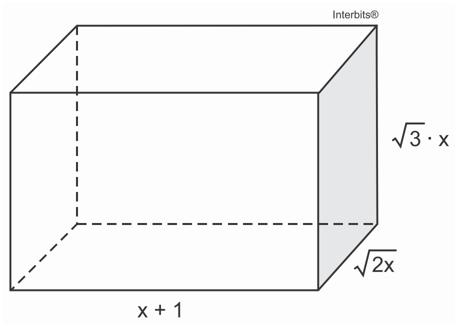
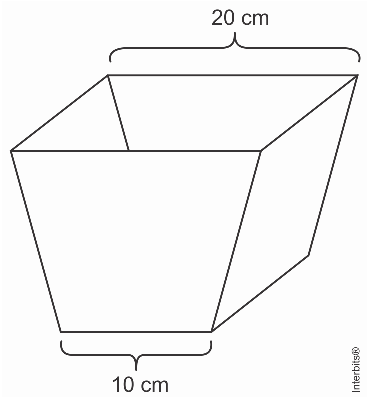
1. (Ufsc 2016) Em relação às proposições abaixo, é **CORRETO** afirmar que:
01) No paralelepípedo abaixo, a medida da sua diagonal é expressa por uma função quadrática.



02) Se um reservatório de água tem a forma de cilindro equilátero e seu diâmetro interno mede 4 m, então, considerando $\pi = 3{,}14$, a capacidade desse reservatório é de 50.240 L.
04) Um pequeno cesto de lixo tem a forma de tronco de pirâmide e suas dimensões internas estão indicadas na figura. Se a altura do cesto é 15 cm, então seu volume é 3.500 cm^3.



08) Um pote para guardar alimentos tem a forma de um prisma reto de base triangular. Sua base é um triângulo retângulo e suas dimensões formam uma progressão aritmética de razão 5 cm. Se sua altura mede 10 cm, então a área total desse prisma é 750 cm^2.
16) Um filtro de café tem a forma de um cone cuja medida interna de seu diâmetro é 20 cm. Se a medida interna da geratriz é 26 cm, então sua capacidade é menor que 2 L.

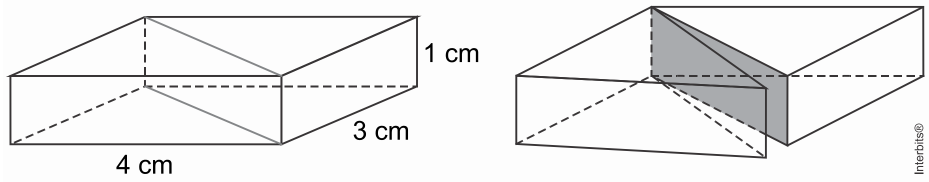
2. (Ime 2016) Um cone é inscrito em um cubo $ABCDEFGH$ de forma que a base do cone é o círculo inscrito na base $ABCD$. O vértice do cone é o centro da face oposta do cubo. A projeção do vértice H na base $ABCD$ coincide com o vértice D. Determine a área da seção do cone pelo plano ABH em função de a, a medida da aresta do cubo.

3. (Upe-ssa 2 2016) Analise as afirmativas a seguir, relativas à geometria espacial e coloque V nas Verdadeiras
e F nas Falsas.

(   ) Se uma reta está contida em um plano, então toda reta perpendicular a ela será perpendicular ao plano.
(   ) Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta perpendicular a um deles é paralela ao outro.
(   ) Se dois planos distintos são paralelos a uma reta fora deles, então eles são paralelos entre si.
(   ) Se dois planos distintos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.

Assinale a alternativa que apresenta a sequência **CORRETA**.
a) F – F – V – V
b) F – V – V – F
c) F – F – F – F
d) V – F – F – V
e) V – V – F – F

4. (Unesp 2016) Um paralelepípedo reto-retângulo foi dividido em dois prismas por um plano que contém as diagonais de duas faces opostas, como indica a figura.



Comparando-se o total de tinta necessária para pintar as faces externas do paralelepípedo antes da divisão com o total necessário para pintar as faces externas dos dois prismas obtidos após a divisão, houve um aumento aproximado de
a) 42%.
b) 36%.
c) 32%.
d) 26%.
e) 28%.

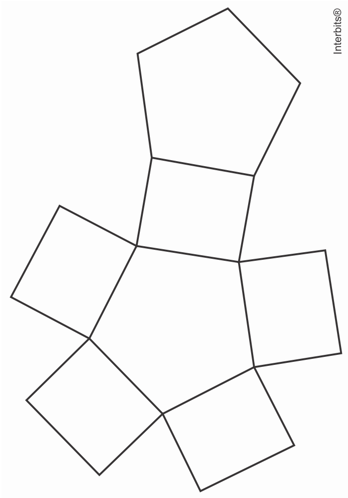
5. (G1 - ifpe 2016) Na residência de Laércio, há uma caixa d’água vazia com capacidade de 5 metros cúbicos. Ele vai encher a caixa trazendo água de um poço próximo, em uma lata cuja base é um quadrado de lado 40 cm e cuja altura é $50\text{ cm}.$ Qual é o número mínimo de vezes que Laércio precisará ir ao poço até encher integralmente a caixa d’água?
a) 67
b) 52
c) 55
d) 63
e) 56

6. (Ufrgs 2016) Uma caixa com a forma de um paralelepípedo retangular tem as dimensões dadas por

$x,\ x+4$ e $x-1.$

Se o volume desse paralelepípedo é $12,$ então as medidas das dimensões da caixa são
a) $1, 1$ e $12.$
b) $1, 2$ e $6.$
c) $1, 3$ e $4.$
d) $2, 2$ e $3.$
e) $2, 3$ e $4.$

7. (G1 - ifsp 2016) A figura abaixo representa a planificação de um poliedro P:

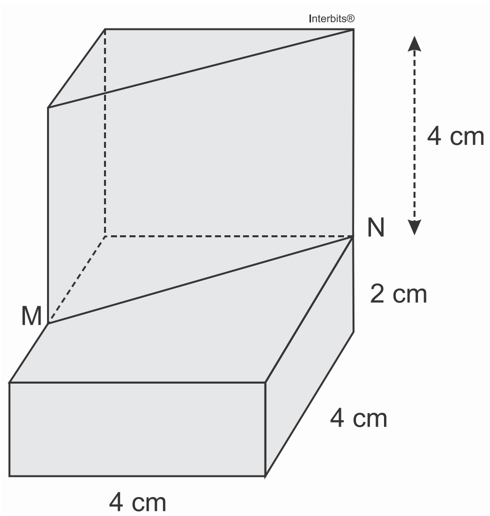


Avalie as afirmações I, II e III sobre o poliedro representado pela planificação:

I. O número de arestas do poliedro P corresponde a uma vez e meia o número de vértices.
II. O poliedro P tem, pelo menos, duas faces paralelas.
III. O poliedro P pode ser classificado como pentágono.

Contém uma afirmação verdadeira:
a) apenas II.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) I, II e III.

8. (Upe-ssa 2 2016) O sólido representado a seguir foi obtido acoplando-se um prisma triangular reto de 4 cm altura a um paralelepípedo reto de dimensões $4\text{ cm},$ 4 cm e $2\text{ cm},$ conforme a figura.

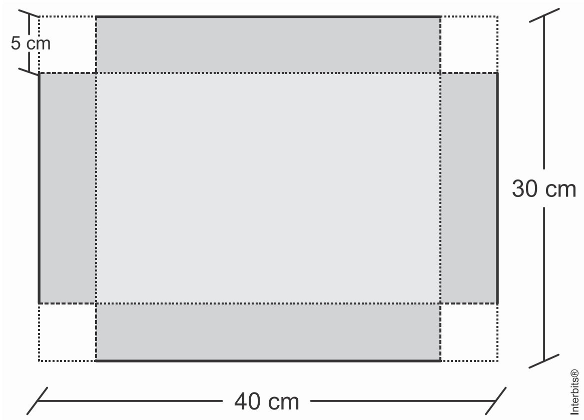


Se M é ponto médio da aresta do paralelepípedo, qual é a área total da superfície do referido sólido?
Adote $\sqrt{5} \cong 2,2.$
a) $99,6\text{ cm}^2$
b) $103,6\text{ cm}^2$
c) $105,6\text{ cm}^2$

d) $107{,}6\ \text{cm}^2$

e) $109{,}6\ \text{cm}^2$

9. (G1 - ifpe 2016) Uma folha retangular de papelão de $40\ \text{cm}$ por $30\ \text{cm}$ será utilizada para confeccionar uma caixa, sem tampa, em forma de paralelepípedo, de base retangular. Para isso, deve-se, a partir desta folha de papelão, retirar 4 quadrados de lado $5\ \text{cm},$ de cada um dos vértices e, em seguida, dobrar os lados, conforme a figura abaixo:



Determine, em litros, o volume dessa caixa.
a) 3 litros
b) 2 litros
c) 1 litro
d) 4 litros
e) 5 litros

10. (Imed 2016) Uma bola maciça, totalmente vedada, em formato de uma esfera perfeita, de diâmetro igual a 2 metros, foi lançada em uma piscina, de base retangular com dimensões medindo 5 metros e 12 metros e com água até a altura de $1{,}2$ metros. Sabendo que a bola ficou completamente submersa pela água, quantos metros o nível da água se elevará?

a) $\frac{\pi}{180}.$

b) $\frac{\pi}{90}.$

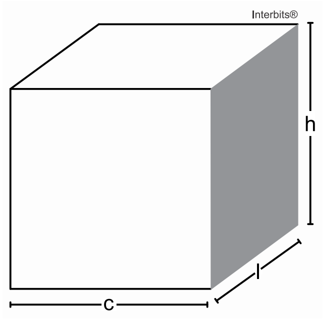
c) $\frac{\pi}{45}.$

d) $\frac{\pi}{30}.$

e) $\frac{\pi}{15}.$

11. (Ufpr 2016) Um prisma possui 17 faces, incluindo as faces laterais e as bases inferior e superior. Uma pirâmide cuja base é idêntica à base do prisma, possui quantas arestas?
a) $26.$
b) $28.$
c) $30.$
d) $32.$
e) $34.$

12. (G1 - cftmg 2016) Deseja-se construir uma caixa d'água no formato de um paralelepípedo retângulo, que armazene 18.000 litros de água, como mostra a figura.

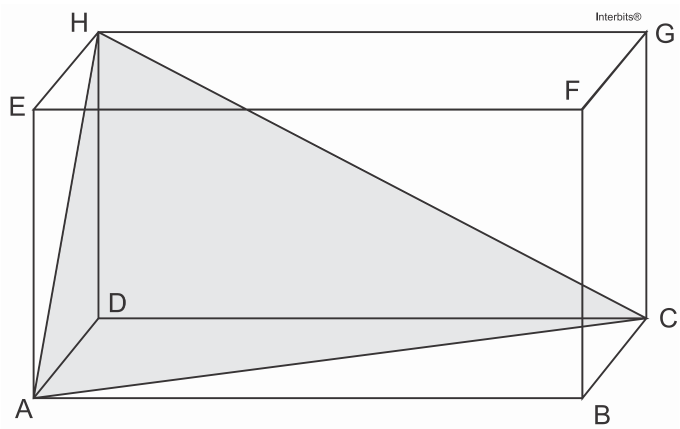


Sabe-se que o comprimento (c) é o dobro da largura (ℓ), que a altura (h) é $1/3$ da medida da largura (ℓ) e que $1\,m^3$ equivale a 1.000 litros de água.

Nessas condições, a largura dessa caixa d'água, em metros, é igual a
a) $1{,}5$.
b) $1{,}8$.
c) $2{,}7$.
d) $3{,}0$.

13. (Fuvest 2016) Cada aresta do tetraedro regular $ABCD$ mede 10. Por um ponto P na aresta $\overline{AC}$, passa o plano α paralelo às arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Dado que $AP = 3$, o quadrilátero determinado pelas interseções de α com as arestas do tetraedro tem área igual a
a) 21
b) $\dfrac{21\sqrt{2}}{2}$
c) 30
d) $\dfrac{30}{2}$
e) $\dfrac{30\sqrt{3}}{2}$

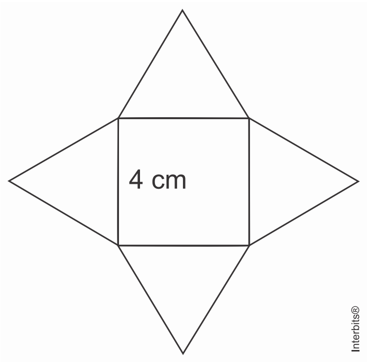
14. (Ufrgs 2016) Considere $ABCDEFGH$ um paralelepípedo reto-retângulo conforme representado na figura abaixo.



Se as arestas do paralelepípedo medem 3, 6 e 10, o volume do sólido $ACDH$ é
a) 10.
b) 20.
c) 30.

d) 60.
e) 90.

15. (Ufpr 2016) Temos, abaixo, a planificação de uma pirâmide de base quadrada, cujas faces laterais são triângulos equiláteros. Qual é o volume dessa pirâmide?



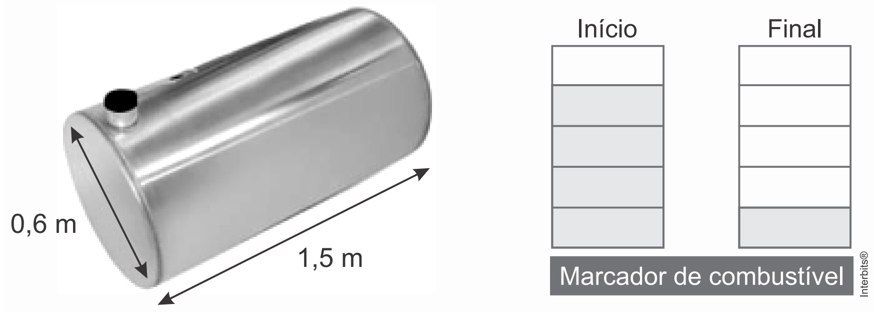
a) $\frac{16}{3}\sqrt{3}\ \text{cm}^3.$
b) $16\sqrt{3}\ \text{cm}^3.$
c) $32\ \text{cm}^3.$
d) $\frac{32}{3}\sqrt{2}\ \text{cm}^3.$
e) $\frac{64}{3}\ \text{cm}^3.$

16. (Acafe 2016) Uma peça de madeira tem a forma de uma pirâmide hexagonal regular com $21\,\text{cm}$ de altura. Essa peça é seccionada por um plano paralelo à base, de forma que o volume da pirâmide obtida seja $8/27$ do volume da pirâmide original.

A distância (em cm) da base da pirâmide até essa secção é um número:
a) fracionário.
b) primo.
c) múltiplo de $3.$
d) quadrado perfeito.

17. (Acafe 2016) Uma pirâmide de base triangular regular reta e um cone reto estão inscritos num cilindro reto, cujo raio da base é r e altura $h.$ A relação entre a altura e o raio do cilindro, para que a diferença entre o volume do cone e da pirâmide seja equivalente a $\left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right)$ unidades, é:
a) $r^2h = 1.$
b) $h = \frac{\pi - \sqrt{3}}{r}.$
c) $rh = \frac{\pi - \sqrt{3}}{12}.$
d) $rh = 1.$

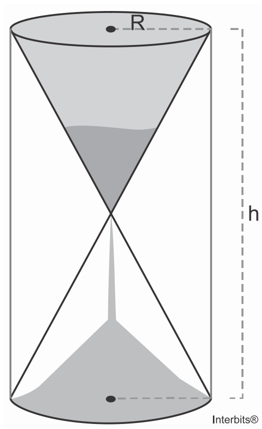
18. (Upe-ssa 2 2016) A figura abaixo representa um tanque de combustível de certa marca de caminhão a diesel. Sabendo que esse veículo faz, em média, $3\ \text{km/L},$ e, observando o marcador de combustível no início e no final de uma viagem, quantos quilômetros esse caminhão percorreu?
Considere $\pi \cong 3.$



a) 243 km
b) 425 km
c) 648 km
d) 729 km
e) 813 km

19. (Pucsp 2016) Dispõe-se de N tubos cilíndricos, todos iguais entre si, cada qual com diâmetro interno de 4 cm. Se esses tubos transportam a mesma quantidade de água que um único tubo cilíndrico, cujo diâmetro interno mede 12 cm e cujo comprimento é igual ao dobro do comprimento dos primeiros, então:
a) $N > 15$
b) $10 < N < 15$
c) $6 < N < 10$
d) $N < 6$

20. (Ucs 2016) Uma ampulheta tem a forma de dois cones circulares retos idênticos (mesmo raio e mesma altura) no interior de um cilindro circular reto, conforme mostra a figura.



O volume da parte do cilindro sem os dois cones é igual __________ soma dos volumes desses cones. Assinale a alternativa que preenche corretamente a lacuna acima.
a) à
b) ao dobro da
c) à metade da
d) a um terço da
e) a dois terços da

21. (Epcar (Afa) 2016) Considere a região E do plano cartesiano dada por

$$E = \begin{cases} \frac{y}{3} + \frac{x}{3} \le 1 \\ y + x \ge 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

O volume do sólido gerado, se E efetuar uma rotação de $270°$ em torno do eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ em unidades de volume, é igual a

a) $\frac{26\pi}{3}$
b) 26π
c) $\frac{13\pi}{2}$
d) $\frac{13\pi}{3}$

22**.** (Ufrgs 2016) Em uma caixa, há sólidos geométricos, todos de mesma altura: cubos, cilindros, pirâmides quadrangulares regulares e cones. Sabe-se que as arestas da base dos cubos e das pirâmides têm a mesma medida; que o raio da base dos cones e dos cilindros tem a mesma medida. Somando o volume de 2 cubos e de 2 cilindros, obtêm-se $180\ cm^3$. A soma dos volumes de 3 cubos e 1 cone resulta em $110\ cm^3$, e a soma dos volumes de 2 cilindros e 3 pirâmides resulta em $150\ cm^3$.

O valor da soma dos volumes, em cm^3, de um cubo, um cilindro, dois cones e duas pirâmides é

a) 150.
b) 160.
c) 190.
d) 210.
e) 240.

23**.** (Uece 2016) Duas esferas que se tangenciam estão em repouso sobre um plano horizontal. Os volumes das esferas são respectivamente $2304\pi\ m^3$ e $36\pi\ m^3$. A distância, em metros, entre os pontos de contato das esferas com o plano é igual a

a) 9.
b) 12.
c) 15.
d) 10.

24**.** (Ufjf-pism 2 2016) Considere uma esfera de raio $2\ cm$ com área total A e volume V. Suponha que os valores y, A, V formem uma progressão geométrica nessa ordem. Em centímetros, quanto vale y?

a) $\frac{3\pi}{2}$
b) $\frac{8\pi}{3}$
c) 8π
d) 24π
e) 96π

25. (Espcex (Aman) 2016) Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base tem medida R, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é mergulhada nesse recipiente ficando totalmente submersa, sem haver transbordamento de água. Se a altura da água subiu $\frac{9}{16}R$, então o raio da esfera mede

a) $\frac{2}{3}R$
b) $\frac{3}{4}R$
c) $\frac{4}{9}R$
d) $\frac{1}{3}R$
e) $\frac{9}{16}R$

26. (Ufrgs 2016) Se um jarro com capacidade para 2 litros está completamente cheio de água, a menor medida inteira, em cm, que o raio de uma bacia com a forma semiesférica deve ter para comportar toda a água do jarro é

a) 8.
b) 10.
c) 12.
d) 14.
e) 16.

27. (Unicamp 2016) Um cilindro circular reto, cuja altura é igual ao diâmetro da base, está inscrito numa esfera. A razão entre os volumes da esfera e do cilindro é igual a

a) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.
b) $\frac{4}{3}$.
c) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.
d) $\sqrt{2}$.

28. (Uemg 2016) Dadas as equações de reta $r: x+y-6=0$ e $s: 2x-y=0$ em um dado plano cartesiano de centro O. As retas r e s são concorrentes no ponto P e a reta r intercepta o eixo das abscissas no ponto Q. O volume do sólido formado pela rotação da figura plana formada pelos pontos OPQ em torno do lado OQ é: (use $\pi \cong 3$)

a) $32\ cm^3$.
b) $64\ cm^3$.
c) $96\ cm^3$.
d) $88\ cm^3$.

29. (Uerj 2016) Um fabricante produz embalagens de volume igual a 8 litros no formato de um prisma reto com base quadrada de aresta a e altura h. Visando à redução de custos, a área superficial da embalagem é a menor possível. Nesse caso, o valor de a corresponde, em decímetros, à raiz real da seguinte equação:

$$4a - \frac{32}{a^2} = 0$$

As medidas da embalagem, em decímetros, são:
a) $a = 1; h = 2$
b) $a = 1; h = 4$
c) $a = 2; h = 4$
d) $a = 2; h = 2$

30. (Ueg 2016) Alterando-se as dimensões de uma caixa retangular de altura h, as dimensões da base serão multiplicadas por k e as da altura somado k, em que k é uma constante positiva e não nula. Logo, verifica-se que o volume da nova caixa será em relação à anterior
a) k^3 vezes maior
b) $k^2 + kh$ vezes maior
c) $k^2 + \frac{k^3}{h}$ vezes maior
d) $k^3 + \frac{\sqrt{h}}{k}$ vezes maior

Gabarito:

Resposta da questão 1:
02 + 04 = 06.

[01] INCORRETA. Calculando:

$$(d_{base})^2 = (x+1)^2 + \left(\sqrt{2x}\right)^2 = x^2 + 4x + 1 \rightarrow d_{base} = \sqrt{x^2+4x+1}$$

$$(d_{paralelepípedo})^2 = \left(\sqrt{x^2+4x+1}\right)^2 + \left(\sqrt{3}x\right)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \rightarrow d_{paralelepípedo} = \sqrt{4x^2+4x+1}$$

Logo, não se trata de função quadrática.

[02] CORRETA. Calculando:

cilindro equilátero $\rightarrow$ diâmetro $=$ altura

$2R = h \rightarrow R = 2 \quad \text{e} \quad h = 4$

$V = \pi \cdot R^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 4 \rightarrow V = 50{,}24\ m^3 = 50240$ litros

[04] CORRETA. Calculando:

$$V_{tronco} = \frac{h}{3} \cdot \left(B + B' + \sqrt{B \cdot B'}\right) = \frac{15}{3} \cdot \left(20^2 + 10^2 + \sqrt{20^2 \cdot 10^2}\right) \rightarrow V_{tronco} = 3500\ cm^3$$

[08] INCORRETA. Se as dimensões do prisma formam uma P.A. de razão 5, então as dimensões do triângulo retângulo da base serão 15, 20 e 25 centímetros. Logo, a área total será:

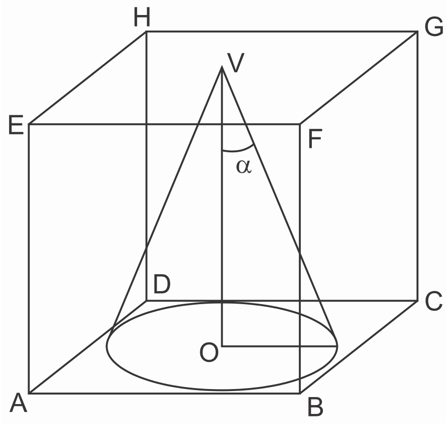
$$A_{total} = 2 \cdot \frac{15 \cdot 20}{2} + 10 \cdot 15 + 10 \cdot 20 + 10 \cdot 25 \rightarrow A_{total} = 900\ cm^2$$

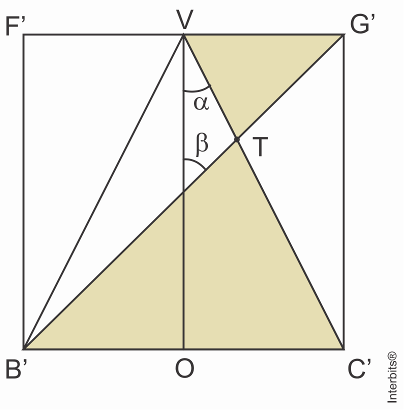
[16] INCORRETA. Calculando:

$g^2 = h^2 + R^2 \rightarrow 26^2 = h^2 + 10^2 \rightarrow h = 24\ cm$

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 24 \rightarrow V_{cone} \cong 2512\ cm^3 > 2 \text{ litros}$$

Resposta da questão 2:
Considere as figuras:





O plano $B'C'F'G'$ é paralelo ao plano $BCFG$ e passa pelo ponto V. O plano ABH contém o ponto G (poderíamos chama-lo também de plano $ABHG$), e corta o cone formando uma seção em elipse.

Sobre os ângulos, pode-se escrever:

$$tg\alpha = \frac{OC'}{VO} = \frac{1}{2}$$

$$\sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1 \rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{4} + 1 \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{5}{4} \rightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\beta = 45^o \rightarrow \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{2\sqrt{5}} \rightarrow \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

Considerando os triângulos semelhantes da figura (em amarelo), pode-se escrever:

$$VG' = \frac{a}{2}$$

$$B'G' = a\sqrt{2}$$

$$\frac{B'C'}{VG'} = \frac{B'T}{TG'} \rightarrow \frac{B'T}{TG'} = \frac{a}{a/2} \rightarrow \frac{B'T}{B'G' - B'T} = 2 \rightarrow \frac{B'T}{a\sqrt{2} - B'T} = 2 \rightarrow B'T = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

Sabendo que intersecção do cone com o plano forma uma seção elíptica, pode escrever:

$$\text{Eixo maior } x \Rightarrow x = \frac{B'T}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{3} \rightarrow x^2 = \frac{2a^2}{9}$$

$$\text{Excentricidade } e \Rightarrow \frac{e}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \rightarrow \frac{e}{x} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\text{Eixo menor } y \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x} = \frac{\sqrt{10}}{4} \rightarrow \frac{x^2 - y^2}{x^2} = \frac{10}{16} \rightarrow 8x^2 - 8y^2 = 5x^2 \rightarrow x^2 = \frac{8}{3}y^2$$

$$x^2 = \frac{8}{3}y^2 \rightarrow \frac{2a^2}{9} = \frac{8}{3}y^2 \rightarrow y^2 = \frac{a^2}{12} \rightarrow y = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Área S elípse} \Rightarrow S = xy\pi = \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right) \rightarrow S = \frac{\pi a^2\sqrt{6}}{18}$$

Resposta da questão 3:
[C]

Falsa. Sejam α um plano e r uma reta contida em α. É imediato que existe pelo menos uma reta s contida em α tal que s é perpendicular a r. Logo, s não é perpendicular a α.
Falsa. Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.
Falsa. Sejam α e β dois planos distintos não paralelos. Basta considerar a reta r, interseção de α e β, e uma reta s paralela a r.
Falsa. Sejam α e β dois planos paralelos distintos. Se $r \in \alpha$, basta tomar $s \in \beta$ de modo que r e a projeção ortogonal de s sobre α sejam concorrentes

Resposta da questão 4:
[D]

A área total do paralelepípedo é dada por

$$2 \cdot (4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = 38 \text{ m}^2.$$

Após a divisão, foram acrescentadas duas faces retangulares de dimensões $5\,\text{m}$ e $1\,\text{m}.$ Logo, o acréscimo na área externa foi de $2\cdot 5\cdot 1=10\ \text{m}^2$ e, portanto, a resposta é

$$\frac{10}{38}\cdot 100\% \cong 26\%.$$

Resposta da questão 5:
[D]

$$\frac{\text{Volume da caixa de agua}}{\text{Volume da lata}}=\frac{5\,\text{m}^3}{(40\text{cm})^2\times 50\,\text{cm}}=\frac{5.000.000\ \text{cm}^3}{1600\times 50\ \text{cm}^3}=62{,}5\ \text{latas}$$

Portanto, no mínimo 63 latas.

Resposta da questão 6:
[B]

Multiplicando-se as medidas das arestas temos o volume do paralelepípedo, portanto:

$$x\cdot(x+4)\cdot(x-1)=12$$
$$x^3+3x^2-4x-12=0$$
$$x^2\cdot(x+3)-4\cdot(x+3)=0$$
$$(x+3)\cdot(x^2-4)=0 \Rightarrow x=-3 \text{ ou } x=-2 \text{ ou } x=2$$

Como x é a medida de uma das arestas, devemos considerar apenas $x=2,$ logo:
$x+4=6$ e $x-1=1.$

Portanto, as dimensões do paralelepípedo são $1,$ 2 e $6.$

Resposta da questão 7:
[B]

É imediato que P é um prisma pentagonal regular.

[I] Verdadeira. De fato, pois P possui 15 arestas e 10 vértices.
[II] Verdadeira. Com efeito, as bases de P são paralelas.
[III] Falsa. É um prisma pentagonal regular.

Resposta da questão 8:
[C]

Seja A o vértice da base AMN do prisma triangular. Pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$\begin{aligned}\overline{MN}^2=\overline{AM}^2+\overline{AN}^2 &\Rightarrow \overline{MN}^2=2^2+4^2\\ &\Rightarrow \overline{MN}\cong 4{,}4\,\text{cm}.\end{aligned}$$

A resposta é dada por

$$4\cdot 4\cdot 2+4^2+\left(\frac{2+4}{2}\right)\cdot 4+4{,}4\cdot 4+4\cdot 4+4\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=105{,}6\,\text{cm}^2.$$

Resposta da questão 9:
[A]

Calculo do volume do paralelepípedo, utilizando as dimensões em $\text{dm}^3,$ temos:

$V = (4-1)(3-1)(0,5) = 3\,dm^3$ que equivale a 3 litros.

Resposta da questão 10:
[C]

O volume da piscina é dado por $V = a \times b \times c,$ onde a, b e c as dimensões.

O volume da esfera é dado por $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, onde R é o raio da esfera.

Logo, o volume de água deslocado na piscina é equivalente ao volume da esfera imersa na piscina, isto é:
Volume deslocado = Volume da esfera

$$5 \times 12 \times h = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow 60h = \frac{4}{3}\pi (1)^3 \Rightarrow 60h = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow h = \frac{\pi}{45}m$$

Resposta da questão 11:
[C]

$$\text{Total de faces} = 17 \Rightarrow \begin{cases} 1\text{ face superior} \\ 1\text{ face inferior} \\ 15\text{ faces laterais} \end{cases} \Rightarrow \text{possui } 15 \text{ arestas na base}$$

Portanto, como será construído uma pirâmide teremos 15 arestas laterais também.

Logo, 15 arestas na base + 15 arestas laterais = 30 arestas.

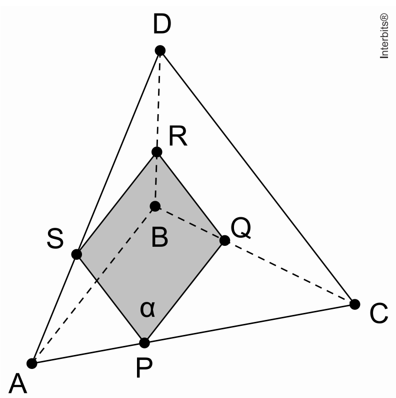
Resposta da questão 12:
[D]

Como $18.000\,L = 18\,m^3,$ $c = 2\ell$ e $h = \frac{\ell}{3},$ temos

$$\begin{aligned} c \cdot \ell \cdot h = 18 &\Leftrightarrow 2\ell \cdot \ell \cdot \frac{\ell}{3} = 18 \\ &\Leftrightarrow \ell^3 = 27 \\ &\Leftrightarrow \ell = 3\text{ m.} \end{aligned}$$

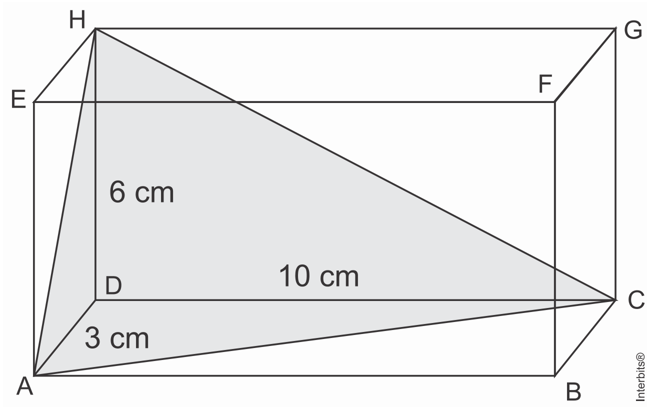
Resposta da questão 13:
[A]

Considere a figura.



Sejam Q, R e $S,$ respectivamente, as interseções de α com as arestas BC, BD e $AD.$ Desde que α é paralelo à aresta $AB,$ temos SR e PQ paralelos a $AB.$ Analogamente, concluímos que PS e QR são paralelos a $CD.$ Ademais, sabendo que arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais, tem-se que o quadrilátero $PQRS$ é um retângulo.
Sendo $ABCD$ regular, os triângulos APS e CQP são equiláteros, e, portanto, a área pedida é igual a $3 \cdot 7 = 21\,m^2.$

Resposta da questão 14:
[C]

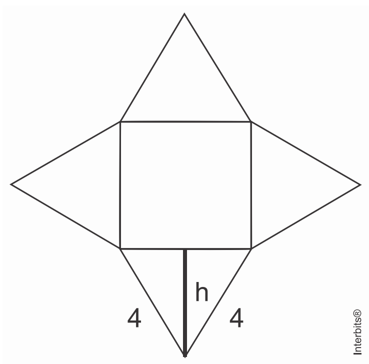


O volume V da pirâmide será dado por:
$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h,$ onde A_b é a área da base da pirâmide e h é a altura.

Logo:
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 10}{2} \cdot 6 = 30 cm^2$$

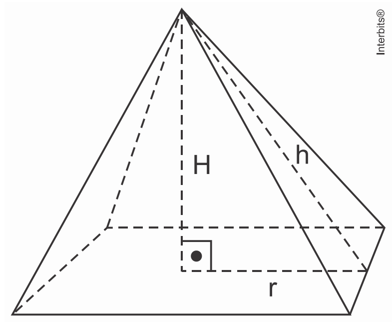
Resposta da questão 15:
[D]

Observe a figura a seguir:



$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

Observe a figura abaixo:



$$h^2 = H^2 + r^2 \Rightarrow \left(2\sqrt{3}\right)^2 = H^2 + (2)^2 \Rightarrow H = 2\sqrt{2}\ \text{cm}$$

Portanto,

$$V_{pir.} = \frac{L^2 \times H}{3} \Rightarrow V_{pir.} = \frac{(4)^2 \times 2\sqrt{2}}{3} = \frac{32}{3}\sqrt{2}\ \text{cm}^3$$

Resposta da questão 16:
[B]

$$\frac{V_M}{V_m} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_M}{\frac{8}{27}V_M} = \left(\frac{21}{h}\right)^3 \Rightarrow \frac{27}{8} = \left(\frac{21}{h}\right)^3 \Rightarrow \frac{21}{h} = \frac{3}{2} \Rightarrow h = 14$$

Portanto, a distância solicitada é:
$d = H - h \Rightarrow d = 21 - 14 \Rightarrow d = 7$ (Número primo)

Resposta da questão 17:
[A]

$$V_{cone} - V_{piramide} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi R^2 h}{3} - \frac{\frac{L^2\sqrt{3}}{4} \times h}{3} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}$$

$$\Rightarrow \pi R^2 h - \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \times h = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4}$$

Porém,

$$R = \frac{2}{3}h_\Delta \Rightarrow R = \frac{2}{3} \times \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow L = R\sqrt{3}$$

Portanto,

$$\Rightarrow \pi R^2 h - \frac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \times h = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \pi R^2 h - \frac{3\sqrt{3}R^2 h}{4} \times h = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi R^2 h - 3\sqrt{3}R^2 h}{4} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{R^2 h\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow R^2 h = 1$$

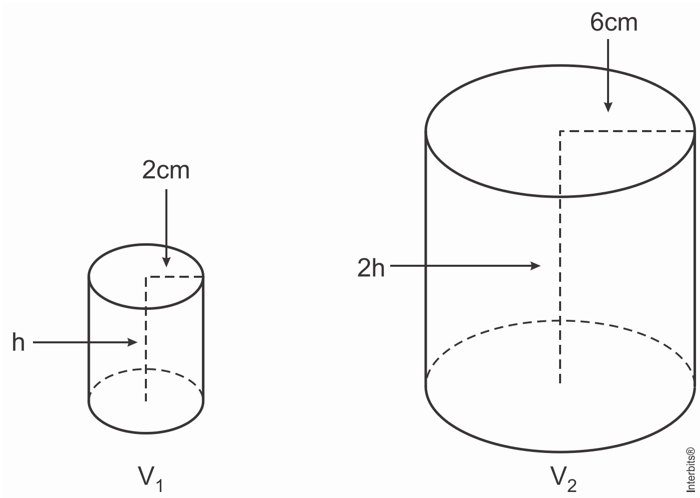
Resposta da questão 18:
[D]

O volume do tanque (suposto cilíndrico) é dado por

$$\pi \cdot \left(\frac{0,6}{2}\right)^2 \cdot 1,5 \cong 0,405\ \text{m}^3 = 405\ \text{L}.$$

Por conseguinte, como o caminhão consumiu $\frac{3}{5} \cdot 405 = 243\ \text{L},$ segue que ele percorreu $243 \cdot 3 = 729\,\text{km}.$

Resposta da questão 19:
[A]



Considerando que o volume 2 (V_2) é N vezes o volume 1 $(V_1),$ podemos escrever a seguinte equação:

$$N \cdot V_1 = V_2$$

$$N \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot h = \pi \cdot 6^2 \cdot 2 \cdot h \Rightarrow N = 18$$

Portanto, $N > 15.$

Resposta da questão 20:
[B]

O volume externo aos cones e interno ao cilindro é dado por

$\pi \cdot R^2 \cdot h - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h,$

ou seja, é igual ao dobro da soma dos volumes dos cones.

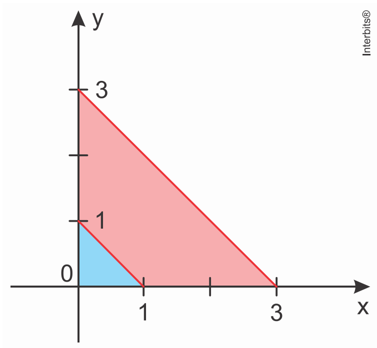
Resposta da questão 21:
[C]

Reescrevendo as duas primeiras inequações como equações, tem-se:

$\frac{y}{3} + \frac{x}{3} \leq 1 \rightarrow \frac{y}{3} + \frac{x}{3} = 1 \rightarrow y = 3 - x$

$y + x \geq 1 \rightarrow y + x \geq 1 \rightarrow y = 1 - x$

Tendo estas duas equações de retas e sabendo que $x \geq 0$ e $y \geq 0,$ pode-se construir o gráfico a seguir, que apresenta a região E (em rosa) indicada no enunciado:



Rotacionando a área E (em rosa) em $360°$ em torno do eixo x teremos um cone "oco" de altura e raio $3,$ com uma concavidade também em formato de cone, de altura e raio igual a 1 (região indicada em azul). Assim, para se conseguir o volume somente do sólido gerado pela rotação da área rosa E, podemos calcular o volume total do cone de altura e raio 3 (que chamaremos de V) e subtrair dele o volume do cone gerado pela rotação da área representada em azul (que chamaremos de $V_{azul}.$ Assim, o volume do sólido gerado pela rotação da área E (V_E) será:

$V_E = V - V_{azul}$

Sendo o volume de um cone de revolução dado pela fórmula $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h,$ temos que:

$$V_E = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 1\right) = 9\pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow V_E = \frac{26\pi}{3}$$

Porém, o solicitado no enunciado não é uma rotação de $360°$ em torno do eixo $x,$ mas sim uma rotação de $270°.$ Nesse caso, o volume final V_E' será correspondente a $3/4\, V_E.$ Ou seja:

$$V_E' = 3/4\, V_E = \frac{3}{4} \cdot \frac{26\pi}{3} = \frac{78\pi}{12} \rightarrow V_E' = \frac{13\pi}{2}$$

Resposta da questão 22:
[A]

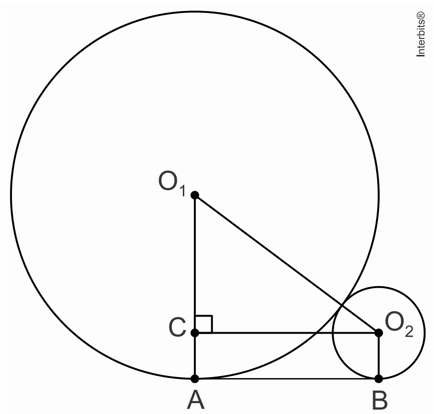
Sabemos que todos os sólidos possuem a mesma altura. Portanto, podemos concluir que:
Volume do cubo $= 3x$
Volume da pirâmide $= x$ (um terço do volume do cubo)
Volume do cilindro $= 3y$
Volume do cone $= y$ (um terço do volume do cilindro)

Somando o volume de 2 cubos e de 2 cilindros, obtêm-se 180 cm^3.
$2\cdot 3x + 2\cdot 3y = 180 \Rightarrow x + y = 30$

Portanto, a soma dos volumes, em cm^3, de um cubo, um cilindro, dois cones e duas pirâmides é dada por:
$3x + 3y + 2x + 2y = 5\cdot(x+y) = 5\cdot 30 = 150$

Resposta da questão 23:
[B]

Considere a figura, em que O_1 e O_2 são os centros das esferas.



Queremos calcular $\overline{AB} = \overline{CO_2}$.

Sejam $r_1 = \overline{AO_1}$ e $r_2 = \overline{BO_2}$ os raios das esferas. Assim, temos

$$\frac{4}{3}\pi r_1^3 = 2304\pi \Leftrightarrow r_1 = 12\text{ m}$$
e
$$\frac{4}{3}\pi r_2^3 = 36\pi \Leftrightarrow r_2 = 3\text{ m}.$$

Considerando o triângulo retângulo O_1CO_2, segue que $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2 = 15\text{ m}$ e $\overline{CO_1} = r_1 - r_2 = 9\text{ m}$. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, vem

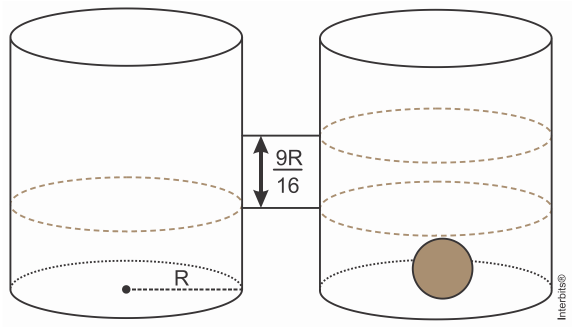
$$\overline{O_1O_2}^2 = \overline{CO_1}^2 + \overline{CO_2}^2 \Leftrightarrow 15^2 = 9^2 + \overline{CO_2}^2$$
$$\Rightarrow \overline{CO_2} = 12\text{ m}.$$

Resposta da questão 24:
[D]

Se y, A e V formam, nessa ordem, uma progressão geométrica, então

$$A^2 = y \cdot V \Rightarrow (4\pi \cdot r^2)^2 = y \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$$
$$\Rightarrow 16\pi^2 \cdot r^4 = y \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$$
$$\Rightarrow y = 12\pi \cdot r$$
$$\Rightarrow y = 24\pi\,\text{cm}.$$

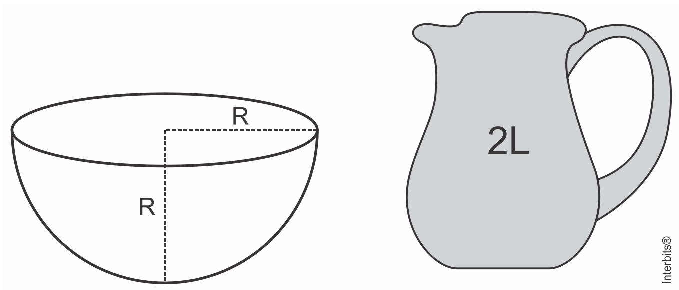
Resposta da questão 25:
[B]



Considerando que x seja o raio da esfera e escrevendo que o volume da esfera é igual ao volume da água deslocada, pode-se escrever:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot x^3 = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{9R}{16} \Rightarrow x^3 = \frac{27R^3}{64} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \cdot R$$

Resposta da questão 26:
[B]



Volume da semiesfera: $\frac{2 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$

$2L = 2000\,\text{cm}^3$

Portanto:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot R^3}{3} = 2000 \Rightarrow \pi \cdot R^3 = 3000 \Rightarrow R^3 \approx 1000 \Rightarrow R \approx 10\text{cm}$$

Resposta da questão 27:
[A]

Sejam r e R, respectivamente, o raio da esfera e o raio do cilindro.

Sabendo que a relação entre o raio da esfera circunscrita ao cilindro equilátero e o raio do cilindro é $r = R\sqrt{2}$, temos

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi R^3} = \frac{2}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{2}{3}(\sqrt{2})^3 = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Resposta da questão 28:
[C]

Vamos supor que o plano cartesiano de centro O esteja graduado em centímetros.

A reta r intersecta o eixo das abscissas no ponto $Q = (6, 0)$. Além disso, a abscissa do ponto P é tal que $2x = -x + 6$, donde obtemos $x = 2$. Logo, vem $P = (2, 4)$ e, portanto, segue que o volume do sólido corresponde à soma dos volumes de dois cones cujos raios da base medem $4\,cm$, e cujas alturas medem, respectivamente, $2\,cm$ e $4\,cm$, isto é,

$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4^2\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4^2\cdot 4 \cong 96\,cm^3.$$

Resposta da questão 29:
[D]

Resolvendo a equação dada para a:

$$4a - \frac{32}{a^2} = 0 \rightarrow 4a^3 - 32 = 0 \rightarrow 4a^3 = 32 \rightarrow a^3 = 8 \rightarrow a = 2\text{ dm}$$

Logo, sabendo que $1\,\text{litro} = 1\,\text{decímetro cúbico}$, e que o volume da embalagem é igual a 8 litros, pode-se escrever:

$$V = 8\text{ dm}^3$$

$$V = S_{base}\cdot h = a^2\cdot h$$

$$8 = 2^2\cdot h \rightarrow h = 2\text{ dm}$$

Resposta da questão 30:
[C]

Comparando o novo volume com o volume antigo (original) pode-se escrever:

$$V_{antigo} = a\cdot b\cdot h$$

$$V_{novo} = (h+k)\cdot ak\cdot bk = abk^2\cdot(h+k) = abhk^2 + abk^3 = ab\cdot\left(hk^2 + k^3\right)$$

$$V_{novo} = \frac{V_{antigo}}{h}\cdot\left(hk^2 + k^3\right) \rightarrow V_{novo} = V_{antigo}\cdot\left(k^2 + \frac{k^3}{h}\right)$$