1	2	3	4	5	6	7	8
6	.05	2	3	5	7	8	10	12	14	16	17
	.01	--	1	2	3	4	6	7	8	9	11
7	.05	2	4	6	8	11	13	15	17	19	21
	.01	0	1	3	4	6	7	9	11	12	14
8	.05	3	5	8	10	13	15	18	20	23	26
	.01	0	2	4	6	7	9	11	13	15	17
9	.05	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30
	.01	1	3	5	7	9	11	14	16	18	21
10	.05	4	7	11	14	17	20	24	27	31	34
	.01	1	3	6	8	11	13	16	19	22	24

Robuste Tests

Nonparametrische Verfahren

Mann-Whitney U-Test - Verbundene Ränge

- Es kann vorkommen, dass sich mehrere Personen einen Rang teilen
- Zuweisung des Rangplatzes: Personen erhalten durchschnittlichen Rang
    - z.B. für geteilte Plätze 10 und 11 erhalten beide Personen den Rang $\frac{10+11}{2} = 10.5$
- An dem beschriebenen Vorgehen ändert sich lediglich die Formel der Streuung:

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{N \cdot (N-1)}} \cdot \sqrt{(\frac{N^3 - N}{12}) - \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i^3 - t_i}{12}}$$

mit:

- $N = n_1 + n_2$
- t_1. Anzahl Personen die Rang i teilen
- k : Gesamtzahl verbundener Ränge

Robuste Tests

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nonparametrische Verfahren

Mann-Whitney U-Test in R

```
wilcox.test(d$`Mentaler Schmerz (Dep.)`, d$`Mentaler Schmerz (Zw.)`,
            correct  = F,
            paired = FALSE,
            alternative = "greater")
```

```
##
##     Wilcoxon rank sum exact test
##
## data:  d$`Mentaler Schmerz (Dep.)` and d$`Mentaler Schmerz (Zw.)`
## W = 62, p-value = 0.02726
## alternative hypothesis: true location shift is greater than 0
```

Robuste Tests

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nonparametrische Verfahren

Wilcoxon-Test

- Nonparametrisches Pendant für abhängigen t-Test
- Nutzt ebenfalls Bildung einer Rangreihe

Vorgehen:

1. Bilden der Differenz zwischen Messwertpaaren (wie bei abhängigem t-Test)
2. Bilden des Betrags jedes Differenzwerts
   - Vorzeichen wird ignoriert
   - Differenzen = 0 werden ebenfalls ignoriert
   - Nulldifferenzen werden von Anzahl (N) abgezogen
3. Rangreihe aus Beträgen der Differenzwerte bilden
   - kleinster Wert erhält 1. Rang
   - Bei Rangbindungen selbes Vorgehen wie bei U-Test
4. Rangplätze, die zuvor negative Differenz hatten, erhalten ein negatives Vorzeichen (gerichtete Ränge, *engl. signed Ranks*)

Robuste Tests

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nonparametrische Verfahren

Wilcoxon-Test

H_0 des Wilcoxon-Tests:

- H_0 : Es besteht kein Unterschied zwischen den Messzeitpunkten.
- Numerische Formulierung der H_0 : Gleiche Anzahl von positiven und negativen Differenzen (gerichteten Rängen)

Berechnung des Testwerts W des Wilcoxon-Tests:

$$W = |min(\sum R_{positiv} \cdot \sum R_{negaiv})|$$

Robuste Tests

Nonparametrische Verfahren

Wilcoxon-Test

Beispiel: Lebensqualität vor und nach Therapie

- AV : Lebensqualität (1-10 Punkte)
- UV : Zeit (prä vs. post)

Frage: Signifikante Verbesserung der Lebensqualität?`

Prä	Post	Differenz	Betrag	Rang	gerichteter Rang
6	7	1	1	1.5	1.5
5	8	3	3	6.0	6.0
3	5	2	2	4.0	4.0
6	6	0	NA	NA	NA
4	9	5	5	8.0	8.0
7	6	-1	1	1.5	-1.5
4	8	4	4	7.0	7.0
5	7	2	2	4.0	4.0
6	8	2	2	4.0	4.0

Robuste Tests

Nonparametrische Verfahren

Wilcoxon-Test

Berechnung der Summe positiver und negativer Ränge:

$$\sum R_{positiv} = 1.5 + 6 + 4 + 8 + 7 + 4 + 4 = 34.5$$

$$\sum R_{negativ} = -1.5$$

$$W = |min(\sum R_{positiv} \cdot \sum R_{negaiv})| = 1.5$$

Prä	Post	Differenz	Betrag	Rang	gerichteter Rang
6	7	1	1	1.5	1.5
5	8	3	3	6.0	6.0
3	5	2	2	4.0	4.0
6	6	0	NA	NA	NA
4	9	5	5	8.0	8.0
7	6	-1	1	1.5	-1.5
4	8	4	4	7.0	7.0
5	7	2	2	4.0	4.0
6	8	2	2	4.0	4.0

Robuste Tests

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nonparametrische Verfahren

Wilcoxon-Test - Signifikanztest

- $W_{emp} = 1.5$
- W_{krit} in Tabelle nachschlagen
    - $W_{\alpha=.05} = 4$
- exakter W Wert liegt links von W_{krit} (Achtung: gerichtet)
- Test ist signifikant

	One tailed, α = 0.05	α = 0.025	α = 0.01	α = 0.005
n	Two tailed, α = 0.10	α = 0.05	α = 0.02	α = 0.01
5	1	--	--	--
6	2	1	--	--
7	4	2	0	--
8	6	4	2	1
9	8	6	3	2
10	11	8	5	3
11	14	11	7	5
12	17	14	10	7
13	21	17	13	10
14	26	21	16	13
15	30	25	20	16
16	36	30	24	19

Robuste Tests

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nonparametrische Verfahren

Wilcoxon-Test in R

```r
wilcox.test(d$Prä, d$Post,
            correct = FALSE,
            paired = TRUE)
```

```
##
##     Wilcoxon signed rank test
##
## data:  d$Prä and d$Post
## V = 1.5, p-value = 0.02009
## alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Robuste Tests

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nonparametrische Verfahren

Kruskal-Wallis H-Test

- Alternative für ANOVA ohne Messwiederholung (aka. Rangvarianzanalyse)
- Nutzt ebenfalls Bildung einer Rangreihe (analog zum U-Test)

$$T_i = \sum_{m=1}^{n_i} R_{mi}$$

- Anschließend Rangsummen quadrieren und durch n der Gruppen teilen:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{T_i^2}{n_i}$$

mit:

- p : Anzahl der Gruppen

Robuste Tests

Nonparametrische Verfahren

Kruskal-Wallis H-Test

Beispiel: Prüfungsangst

- AV : Prüfungsangst (0-30 Punkte)
- UV : Alter (jung, mittel, alt)
- Frage: Gibt es Unterschiede in der Prüfungsangst, in Abhängigkeit vom Alter?

Jung	Rang Jung	Mittel	Rang Mittel	Alt	Rang Alt
22	15.0	8	5.5	14	12.0
9	7.5	12	9.5	8	5.5
16	13.0	6	3.0	12	9.5
19	14.0	9	7.5	5	2.0
13	11.0	4	1.0	7	4.0

Robuste Tests

Nonparametrische Verfahren

Kruskal-Wallis H-Test

Berechnung der Teststatistik (H) :

$$H = [\frac{12}{N \cdot (N+1)}] \cdot [\sum_{i=1}^{p} \frac{T_i^2}{n_i}] - 3 \cdot (N+1)$$

- Verteilung des H-Werts approximiert χ^2-Verteilung mit $df = p - 1$ wenn keine der Gruppen $n_i < 5$ aufweist

Im Beispiel:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{T_i^2}{n_i} = \frac{60.5^2}{5} + \frac{26.5^2}{5} + \frac{33^2}{5} = 1090.3$$

$$H = [\frac{12}{15 \cdot (15+1)}] \cdot [1090.3] - 3 \cdot (15+1) = 6.52$$

Robuste Tests

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

Nonparametrische Verfahren

Kruskal-Wallis H-Test - Signifikanztest

- $H = 6.52$
- $df = p - 1 = 3 - 1 = 2$
- χ^2_{krit} in χ^2-Tabelle nachsehen
- $\chi^2_{krit} = 5.99$
- $H > \chi^2_{krit} \rightarrow$ Test signifikant (Es besteht ein Gruppenunterschied, H_0 verwerfen)

df \ Fläche	0,750	0,900	0,950	0,975
1	1,32330	2,70554	3,84146	5,02389
2	2,77259	4,60517	5,99147	7,37776
3	4,10835	6,25139	7,81473	9,34840
4	5,38527	7,77944	9,48773	11,1433
5	6,62568	9,23635	11,0705	12,8325
6	7,84080	10,6446	12,5916	14,4494
7	9,03715	12,0170	14,0671	16,0128
8	10,2188	13,3616	15,5073	17,5346
9	11,3887	14,6837	16,9190	19,0228
10	12,5489	15,9871	18,3070	20,4831
11	13,7007	17,2750	19,6751	21,9200

Take-aways

CHARLOTTE FRESENIUS HOCHSCHULE
UNIVERSITY OF PSYCHOLOGY

- Mann-Whitney U-Test, Wilcoxon-Test und Kruskal Wallis H-Test sind Tests zur Auswertung von **Rangdaten**.
- Sie werden als verteilungsfreie oder **nonparametrische** Verfahren bezeichnet.
- Nonparametrische Tests stellen **weniger strenge Anforderungen** an die Daten (robust) als parametrische Tests.
- Bei **ausreichend großen Stichproben** kann zur Signifikanzprüfung die Standardnormalverteilung oder die χ^2-Verteilung verwendet werden (asymptotischer Test).
- Bei **kleinen Stichproben** verwendet man die genauen Wahrscheinlichkeiten der Teststatistiken auf Ihrer jeweilien Verteilung.