Licence 3

TP Scilab

A rendre le mardi 25/04/2023 sous forme d'un mini rapport fait sous latex contenant les résultats, les figures et les codes scilab. Le programme scilab doit être également envoyé par email (voir votre délégué). Vous formerez des groupes d'au plus deux personnes.

Rappels Méthodes itératives. On décompose $A = M - N$ avec M "facile" à inverser, la suite (x_k) d'éléments de $\mathbb{R}^n$ approchant la solutions s'obtient par la récurrence :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{donné} \\ x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b. \end{cases}$$

Les propriétés de convergence de l'algorithme sont liées aux propriétés spectrales de la matrice d'itération $M^{-1}N$. Écrivons $A = D - E - F$ où D est la partie diagonale de A : $D = (A_{ij}\delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$; E la partie triangulaire inférieure stricte de A : $E_{ij} = -A_{ij}$ si $i > j$, 0 sinon ; et F la partie triangulaire supérieure stricte de A : $F_{ij} = -A_{ij}$ si $j > i$, 0 sinon.

- **Méthode de Jacobi** : $M = D$ et $N = E + F$.
- **Méthode de Gauss-Seidel** : $M = D - E$ et $N = F$.
- **Méthode de Relaxation** : $M = \frac{1}{\omega}D - E$ et $N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$ avec $\omega \in \mathbb{R}_+^\star$.
- Condition d'arrêt : $\|x_{k+1} - x_k\|_2 < \varepsilon$.
- La suite des résidus relatifs $\left(\frac{\|Ax_k - b\|_2}{\|b\|_2}\right)_k$
- La suite des erreurs relatives $\left(\frac{\|x_k - x^\star\|_2}{\|x^\star\|_2}\right)_k$ ($x^\star$ est solution de $Ax = b$.)

***Remarque :** Dans toute cette fiche et en règle générale, on n'utilisera jamais le calcul de l'inverse de la matrice A, c'est-à-dire la fonction **inv** de Scilab.*

1. **Programmation des méthodes classiques**
   1.1) Programmer une fonction **Jacobi** qui prend en entrée une matrice A, un vecteur b, un vecteur initial x_0 et la précision ε et calcule (renvoie) la solution du système $Ax = b$, la suite des résidus relatifs, la suite des erreurs relatives ainsi que le calcul du rayon spectral de $M^{-1}N$ par la méthode de Jacobi.

   1.2) Programmer une fonction **GaussSeidel** qui prend en entrée une matrice A, un vecteur b, un vecteur initial x_0 et la précision ε et calcule (renvoie) la solution du système $Ax = b$, la suite des résidus relatifs, la suite des erreurs relatives ainsi que le calcul du rayon spectral de $M^{-1}N$ par la méthode de Gauss-Seidel.

   1.3) Programmer une fonction **Relaxation** qui prend en entrée une matrice A, un vecteur b, un vecteur initial x_0, paramètre ω et la précision ε et calcule (renvoie) la solution du système $Ax = b$, la suite des résidus relatifs, la suite des erreurs relatives ainsi que le calcul du rayon spectral de $M^{-1}N$ par la méthode de Relaxation.

2. **Applications**
   Soient α, β et γ des réels. On considère les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} \beta & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & \dots & 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \left(\sin(\frac{4\pi \times 1}{n+1}), \sin(\frac{4\pi \times 2}{n+1}), \dots, \sin(\frac{4\pi \times n}{n+1})\right)^t$$

   2.1) Ecrire une fonction **tridiagAb** qui prend en entrée l'entier n et les trois réels α, β et γ et génère la matrice A et le vecteur b.

   2.2) En utilisant les fonctions scilab définies précédamment, faire un programme scilab vous permettant d'évaluer la solution approchée $x^\star$ du système $Ax = b$ et le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une précision $\varepsilon = 10^{-10}$ pour chacune des trois méthodes Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation avec $\omega = 1.5$, $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = 4$, $x_0 = \textbf{zeros}(n, 1)$ et $n = 25$.

   2.3) Comparer le rayon spectral de $M^{-1}N$ pour les trois méthodes. Commenter.

   2.4) Tracer sur le même graphique l'évolution de l'erreur relative au cours des itérations k pour les trois méthodes en échelle semi-logarithmique. Commenter.

   2.5) Tracer sur le même graphique l'évolution du résidu relatif au cours des itérations k pour les trois méthodes en échelle semi-logarithmique. Commenter.