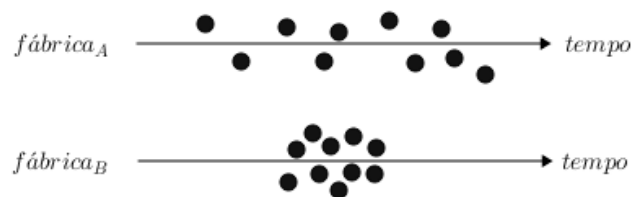


Medidas de dispersão

Teoria

Situação motivadora:

Considere duas linhas de produção de certo componente eletrônico, confeccionado em fábricas distintas. As médias de duração do componente das duas fábricas são muito próximas entre si. Entretanto, a variabilidade do tempo de vida em questão se dá de forma diferente em cada uma delas. Observe o gráfico abaixo:



Percebe-se que, apesar de termos tempos médios de duração similares, ao comprar um componente da fábrica A, você tem mais chances de seu equipamento durar mais ou menos que a média de duração. Comprando da fábrica B, é mais provável que a durabilidade do componente esteja perto do valor da média. De qual fábrica você compraria? (não há resposta certa! Depende do seu perfil em relação a assumir riscos).

Medidas de dispersão

As medidas de dispersão determinam o grau de variação, ou seja, determinam a variação dos números de um conjunto de informações numéricas com relação à média desse conjunto. A utilização dessas medidas torna uma análise mais confiável, uma vez que elas medem o quão homogênea uma amostra é. Como medidas de dispersão, temos, por exemplo, a amplitude, o desvio, o desvio médio, a variância e o desvio-padrão.

Amplitude

É calculada como a diferença entre o maior valor e o menor valor de um conjunto de dados.

$$X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq \dots \leq X_n$$

$$\text{Amplitude} = X_n - X_1$$

Desvio

É definido como a distância entre um elemento específico do conjunto de dados e a média aritmética de um conjunto. Sendo assim, para cada elemento do conjunto, o desvio pode ser diferente.

$$\text{Seja } X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$$

$$D(x) = |x_n - \bar{X}|$$

Variância

A variância é a média aritmética dos quadrados dos desvios. Isto é,

$$\text{Var}(x) = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n}$$

Ou seja, para calcularmos a variância de um conjunto de dados, devemos:

- 1º: calcular a média aritmética dos dados.
- 2º: calcular quanto cada dado está distantes da média.
- 3º: elevar cada um desses valores ao quadrado.
- 4º: calcular a média aritmética dos quadrados dos desvios.

Desvio-padrão

O desvio-padrão de um conjunto de dados é calculado tirando-se a raiz quadrada da sua variância.

$$DP(x) = \sqrt{\text{Var}(x)}$$

O que podemos concluir com os valores do desvio padrão?

Bom, quanto menor o desvio padrão, mais homogêneo é o conjunto de dados. Porém quanto maior, menos homogêneo ele é, ou seja, mais disperso estará em relação a média.

Exercícios de fixação

- Num determinado planeta, as temperaturas podem variar de 50°C durante o dia para -80°C à noite. A amplitude térmica nesse planeta é:
(A) -30°C
(B) 30°C
(C) -130°C
(D) 130°C
(E) -80°C
- As idades de cinco pessoas são iguais a 33, 35, 42, 47 e 43. Calcule:
(A) A média aritmética dessas idades.
(B) Os desvios de cada idade em relação à média encontrada.
(C) A variância das idades.
- As notas de seis pessoas em uma prova foram iguais a 5, 8, 8, 8, 3 e 4. Determine com a aproximação de uma casa decimal o desvio padrão dessas notas.
- Ao quadruplicamos a variância de um conjunto de dados, o que ocorre com o desvio padrão desses dados?
- Em um concurso as pessoas recebem notas em 4 avaliações. A média das avaliações e o desvio padrão das notas de cinco candidatos está na tabela abaixo.

| Candidato | Média | Desvio padrão |
|-----------|-------|---------------|
| A | 8 | 2 |
| B | 7,2 | 1,5 |
| C | 6,9 | 0,8 |
| D | 9 | 3 |
| E | 7,5 | 2,5 |

O candidato vencedor é aquele possui maior média das notas. Porém, candidatos cuja variância das notas for maior ou igual a 4 são desclassificados. Qual o candidato vencedor?

Exercícios de vestibulares



1. (Enem, 2010) Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos. Dados dos candidatos no concurso

| | Matemática | Português | Conhecimentos Gerais | Media | Mediana | Desvio Padrão |
|-------|------------|-----------|----------------------|-------|---------|---------------|
| Marco | 14 | 15 | 16 | 15 | 15 | 0,32 |
| Paulo | 8 | 19 | 18 | 15 | 18 | 4,97 |

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é

- (A) Marco, pois a média e a mediana são iguais
(B) Marco, pois obteve menor desvio padrão
(C) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português
(D) Paulo, pois obteve maior mediana
(E) Paulo, pois obteve maior desvio padrão
2. (Enem PPL, 2014) Em uma escola, cinco atletas disputam a medalha de ouro em uma competição de salto em distância. Segundo o regulamento dessa competição, a medalha de ouro será dada ao atleta mais regular em uma série de três saltos. Os resultados e as informações dos saltos desses cinco atletas estão no quadro.

| Atleta | 1º salto | 2º salto | 3º salto | Média | Mediana | Desvio Padrão |
|--------|----------|----------|----------|-------|---------|---------------|
| I | 2,9 | 3,4 | 3,1 | 3,1 | 3,1 | 0,25 |
| II | 3,3 | 2,8 | 3,6 | 3,2 | 3,3 | 0,40 |
| III | 3,6 | 3,3 | 3,3 | 3,4 | 3,3 | 0,17 |
| IV | 2,3 | 3,3 | 3,4 | 3,0 | 3,3 | 0,60 |
| V | 3,7 | 3,5 | 2,2 | 3,1 | 3,5 | 0,81 |

A medalha de ouro foi conquistada pelo atleta número

- (A) I
(B) II
(C) III
(D) IV
(E) V
-

3. (Enem 2ª aplicação, 2010) Em uma corrida de regularidade, a equipe campeã é aquela em que o tempo dos participantes mais se aproxima do tempo fornecido pelos organizadores em cada etapa. Um campeonato foi organizado em 5 etapas, e o tempo médio de prova indicado pelos organizadores foi de 45 minutos por prova. No quadro, estão representados os dados estatísticos das cinco equipes mais bem classificadas. Dados estatísticos das equipes mais bem classificadas (em minutos)

| Equipes | Média | Moda | Desvio Padrão |
|---------|-------|------|---------------|
| I | 45 | 40 | 5 |
| II | 45 | 41 | 4 |
| III | 45 | 44 | 1 |
| IV | 45 | 44 | 3 |
| V | 45 | 47 | 2 |

Utilizando os dados estatísticos do quadro, a campeã foi a equipe

- (A) I.
- (B) II.
- (C) III.
- (D) IV.
- (E) V.



4. (Upe, 2022) O quadro a seguir apresenta o número de casos diários verificados de Covid-19 em cinco cidades A, B, C, D e E, de 19/04/2021 a 22/04/2021, assim como a média e o desvio padrão para cada uma dessas cidades.

| Cidade | Número de casos 19/04/2021 | Número de casos 20/04/2021 | Número de casos 21/04/2021 | Número de casos 22/04/2021 | Média | Desvio Padrão |
|--------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------|---------------|
| A | 135 | 148 | 176 | 141 | 150 | 15,70 |
| B | 138 | 144 | 121 | 197 | 150 | 28,42 |
| C | 170 | 149 | 183 | 98 | 150 | 32,38 |
| D | 175 | 146 | 161 | 118 | 150 | 21,13 |
| E | 173 | 139 | 144 | 144 | 150 | 13,44 |

Fonte: Dados fictícios

Como a média de casos foi a mesma para todas as cidades e nenhuma delas manteve um rigoroso decréscimo do número de casos nesse período, um veículo de comunicação deseja reportar qual dentre essas cinco cidades apresentou a distribuição mais regular do número de casos no período considerado. Qual cidade deve ser reportada por esse veículo de comunicação?

- (A) A
- (B) B
- (C) C
- (D) D
- (E) E

5. (Enem, 2016) O procedimento de perda rápida de “peso” é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três “pesagens” antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos “pesos”. As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

| Atleta | 1ª pesagem (kg) | 2ª pesagem (kg) | 3ª pesagem (kg) | Média | Mediana | Desvio Padrão |
|--------|-----------------|-----------------|-----------------|-------|---------|---------------|
| I | 78 | 72 | 66 | 72 | 72 | 4,90 |
| II | 83 | 65 | 65 | 71 | 65 | 8,49 |
| III | 75 | 70 | 65 | 70 | 70 | 4,08 |
| IV | 80 | 77 | 62 | 73 | 77 | 7,87 |

Após as três “pesagens”, os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta. A primeira luta foi entre os atletas:

- (A) I e III.
 (B) I e IV.
 (C) II e III.
 (D) II e IV.
 (E) III e IV.
6. (Enem PPL, 2019) Um fiscal de certa empresa de ônibus registra o tempo, em minuto, que um motorista novato gasta para completar certo percurso. No Quadro 1 figuram os tempos gastos pelo motorista ao realizar o mesmo percurso sete vezes. O Quadro 2 apresenta uma classificação para a variabilidade do tempo, segundo o valor do desvio padrão.

Quadro 1

| Tempos (em minuto) | 48 | 54 | 50 | 46 | 44 | 52 | 49 |
|--------------------|----|----|----|----|----|----|----|
|--------------------|----|----|----|----|----|----|----|

Quadro 2

| Variabilidade | Desvio padrão do tempo (min) |
|-------------------|------------------------------|
| Extrema baixa | $0 < \sigma \leq 2$ |
| Baixa | $2 < \sigma \leq 4$ |
| Moderada | $4 < \sigma \leq 6$ |
| Alta | $6 < \sigma \leq 8$ |
| Extremamente alta | $\sigma > 8$ |

Com base nas informações apresentadas nos quadros, a variabilidade do tempo é

- (A) extremamente baixa.
 (B) baixa.
 (C) moderada.
 (D) alta.
 (E) extremamente alta.

7. (Upe, 2014) Numa competição esportiva, cinco atletas estão disputando as três primeiras colocações da prova de salto em distância. A classificação será pela ordem decrescente da média aritmética de pontos obtidos por eles, após três saltos consecutivos na prova. Em caso de empate, o critério adotado será a ordem crescente do valor da variância. A pontuação de cada atleta está apresentada na tabela a seguir:

| Atleta | Pontuação – 1º salto | Pontuação – 2º salto | Pontuação – 3º salto |
|--------|----------------------|----------------------|----------------------|
| A | 6 | 6 | 6 |
| B | 7 | 3 | 8 |
| C | 5 | 7 | 6 |
| D | 4 | 6 | 8 |
| E | 5 | 8 | 5 |

Com base nas informações apresentadas, o primeiro, o segundo e o terceiro lugares dessa prova foram ocupados, respectivamente, pelos atletas

- (A) A; C; E.
(B) B; D; E.
(C) E; D; B.
(D) B; D; C.
(E) A; B; D.
8. (Enem, 2012) Um produtor de café irrigado em Minas Gerais recebeu um relatório de consultoria estatística, constando, entre outras informações, o desvio padrão das produções de uma safra dos talhões de sua propriedade. Os talhões têm a mesma área de 30 000 m² e o valor obtido para o desvio padrão foi de 90 kg/talhão. O produtor deve apresentar as informações sobre a produção e a variância dessas produções em sacas de 60 kg por hectare (10 000 m²). A variância das produções dos talhões expressa em (sacas/hectare)² é
- (A) 20,25.
(B) 4,50.
(C) 0,71.
(D) 0,50.
(E) 0,25.
9. (FGV – SP, 2018) Uma lista de quatro números inteiros tem média 7 e diferença entre o maior e o menor dos números igual a 24. A moda e mediana da lista são, ambas, iguais a 8. Assim o desvio padrão da lista é igual a:

- (A) $\sqrt{69}$
(B) $\sqrt{70}$
(C) $\sqrt{71}$
(D) $\sqrt{72}$
(E) $\sqrt{73}$

10. (UFPR, 2016) O serviço de atendimento ao consumidor de uma concessionária de veículos recebe as reclamações dos clientes via telefone. Tendo em vista a melhoria nesse serviço, foram anotados os números de chamadas durante um período de sete dias consecutivos. Os resultados obtidos foram os seguintes:

| Dia | Número de chamadas |
|---------|--------------------|
| Domingo | 3 |
| Segunda | 4 |
| Terça | 6 |
| Quarta | 9 |
| Quinta | 5 |
| Sexta | 7 |
| Sábado | 8 |

Sobre as informações contidas nesse quadro, considere as seguintes afirmativas:

- I. O número médio de chamadas dos últimos sete dias foi 6.
- II. A variância dos dados é 4.
- III. O desvio padrão dos dados é $\sqrt{2}$.

Assinale a alternativa correta.

- (A) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
- (B) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
- (C) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
- (D) Somente a afirmativa I é verdadeira.
- (E) As afirmativas I, II e III são verdadeiras

Se liga!

Sua específica é Exatas e quer continuar treinando esse conteúdo?
Clique [aqui](#), para fazer uma lista extra de exercícios.

Gabaritos

Exercícios de fixação

1. A amplitude é igual a $50 - (-80) = 50 + 80 = 130^{\circ}\text{C}$.

2.

$$\frac{33 + 35 + 42 + 47 + 43}{5} = \frac{200}{5} = 40$$

(A) Os desvios são $|33 - 40| = 7$, $|35 - 40| = 5$, $|42 - 40| = 2$, $|47 - 40| = 7$, $|43 - 40| = 3$

(B) Podemos usar os desvios no cálculo da variância. Observe:

$$V = \frac{7^2 + 5^2 + 2^2 + 7^2 + 3^2}{5} = \frac{49 + 25 + 4 + 49 + 9}{5} = \frac{136}{5} = 27,2$$

3. É aproximadamente 2,1.

Calculando a média das notas: $\frac{5+8+8+8+3+4}{6} = \frac{36}{6} = 6$.

Calculando a variância: $\frac{(5-6)^2 + 3 \cdot (8-6)^2 + (3-6)^2 + (4-6)^2}{6} = \frac{(-1)^2 + 3 \cdot 2^2 + (-3)^2 + (-2)^2}{6} = \frac{1+12+9+4}{6} = \frac{26}{6} \simeq 4,3$

Desvio padrão: $\sqrt{4,3} \simeq 2,1$.

4. O desvio padrão duplica.

Considere a variância original V , o que implica que o desvio padrão é \sqrt{V} . Como a variância passará a ser $4V$, o desvio padrão será igual $\sqrt{4V} = 2\sqrt{V}$.

5. Candidato B.

São dados os desvios padrões das notas.

Assim, as variâncias dos candidatos foram, respectivamente, $2^2 = 4$, $1,5^2 = 2,25$, $0,8^2 = 0,64$, $3^2 = 9$

$2,5^2 = 6,25$. Assim, os candidatos A, D e E foram desclassificados. Dentre B e C, o candidato com maior média é o B.

Exercícios de vestibular

1. B

Alternativa B, pois o desvio-padrão nos mostra qual candidato manteve uma maior regularidade (proximidade da média), já que as médias foram iguais.

2. C

O atleta número III foi o mais regular, pois apresentou o menor desvio padrão.

3. C

A equipe campeã será aquela que apresenta a moda mais próxima da média estabelecida e cujo desvio padrão seja o menor. Portanto, a equipe III foi a campeã.

4. E

A cidade que apresentou a distribuição mais regular do número de casos no período considerado foi a E, pois é a que tem o menor desvio padrão.

5. C

O menos regular é o que apresenta maior desvio padrão e o mais regular é o que apresenta menor desvio padrão. Portanto, a luta será entre os atletas II e III.

6. B

Calculando a média dos tempos: $\frac{48+54+50+46+44+52+49}{7} = 49$

Calculando a variância (a média dos quadrados dos desvios em relação à média):

$$\begin{aligned} \text{Var} &= \frac{(48-49)^2 + (54-49)^2 + (50-49)^2 + (46-49)^2 + (44-49)^2 + (52-49)^2 + (49-49)^2}{7} \\ &= \frac{(-1)^2 + 5^2 + 1^2 + (-3)^2 + (-5)^2 + 3^2 + 0^2}{7} = \frac{1 + 25 + 1 + 9 + 25 + 9 + 0}{7} = \frac{70}{7} = 10 \end{aligned}$$

Calculando o desvio padrão: $\sqrt{10} \cong 3,16$. Portanto, a variabilidade do tempo é baixa.

7. A

É possível verificar que a média aritmética dos pontos obtidos por cada atleta é igual a 6, já que todos somaram 18 pontos e foram realizados três saltos. Por outro lado, calculando a variância dos pontos de cada atleta, obtemos

$$\text{Var}_A = \frac{(6-6)^2 + (6-6)^2 + (6-6)^2}{3} = 0$$

$$\text{Var}_B = \frac{(7-6)^2 + (3-6)^2 + (8-6)^2}{3} \simeq 4,67$$

$$\text{Var}_C = \frac{(5-6)^2 + (7-6)^2 + (6-6)^2}{3} \simeq 0,67$$

$$\text{Var}_D = \frac{(4-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2}{3} \simeq 2,67$$

$$\text{Var}_E = \frac{(5-6)^2 + (8-6)^2 + (5-6)^2}{3} = 2$$

Portanto, como $\text{Var}_A < \text{Var}_C < \text{Var}_E < \text{Var}_D < \text{Var}_B$, segue-se que o primeiro, o segundo e o terceiro lugares dessa prova foram ocupados, respectivamente, pelos atletas A, C e E.

8. E

$$\text{Desvio padrão} = \frac{90}{30000} = \frac{30}{10000} = \frac{\frac{1}{2} \text{ saca}}{\text{hectare}}.$$

Logo, a variância pedida será dada por $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} (\text{saca/hect})^2$.

9. E

$$\frac{a+b+c+d}{4} = 7$$

$$d - a = 24$$

$$\frac{b+c}{2} = 8 \rightarrow b + c = 16$$

$$\frac{a+16+d}{4} = 7 \rightarrow a + d = 12 \rightarrow d = 12 - a$$

$$d - a = 24 \rightarrow 12 - a - a = 24 \rightarrow -2a = 12 \rightarrow a = -6 \rightarrow d = 18$$

$$\text{Moda} = 8 \rightarrow b = c = 8$$

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{(-6-7)^2 + (8-7)^2 + (8-7)^2 + (18-7)^2}{4}} = \sqrt{\frac{169+1+1+121}{4}} = \sqrt{73}$$

10. A

I. Verdadeira

$$\bar{x} = \frac{3+4+6+9+5+7+8}{7} = 6$$

II. Verdadeira

$$\text{var} = \frac{(3-6)^2 + (4-6)^2 + (6-6)^2 + (5-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2}{7} = 4$$

III. Falsa

$$D_p = \sqrt[4]{\text{var}}$$