UNIK-4500 STOKASTISKE SYSTEMER

KJETIL BERGH ÅNONSEN — KJETIL-BERGH.ANONSEN@FFI.NO

UNIK 4540:

- DETERMINISTISKE MODELLER
- LIGNINGER FOR TREGHETSNAVIGASJON
- TOK IKKE MED STØY (MÅLEFEIL)

UNIK 4500:

- STØY PÅ TILSTANDSLIGNINGEN OG MÅLELIGNING
- FINNER OPTIMAL ESTIMATOR NÅR SYSTEMET ER LINEÆRT MED GAUSSISK HVIT STØY

$\Rightarrow$ KALMANFILTER

MODELLER AV FORMEN:

(1) $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u} + G\underline{v}$ (PROSESSLIGNINGEN)

PROSESSTØY (HVIT)
DETERMINISTISK (KJENT) PÅDRAG
TILSTANDSVARIABLE (TILSTANDSVEKTOR)

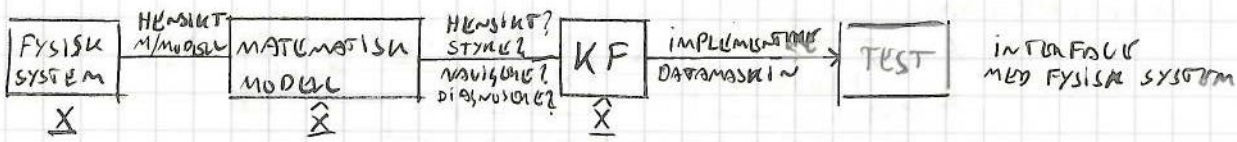
MÅLEMATRISE

(2) $\underline{z}_k = H\underline{x}_k + \underline{w}_k$ (MÅLEVERDI)

(HVIT) MÅLESTØY
TILSTANDSVARIABLE MED TIDSSKRITT K

(1) OG (2) ER ET EKSEMPEL PÅ EN KONTINUERLIG-DISKRET TILSTANDSROMMODELL, D.V.S. KONT. PROSESS, DISKRET MÅLEMODELL

MATEMATISK MODELLERING:



MATEMATISK GRUNNLAG

FRA KAP. 1, 2, 3 i BROWN & HWANG, + KAP. 1 i PAPOULIS

DEFINISJON:

OPTIMAL ESTIMATOR ER EN BEREGNINGSALGORITME, SOM PÅ BASIS AV KUNNSKAP OM PROSESS OG SENSOR (BESKREVET AV ORD. DIFF LIGNING, OG ALGEBRAISKE LIGN.), PROSESS- OG MÅLESTØY, BEREGNER ET MINIMUM VARIANS ESTIMAT AV TILSTANDEN.

DVS GITT $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u} + G\underline{v}$ OG $\underline{z}_k = H\underline{x}_k + \underline{w}_k$

OG FULL KUNNSKAP OM $\underline{x}(t_0)$, $\underline{v}(t)$ OG $\underline{w}_k$.

F, L, G, H : KJENTE MATRISER

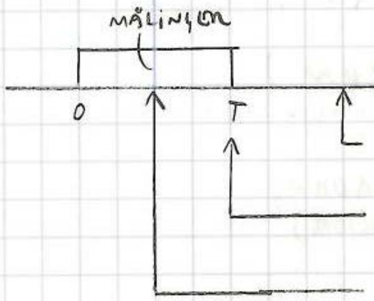
u(t) : PÅDRAG, KJENT.

ULINEÆRT:

$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{v})$

$\underline{z}_k = \underline{h}(\underline{x}_k, \underline{w}_k)$

VI SKAL SE PÅ FØLGENDE ESTIMERINGSPROBLEMER



$t > T$: PREDIKSJON $\quad \hat{\underline{x}}(t|T) \quad (\bar{\underline{x}}(t))$

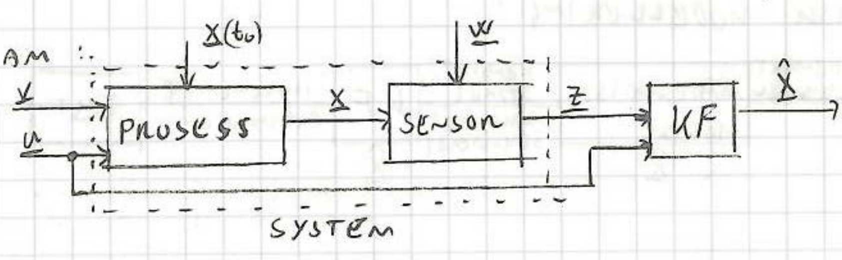
$t = T$: FILTRERING $\quad \hat{\underline{x}}(t|T) = \hat{\underline{x}}(t)$

$0 < t < T$: GLATTING $\quad \hat{\underline{x}}(t|T)$

TRE ULIKE TYPER GLATTING:

* T ER FAST → INTERVALL GLATTING
* t ER FAST → FAST PUNKT GLATTING
* T−t ER KONSTANT → FAST FORSINKELSES GLATTING

BLOKK DIAGRAM:



TO TILFELLER:

* FYSISK SYSTEM
* MATEMATISK MODELL AV ET FYSISK SYSTEM (SIMULERING)

FYSISK SYSTEM → SANNTIDS SYSTEM FOR LØPENDE t

MATEMATISK MODELL → GENERERER MÅLINGER TIL KF, ANALYSEOPSETT, (KJENNER SANN TILSTAND)

GANGEN VED DESIGN AV KF:

* GITT FYSISK SYSTEM SOM BESTÅR AV EN PROSESS OG EN ELLER FLERE SENSORER

* LAGER MATEMATISK MODELL AV DET FYSISKE SYSTEMET V.H.A. KUNNSKAP OM DE FYSISKE LOVER

* FORENKLER MODELLEN → FILTERMODELL

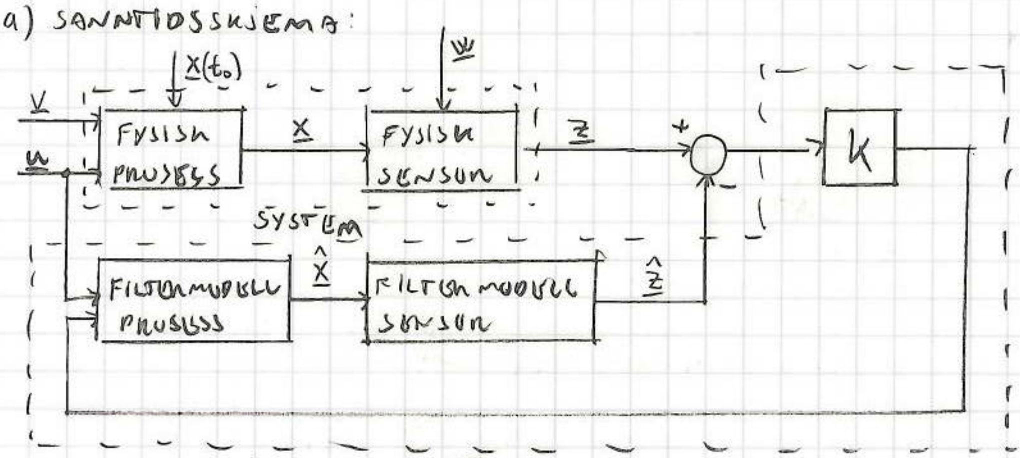
* FILTERMODELLEN → KF

* TUNING (KALIBRERING) AV KF I ANALYSEOPSETT

* IMPLEMENTERER KF I ET SANNTIDSSYSTEM, TESTER

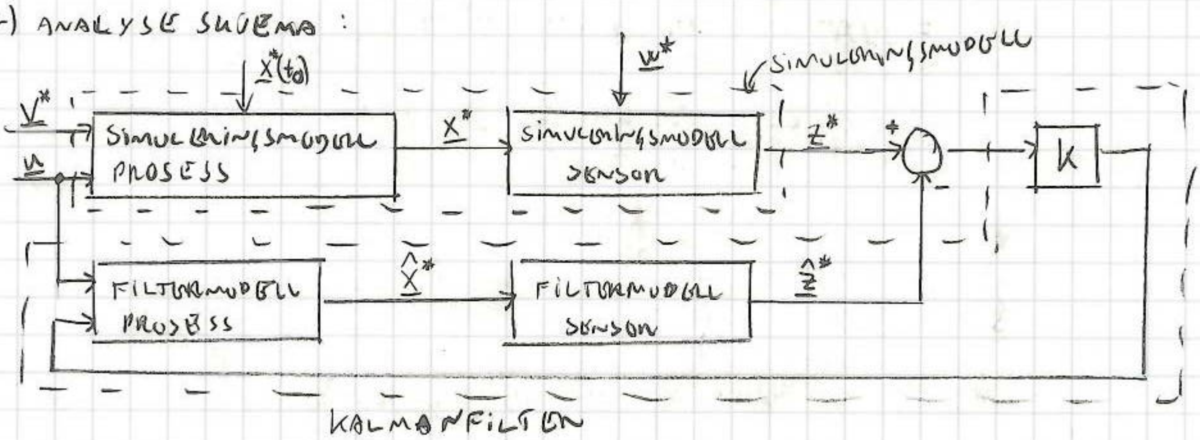
VI SKILLER MELLOM SANNTIDS- OG ANALYSEIMPLEMENTERING AV KF

a) SANNTIDSSKJEMA:



KALMANFILTER

b) ANALYSESKJEMA:



KALMANFILTER

VI JOBBER STORT SETT MED b. I DETTE FAGET

SANNSYNLIGHETEN OG STOKASTISKE VARIABLE

VI HAR FØLGENDE TRE TRINN NÅR VI SKAL BRUKE SANNS. REGNING PÅ FYSISKE SYSTEMER:

1. FYSISK SYSTEM: BESTEMMER GRUNNLEGGENDE SANNS. FOR DE EKSPERIMENTER SOM KAN GJØRES $P(A_i) = n_{Ai}/n$

2. TEORI (KONSEPTUELT): BRUKER TEORIEN FRA SANNS. REGNING TIL Å BEREGNE SANNS. FOR DE INTERESSANTE HENDELSENE

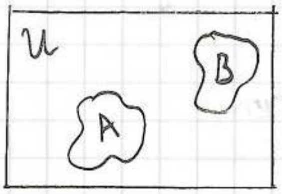
3. FYSISK: PREDIKTERER HVORDAN RESULTATET BLIR FOR DET FYSISKE SYSTEMET

I DETTE KURSET ANTAR VI AT 1. ER GJORDT, FOR Å ANVENDE TEORIEN I 2.

UNIK 4500 FORELESNING 2

1.2 DEFINISJON AV SANNSYNLIGHET

AKSIOMATISK SYSTEM



$\mathcal{U}$: UTFALLSROM

A, B : HENDELSER (SATT SAMMEN AV FLERE ENKELTUTFALL)

e_i : ENKELTUTFALL

$P(\cdot)$: SANNSYNLIGHET, MÅ TILFREDSTILLE 3 AKSIOMER:

i) $P(\mathcal{U}) = 1$

ii) $0 \leq P(A) \leq 1$

iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (NB! DISJUNKTE HENDELSER, $A \cap B = \emptyset$)

RELATIV FREKVENSDEFINISJON:

GJØR ET EKSPERIMENT PÅ DET FYSISKE SYSTEMET n GANGER, TELL OPP HVOR MANGE GANGER HENDELSE A INTREFFER, n_A.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

KLASSISK DEFINISJON:

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

n_A ← ANTALL MULIGE GUNSTIGE ENKELTUTFALL
n ← ANTALL UTFALL TOTALT

ANTAR AT SANNSYNLIGHETEN FOR ELEMENTÆRHENDELSENE ER LIKE

GENERELL KOMMENTAR OM DETERMINISTISKE OG STOKASTISKE FUNKSJ.:

DETERMINISTISK:
$$f : x \in S \longrightarrow y \in \mathbb{R} \ (\in \mathbb{C})$$

STOKASTISK:
$$f : A_i \in \mathcal{U} \longrightarrow y_i \in \mathbb{R} \ (\in \mathbb{Z}, \mathbb{N})$$

FUNKSJONEN (EKSPERIMENT) → A_i ASSOSIERES MED ET TALL

NB! VI MÅ SKILLE MELLOM HVA SOM ER FUNKSJON (OPPSKRIFT, EKSPERIMENT) OG FUNKSJONSVERDIEN (DET) ELLER REALISASJONEN (STOKASTISK).

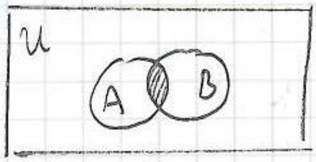
EKS:

EKSPERIMENT: KAST MED TERNING. UTFALL: 1, 2, 3, 4, 5, 6

STOKASTISK VARIABEL = ANTALL ØYNE = X

REALISASJONEN = RESULTATET: $x = 2$

1.3 AKSIOMATISK SANNSYNLIGHET



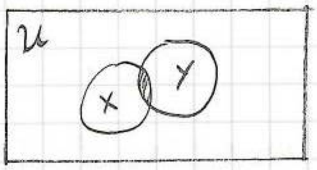
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$\cup$: UNION $\cap$: SNITT

1.5 SIMULTANE OG BETINGEDE SANNSYNLIGHETER, BAYES REGEL OG STOKASTISK UAVHENGIGHET

MARGINAL FORDELING: SUMMERER (INTEGRERER) BORT EN VARIABEL

BAYES REGEL:



$P(X)$ = AREALET AV OMRÅDE X
$P(Y)$ = —— " —— Y

$P(X|Y)$ = BETINGET SANNSYNLIGHET AV X GITT Y

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \qquad (1)$$

$$P(X \cap Y) = P(X|Y)P(Y) \qquad (2)$$

$$P(Y \cap X) = P(Y|X)P(X) \qquad (3)$$

KOMBINERER (1), (2) OG (3):

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$ BAYES REGEL (FOR HENDELSER)

DEF:

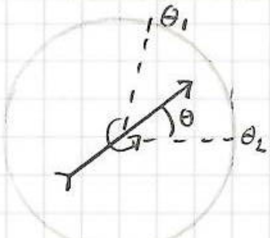
TO HENDELSER A & B ER STOKASTISK UAVHENGIGE HVIS OG BARE HVIS:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

KONSEKVENS:

$$P(A|B) = P(A) \quad , \quad P(B|A) = P(B)$$

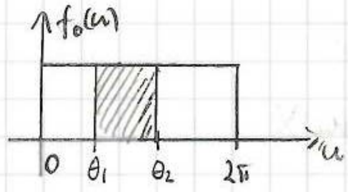
1.6 KONTINUERLIGE STOKASTISKE VARIABLE



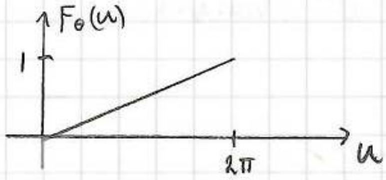
$$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f_\theta(u)\, du$$

STOKASTISK VARIABEL

$f_\theta(u)$: SANNSYNLIGHETSTETTHETSFUNKSJONEN (STF) (PDF)



VI HAR ALLTID: $\int_{-\infty}^{\infty} f_\theta(u)\, du = 1$



KUMULATIV FORDELING:

$$F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{X} f_X(u)\, du$$

LAR OFTE ARGUMENTET TIL FUNKSJONEN VÆRE MED Å DEFINERE FUNKSJONEN

$$F_X(x) = F(x) \neq F(y) = F_Y(y)$$

DERSOM $F_X(x)$ ER DERIVERBAR, HAR VI:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

1.7 FORVENTNING, MIDDELVERDI OG KARAKTERISTISK FUNKSJON

X : STOKASTISK VARIABEL

x_i : REALISASJON (EKSPERIMENT i)

GJØR N EKSPERIMENTER $\rightarrow$ $x_1, x_2, \ldots, x_N$

MIDDELVERDIEN: $\bar{x}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ ($\bar{X}_N$ ER OGSÅ STOKASTISK VARIABEL)

DERSOM X HAR FØLGENDE MULIGE UTFALL: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

ANTAR $P(X = x_i) = p_i$ $\Rightarrow$ DA VIL ANTALL TREKK x_i I EN STIKKPRØVE PÅ $N \approx p_i N$

FORVENTET MIDDELVERDI (FORVENTNINGSVERDI):

$$\left.\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{\cancel{N}}\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \cancel{N} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \quad \left(= \lim_{N\to\infty} \bar{X}_N\right) \\ E[g(X)] &= \sum_{i=1}^{n} g(x_i) p_i \end{aligned}\right\} \text{DISKRET STOK. VAR.}$$

KONTINUERLIG STOK. VAR:

GITT $f_X(x)$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx$$

SPESIALTILFELLER:

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)\,dx \quad : \text{ K'TE MOMENT TIL } X$$

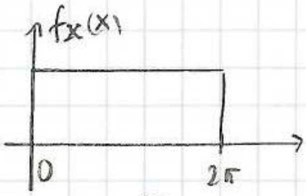
$$E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x)\,dx = \sigma^2 \text{ (VARIANS)}$$

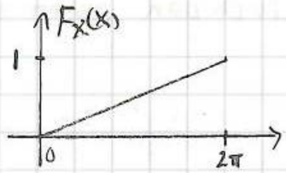
σ : STANDARDAVVIK

EKS 1.6:

X : UNIFORMT FORDELT PÅ $[0, 2\pi]$

$$f_X(x) \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \le x < 2\pi \\ 0 & \text{ELLERS} \end{cases}$$





$$E[X] = \int_{0}^{2\pi} x \frac{1}{2\pi}\,dx = \pi$$

$$\sigma^2 = \text{VAR}[X] = \int_{0}^{2\pi} (x-\pi)^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\,dx = \frac{\pi^2}{3} \qquad \sigma = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

KARAKTERISTISK FUNKSJON:

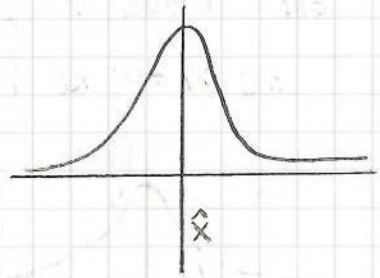
$$\Psi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{j\omega x}\,dx = F(-j\omega) \text{ (FOURIERTRANSFORM TIL } f_X(x))$$

SAMMENHENGEN MELLOM FOURIER OG KAR. FUNKSJON KAN UTNYTTES TIL Å BEREGNE MOMENTENE TIL X

1.8 NORMALFORDELTE (GAUSSISKE) STOKASTISKE VARIABLE

VI VIL I RESTEN AV KURSE OFTEST BRUKE NORM. FORDELTE STOK. VAR.

STF FOR EN NORMALFORDELT VARIABEL:



$$f_X(x) = N(x, \overset{\mu}{\hat{x}}, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\hat{x}}{\sigma}\right)^2}$$

HVOR $E[X] = \hat{x}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} N(x, \hat{x}, \sigma^2)\,dx = erf(x, \hat{x}, \sigma^2)$$

OFTE BRUKE $erf(\cdot)$ OM TILFELLET $\hat{x} = 0$ OG $\sigma^2 = 1$

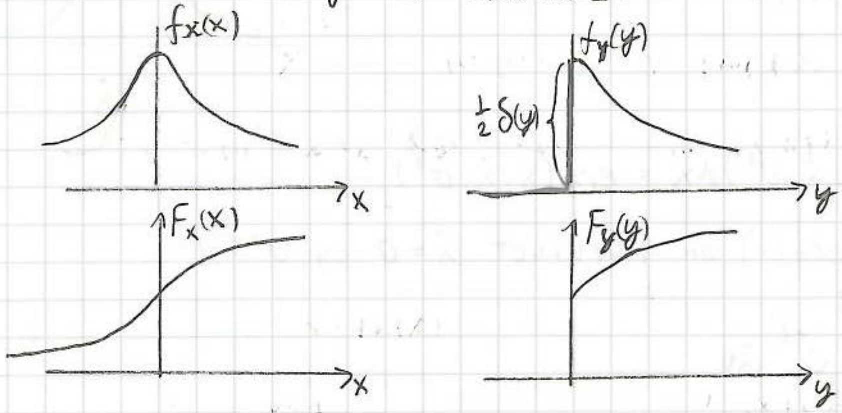
$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\,dt$$

FORELESNING 3:

1.9 DISKONTINUERLIG KUMULATIV FORDELING

EKS: DIODE Y

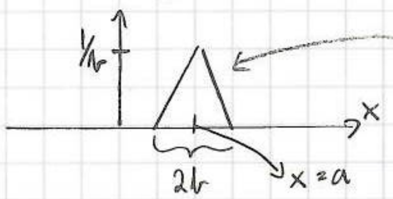
$$X \rightarrow x_i \begin{cases} y = 0 & \text{HVIS } x_i < 0 \\ y = x_i & \text{HVIS } x_i \geq 0 \end{cases}$$



MÅ INNFØRE DIRAC-PULS FOR $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = 1$

EN DIRAC-PULS ER DEFINERT I ET INTEGRAL:

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx$$



$\delta(x-a) = \lim_{b \to 0}$ "AREALET AV TREKANTEN"

1.10 SIMULTANE KONTINUERLIGE STOKASTISKE VARIABLE

ENDIMENSJONAL TILFELLE:

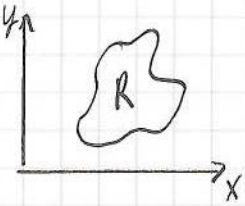
STF. $f_X(x)$ $\quad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$

$$P(x \leq X \leq x + dx) = \int_{x}^{x+dx} f_X(x)\,dx \approx f_X(x)\,dx$$

TODIMENSJONAL TILFELLE:

$f_{XY}(xy)$: SIMULTAN STF

$$P(x \leq X \leq x+dx \wedge y \leq Y \leq y+dy) = \int_{y}^{y+dy}\int_{x}^{x+dx} f_{XY}(xy)\,dx\,dy \approx f_{XY}(xy)\,dx\,dy$$



$$P(X, Y \in R) = \iint_R f_{XY}(xy)\, dx\, dy$$

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

FOR HENDELSER HADDE VI: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

VI ØNSKER Å SKRIVE DENNE FOR KONT. STOK. VARIABLE:

LA $A = X \in [x, x+dx]$ $\quad B = Y \in [y, y+dy]$

$$P(A|B) = \frac{f_{XY}(xy)\, dx\, dy}{f_Y(y)\, dy} \overset{DEF}{:=} f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \qquad f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

$$\Rightarrow f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)}{f_Y(y)}$$

BAYES TEOREM FOR KONT. STOKASTISKE VARIABLE

$$\Rightarrow P(x|y) = \frac{P(y|x)\, p(x)}{p(y)}$$

"FYSIKERMÅTEN" Å SKRIVE BAYES TEOREM PÅ

MARGINALFORDELINGEN:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(xy)\, dx \qquad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(xy)\, dy$$

DEF: X OG Y ER STOKASTISK UAVHENGIGE HVIS OG BARE HVIS:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

1.11 KORRELASJON, KOVARIANS OG ORTOGONALITET

GITT DEN SIMULTANE S.T.F. $f_{XY}(x,y)$

DEF: KORRELASJON MELLOM X OG Y ER GITT VED:

$$E\{XY\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(xy)\, dx\, dy$$

ANTA AT X OG Y ER STOKASTISK UAVHENGIGE $\left(f_{XY}(xy) = f_X(x) f_Y(y)\right)$

$$E\{XY\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(xy)\, dx\, dy = E\{X\}E\{Y\}$$

DEF. X OG Y ER UKORRELERTE HVIS OG BARE HVIS:

$$E\{XY\} = E\{X\}E\{Y\}$$

X OG Y ER STOKASTISK UAVHENGIG $\Rightarrow$ X OG Y ER UKORRELERTE

NB! MOTSATT ER IKKE NØDVENDIGVIS RIKTIG

DERSOM $E\{XY\} = 0$ SIER VI AT X OG Y ER ORTOGONALE STOKASTISKE VARIABLE

DEF: KOVARIANSEN TIL X OG Y:

$$KOV\{X,Y\} = E\left[(X - E\{X\})(Y - E\{Y\})\right]$$

KORRELASJONSKOEFFISIENTEN $\rho = \dfrac{KOV\{X,Y\}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$ $\quad -1 \le \rho \le 1$

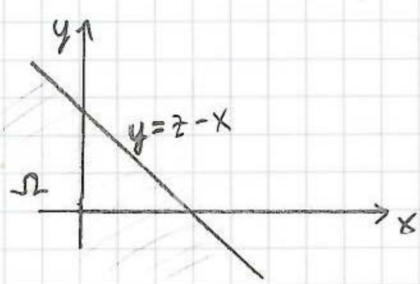
1.12 SUM AV UAVHENGIGE STOKASTISKE VARIABLE

GITT $X \sim f_X(x)$, $Y \sim f_Y(y)$, X OG Y ER STOKASTISK UAVH.

$f_{XY}(xy) = f_X(x) f_Y(y)$

LA $Z = X + Y$, HVA BLIR $f_Z(z)$?

$z = x + y \Rightarrow y = z - x$



$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(Z \le x+y)$$

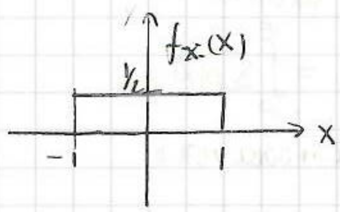
$$= \iint_{\Omega} f_{XY}(xy)\, dx\, dy = \iint_{\Omega} f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy$$

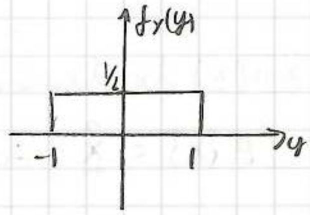
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\left[\int_{-\infty}^{z-y} f_X(x)\, dx\right] dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\, F_X(z-y)\, dy$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \underbrace{\frac{d}{dz} F_X(\overbrace{z-y}^{x})}_{= \frac{d}{dx} F_X(x) \cdot \frac{dx}{dz} = f_X(z-y) \cdot 1} dy$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(z-y)\, dy \quad \text{KONVOLUSJONSINTEGRAL}$$

EKS 1.11:



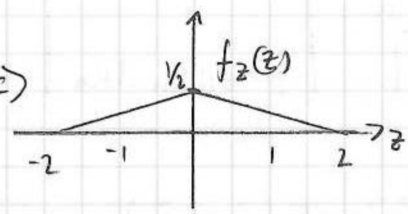


$Z = X + Y$

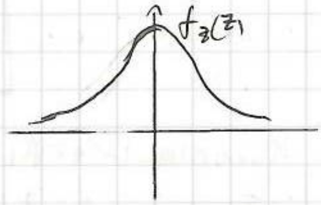
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(z-y)\, dy$$

MULTIPLISERER OG INTEGRERER OVER y FOR ALLE VERDIER AV z

$\Rightarrow$



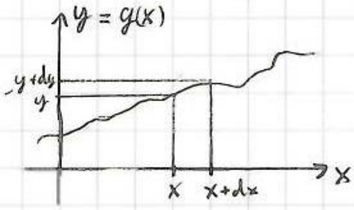
$\Rightarrow \; z = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$



SENTRALGRENSETEOREM: SUMMEN AV VILKÅRLIGE FORDELTE UAVH. STOKASTISKE VARIABLE VIL GÅ MOT NORMALFORDELING NÅR $n \to \infty$

1.13 TRANSFORMASJON AV STOKASTISKE VARIABLE

ANTA $Y = g(X)$, OG $X \sim f_X(x)$. HVA BLIR $f_Y(y)$?



ANTA $g(X)$ MONOTONT STIGENDE (/SYNKENDE)

$$P(y \le Y \le y+dy) = P(x \le X \le x+dx)$$

$$\Rightarrow f_Y(y)\, dy = f_X(x)\, dx$$

$y = g(x)$, $x = h(y)$ ($h(y)$ ER VELDEFINERT (g ER 1-1))

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{dx} = g' \Rightarrow dy = g'\,dx, \quad dx = h'\,dy$$

$$\Rightarrow f_Y(y)\, g'\, dx = f_X(x)\, h'\, dy \Rightarrow f_Y(y) = \left| \frac{d}{dy} h(y) \right| f_X(h(y))$$

JACOBIMATRISEN

1.14 MULTIVARIABLE S.T.F.

ANTA n SIMULTANE STOKASTISKE VARIABLE

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

DISSE HAR EN SIMULTAN S.T.F.

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{DEF}{=} p(\underline{x}) \quad \left(f_{\underline{x}}(x) = p(\underline{x}) \right)$$

FORVENTNINGSVERDI: PREDIKSJONSMIDDELVERDI

$$E\{\underline{X}\} = \bar{\underline{X}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \underline{x}\, p(\underline{x})\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{x}\, p(\underline{x})\, d\underline{x}$$

SENERE SKRIVER VI OGSÅ $E\{X\} = \hat{\underline{X}}$: FILTERMIDDELVERDI

$E\{\underline{X}\}$ ER OGSÅ EN VEKTOR

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underline{x}\, p(\underline{x})\, d\underline{x} = \begin{bmatrix} \iint\ldots\int x_1\, p(\underline{x})\, dx_1 \ldots dx_n \\ -\text{''}- \; x_2 \; -\text{''}- \\ \vdots \\ -\text{''}- \; x_n \; -\text{''}- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int x_1\, p(x_1)\, dx_1 \\ \vdots \\ \int x_n\, p\, x_n\, dx_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\{x_1\} \\ \vdots \\ E\{x_n\} \end{bmatrix}$$

KOVARIANSMATRISEN TIL $\underline{X}$:

$$\bar{P} = \mathrm{KOV}\{\underline{X}\} = E\left[(\underline{x} - \bar{\underline{x}})(\underline{x} - \bar{\underline{x}})^t\right] = \left[E\{(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)\}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\underline{x} - \bar{\underline{x}})(\underline{x} - \bar{\underline{x}})^t\, p(\underline{x})\, d\underline{x}$$

NOTAT 3 NORMALFORDELINGEN, KOVARIANSMATRISEN OG ELLIPSOIDER

LIGGER PÅ HJEMMESIDEN TIL UNIK 4500

1. EGENSKAPER FOR SYMMETRISKE MATRISER:

$\bar{P} = \mathrm{KOV}\{\underline{X}\} = \bar{P}^t \geq 0$ (SYMMETRISK OG POSITIV SEMIDEFINITT)

(POSITIV DEFINITT: $\underline{x}^t A \underline{x} \geq 0$ FOR ALLE $\underline{x}$ HVOR $\|\underline{x}\| \neq 0$)

GITT EN MATRISE A $(n \times n)$

DA ER EGENVERDIENE GITT AV $|\lambda I - A| = 0$

$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ KARAKTERISTISK LIGNING

$(\lambda_i I - A)\underline{m}_i = 0, \; i = 1, \dots, n$ GIR EGENVEKTORENE m_i
(ANTAR DISTINKTE EGENVERDIER)

VI VELGER $\|m_i\| = 1 \Rightarrow$ ENTYDIG LØSNING AV EGENVERDIPROBLEMET

$M = [\underline{m}_1, \underline{m}_2, \dots, \underline{m}_n]$: ORTOGONAL MATRISE, dvs $\underline{m}_i^t \underline{m}_j = \delta_{ij}$

$\Rightarrow M^{-1} = M^t$

2. LIKELIHOOD ELLIPSOIDER FOR NORMALFORDELINGEN:

$p(\underline{x})$ ER S.T.F. FOR DEN STOK. VEKTOREN $\underline{X}$

DERSOM VI HAR NORMALFORDELING:

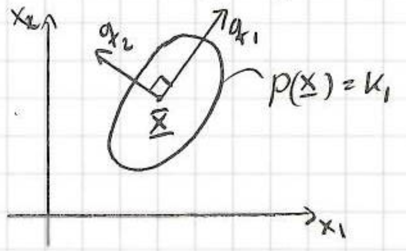
$$p(\underline{x}) = (2\pi)^{-n/2} \cdot |P|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\bar{\underline{x}})^t \bar{P}^{-1}(\underline{x}-\bar{\underline{x}})}$$

$$n = 1: \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2}}$$

SAMMENHENGEN MELLOM $p(\underline{x})$ OG ELLIPSOIDEN:

$$p(\underline{x}) = k_1 \iff \frac{1}{2}(\underline{x}-\bar{\underline{x}})^t P^{-1}(\underline{x}-\bar{\underline{x}}) = k_2$$

$n = 2$:



$$\frac{1}{2}\sum \frac{1}{\sigma_i^2} q_i^2 = k_3$$

$$\sigma_i^2 = \lambda_i(P)$$

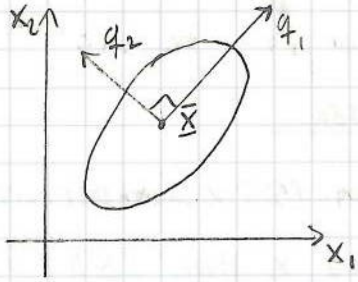
DIAGONAL
↑

$\Lambda = M^t P M$ DIAGONALISERER P, DVS FINNER Λ OG M

$\underline{x} - \bar{\underline{x}} = M\underline{q}$

DIAGONALISERINGEN DEKOMPONERER $\underline{x}$ I STOK. UAVH. VARIABLE $\underline{q}$

3. SANNSYNLIGHETEN INNENFOR LIKELIHOOD-ELLIPSOIDEN



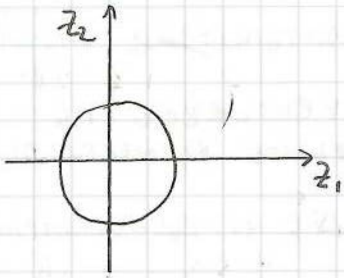
TRANSFORMASJON TIL NYTT KOORDINATSYSTEM:

$\underline{x} - \bar{\underline{x}} = M\underline{q}$ EGENVEKTORENE

$M = [\underline{m}_1 \ \underline{m}_2]$

GJØR EN NORMALISERING:

$\underline{q} = \Lambda^{1/2}\underline{z}$ $\quad \Lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$

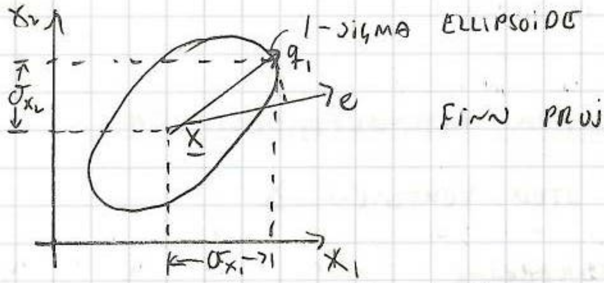


$n = 2$: SIRKEL $\quad n = 3$: KULE

$n > 3$: HYPERKULE

$\underline{z} \sim N(\underline{0}, I)$

4. PROJEKSJON AV LIKELIHOOD-ELLIPSOIDA



FINN PROJEKSJONEN AV ELLIPSOIDEN NED PÅ $\underline{e}$

SPESIALTILFELLE: PROJEKSJON NED PÅ EN AV AKSENE

$\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}$: MARGINALT STANDARDAVVIK FOR x_1 ELLER x_2

1.15 LINEÆRE TRANSFORMASJONER AV NORMALFORDELTE VEKTORER

ANTAR EN STOKASTISK VEKTOR $\underline{y}$ $(= \underline{Y})$ ER GITT VED:

$\underline{y} = A\underline{x} + \underline{b}$, HVOR $\underline{x} \sim N(\bar{\underline{x}}, P_x)$

I BOKA VISES AT $\underline{y}$ OGSÅ ER NORMALFORDELT, OG AT

$\bar{\underline{y}} = A\bar{\underline{x}} + \underline{b}$, $P_y = AP_xA^t$

KOMMENTARER:

1. $f_{\underline{x}}(\underline{x}) = N(\underline{x}; \bar{\underline{x}}, P_x)$

   NORMALFORDELINGEN ER ENTYDIG BESTEMT AV FORVENTNINGSVERDIEN $(\bar{\underline{x}})$ OG KOVARIANSMATRISEN (P_x)

2. $P \geq 0$, $P = P^t$

   KOVARIANSMATRISEN ER POSITIV SEMIDEFINIT OG SYMMETRISK (EGENVERDIENE ≥ 0 OG REELLE)

3. HVIS VI HAR NORMALFORDELTE VARIABLE SOM ER UKORRELERTE, ER DE OGSÅ STATISTISK UAVHENGIGE.

4. DERSOM $\underline{x} \sim N(\bar{\underline{x}}, P_x)$ OG $\underline{y} = A\underline{x} + \underline{b}$

   $\Rightarrow \underline{y} \sim N(A\bar{\underline{x}} + \underline{b}, AP_xA^t)$

5. DERSOM $\underline{x} \sim N(\bar{\underline{x}}, P_x)$ OG P_x HAR IKKE-DIAGONALE ELEMENTER (VIL SI AT TILSTANDSVARIABLENE ER KORRELERTE) KAN VI LAGE NYE TILSTANDER SOM BLIR UKORRELERT VHA TRANSFORMASJONEN:

   $\underline{x} - \bar{\underline{x}} = M\underline{q}$, HVOR M ER EGENVEKTORMATRISEN TIL P MED EGENVEKTORER MED LENGDE 1.

   $M = [m_1, m_2, \dots, m_n] \leftarrow$ ORTONORMAL $\quad M^t = M^{-1}$

6. DERSOM $\underline{x} \sim N(\bar{\underline{x}}, P_x)$, SÅ VIL ALLE MARGINALFORDELINGER VÆRE NORMALFORDELTE, OG OGSÅ BETINGEDE SANNSYNLIGHETER VIL VÆRE NORMALFORDELT.

1.16 GRENSER, KONVERGENS OG FORVENTNINGSRETTE ESTIMATER

FORVENTNINGSRETT ESTIMAT (UNBIASED ESTIMATE):

$E[\hat{\underline{x}}] = E[\underline{x}]$

SE FORØVRIG BOKA

1.17 KOMMENTARER PÅ STATISTISKE ESTIMATORER

LA $\underline{z}$ VÆRE MÅLING AV STOKASTISK VEKTOR $\underline{x}$

LA $\underline{\hat{x}}(\underline{z})$ VÆRE ESTIMAT FOR $\underline{x}$

1. ESTIMATET $\underline{\hat{x}}$ AV $\underline{x}$ ER LINEÆRT DERSOM $\underline{\hat{x}}$ KAN SKRIVES SOM EN LINEÆR TRANSFORMASJON:

$$\underline{\hat{x}} = A\underline{x} + \underline{b}$$

2. FORVENTNINGSRETTE ESTIMATORER:

i) $E[\underline{\hat{x}}] = E[\underline{x}]$: BAYES MODELL

ii) $E[\underline{\hat{x}}] = \underline{x}$: FISHER MODELL

MATEMATISK BESKRIVELSE AV STOKASTISKE SIGNALER

KAPITTEL 2 i B&H BESKRIVER STOKASTISKE SIGNALER i STØRRE DETALJ ENN DET VI TRENGER i FORBINDELSE MED KALMANFILTER

FOR KF ER DET BARE RELEVANT MED BESKRIVELSE AV PROSESS- OG MÅLESTØY (SOM VI ANTAR HVIT)

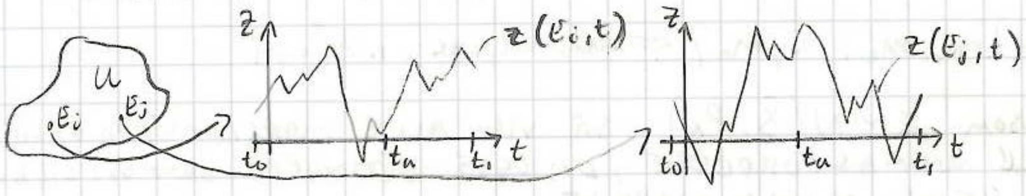
PGA. DETTE TAR VI EN KORTVERSJON AV KAP. 2.

STOKASTISKE PROSESSER:

LA E_i VÆRE UTFALLET AV ET EKSPERIMENT

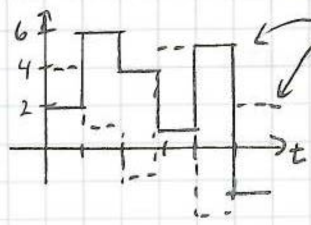
$x(E_i)$: STOKASTISK VARIABEL

$z(E_i, t)$ HVOR $t \in [t_0, t_1]$: STOKASTISK PROSESS



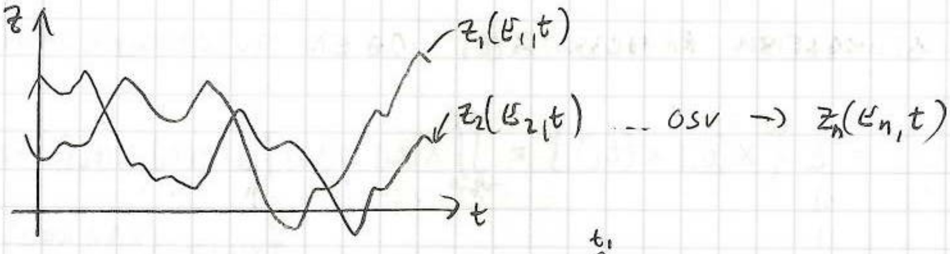
$z(E_i, t_a)$: STOKASTISK VARIABEL (t_a: FIKSERT TIDSPUNKT)

EKS: DISKRET STOKASTISK PROSESS:



TO ULIKE REALISERINGER AV PROSESSEN, DVS TO ULIKE VERDIER AV E_i

EKS.: KONTINUERLIG STOKASTISK PROSESS



TIDSMIDDELVERDIEN: $\bar{z}_i = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} z_i(t)\, dt$

ENSAMBLEMIDDELVERDIEN: $E\{z(t_a)\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i(t_a)$

DEFINISJON: STASJONÆR STOKASTISK PROSESS:

EN STOKASTISK PROSESS SIES Å VÆRE STASJONÆR DERSOM ENSAMBLEMIDDELVERDIEN OG HØYERE ORDENS MOMENTER ER TIDSINVARIANTE, DVS. DERSOM $E\{z^k(t_1)\} = E\{z^k(t_2)\}$, ... "

WWS (WIDE SENSE STATIONARY): DETTE ER OPPFYLT FOR $k=1$ OG $k=2$

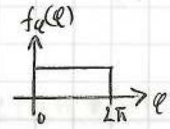
DEFINISJON: ERGODISK:

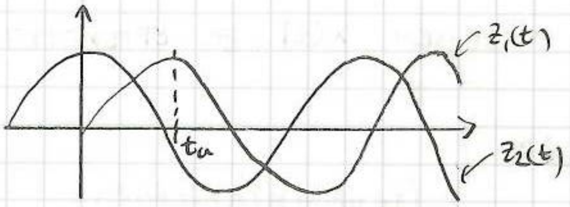
DEN STASJONÆRE STOKASTISKE PROSESSEN $z(t)$ SIES Å VÆRE ERGODISK DERSOM ENSAMBLE- OG TIDSMIDDELVERDIEN ER LIKE FOR ALLE MOMENTER $z(t)$

FOR EN ERGODISK PROSESS ER ALL STATISTISK INFORMASJON OM PROSESSEN INNEHOLDT I EN ENKEL TIDSREALISERING AV PROSESSEN

EKS: ERGODISK PROSESS:

$z(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ HVOR $\varphi \sim U(0, 2\pi)$





$t \in \mathbb{R}$

ENSAMBLE- OG TIDSMIDDELVERDI $= 0$

EKS: IKKE ERGODISK PROSESS:

$z = k_i$, $k_i \sim N(0, \sigma^2)$

ENSAMBLEMID. $\neq$ TIDSMID

$\bar{z}_i = k_i$ $\quad E\{z_i(t_a)\} = 0$

PROSESSEN ER STASJONÆR, MEN IKKE ERGODISK
UKJENT BIAS I EN SENSOR

AUTOKORRELASJON

GITT EN STOKASTISK PROSESS $X(t)$. DA ER AUTOKORRELASJONEN GITT VED:

$$R_{xx}(t_1,t_2) = \underset{\uparrow}{E}\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(t_1)X(t_2)\, f_{xx}(X(t_1),X(t_2))\, dX(t_1)\,dX(t_2)$$

$f_{X(t_1)X(t_2)}(X(t_1)\, X(t_2))$

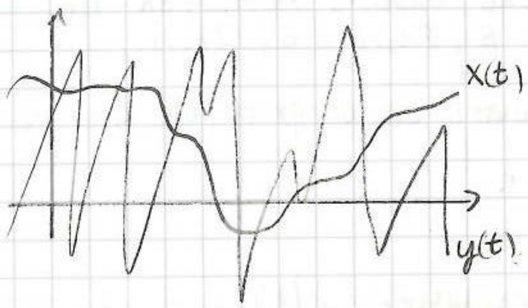
ENSAMBLE MIDDEL

AUTOKOVARIANS

$$C_{xx}(t_1,t_2) = E\{(X(t_1) - E\{X(t_1)\})\cdot(X(t_2) - E\{X(t_2)\})\}$$

FOR PROSESSER MED MIDDELVERDI 0 ($E\{X(t)\} = 0 \ \forall t$)

$\Rightarrow$ AUTOKORRELASJON = AUTOKOVARIANS



X(t) VIL HA HØYERE AUTOKORRELASJON FOR TO FIKSERTE TIDSPUNKTER, ENN y(t)

GITT $t_1, t_2 \Rightarrow R_{xx}(t_1,t_2) > R_{yy}(t_1,t_2)$

DERSOM DEN STOKASTISKE PROSESSEN ER STASJONÆR, KAN VI SKRIVE:

$$R_{xx}(t_1,t_2) = R_{xx}(t_2 - t_1) = R_{xx}(\tau)$$

DVS. $R_x(\tau) = E\{x(t)\,x(t+\tau)\}$

EFFEKTTETTHETSSPEKTER

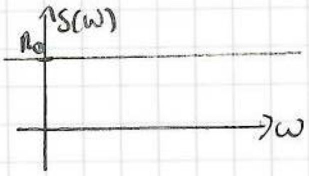
FOR DEN STASJONÆRE STOK. PROSESSEN $X(t)$, ER EFFEKTTETTHETSSPEK. DEFINERT SOM

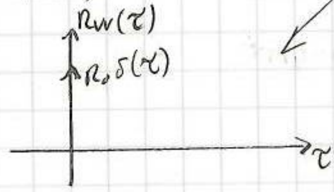
$$\left.\begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \\ R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \end{aligned}\right\} \text{(FOURIERTRANSFORM)}$$

HVIT STØY (KAP. 2.8)

STASJONÆR STOKASTISK PROSESS MED KONSTANT SPEKTRAL-TETTHETSFUNKSJON (EFFEKTTETTHETSFUNKSJON)

$S_w(\omega) = R_0$ (KONSTANT)

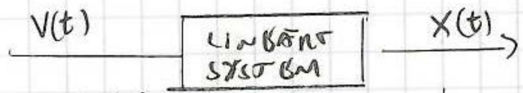


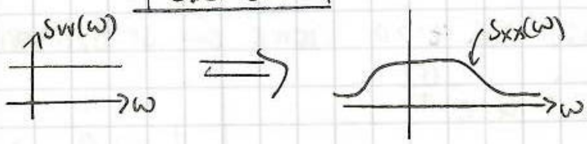


INGEN KORRELASJON VED $\tau \neq 0$

NB! EFFEKTEN I ET HVITSTØY SIGNAL ER ∞.
DVS. FYSISK UREALISERBART MED PERFEKT HVIT STØY

DERSOM HVITSTØYEN GÅR IGJENNOM ET LINEÆRT SYSTEM, FÅR VI ET FYSISK REALISERBART SIGNAL.





GAUSS-MARKOV STOKASTISKE PROSESSER (KAP 2.9)

VI VIL FRA NÅ SKRIVE $p(\underline{x}) = p_x(x)$ $\quad (p(x) \neq p(y))$

MARKOV-PROSESS:

DEN STOKASTISKE PROSESSEN $X(t)$ ER EN 1. ORDENS MARKOV PROSESS HVIS OG BARE HVIS:

$$p\big(x(t_n) \mid x(t_{n-1}), x(t_{n-2}), \dots, x(t_1)\big) = p\big(x(t_n) \mid x(t_{n-1})\big)$$

DER $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$

DERSOM $p(x(t_n) \mid x(t_{n-1})) \sim N$ KALLES PROSESSEN EN 1. ORDENS GAUSS-MARKOV PROSESS

SIDEN $X(t)$ ER EN SKALAR STOK. PROSESS, OG $X(t_n)$ INNEHOLDER ALL STATISTISK INFORMASJON OM PROSESSEN VED $t < t_n$, KALLES $X(t)$ EN 1. ORDENS MARKOV PROSESS

DERSOM VI IKKE KAN BESKRIVE $X(t)$ SOM $p(X(t_2) \mid X(t_1))$, MEN SOM $p(X(t_3) \mid X(t_2), X(t_1))$, HAR VI EN 2. ORDENS MARKOV-PROSESS

NB! EN K-TE ORDENS MARKOV PROSESS KAN SKRIVES SOM EN K-DIM 1. ORDENS VEKTOR MARKOV PROSESS.

ANALOGT: N-TE ORDENS ORDINÆR DIFF LIGNING.

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = u$$

$x(t_1),\ x(t_2),\ \dots,\ x(t_n)$ GITT.

KAN DERMED SKRIVES SOM EN N-DIM VEKTOR DIFF LIGNING.

$$\underline{\dot{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}), \quad \underline{x}_0 \text{ GITT.}$$

EKS:

1. ORDENS GAUSS-MARKOV PROSESS:

$$\dot{x} = \underbrace{-\frac{1}{T}}_{} x + v \qquad (T > 0) \text{ TIDSKONSTANT}$$

v – HVIT, NORMALFORDELT STØY

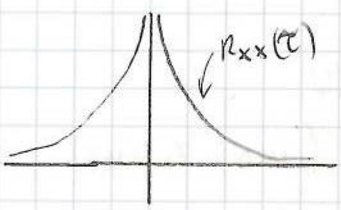
x – TILSTANDSVARIABEL

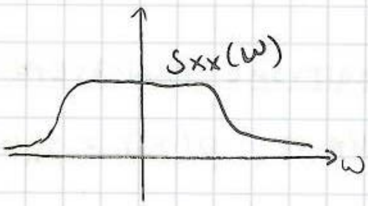
$-\frac{1}{T}$ – "EGENVERDIEN" FOR PROSESSEN (IKKE SAMME EGENVERDI)

$$v(t) \sim N(0, Q \cdot \delta(\tau))$$

DERSOM $t_0 \ll 0$, VIL $x(t)$ FOR $t > 0$ VÆRE EN STASJONÆR PROSESS

DET KAN VISES AT $R_{xx}(\tau) = Q \cdot e^{-\frac{|\tau|}{T}}$





$T \to 0$, $x \to$ HVIT STØY

$T \to \infty$, $x \to$ STOKASTISK KONSTANT

3. RESPONS AV LINEÆRE SYSTEMER, TILSTANDSROM-MODELLER OG MONTE CARLO-SIMULERING

AVSNITT 3.1 - 3.8 I BOKA: AUTOKORRELASJON/SPEKTRALTETTHETSBESKRIVELSE AV LINEÆRE SYSTEMER. DETTE BEHØVES IKKE FOR KF

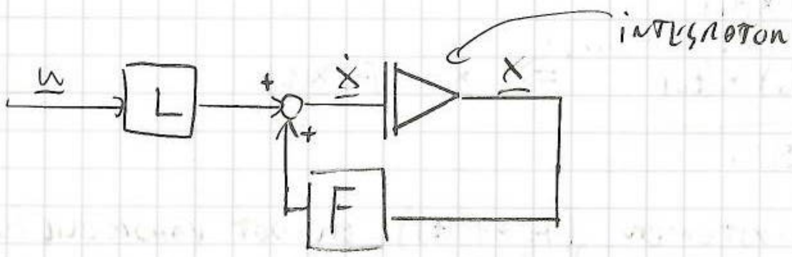
VI REPETERER TILSTANDSROMMODELLER OG DERES EGENSKAPER

LINEÆRE DYNAMISKE DETERMINISTISKE SYSTEMER (GELB. S.51 →)

NOTASJON: NOTAT 1 PÅ HJEMMESIDEN

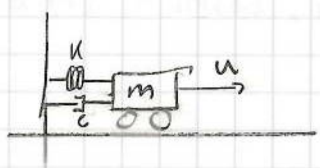
VI SER PÅ SYSTEMER AV FORMEN:

$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u}$, $x(t_0)$ GITT



EKS.

3.1-1 FRA GELB



NEWTONS 2. LOV:

$f = ma$

$-kx - c\dot{x} + u = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = u \cdot \frac{1}{m}$ (ORDINÆR 2. ORDENS DIFF. LIGNING)

DEFINERER $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ $\Rightarrow$ $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = \ddot{x}$

DETTE GIR FØLGENDE SYSTEM:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$\dot{\underline{x}} = F \cdot \underline{x} + L \cdot u$$

TRANSISJONSMATRISEN

GITT DEN HOMOGENE DIFF. LIGNING:

$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} \quad , \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \qquad (1)$$

LØSNINGEN TIL (1):

$$\underline{x}(t) = \phi(t, t_0) \cdot \underline{x}(t_0) \qquad (2)$$

HVOR:

$$\dot{\phi}(t, t_0) = F \cdot \phi(t, t_0), \quad \phi(t_0, t_0) = I \qquad (3)$$

BEVIS AV (2):

$$\dot{\underline{x}}(t) = \dot{\phi}(t, t_0) \cdot x(t_0)$$

$$= F \cdot \underbrace{\phi(t, t_0)\, x(t_0)}_{x(t)} \quad \Rightarrow \quad \dot{\underline{x}} = F\,\underline{x}(t)$$

FOR TIDSVARIANTE SYSTEMER $(F = F(t))$ ER DET VANSKELIG (UMULIG FOR HØYERE ORDENS SYSTEMER) Å FINNE EN ANALYTISK LØSNING AV (3). MEN DEN KAN LØSES NUMERISK.

DERSOM DET ER $\underline{x}(t)$ VI ER INTERESSERT I, LØSER VI (1) NUMERISK, OG GÅR IKKE VEIEN OM (3)

TIDSINVARIANTE SYSTEMER

$$\dot{\underline{x}} = F\,\underline{x}(t) \quad , \quad x(t_0) \text{ GITT}$$

LØSES V.H.A. EGENVERDI/EGENVEKTOR - METODEN (DERSOM $n_x = 2$ KAN VI OFTE FINNE EN ANALYTISK LØSNING)

EGENVERDIENE FINNES FRA:

$$|\lambda I - F| = \lambda^{n_x} + a_{n_x-1}\lambda^{n_x-1} + \ldots + a_0 = 0$$

F ANTAS REELL $(F \in \mathbb{R}^{n_x \cdot n_x})$ $\Rightarrow$ EGENVERDIER BLIR REELLE ELLER KOMPLEKSKONJUGERTE

DERSOM EGENVERDIENE ER DISTINKTE, DVS. $\lambda_i \neq \lambda_j$ FOR $i \neq j$

$\Rightarrow$ EGENVEKTORENE BLIR LINEÆRT UAVHENGIGE.

NÅR n_x VEKTORER ER LIN. UAVHENGIGE, KAN ENHVER VEKTOR

$\underline{x} = \mathbb{R}^{n_x}$ (EVT. $\underline{x} \in \mathbb{C}^{n_x}$) SKRIVES:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \underline{m}_i b_i$$

VELGER $\|\underline{m}_i\| = 1$ $\Rightarrow$ $\lambda_i \underline{m}_i = F\underline{m}_i$ HAR ENTYDIG LØSNING $\underline{m}_i$, $i = 1, \ldots, n$

LA $M = [\underline{m}_1, \underline{m}_2, \ldots, \underline{m}_{n_x}]$ (EGENVEKTORMATRISE)

SETT $\underline{x} = M\underline{q} \iff \underline{q} = M^{-1}\underline{x}$

$\dot{\underline{x}} = F\underline{x}$

$$\Rightarrow \quad M\dot{\underline{q}} = FM\underline{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{\underline{q}} = \underbrace{M^{-1}FM}_{\Lambda_F \,=\, \text{DIAG}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n_x})}\underline{q}, \quad \underline{q}(t_0) = M^{-1}\underline{x}(t_0)$$

$\dot{\underline{q}} = \Lambda_F \underline{q} \iff \dot{q}_i = \lambda_i q_i$ FOR $i = 1, \ldots, n_x$

$q_i(t) = e^{\lambda_i(t-t_0)} q_i(t_0)$ FOR $i = 1, \ldots, n_x$

$$\underline{q}(t) = e^{\Lambda_F(t-t_0)}\underline{q}(t_0) \qquad e^{\Lambda_F(t-t_0)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_{n_x}(t-t_0)} \end{bmatrix}$$

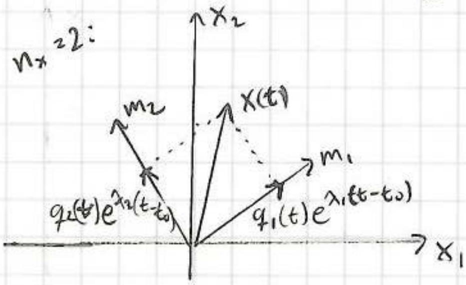
$$\underline{x}(t) = \underbrace{Me^{\Lambda_F(t-t_0)}M^{-1}}_{e^{F(t-t_0)}}\underline{x}(t_0) \quad \Rightarrow \quad \underline{x}(t) = e^{F(t-t_0)}x(t_0)$$

$$e^{F(t-t_0)} = I + \frac{1}{1!}F(t-t_0) + \frac{1}{2!}F^2(t-t_0)^2 + \ldots$$

$\Phi(t, t_0) = e^{F(t-t_0)}$ TIDSINVARIANT TILFELLE

$$x(t) = Mq(t) = \sum_{i=1}^{n_x} \underline{m}_i \underline{q}_i = \sum_{i=1}^{n_x} \underline{m}_i e^{\lambda_i(t-t_0)} q_i(t_0)$$

$n_x = 2$:



NB! NÅR EGENVERDIENE ER KOMPLEKS-KONJUGERTE $\Rightarrow$ SIN/COS-LØSNINGER

NB! LA MATLAB BEREGNE $e^{F(t-t_0)}$ VED 'EXPM' PGA NUMERISKE UTFORDRINGER

SUPERPOSISJONSINTEGRALET

GITT EN INHOMOGEN DIFF. LIGNING

$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u} \quad , \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

DET KAN VISES AT

$$x(t) = \varphi(t, t_0)\, x(t_0) + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \varphi(t, \tau) L\, u(\tau)\, d\tau}_{\text{SUPERPOSISJONSINTEGRAL}} \qquad (1)$$

DER $\dot{\varphi}(t, t_0) = F\varphi(t, t_0) \; , \; \varphi(t_0, t_0) = I \qquad (2)$

DISSE TO LIGNINGENE GJELDER BÅDE FOR TIDSVARIANTE OG TIDSINVARIANTE SYSTEMER.

DERSOM SYSTEMET ER TIDSINVARIANT KAN VI SKRIVE LØSNINGEN:

$$\underline{x}(t) = e^{F(t-t_0)}\, \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{F(t-\tau)} L\, u(\tau)\, d\tau$$

ØVING 1.

OPPGAVE 1.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \le x \le 2\pi \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

$$E[X] = \int_0^{2\pi} x \frac{1}{2\pi} \, dx = \left[\frac{1}{4\pi} x^2\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \cdot 4\pi^2 = \underline{\underline{\pi}}$$

$$E[(X - E[X])^2] = \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \frac{1}{2\pi} \, dx = \int_0^{2\pi} (x^2 - 2x\pi + \pi^2) \frac{1}{2\pi} \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\pi + x\pi^2\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{3}(2\pi)^3 - (2\pi)^2\pi + (2\pi)\pi^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}(2\pi)^2 - 2\pi^2 + \pi^2 = \frac{4}{3}\pi^2 - \cancel{2\pi^2} + \cancel{\pi^2} = \frac{4}{3}\pi^2 - \pi^2 = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{3}}}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{3}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}}$$

OPPGAVE 2.

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

a) $F(x) = \int_0^x 2x \, dx = [x^2]_0^x = \underline{\underline{x^2}}$

b) $F(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$

d) $E[X] = \int_0^1 x \cdot 2x \, dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

e) $E[X^2] = \int_0^1 x^2 2x \, dx = \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

f) $$\sigma^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 2x \, dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) 2x \, dx$$

$$= \int_0^1 2x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{9}x \, dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + \frac{8}{18}x^2\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{8}{9} + \frac{8}{18} = \underline{\underline{\frac{1}{18}}}$$

OPPGAVE 3.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^x e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^x = -e^{-x} + 1$$

a)
$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - F(2) = \underline{\underline{e^{-2}}}$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = 1 - P(X < 1) - P(X < 2) = 1 - F(1) - F(2) = \underline{\underline{-e^{-2} + e^{-1}}}$$

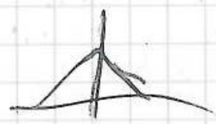
b)
$$E[X] = \int_0^\infty x \cdot e^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-x} = \underline{\underline{1}}$$

$$\sigma^2 = \underline{\underline{1}}$$

OPPGAVE 4.

$$Z = X + Y \qquad f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\,dx$$

KONVOLUSJON $\Longrightarrow$



OPPGAVE 5

$$x(t) = \alpha \sin(\omega t), \quad \alpha \sim N(0, \sigma^2) \qquad \omega: \text{KONSTANT}$$

OPPGAVE 6

$$\varphi_{xx}(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$$

$$\Phi_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau}\,d\tau = \frac{2\sigma^2\beta}{\omega^2 + \beta^2}$$

DISKRETISERING AV KONTINUERLIGE PROSESSLIGNINGEN

GITT DET TIDSINVARIANTE SYSTEMET:

$$\underline{\dot{x}} = F\underline{x} + L\underline{u} \quad , \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

ANTA $\underline{u}(t) = \underline{u}_k$ FOR $t \in [t_k, t_{k+1}\rangle$ $\quad t_k = k \cdot \Delta_t$

SUPERPOSISJONSINTEGRALET (LØSNINGEN) KAN DA SKRIVES:

$$\underline{x}(t_{k+1}) = e^{F((k+1)-k)\Delta t} \cdot x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F(t_{k+1}-\tau)} L u_k \, d\tau$$

ØNSKER $\rightarrow$ $\underline{x}_{k+1} = \Phi \underline{x}_k + \Lambda \underline{u}_k$, $\underline{x}_0$ GITT

$$\text{DER } \Phi = e^{F\Delta t} \text{ OG } \Lambda = \int_t^{\Delta t} e^{F\sigma} L \, d\sigma$$

SIDEN $u(t)$ ANTAS KONSTANT PÅ INTERVALLET $[t_k, t_{k+1}\rangle$, KAN:

$\underline{\dot{x}} = F\underline{x} + L\underline{u}$ FOR $t \in [t_k, t_{k+1}\rangle$ SKRIVES:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\dot{x}} \\ \underline{\dot{u}} \end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F & L \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{F}} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{u} \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} x(t_k) \\ u(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \underline{u}_k \end{bmatrix}$$

$$\dot{\tilde{\underline{x}}} = \tilde{F}\tilde{\underline{x}} \quad , \quad \tilde{x}(t_k) = \tilde{\underline{x}}_k$$

$$\Rightarrow \tilde{\underline{x}}_{k+1} = e^{\tilde{F}\Delta t} \tilde{\underline{x}}_k$$

$$\text{DER } e^{\tilde{F}\Delta t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \tilde{F}^i (\Delta t)^i$$

$i=0: \; I \qquad i=1: \; \tilde{F} \qquad i=2: \; \tilde{F}^2 = \begin{bmatrix} F^2 & FL \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad i=3: \; \tilde{F}^3 = \begin{bmatrix} F^3 & F^2 L \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\tilde{\Phi} = e^{\tilde{F}\Delta t} = \begin{bmatrix} e^{F\Delta t} & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} F^{i-1} L (\Delta t)^i \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\underline{x}}_{k+1} = \tilde{\Phi} \tilde{\underline{x}}_k \qquad \underline{x}_{k+1} = \Phi \underline{x}_k + \Lambda \underline{u}_k \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi & \Lambda \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$\dim \Phi = n_x \, n_x \qquad \dim \Lambda = n_x \, n_u \qquad \dim \tilde{\Phi} = (n_x + n_u)(n_x + n_u)$

I PRAKSIS: BRUKER MATLAB TIL Å BEREGNE $\tilde{\Phi} = e^{\tilde{F}\Delta t}$ (EXPM($\tilde{F}$*Δt))
OG PLUKKER UT UNDERMATRISENE Φ OG Λ FRA RESULTATET

STYRBARHET OG OBSERVERBARHET

DETTE ER DETERMINISTISKE BEGREPER

OBSERVERBARHET:

SYSTEMET $\dot{\underline{x}} = F\underline{x}$ $\quad (x(t))$

$\underline{z} = H\underline{x}$ $\quad (z(t))$

DETTE SYSTEMET ER OBSERVERBART HVIS OG BARE HVIS VI FRA KUNNSKAP OM $z(t)$ FOR $t \in [t_0, t_1]$ KAN FINNE $x(t)$ FOR DET SAMME TIDSINTERVALLET

TEOREM:

DET TIDSINVARIANTE SYSTEMET $\dot{\underline{x}} = F\underline{x}$, $z = H\underline{x}$, ER OBSERVERBART HVIS OG BARE HVIS:

$$\text{RANG}\left[H^t \; F^tH^t \; (F^t)^2H^t \dots (F^t)^{n_x-1}H^t\right] = n_x$$

"BEVIS":

$\underline{z}(t) = H\underline{x}(t)$

$\dot{\underline{z}}(t) = HF\underline{x}(t)$

$\ddot{\underline{z}}(t) = HF^2\underline{x}(t)$

$\vdots$

$\underline{z}^{(n_x-1)}(t) = HF^{n_x-1}\underline{x}(t)$

$\underline{z}^{(n_x)}(t) = HF^{n_x}\underline{x}(t)$

CAYLEY-HAMILTONS TEOREM SIER AT EN MATRISE TILFREDSSTILLER SIN EGEN KARAKTERISTISKE LIGNING (EGENVERDI-LIGNING)

$$|\lambda I - F| = \lambda^{n_x} + a_{n_x-1}\lambda^{n_x-1} + \dots + a_0 = 0$$

$$F^{n_x} + a_{n_x-1}F^{n_x-1} + \dots + a_0 I = 0$$

$$F^{n_x} = -a_{n_x-1}F^{n_x-1} - \dots - a_1F - a_0I$$

VI TRENGER DERFOR BARE Å TA MED LIGNINGER OPP TIL F^{n_x-1}

$$\begin{bmatrix} \underline{z}(t) \\ \dot{\underline{z}}(t) \\ \vdots \\ z^{(n_x-1)}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n_x-1} \end{bmatrix}}_{Q} \cdot \underline{x}(t)$$

FRA LIN. ALGEBRA:

VI HAR EN ENTYDIG LØSNING FOR $x(t)$ HVIS OG BARE HVIS:

$$\text{RANG}(Q) = n_x = \text{RANG}(Q^t)$$

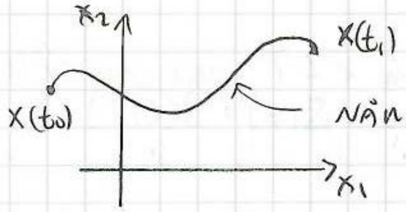
QED

NB! RANGEN TIL EN MATRISE KAN VÆRE VANSKELIG Å FINNE NUMERISK, KAN LØNNE SEG Å BRUKE SVD

STYRBARHET:

SYSTEMET $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u}$ ER STYRBART HVIS OG BARE HVIS:

FOR ENHVER $\underline{x}(t_0)$ OG $\underline{x}(t_1)$, SÅ FINNES DET EN $u(t)$, $t \in [t_1, t_0]$ SOM BRINGER SYSTEMET FRA $X(t_0)$ TIL $X(t_1)$.



NB! $\underline{X}(t)$ GÅR GJENNOM $X(t_1)$, VI KLARER VANLIGVIS IKKE Å HOLDE SYSTEMET I $X(t_1)$.

TEOREM:

DET TIDSINVARIANTE SYSTEMET $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u}$ ER STYRBART HVIS OG BARE HVIS:

$$\text{rang}[L \;\; FL \;\; F^2L \;\ldots\; F^{n_x-1}L] = n_x$$

DISKRETE SYSTEMER:

GITT $\underline{x}_{k+1} = \Phi \underline{x}_k + \Lambda \underline{u}_k$, $\underline{z}_k = H\underline{x}_k$

DETTE SYSTEMET ER:

OBSERVERBART $\iff \text{rang}([H^t \;\; \Phi^t H^t \;\ldots\; (\Phi^t)^{n_x-1} H^t]) = n_x$

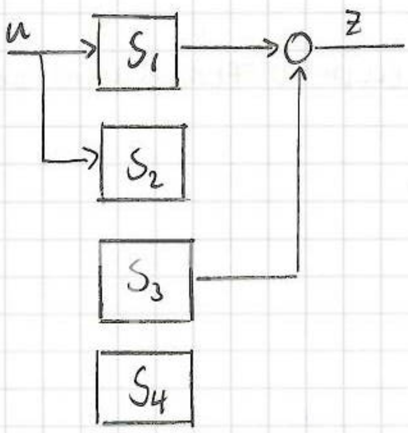
STYRBART $\iff \text{rang}([\Lambda \;\; \Phi\Lambda \;\ldots\; \Phi^{n_x-1}\Lambda]) = n_x$

KALMANS KANONISKE FORM FOR LINJ. SYSTEMER

ET LINJÆRT SYSTEM:

$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u}$, $z = H\underline{x}$

KAN DELES OPP I 4 UNDERSYSTEMER



S_1: STYRBART & OBSERVERBART

S_2: STYRBART

S_3: OBSERVERBART

S_4: HVERKEN STYRBART ELLER OBSERVERBART

4 DISKRET & KONTINUERLIG KALMAN-FILTER

VI SKAL HER TA MED MER ENN I KAP. 4 I B&H, BL.A. KONTINUERLIG KF (APPENDIX B) OG KONTINUERLIG-DISKRET KF

VI SER FØRST PÅ PREDIKSJONSPROBLEMET FOR DISKRET OG KONTINUERLIGE SYSTEMER OG SAMMENHENGEN MELLOM DISSE

PREDIKSJON: GITT OBSERVASJONER AV $\underline{x}(t)$ FOR $t \leq T$ BESTEMM $\hat{\underline{x}}(t|T)$ FOR $t > T$. VI SKRIVER GJERNE $\bar{\underline{x}}(t) = \hat{\underline{x}}(t|T)$

A PREDIKSJON I STOKASTISKE SYSTEMER

NOTASJON: SE NOTAT 1. PÅ HJEMMESIDEN.

KONT. SYSTEM: $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u} + G\underline{v}$

$\underline{z} = H\underline{x} + \underline{w}$

DISKR. SYSTEM: $\underline{x}_{k+1} = \Phi\underline{x}_k + \Lambda\underline{u}_k + \Gamma\underline{v}_k$

$\underline{z}_k = H\underline{x}_k + \underline{w}_k$

KONT-DISKR. SYSTEM: $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u} + G\underline{v}$

$\underline{z}_k = H\underline{x}_k + \underline{w}_k$

I TILLEGG KJENNER VI STATISTIKKEN TIL $\underline{x}(t_0)$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ SAMT ALLE MATRISENE (F, L, G, H EVT. Φ, Λ, Γ, H), $\underline{z}(t)$ OG $\underline{u}(t)$

$\underline{v}(t)$ ($\underline{v}_k$) OG $\underline{w}(t)$ ($\underline{w}_k$) ER ANTATT HVITE STØYPROSESSER (SEKVENSER).

I TILLEGG KREVER VI SOM REGEL GAUSSISKE FORDELINGER

VI ØNSKER Å FINNE TIDSUTVIKLINGEN FOR MIDDELVERDIEN OG KOVARIANSMATRISEN:

$$\bar{\underline{x}}(t) = E\{\underline{x}(t)\} \qquad \bar{P}(t) = E\{(\underline{x}(t) - \bar{\underline{x}}(t))(\underline{x}(t) - \bar{\underline{x}}(t))^t\}$$

FOR $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u} + G\underline{v}$

LØSNINGEN SKRIVES SOM DIFFERENSIAL- ELLER DIFFERENSLIGNINGER

DISKRET SYSTEM

Gitt $\underline{x}_{k+1} = \Phi_k \underline{x}_k + \Lambda_k \underline{u}_k + \Gamma_k \underline{v}_k$

$z_k = H_k \underline{x}_k + \underline{w}_k$

$\underline{u}_k$: KJENT FOR ALLE k (MÅLT ELLER BEREGNET)

$\underline{x}_0 \sim N(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0)$

$\underline{v}_k \sim N(0, Q_k \delta_{kl}) \longrightarrow E\{\underline{v}_k \cdot \underline{v}_l^t\} = Q_k \delta_{kl}$ $\quad \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$

$\underline{w}_k \sim N(0, R_k \delta_{kl})$

$\underline{x}_0, \underline{v}_k, \underline{w}_l$ ER UKORRELERTE FOR ALLE k, l

TEOREM:

$\bar{\underline{x}}_k$ OG $\bar{P}_k$ ER GITT AV FØLGENDE REKURSIVE LIGNINGER:

$\bar{\underline{x}}_{k+1} = \Phi_k \bar{\underline{x}}_k + \Lambda_k \underline{u}_k$, $\bar{\underline{x}}_0$ GITT

$\bar{P}_{k+1} = \Phi_k \bar{P}_k \Phi_k^t + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^t$, $\bar{P}_0$ GITT

BEVIS:

FORENKLET NOTASJON: $\Phi = \Phi_k \quad \Lambda = \Lambda_k$ OSV.

MIDDELVERDIUTVIKLINGEN:

$\bar{\underline{x}}_{k+1} = E\{\Phi \underline{x}_k\} + E\{\Lambda \underline{u}_k\} + E\{\Gamma \underline{v}_k\}$

$\bar{\underline{x}}_{k+1} = \Phi \bar{\underline{x}}_k + \Lambda \underline{u}_k + 0$ QED

KOVARIANSUTVIKLINGEN:

$$\bar{P}_{k+1} = E\{(\underline{x}_{k+1} - \bar{\underline{x}}_{k+1})(\underline{x}_{k+1} - \bar{\underline{x}}_{k+1})^t\}$$

$$= E\{(\Phi(\underline{x}_k - \bar{\underline{x}}_k) + \Gamma \underline{v}_k)((\underline{x}_k^t - \bar{\underline{x}}_k^t)\Phi^t + \underline{v}_k^t \Gamma^t)\}$$

$$= \Phi \bar{P}_k \Phi^t + \underbrace{0 + 0}_{\text{MÅ VISES!}} + \Gamma Q \Gamma^t$$

$$\underline{x}_k + \bar{\underline{x}}_k = \Phi(\underline{x}_{k-1} - \bar{\underline{x}}_{k-1}) + \Gamma \underline{v}_k$$

$$= \Phi(\Phi(\underline{x}_{k-2} - \bar{\underline{x}}_{k-2})\Gamma \underline{v}_{k-1}) + \Gamma \underline{v}_k$$

$$\vdots$$

$$= \Phi^k(\underline{x}_0 - \bar{\underline{x}}_0) + \Gamma v_{k-1} + \Phi \Gamma \underline{v}_{k-2} + \Phi^2 \Gamma \underline{v}_{k-3} + \dots + \Phi^{k-1} \Gamma \underline{v}_0$$

$$E\{(\underline{x}_k - \bar{\underline{x}}_k)\underline{v}_k^t\} = \Phi^k E\{(\underline{x}_0 - \bar{\underline{x}}_0)\underline{v}_k^t\} + \Gamma E\{\underline{v}_{k-1} \underline{v}_k^t\} + \dots + \Phi^{k-1}\Gamma E\{\underline{v}_0 \underline{v}_k^t\}$$

$$= \Phi^k(\underbrace{E\{\underline{x}_0 \underline{v}_k^t\}}_{\substack{0 \\ \text{PGA ANTAGELSEN}}} - \underbrace{E\{\bar{\underline{x}}_0 \underline{v}_k^t\}}_{\substack{0 \\ \text{PGA } E\{\underline{v}_k^t\} = 0}}) + 0 + 0 + \dots \quad (\text{FORDI } \underline{v}_k \text{ ER HVIT})$$

$$= 0 \quad \text{QED}$$

MÅLEKOVARIANSEN

DISKRET SYSTEM, MED MÅLELIGNING:

$\underline{z}_k = H_k \underline{x}_k + \underline{w}_k$

$\bar{\underline{z}}_k = H_k \bar{\underline{x}}_k$ PREDIKERT (FORVENTET MÅLING)

$P_z(k) = E\{(\underline{z}_k - \bar{\underline{z}}_k)(\underline{z}_k - \bar{\underline{z}}_k)^t\}$

$= E\{(H_k(\underline{x}_k - \bar{\underline{x}}_k) + \underline{w}_k)((\underline{x}_k - \bar{\underline{x}}_k)^t H_k^t + \underline{w}_k^t)\}$

$= H_k \bar{P}_k H_k^t + 0 + 0 + R_k$ $\quad (E\{\underline{w}_k \underline{w}_k^t\} = R_k \delta_{kl})$

$P_z(k) = H_k \bar{P}_k H_k^t + R_k$

EKS:

SKALART SYSTEM:

$x_{k+1} = \varphi x_k + \Gamma v_k$, $x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_0)$ $\quad v_k \sim N(0, Q\delta_{kl})$

$E\{x_0 v_k\} = 0$ FOR ALLE K

MIDDELVERDIUTVIKLINGEN:

$\bar{x}_{k+1} = \varphi \bar{x}_k \qquad \bar{x}_k = \varphi^k \bar{x}_0$

KOVARIANSUTVIKLINGEN:

$\bar{P}_{k+1} = \varphi \bar{P}_k \varphi^t + \Gamma Q \Gamma^t = \varphi^2 \bar{P}_k + \Gamma^2 Q$, $\bar{P}_0$ GITT

$\bar{P}_1 = \varphi^2 \bar{P}_0 + \Gamma^2 Q$

$\bar{P}_2 = \varphi^4 \bar{P}_0 + \varphi^2 \Gamma^2 Q + \Gamma^2 Q$

$\bar{P}_3 = \varphi^6 \bar{P}_0 + \varphi^4 \Gamma^2 Q + \varphi^2 \Gamma^2 Q + \Gamma^2 Q$

$\vdots$

$\bar{P}_k = \varphi^{2k} \bar{P}_0 + \underbrace{(\varphi^{2k-2} + \dots + \varphi^2 + 1)}_{S} \Gamma^2 Q$

$S = 1 + \varphi^2 + \varphi^4 + \dots + \varphi^{2k-2} \qquad (1)$

$\varphi^2 S = \varphi^2 + \varphi^4 + \varphi^6 + \dots + \varphi^{2k} \qquad (2)$

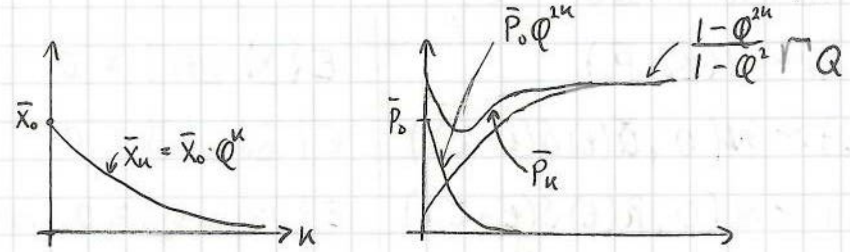
$(1)-(2)$: $S(1-\varphi^2) = 1 - \varphi^{2k}$

$\Rightarrow S = \dfrac{1-\varphi^{2k}}{1-\varphi^2}$, $\varphi^2 \neq 1$

$\Rightarrow \bar{P}_k = \varphi^{2k} \bar{P}_0 + S\Gamma^2 Q = \varphi^{2k} \bar{P}_0 + \dfrac{1-\varphi^{2k}}{1-\varphi^2} \Gamma^2 Q$, $\varphi \neq \pm 1$

ANTA $0 < \Phi < 1$, $\Phi^{2k} \to 0$ NÅR $k \to \infty$

$$\bar{P}_\infty = \frac{\Gamma^2}{1-\Phi^2} Q \quad , \quad \bar{x}_\infty = 0 \qquad \text{STEADY-STATE LØSNING}$$



SIMULERING AV $x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma v_k$ I MATLAB:

TREKKER PROSESSSTØYEN VHA RANDN-FUNKSJONEN:

```
X(1) = X_0 + RANDN(1) · SQRT(P0)
FOR K=1:N-1
  V = RANDN(1) + SQRT(Q)
  X(K+1) = Φ · X(K) + GAMMA · V
END
```

TREKKING AV $\underline{x} \sim N(\bar{\underline{x}}, \bar{P})$ I MATLAB:

MATLAB GIR STANDARD NORMALFORDELTE TALL MED RANDN:

```
n = 10;
z = RANDN(n);   % z ~ N(0, I)
```

CHOLESKY-FAKTORISERING:

ANTA AT $\bar{P} = \bar{P}^t \in \mathbb{R}^{n \times n}$

```
R = CHOL(P̄);   % R^t R = P̄
x = x̄ + R^t · RANDN(n)   % = x̄ + R^t z
```

$$E\{\underline{x}\} = \bar{\underline{x}} + 0 = \bar{\underline{x}}$$

$$E\{(\underline{x}-\bar{\underline{x}})(\underline{x}-\bar{\underline{x}})^t\} = E\{(\bar{\underline{x}}+R^t\underline{z}-\bar{\underline{x}})(\bar{\underline{x}}+R^t\underline{z}-\bar{\underline{x}})^t\}$$
$$= R^t \underbrace{E\{\underline{z}\,\underline{z}^t\}}_{I} R = R^t R = \bar{P}$$

SOM VI SER ER $\underline{x} \sim N(\bar{\underline{x}}, \bar{P})$ (TRANSPONERT)

MATLAB: $\underline{x} = \bar{\underline{x}} + \mathrm{CHOL}(P)' * \mathrm{RANDN}(n)$

GJØRE MATRISEN SYMMETRISK: $P = \frac{1}{2}(P+P^t)$, DERSOM P ER "NESTEN" SYMMETRISK

KONTINUERLIGE SYSTEMER

GITT: $\dot{\underline{x}}(t) = F(t)\,\underline{x}(t) + L(t)\,\underline{u}(t) + G(t)\,\underline{v}(t)$

$\underline{z}(t) = H(t)\,\underline{x}(t) + \underline{w}(t)$

ANTAR:

$\underline{x}(t_0) \sim N(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0)$	$E\{\bar{\underline{x}}_0\,\underline{v}(t)\} = 0$
$\underline{v}(t) \sim N(0, \tilde{Q}(t)\delta(t-\tau))$	$E\{\bar{\underline{x}}_0\,\underline{w}(t)\} = 0$
$\underline{w}(t) \sim N(0, \tilde{R}(t)\delta(t-\tau))$	$E\{\underline{v}(t)\,\underline{w}(\tau)\} = 0$ FOR ALLE t,τ

PROBLEM: FINN DIFF. LIGNING FOR FORVENTNINGSVERDIEN $\bar{\underline{x}}(t)$ OG KOVARIANSEN $\bar{P}(t)$ NÅR VI PREDIKERER SYSTEMET (INGEN MÅLING)

LØSNING: MINIMUM-VARIANS LØSNINGEN BLIR:

$$\dot{\bar{\underline{x}}}(t) = F(t)\,\bar{\underline{x}}(t) + L(t)\,\underline{u}(t) \qquad \bar{\underline{x}}(t_0) = \bar{\underline{x}}_0$$

$$\dot{\bar{P}}(t) = F(t)\bar{P}(t) + \bar{P}(t)F^t(t) + G(t)\tilde{Q}(t)G^t(t) \qquad \bar{P}(t_0) = \bar{P}_0$$

NB! $\tilde{Q}$ OG $\tilde{R}$ ER SPEKTRALTETTHETSMATRISEN
Q OG R ER KOVARIANSMATRISEN

EKS.

SKALART, KONTINUERLIG SYSTEM:

$\dot{x} = -ax + v$, HVOR $a > 0$, $x(t_0) \sim N(\bar{x}_0, \bar{P}_0)$,

$v(t) \sim N(0, \tilde{Q}\delta(t-\tau))$, $E\{x_0 v(t)\} = 0$

LIGNINGENE FOR $\bar{x}$ OG $\bar{P}$:

$\dot{\bar{x}} = -a\bar{x}$, $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$

$\dot{\bar{P}} = -2a\bar{P} + \tilde{Q}$, $\bar{P}(0) = \bar{P}_0$

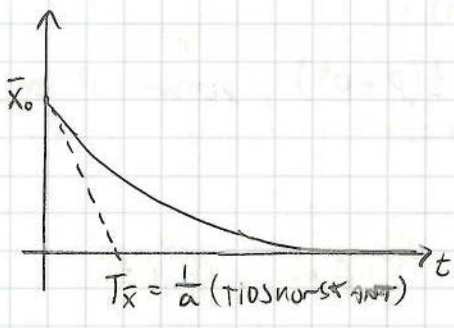
> $\dot{x} = Fx + Lu$ HAR LØSN:
> $x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)Lu\,d\tau$

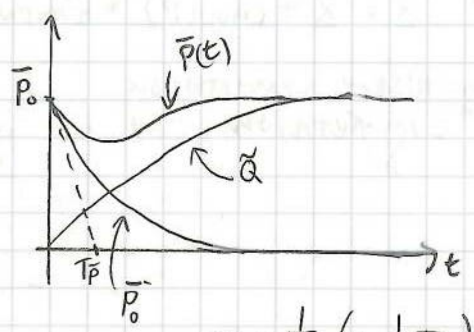
LØSNING:

$$\bar{x}(t) = e^{-at}\bar{x}_0$$

$$\bar{P}(t) = e^{-2at}\bar{P}_0 + \int_0^t e^{-2a(t-\tau)}\tilde{Q}\,d\tau = e^{-2at}\bar{P}_0 + \frac{\tilde{Q}}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right)$$

NÅR $t \to \infty$: $\left.\begin{array}{l} \bar{x}(t) \to \bar{x}_\infty = 0 \\ \bar{P}(t) \to \bar{P}_\infty = \dfrac{\tilde{Q}}{2a} \end{array}\right\}$ STEADY-STATE LØSNING





$T_{\bar{P}} = \frac{1}{2a}\left(= \frac{1}{2}T_{\bar{x}}\right)$

VI SER AT $\bar{P}_0$-EFFEKTEN DOMINERER STARTEN, MEN FOR STORE t DOMINERER EFFEKTEN AV PROSESSSTØYEN v

VI SÅ FORAN AT:

$$P(t) \xrightarrow{t\to\infty} P_\infty = \frac{\tilde{Q}}{2a}$$ FRA LØSNINGEN AV DIFF.LIGN FOR $\bar{P}$

DETTE KUNNE VI OGSÅ FINNE DIREKTE FRA DIFF.LIGN., FOR NÅR $t \to \infty$ OG EGENVERDIEN < 0 (STABILT SYSTEM), VIL $\dot{\bar{P}} = 0$ I GRENSEN NÅR $t \to \infty$, DVS:

$$\dot{\bar{P}} = -2a\bar{P} + \tilde{Q} = 0 \quad \text{NÅR } t \to \infty \Rightarrow \bar{P}_\infty = \frac{\tilde{Q}}{2a}$$

BEVIS AV MIDDELVERDI- OG KOVARIANSLIGNINGEN (KONT. STOK. SYSTEM):

SER PÅ TIDSINVARIANT SYSTEM

SKAL VISE: $\dot{\bar{\underline{x}}}(t) = F\bar{\underline{x}}(t) + L\underline{u}(t)$; $\bar{\underline{x}}\, t_0 = \bar{\underline{x}}_0$

$$\dot{\bar{P}}(t) = F\bar{P}(t) + \bar{P}(t)F^t + G\tilde{Q}G^t, \quad \bar{P}(t_0) = \bar{P}_0$$

MIDDELVERDIUTVIKLINGEN:

$$E\{\dot{\underline{x}}\} = E\{F\underline{x}\} + E\{L\underline{u}\} + E\{G\underline{v}\}$$

$$\dot{\bar{\underline{x}}} = F\bar{\underline{x}} + L\underline{u} + G\cdot 0 = F\bar{\underline{x}} + L\underline{u} \quad \text{Q.E.D.}$$

KOVARIANSUTVIKLINGEN:

$$\bar{P} = E\{(\underline{x}-\bar{\underline{x}})(\underline{x}-\bar{\underline{x}})^t\}$$

$$\dot{\bar{P}} = E\{\underbrace{(\dot{\underline{x}}-\dot{\bar{\underline{x}}})(\underline{x}-\bar{\underline{x}})^t}_{S} + \underbrace{(\underline{x}-\bar{\underline{x}})(\dot{\underline{x}}-\dot{\bar{\underline{x}}})^t}_{S^t}\}$$

$$S = E\{(\dot{\underline{x}}-\dot{\bar{\underline{x}}})(\underline{x}-\bar{\underline{x}})^t\}$$

$$= E\{(F(\underline{x}-\bar{\underline{x}})+G\underline{v})(\underline{x}-\bar{\underline{x}})^t\}$$

$$= F\bar{P} + \underbrace{E\{G\underline{v}(\underline{x}-\bar{\underline{x}})^t\}}_{\text{KORRELERT?}}$$

SETTER $\tilde{\underline{x}} = \underline{x} - \bar{\underline{x}}$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{\underline{x}}} = \dot{\underline{x}} - \dot{\bar{\underline{x}}} = F\tilde{\underline{x}} + G\underline{v}$$

$$\tilde{\underline{x}}(t) = \varphi(t,t_0)\tilde{\underline{x}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi(t,\tau)G v(\tau)\, d\tau$$

$$E\{\underline{v}(t)\tilde{\underline{x}}^t(t)\} = E\{\underline{v}(t)(\tilde{\underline{x}}^t(t_0)\varphi^t(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} v^t(\tau)G^t\varphi^t(t,\tau)\,d\tau)\}$$

$$= E\{\underbrace{\underline{v}(t)(\underline{x}^t(t_0)-\bar{\underline{x}}^t(t_0))}_{=0 \text{ FRA ANTAGELSEN}}\varphi^t(t,t_0)\} + E\{\int_{t_0}^{t} \underbrace{v(t)v^t(\tau)}_{=\tilde{Q}\delta(t-\tau)}G^t\varphi^t(t,\tau)\,d\tau\}$$

$$E\{\underline{v}(t)\tilde{\underline{x}}^t(t)\} = \int_{t_0}^{t} \tilde{Q}\delta(t-\tau)G^t\varphi^t(t,\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\tilde{Q}G^t I = \frac{1}{2}\tilde{Q}G^t$$

$$\Rightarrow \quad S = F\bar{P} + G\,E\{\underline{v}(t)\,\tilde{\underline{x}}(t)\}$$

$$= F\bar{P} + \tfrac{1}{2}G\tilde{Q}G^t$$

$$\dot{\bar{P}} = S + S^t = F\bar{P} + \bar{P}F^t + G\tilde{Q}G^t \qquad \text{Q.E.D.}$$

VIKTIGE PUNKTER:

1. VI MÅ BRUKE SUPERPOSISJONSINTEGRALET FOR Å FINNE KORRELASJONEN MELLOM $\underline{x}(t)$ OG $\underline{v}(t)$.

2. DIRAC-PULSEN ER BARE DEFINERT UNDER ET INTEGRALTEGN OG HAR EGENSKAPEN:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{t_0} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \tfrac{1}{2}f(t_0)$$

3. VI KAN BYTTE OM FORVENTNING OG DERIVASJON/INTEGRAL:

$$E\{\dot{\underline{x}}\} = \dot{\bar{\underline{x}}} = \frac{d}{dt}E\{\underline{x}\}$$

$$E\left\{\int f(t)\,dt\right\} = \int E\{f(t)\}\,dt$$

VI ANTAR AT FUNKSJONENE/PROSESSENE VÅRE ER TILSTREKKELIG REGULÆRE TIL AT DETTE ER MULIG.

LØSNING AV DEN KONTINUERLIGE LINEÆRE RICCATI-LIGNINGEN

GITT DEN LINEÆRE RICCATI-LIGNINGEN:

$$\dot{P} = FP + PF^t + G\tilde{Q}G^t \quad , \quad P(t_0) = P_0$$

FINN LØSNINGEN $P(t)$ VHA. MATRISE EKSPONENSIAL FUNKSJONEN

DEFINERER $P(t) = X(t)Z^{-1}(t)$, P, X og $Z \in \mathbb{R}^{n_x \cdot n_x}$

HVOR: $P(t_0) = X(t_0)$, $Z(t_0) = I$

FINN DIFF. LIGNINGER FOR X og Z SOM TILFREDSSTILLER RICCATILIGNINGEN

$$X(t) = P(t)Z(t)$$

$$\dot{X} = \dot{P}Z + P\dot{Z}$$

SAMTIDIG KAN VI $\dot{P} = FP + PF^t + G\tilde{Q}G^t$

$$\Rightarrow \dot{X} = (FP + PF^t + G\tilde{Q}G^t)Z + P\dot{Z}$$

$$\Rightarrow \dot{X} = FPZ + PF^tZ + G\tilde{Q}G^tZ + P\dot{Z}$$

$$\Rightarrow \dot{X} - FX - G\tilde{Q}G^tZ = PF^tZ + P\dot{Z}$$

ANTAR AT HVER AV SIDENE $= 0$, FOR ALLE t

VI FÅR DA TO UAVH. DIFF. LIGN:

$$\dot{X} = FX + G\tilde{Q}G^tZ \quad (1)$$

$P(F^tZ + \dot{Z}) = 0$, ANTAR AT RANG$(P) = \dim(\underline{x})$, DVS. P^{-1} EKSISTERER

$$\Rightarrow \dot{Z} = -F^tZ \quad (2)$$

LIGN (1) og (2) KAN DA SKRIVES:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G\tilde{Q}G \\ 0 & -F^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} X(t_0) \\ Z(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(t_0) \\ I \end{bmatrix} , \quad P = XZ^{-1} \qquad (3)$$

LØSNINGEN AV (3) ER I DET TIDSINVARIANTE TILFELLET:

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} = e^{\tilde{F}(t-t_0)} \begin{bmatrix} P(t_0) \\ I \end{bmatrix} , \quad \text{HVOR } \tilde{F} = \begin{bmatrix} F & G\tilde{Q}G^t \\ 0 & -F^t \end{bmatrix} \qquad (4)$$

(4) TILFREDSSTILLER (3) FORDI:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Z}(t) \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} e^{\tilde{F}(t-t_0)} \begin{bmatrix} P(t_0) \\ I \end{bmatrix} = \tilde{F} \underbrace{e^{\tilde{F}(t-t_0)} \begin{bmatrix} P(t_0) \\ I \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix}}$$

$$e^{\tilde{F}(t-t_0)} = \tilde{\Phi}(t,t_0) = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11} & \tilde{\Phi}_{12} \\ 0 & \tilde{\Phi}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{EXPM})$$

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11} & \tilde{\Phi}_{12} \\ 0 & \tilde{\Phi}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(t_0) \\ I \end{bmatrix}$$

$$Z(t) = \tilde{\Phi}_{22}(t,t_0), \quad X(t) = \tilde{\Phi}_{11}(t,t_0)P(t_0) + \tilde{\Phi}_{12}(t,t_0), \quad P(t) = X(t)Z^{-1}(t)$$

$$P(t) = \Big(\underbrace{\tilde{\Phi}_{11}(t,t_0)P(t_0)}_{\text{BIDRAG FRA } P(t_0)} + \underbrace{\tilde{\Phi}_{12}(t,t_0)}_{\text{BIDRAG FRA PROSESSSTØY } \underline{v}(t)} \Big) \tilde{\Phi}_{22}^{-1}(t,t_0) \quad \leftarrow \text{LØSNING} \qquad (5)$$

VI KAN OGSÅ TA UTGANGSPUNKT I:

$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u} + G\underline{v}$$

$$\dot{\bar{\underline{x}}} = F\bar{\underline{x}} + L\underline{u}$$

OG FINNE LØSNINGEN AV $P(t) = E\{(\underline{x}(t) - \bar{\underline{x}}(t))(\underline{x}(t) - \bar{\underline{x}}(t))^t\}$.

VED Å SETTE INN $\underline{x}(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)Lu\,d\tau + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)Gv\,d\tau$

OG TILSVARENDE FOR $\bar{\underline{x}}(t)$

$$\Rightarrow P(t) = \Phi(t,t_0)P(t_0)\Phi^t(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)G\tilde{Q}G^t\Phi^t(t,\tau)\,d\tau \quad \leftarrow \text{LØSNING} \quad (6)$$

VED Å SAMMENLIGNE (5) OG (6):

$$\Phi(t,t_0)P(t_0)\Phi^t(t,t_0) = \tilde{\Phi}_{11}(t,t_0)P(t_0)\tilde{\Phi}_{22}^{-1}(t,t_0)$$

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)G\tilde{Q}G^t\Phi^t(t,\tau)\,d\tau = \tilde{\Phi}_{12}(t,t_0)\tilde{\Phi}_{22}^{-1}(t,t_0)$$

SAMMENHENG MELLOM KONTINUERLIGE OG DISKRETE STOKASTISKE SYSTEMER

HVORDAN KAN VI DISKRETISERE ET LINEÆRT STOKASTISK SYSTEM?

VI SKAL FINNE SAMMENHENGEN MELLOM KONTINUERLIGE OG DISKRETE STOKASTISKE PROSESS LIGNINGER NÅR VI ØNSKER AT UTVIKLINGEN AV MIDDELVERDI OG KOVARIANS SKAL VÆRE LIKE FOR DE TO PROSESS LIGNINGENE, DVS:

$\bar{\underline{x}}_k = \bar{\underline{x}}(t_k)$, $\bar{P}_k = \bar{P}(t_k)$, HVOR $t_k = k \cdot \Delta t$

LØSNING:

TIDSINVARIANTE SYSTEMER:

VI HAR TIDLIGERE UTLEDET DE NØDVENDIGE FORMLENE. OPPSUMMERT:

PROSESSLIGNINGENE: $x_{k+1} = \Phi \underline{x}_k + \Delta \underline{u}_k + \Gamma \underline{v}_k \qquad x_0 \sim N(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0)$

$$\underline{v}_k \sim N(\underline{0}, Q\delta_{kl})$$

$$E\{\underline{x}_0 \underline{v}_k^t\} = 0 \quad \text{FOR ALLE}$$

$$\underline{\dot{x}}(t) = F\underline{x} + L\underline{u} + G\underline{v}, \quad x(t_0) \sim N(\bar{x}_0, \bar{P}_0), \quad \underline{v}(t) \sim N(\underline{0}, \tilde{Q}\delta(t-\tau))$$
$$E\{\underline{x}(t)\underline{v}^t(t)\} = 0$$

TIDLIGERE FANT VI SAMMENHENGENE:

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & L \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\varphi} = e^{\tilde{F}\Delta t} = \begin{bmatrix} \varphi & \Lambda \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi, \Lambda \quad (\varphi = e^{F\Delta t})$$

$$\tilde{\tilde{F}} = \begin{bmatrix} F & G\tilde{Q}G^t \\ 0 & -F^t \end{bmatrix}, \quad \tilde{\tilde{\varphi}} = e^{\tilde{\tilde{F}}\Delta t} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\varphi}}_{11} & \tilde{\tilde{\varphi}}_{12} \\ 0 & \tilde{\tilde{\varphi}}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi = \tilde{\tilde{\varphi}}_{11}, \quad \Gamma Q \Gamma^t = \tilde{\tilde{\varphi}}_{12}\tilde{\tilde{\varphi}}_{22}^{-1}$$

DERSOM $Q = I$, KAN VI FINNE Γ VIA CHOLESKY-FAKTORISERING

$$\Gamma = \text{CHOL}(\tilde{\tilde{\varphi}}_{12}\tilde{\tilde{\varphi}}_{22}^{-1})$$

I MATLAB:

$$\varphi = \text{expm}(F \cdot \Delta t)$$
$$\tilde{\varphi} = \text{expm}(\tilde{F} \cdot \Delta t)$$
$$\tilde{\tilde{\varphi}} = \text{expm}(\tilde{\tilde{F}} \cdot \Delta t)$$

DERSOM VI SKAL DISKRETISERE:

$$\underline{\dot{x}} = F\underline{x} \longrightarrow \underline{x}_{k+1} = \varphi\underline{x}_k \quad \Rightarrow \quad \varphi = e^{F\Delta t}$$

$$\underline{\dot{x}} = F\underline{x} + L\underline{u} \longrightarrow \underline{x}_{k+1} = \varphi\underline{x}_k + \Lambda\underline{u}_k \Rightarrow \tilde{\varphi} = e^{\tilde{F}\Delta t} \Rightarrow \varphi, \Lambda$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\dot{x}} = F\underline{x} + L\underline{u} + G\underline{v} \\ \quad\quad\downarrow \\ \underline{x}_{k+1} = \varphi\underline{x}_k + \Lambda\underline{u}_k + \Gamma\underline{v}_k \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{\varphi} = e^{\tilde{F}\Delta t}, \quad \tilde{\tilde{\varphi}} = e^{\tilde{\tilde{F}}\Delta t}, \Rightarrow \varphi, \Lambda, \Gamma$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\bar{x}} = F\bar{\underline{x}} + L\underline{u} \\ \bar{\underline{x}}_{k+1} = \varphi\bar{\underline{x}}_k + L\underline{u}_k \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{\varphi} = e^{\tilde{F}\Delta t} \Rightarrow \varphi, \Lambda$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\bar{P}} = F\bar{P} + \bar{P}F^t + G\tilde{Q}G^t \\ \bar{P}_{k+1} = \varphi\bar{P}_k\varphi^t + \Gamma Q\Gamma^t \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{\tilde{\varphi}} = e^{\tilde{\tilde{F}}\Delta t} \Rightarrow \varphi, \Gamma Q \Gamma^t$$

SIMULERING AV KONT. STOKASTISKE PROSESSLIGNINGER OG MÅLE LIGNINGER

GITT: $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u} + G\underline{v}$ $\quad x(t_0) \sim N(\bar{x}_0, \bar{P}_0)$ $\quad \underline{v}(t) \sim N(\underline{0}, \tilde{Q}\delta(t-\tau))$

$\underline{z}_k = H\underline{x}_k + \underline{w}_k$ $\quad \underline{w}_k \sim N(\underline{0}, R\delta_{kl})$

1. DISKRETISERER PROSESSLIGNINGEN. $\quad \Phi, \Lambda, \Gamma, (Q = I)$

2. TREKKER INITSIALVERDI. $\quad x_0 = \bar{x}_0 + (\text{CHOL}(\bar{P}_0))^t \cdot \text{RANDN}(n_x)$

3. TIDSUTVIKLINGEN:

```
FOR k=0:N-1
   z_k = H x_k + (CHOL(R))^t · RANDN(n_z)
   x_k+1 = Φ x_k + Λ u_k + Γ RANDN(n_x)
END
```

KOMMENTARER:

1. DERSOM VI HAR ET TIDSVARIANT SYSTEM, MÅ Δt VÆRE LITEN OG BEREGNINGEN AV $\Phi_k, \Lambda, \Gamma_k$ MÅ LEGGES INN I FOR-LØKKEN

2. VI ANTAR AT SYSTEMET ER STOKASTISK STYRBART

   $\Rightarrow \text{Dim}(\underline{v}) = n_x$

3. BRUK ALDRI INTEGRASJONSRUTINER DIREKTE PÅ DEN KONTINUERLIGE PROSESSLIGNINGEN.

EKSEMPLER PÅ STØYPROSESSER

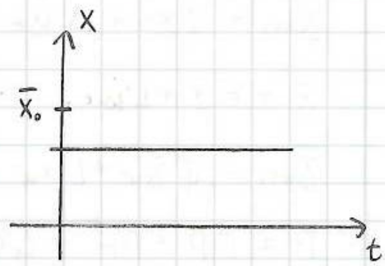
STOKASTISK KONSTANT:

KONT: $\dot{x} = 0, \quad x \sim N(\bar{x}_0, \bar{P}_0)$

$\Rightarrow \bar{x}(t) = \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$

$\bar{P}(t) = \bar{P}_0$

$x(t) = \bar{x}_0 + \bar{P}_0^{1/2} \cdot \text{RANDN}(1)$

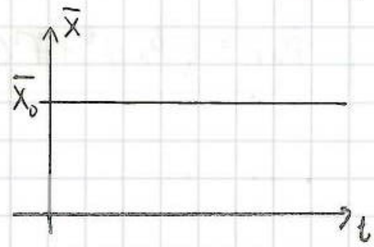


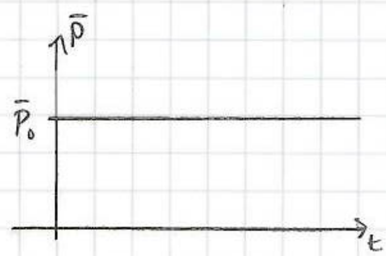
DISKR: $x_{k+1} = x_k \quad x \sim N(\bar{x}_0, \bar{P}_0)$

$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k = \bar{x}_0$

$\bar{P}_{k+1} = \bar{P}_k = \bar{P}_0$

$x_{k+1} = x_k = x_0 = \bar{x}_0 + \bar{P}_0^{1/2} \cdot \text{RANDN}(1)$





RANDOM WALK (VIRREVANDRING):

KONT: $\dot{x} = v(t)$, $x(t_0) \sim N(\bar{x}_0, \bar{P}_0)$, $v(t) \sim N(0, \tilde{Q}\delta(t-\tau))$

$\dot{\bar{x}} = 0$

$\dot{\bar{P}} = G\tilde{Q}G^t = \tilde{Q} \quad (G = 1)$

$\bar{x}(t) = \bar{x}_0$, $\bar{P}(t) = \bar{P}_0 + (t-t_0)\tilde{Q}$

$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau$

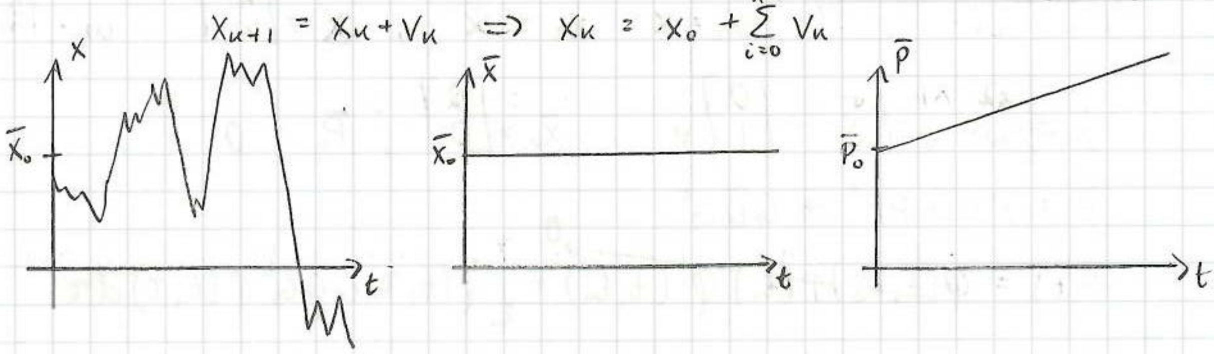
SIMULERING: $x(t) = \bar{x}_0 + \bar{P}_0^{1/2} \cdot \text{RAND}(1) + \sqrt{(t-t_0)\tilde{Q}} \cdot \text{RANDN}(1)$

DISKR: $x_{k+1} = x_k + v_k$, $x_0 \sim N(\bar{x}_0, \bar{P}_0)$ $v_k \sim N(0, Q\delta_{kl})$

$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k = \bar{x}_0$

$\bar{P}_{k+1} = \bar{P}_k + Q \implies \bar{P}_k = \bar{P}_0 + k \cdot Q$

$x_{k+1} = x_k + v_k \implies x_k = x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} v_k$



1. ORDENS MARKOV-PROSESS

KONT: $\dot{x} = -\frac{1}{T}x + v$ $\quad x(t_0) \sim N(\bar{x}_0, \bar{P}_0)$ $\quad v(t) \sim N(0, \tilde{Q}\delta(t-\tau))$

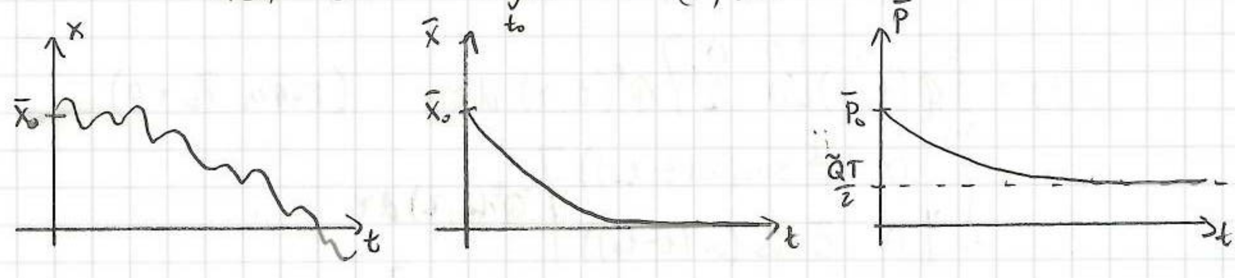
$\dot{\bar{x}} = -\frac{1}{T}\bar{x}$, $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$

$\bar{x}(t) = e^{-\frac{1}{T}(t-t_0)}\bar{x}_0$

$\dot{\bar{P}} = -\frac{2}{T}\bar{P} + \tilde{Q}$

$\bar{P}(t) = e^{-\frac{2}{T}(t-t_0)}\bar{P}_0 + \frac{\tilde{Q}T}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{T}(t-t_0)}\right)$, $\bar{P}_\infty = \frac{\tilde{Q}T}{2}$

$x(t) = e^{-\frac{1}{T}(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)} v(\tau)\, d\tau$



DISKR: $x_{k+1} = \Phi x_k + v_k \qquad x_0 \sim N(\bar{x}_0, \bar{P}_0) \quad v_k \sim N(0, Q\delta_{kl})$

DERSOM DEN DISKRETE PROSESSEN SKAL REPRESENTERE DEN KONTINUERLIGE 1. ORDENS MARKOV!

$$\Phi = e^{-\frac{1}{T}\Delta t} \qquad Q = \frac{\tilde{Q}T}{2}\left(1-e^{-\frac{2\Delta t}{T}}\right)$$

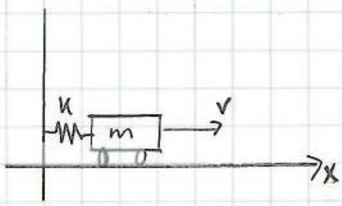
$$\bar{x}_{k+1} = \Phi \bar{x}_k \Rightarrow \bar{x}_k = \Phi^k \bar{x}_0$$

$$\bar{P}_{k+1} = \Phi \bar{P}_k \Phi^t + \Gamma Q \Gamma^t = \Phi^2 \bar{P}_k + Q$$

$$\bar{P}_k = \Phi^{2k}\bar{P}_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\Phi^{2i}Q$$

EKS. (3.1-1 GELB MED $c=0$)

HARMONISK OSCILLATOR UTEN DEMPING



v : HVIT STØY , $E\{v(t)v(\tau)\} = \tilde{Q}\delta(t-\tau)$

$\ddot{x} + \omega^2 x = v$ SE TIDL. UTLEDNING

$x_1 = x \quad x_2 = \dot{x} \quad , \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}\underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \; , \quad \underline{\bar{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{P}_0 = 0$$

$$\dot{P} = FP + PF^t + G\tilde{Q}G^t$$

$$P(t) = \underbrace{\cancel{\Phi(t,t_0)P(t_0)\Phi^t(t,t_0)}}_{0} + \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)G\tilde{Q}G^t\Phi(t,\tau)\,d\tau$$

$$\Phi(t,t_0) = e^{F(t-t_0)} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}F^i(t-t_0)^i$$

$$F^0 = I \qquad F^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \quad F^2 = \begin{bmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{bmatrix} \quad F^3 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ -\omega^4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{11} = 1 - \frac{1}{2}\omega^2(t-t_0)^2 + \frac{1}{4!}\omega^4(t-t_0)^4 + \ldots = \cos(\omega(t-t_0))$$

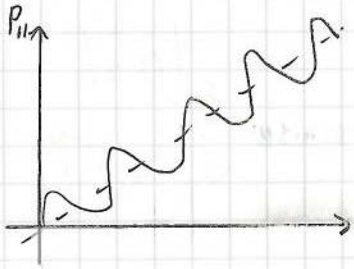
$$\Phi_{12} = \ldots \qquad \Phi_{21} = \ldots \qquad \Phi_{22} = \ldots$$

$$\Phi(t,t_0) = \begin{bmatrix} \cos(\omega(t-t_0)) & \frac{1}{\omega}\sin(\omega(t-t_0)) \\ -\omega\sin(\omega(t-t_0)) & \cos(\omega(t-t_0)) \end{bmatrix}$$

$$P(t) = \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{bmatrix}\Phi^t(t,\tau)\,d\tau \qquad (\text{FORDI } \bar{P}_0 = 0)$$

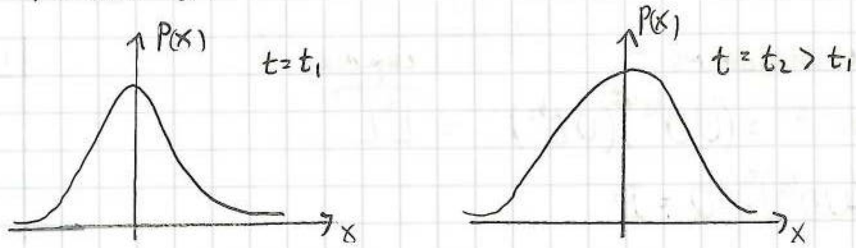
$$= \int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix} 0 & \frac{\tilde{Q}}{\omega}\sin(\omega(t-t_0)) \\ 0 & \tilde{Q}\cos(\omega(t-t_0)) \end{bmatrix}\Phi^t(t,\tau)\,d\tau$$

$$P_{11}(t) = E\{(x_1-\bar{x}_1)^2 = E\{(x-\bar{x})^2\} = \frac{\tilde{Q}}{2\omega}\left(t + \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega(t-t_0))\right)$$



VARIANSEN HAR ØKENDE TREND, MEN OSCILLERER RUNDT TRENDEN

Fikser t:



1. ORDENS APPROKSIMASJON AV MATRISE EKSPONENTIAL FUNKSJONEN

1. ORDENS APPROKS. AV $\Phi = e^{F\Delta t}$:

$$e^{F\Delta t} \approx I + \Delta t \cdot F$$

$$\Lambda \underline{u}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) L \underline{u}(\tau)\, d\tau$$

$$\approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} I L u(t_k)\, d\tau = \Delta t \cdot L \cdot \underline{u}_k \quad , (\Delta t = t_{k+1} - t_k)$$

$$\Rightarrow \Lambda \approx \Delta t \cdot L$$

$$\Gamma Q \Gamma^t = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) G \tilde{Q} G^t \Phi^t(t_{k+1}, \tau)\, d\tau$$

$$\approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} I G \tilde{Q} G^t I = \Delta t\, G \tilde{Q} G^t$$

$$\Gamma Q \Gamma^t \approx \Delta t\, G \tilde{Q} G^t$$

UD - FAKTORISERING

$$P = P^t = UDU^t$$

U : ØVRE SINGULÆR MATRISE $= \begin{bmatrix} 0 & \times & \times \\ & & \times \end{bmatrix}$

D : DIAGONAL MATRISE $= \begin{bmatrix} \times & 0 \\ 0 & \times \end{bmatrix}$

ANTAR AT VI KAN SKRIVE:

$$UDU^t = \Delta t\, G \tilde{Q} G^t$$

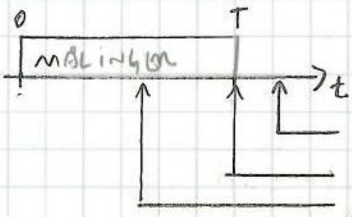
CHOLESKY FAKTORISERING:

$$\Gamma Q \Gamma^t = UDU^t = (UD^{1/2})^t (UD^{1/2}) = \overbrace{L^t L}^{\text{CHOLESKY}}$$

VELGER $\Gamma = (UD^{1/2})^t$, $Q = I$

NB! PROBLEM NÅR RANG $(\tilde{Q}) < n_x$

FILTRERING I LINEÆRE STOKASTISKE SYSTEMER



PREDIKSJON: $\bar{x}(t|T)$, $t > T$

FILTRERING: $\hat{x}(t) = \hat{x}(t|T)$, $t = T$

GLATTING: $\hat{x}(t|T)$; $0 \leq t \leq T$

VI SKILLER MELLOM REKURSIVE- OG SATSVISE- (BATCH) LIGNINGER

EKS:

REKURSIV BEREGNING AV MIDDELVERDI

GITT: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

MIDDELVERDIEN BEREGNES FRA:

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (1)$$

VI ANTAR AT VI MÅLER x_i VIA FORMEL:

$z_i = x + w_i$, w_i TILFREDSSTILLER VISSE KRAV

VI FINNER ET ESTIMAT FOR X VHA. (1)

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x + w_i = x + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w_i \longrightarrow x \text{ NÅR } N \to \infty$$

$$\bar{X}_{N+1} = \frac{1}{N+1}\sum_{i=1}^{N+1} z_i = \frac{N}{N+1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i + \frac{1}{N+1} z_{N+1} = \frac{N}{N+1}\bar{X}_N + \frac{1}{N+1} z_{N+1}$$

$$\bar{X}_{N+1} = \frac{N+1}{N+1}\bar{X}_N + \frac{1}{N+1} z_{N+1} - \frac{1}{N+1}\bar{X}_N = \bar{X}_N + \frac{1}{N+1}(z_{N+1} - \bar{X}_N)$$

SETTER $N = K$

$$\boxed{\bar{X}_{K+1} = \bar{X}_K + \frac{1}{K+1}(z_{K+1} - \bar{X}_K)} \quad \text{REKURSIV FORM}$$

ANTA AT VI HAR FØLGENDE (DISKRET) SYSTEM:

$X_{k+1} = X_k$, X_0 : UKJENT ← NB! VI HAR INGEN INFORMASJON OM STATISTIKKEN TIL X A PRIORI DVS. FISHER - MODELL

$Z_k = X_k + W_k$

INNFØRER KF - NOTASJON; KF - LIGNINGENE BLIR:

TO (TIDSOPPDATERING): $\bar{X}_{k+1} = \hat{X}_k \; , \; \hat{X}_0 = 0 \; , \; P_0 \gg 0$

MO (MÅLEOPPDATERING): $\hat{X}_k = \bar{X}_k + \frac{1}{k}(Z_k - \bar{X}_k)$

$$\hat{X}_k = \bar{X}_k + K_k(Z_k - \bar{X}_k)$$, K_k : KF - FORSTERKNING

$\bar{X}_k$: PREDIKERT TILSTAND BASERT PÅ $\hat{X}_{k-1}$,

$\hat{X}_k$: ESTIMERT (FILTRERT) TILSTAND

DISKRET LINEÆRT STOKASTISK SYSTEM

GITT:

$$\underline{x}_{k+1} = \Phi_k \underline{x}_k + \Delta_k \underline{u}_k + \Gamma_k \underline{v}_k \; , \quad \underline{x}_0 \sim N(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0) \; , \; E\{\underline{x}_0 \underline{v}_k^t\} = 0$$

$$\underline{v}_k \sim N(\underline{0}, Q_k \delta_{kl}) \; , \; E\{\underline{x}_0 \underline{w}_k^t\} = 0$$

$$\underline{z}_k = H_k \underline{x}_k + \underline{w}_k \; , \quad \underline{w}_k \sim N(\underline{0}, R_k \delta_{kl}) \; , \; E\{\underline{v}_k \underline{w}_l^t\} = 0$$

PROBLEM: BESTEM ET MINIMUM VARIANS ESTIMAT, $\hat{\underline{x}}_k$, AV TILSTANDEN $\underline{x}_k$, OG ESTIMATETS FEILKOVARIANS $\hat{P}_k$, GITT MÅLINGENE $Z_k = \{z_0, z_1, \dots z_k\}$ OG LIGNINGENE OVER.

LØSNING: (DISKRET KF)

$$\left.\begin{aligned} \bar{\underline{x}}_{k+1} &= \Phi_k \hat{\underline{x}}_k + \Delta_k \underline{u}_k \; , \; \bar{\underline{x}}_0 \text{ GITT} \\ \bar{P}_{k+1} &= \Phi_k \hat{P}_k \Phi_k^t + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^t \; , \; \bar{P}_0 \text{ GITT} \end{aligned}\right\} \text{TO}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\underline{x}}_k &= \bar{\underline{x}}_k + K_k(\underline{z}_k - H_k \bar{\underline{x}}_k) \\ K_k &= \bar{P}_k H_k^t (H_k \bar{P}_k H_k^t + R_k)^{-1} \\ \hat{P}_k &= (I - K_k H_k)\bar{P}_k \end{aligned}\right\} \text{MO}$$

$\bar{x}_k$, $\bar{P}_k$: ETT SKRITTS PREDIKSJON

$\hat{x}_k$, $\hat{P}_k$: ESTIMERT TILSTAND OG DENNES KOVARIANS (FEIL) ETTER MÅLING

"BEVIS" AV KF-FORMLENE

i) OPPSPALTING I TO OG MO-DELENE KAN GJØRES FORDI VI HAR VEKTOR-MARKOV-PROSESSEN

ii) TO-FORMLENE BLE UTLEDET I DEL A

iii) MO-FORMLENE KAN BEVISES PÅ MANGE MÅTER:

a) DERSOM VI ANTAR AT $\underline{x}_0$, $\underline{v}_k$ OG $\underline{w}_k$ ER GAUSSISK FORDELTE, SÅ GIR $\hat{x}_k$, $\hat{P}_k$, Q_k OG R_k ALLE STF. VI HAR BRUK FOR

$$p(\underline{x}_k | Z_k) = \frac{p(\underline{x}_k | Z_k)}{P(Z_k)} = \frac{p(z_0, z_1, \ldots, z_k, \underline{x}_k)}{P(Z_k)}$$

$$p(\underline{x}_k | Z_k) = \frac{p(\underline{z}_k | \underline{z}_{k-1}, \ldots, \underline{z}_0, \underline{x}_k)\, p(Z_{k-1}, \underline{x}_k)}{P(Z_k)} \quad \text{(BAYES REGEL)}$$

$$= \frac{p(z_k | \underline{x}_k)\, p(\underline{x}_k | Z_{k-1})\, p(Z_{k-1})}{P(Z_k)} \quad \text{(BAYES, MARKOV)}$$

$p(\underline{z}_k | \underline{x}_k)$: LIKELIHOOD FOR MÅLINGEN z_k, FINNES FRA MÅLELIGNINGEN:

$$z_k = H_k \underline{x}_k + \underline{w}_k \Rightarrow p(\underline{z}_k | \underline{x}_k) \sim N(\underline{z}_k; H \underline{x}_k, R)$$

$p(\underline{x}_k | Z_{k-1})$: FINNES FRA PROSESSLIGNINGEN:

$$\underline{x}_k = \Phi \underline{x}_{k-1} + \Lambda \underline{u}_{k-1} + \Gamma \underline{v}_{k-1} \Rightarrow \bar{\underline{x}}_k = \Phi \hat{\underline{x}}_{k-1} + \Lambda \underline{u}_{k-1}$$

$$\bar{P}_k = \Phi \hat{P}_k \Phi^t + \Gamma Q \Gamma^t$$

$$\Rightarrow p(\underline{x}_k | Z_{k-1}) \sim N(\underline{x}_k; \bar{\underline{x}}_k, \bar{P}_k)$$

FILTER STF. FRA FORRIGE

$$\Rightarrow p(\underline{x}_k | Z_k) \text{ KAN BEREGNES FRA } p(\underline{x}_{k-1} | Z_{k-1})$$

ET MINIMUM VARIANS ESTIMAT FOR LINEÆRE GAUSSISKE SYSTEMER ER DET SAMME SOM FORVENTNING (BETINGET MIDDELVERDI-ESTIMAT)

$$\hat{\underline{x}}_k = E\{\underline{x}_k | Z_k\} = \iint_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \underline{x}_k\, p(\underline{x}_k | Z_k)\, d\underline{x}_k$$

$$\hat{P}_k = E\{(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k)(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k)^t | Z_k\}$$

b) VEIET MINSTE-KVADRATERS METODE

c) ORTOGONAL PROJEKSJON I HILBERTROM

iv) DET FINNES MANGE EKVIVALENTE VERSJONER AV MÅLE-OPPDATERINGS FORMLENE I KF (NOTAT 4)

$$\left.\begin{aligned} \hat{\underline{x}} &= \bar{\underline{x}} + K(\underline{z} - H\bar{\underline{x}}) \\ K &= \bar{P}H^t(H\bar{P}H^t + R)^{-1} \\ \hat{P} &= (I - KH)\bar{P} \end{aligned}\right\} \text{ALTERNATIV 1}$$

BRUKES BARE FOR OPTIMALE KF, DVS. ALT ER RIKTIG MODELLERT

$$\left.\begin{aligned} \hat{\underline{x}} &= \bar{\underline{x}} + K(\underline{z} - H\bar{\underline{x}}) \\ K &= \bar{P}H^t(H\bar{P}H^t + R)^{-1} \\ \hat{P} &= (I - KH)\bar{P}(I - KH)^t + KRK^t \end{aligned}\right\} \text{ALTERNATIV 2}$$

GIR RIKTIG KOVARIANS SELV OM K IKKE ER BEREGNET OPTIMALT (SIKRER SYMMETRISK $\hat{P}$)

$$\left.\begin{aligned} \hat{\underline{x}} &= \bar{\underline{x}} + K(\underline{z} - H\bar{\underline{x}}) \\ \hat{P} &= (\bar{P}^{-1} + H^tRH)^{-1} \\ K &= \hat{P}H^tR^{-1} \end{aligned}\right\} \text{ALTERNATIV 3}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\underline{x}} &= \hat{P}\bar{P}^{-1}\bar{\underline{x}} + \hat{P}H^tR^{-1}\underline{z} \\ \hat{P} &= (\bar{P} - H^tR^{-1}H)^{-1} \end{aligned}\right\} \text{ALTERNATIV 4}$$

BRUKES I BEVIS OG UTLEDNINGER

EKVIVALENSEN MELLOM DISSE KAN VISES VED Å BRUKE MATRISE INVERSJONS LEMMAET

NOTAT 4: MÅLEOPPDATERING FOR BAYES, FISHER OG VMK-MODELLER

NB! FORVENTNINGSRETTE ESTIMATORER

BAYES MODELL: $E\{\underline{x}\} = E\{\hat{\underline{x}}_k\} = E\{E\{\underline{x}_k | \underline{z}_k\}\}$

FISHER MODELL: $E\{\hat{\underline{x}}\} = \underline{x}$ (ESTIMERER PÅ EN UKJENT KONSTANT)

1. BAYES MODELLER OG METODE:

$\underline{z} = H\underline{x} + \underline{w}$ $\quad \underline{x} \sim N(\bar{\underline{x}}, \bar{P})$, $\underline{w} \sim N(\underline{0}, R)$, $E\{\underline{x}\,\underline{w}^t\} = 0$

$\Rightarrow$ KF MO-FORMLER

2. FISHER MODELL OG METODE:

$\underline{z} = H\underline{x} + \underline{w}$ $\underline{x}$: UKJENT OG KONSTANT VEKTOR Á PRIORI

$\underline{w} \sim N(\underline{0}, R)$

$\hat{\underline{x}} = K\underline{z}$ $K: n_x \times n_z$

$K = \hat{P}H^t R^{-1}$ (MÅ HA $n_z \geq n_x$)

$\hat{P} = (H^t R^{-1} H)^{-1}$

SAMMENHENG MELLOM BAYES OG FISHER:

BAYES $\rightarrow$ FISHER:

$\bar{P} = \infty$, $\bar{P}^{-1} = 0$

$\hat{P}_B = (\bar{P}^{-1} + H^t R^{-1} H)^{-1} \rightarrow (H^t R^{-1} H)^{-1} = \hat{P}_F$

$\hat{\underline{x}}_B = \hat{P}\bar{P}^{-1}\bar{\underline{x}} + \hat{P}H^t R^{-1}\underline{z} \rightarrow \hat{P}H^t R^{-1}\underline{z} = K\underline{z} = \hat{\underline{x}}_F$

FISHER $\rightarrow$ BAYES:

VI MÅ INNFØRE Á PRIORI-INFORMASJON SOM EN MÅLING:

$\underline{z}_1 = \bar{\underline{x}}$, HVOR $R_1 = \bar{P}$

DVS. $z_1 \sim N(\bar{\underline{x}}, \bar{P})$, $z = H\underline{x} + \underline{w}$

$\tilde{\underline{z}} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z \end{bmatrix}$, $\tilde{R} = \begin{bmatrix} \bar{P} & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$ $\tilde{H} = \begin{bmatrix} I \\ H \end{bmatrix}$

$\tilde{\underline{z}} = \tilde{H}\underline{x}$

FRA FISHER FORMLENE FÅR VI:

$$\hat{P} = (\tilde{H}^t \tilde{R}^{-1} \tilde{H})^{-1} = \left(\begin{bmatrix} I & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1} = (\bar{P}^{-1} + HR^{-1}H^t)^{-1} = \hat{P}_B$$

I BÅDE FISHER OG BAYES ESTIMERING KAN VI BEREGNE USIKKERHETEN (KOVARIANSEN Á POSTERIORI) UTEN Å BRUKE SELVE MÅLEVERDIEN

VEIEDE MINSTE KVADRATERS (VMK) METODE OG MODELL

$\underline{z} = H\underline{x} + \underline{w}$ $\quad$ $\underline{x}$: INGEN STATISTISK INFO $\quad$ $\underline{w}$: INGEN STAT. INFO

$$J = (\underline{x} - \bar{\underline{x}})^t S^{-1} (\underline{x} - \bar{\underline{x}}) + (\underline{z} - H\underline{x})^t T^{-1} (\underline{z} - H\underline{x})$$

$\hat{\underline{x}}$: ER DEN VERDIEN AV $\underline{x}$ SOM MINIMERER J NÅR $\bar{\underline{x}}$ OG $\underline{z}$ ER GITT
S OG T VELGES ETTER BESTE SKJØNN

$$\hat{\underline{x}} = \bar{\underline{x}} + K(\underline{z} - H\bar{\underline{x}})$$ GJETNING FOR $\underline{x}$

$$K = (S^{-1} + H^t T^{-1} H)^{-1} H^t T^{-1}$$

$S = \bar{P}$ & $T = R \Rightarrow$ BAYES LIGNINGENE

MATRISE INVERSJONS LEMMAET

BRUKES OFTE I BEVIS I FORBINDELSE KF-LIGNINGENE

GRAFISK TOLKNING AV KOVARIANSMATRISEN

SE NOTAT 4

EKSEMPEL:

MODELL: $x_{k+1} = x_k \quad (= x)$

$z_k = x_k + w_k$

DENNE MODELLEN BESKRIVER ESTIMERING AV EN KONSTANT

BAYES: $x_0 = x \sim N(\bar{x}, \bar{P})$, $w_k \sim N(0, \sigma^2 \delta_{kl})$

FISHER: $w_k \sim N(0, \sigma^2 \delta_{kl})$

TIDLIGERE FANT VI AT $\hat{x}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} z_i \iff$ $\bar{x}_{k+1} = \hat{x}_k$
$\hat{x}_k = \bar{x}_k + \frac{1}{k}(z_k - \bar{x}_k)$
$\bar{P}_1 = \infty$ (FISHER MODELL)

FISHER ESTIMERING:

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix} \quad \underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix}$$

$$\underline{z} = Hx + \underline{w}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad R = \mathrm{diag}(\sigma^2, \sigma^2, \ldots, \sigma^2) \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

FISHERS ESTIMERINGSFORMEL:

$$\hat{x} = K\underline{z}, \quad K = \hat{P} H^t R^{-1}, \quad \hat{P} = (H^t R^{-1} H)^{-1}$$

HER FÅR VI:

$$\hat{P} = \left([1\,1 \dots 1] \begin{bmatrix} \sigma^{-2} & & 0 \\ & \sigma^{-2} & \\ 0 & & \ddots\ \sigma^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2} + \dots + \frac{1}{\sigma^2} \right)^{-1} = \left(\frac{k}{\sigma^2} \right)^{-1} = \frac{\sigma^2}{k}$$

$$K = \frac{\sigma^2}{k} \left[\frac{1}{\sigma^2}\ \frac{1}{\sigma^2} \dots \frac{1}{\sigma^2} \right] = \frac{1}{k} [1\,1 \dots 1]$$

DVS $\hat{x} = \frac{1}{k} H^t \underline{z} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} z_i$

BAYESESTIMERING

a) IKKE REKURSIV (BATCH-FORMULERING)

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \qquad \hat{x} = \bar{x} + K(z - H\bar{x})$$

b) REKURSIV FORMULERING:

BRUKER REKURSIVE KF-FORMLENE

$x_{k+1} = x_k \quad , \quad z_k = x_k + w_k$

GENERELT: $\bar{P}_{k+1} = \Phi \hat{P}_k \Phi^t + \Gamma Q \Gamma^t$

$$K_k = \hat{P}_k H^t R^{-1} = \bar{P}_k H^t (H \bar{P}_k H^t + R)^{-1}$$

$$\hat{P}_k = (I - K_k H) \bar{P}_k$$

HER FÅR VI:

$\bar{P}_{k+1} = \hat{P}_k$

$K_k = \bar{P}_k (\bar{P}_k + \sigma^2)^{-1}$

$\hat{P}_k = (I - K_k) \bar{P}_k \quad , \quad 1 - K_k = 1 - \bar{P}_k (\bar{P}_k + \sigma^2)^{-1} = \dfrac{\cancel{\bar{P}_k} + \sigma^2 - \cancel{\bar{P}_k}}{\bar{P}_k + \sigma^2}$

$\Rightarrow \hat{P}_k = \dfrac{\sigma^2}{\bar{P}_k + \sigma^2} \cdot \bar{P}_k$

$$= \frac{\sigma^2}{1 + \frac{\sigma^2}{\bar{P}_k}} = \frac{\sigma^2 \cdot \frac{\bar{P}_k}{\sigma^2}}{\left(1 + \frac{\sigma^2}{\bar{P}_k}\right) \cdot \frac{\bar{P}_k}{\sigma^2}} = \frac{\bar{P}_k}{1 + \frac{\bar{P}_k}{\sigma^2}} = \frac{\hat{P}_{k-1}}{1 + \frac{\hat{P}_{k-1}}{\sigma^2}}$$

$\hat{P}_1 = \dfrac{\bar{P}_1}{1 + \frac{\bar{P}_1}{\sigma^2}} \quad , \quad \hat{P}_2 = \dfrac{\hat{P}_1}{1 + \frac{\hat{P}_1}{\sigma^2}} = \dfrac{\bar{P}_1}{1 + \bar{P}_1/\sigma^2 + \bar{P}_1/\sigma^2} = \dfrac{\bar{P}_1}{1 + 2\bar{P}_1/\sigma^2}$

$\Rightarrow \hat{P}_k = \dfrac{\bar{P}_1}{1 + k\bar{P}_1/\sigma^2}$

$$K_k = \hat{P}_k H^t R^{-1} = \frac{P_1}{1 + k P_1/\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} = \frac{P_1}{\sigma^2 + k P_1} = \frac{1}{k + \frac{\sigma^2}{P_1}}$$

LAR $P_1 \to \infty \Rightarrow K_k \to \frac{1}{k}$ (FISHER)

Øving 2

OPPGAVE 1.

a) BAYES: $P(B_2|x) = \frac{p(x|B_2)\,P(B_2)}{p(x)} = \frac{p(x|B_2)\,P(B_2)}{p(x|B_1)P(B_1) + p(x|B_2)P(B_2)}$

X ER NORMALFORDELT: $p(x|B_i) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}}$, $i = 1,2$

SETTER INN:

$$P(B_2|x) = \frac{1}{\frac{\sigma_2 P(B_1)}{\sigma_1 P(B_2)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} + \frac{x^2}{2\sigma_2^2}} + 1}$$

b) $P(B_1) = \frac{1}{2}$ $P(B_2) = \frac{1}{2}$ $\sigma_2 = 4\sigma_1$ $x = \sigma_2$

$$P(B_2|x) = \frac{1}{\frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\sigma_2^2}{\frac{2}{16}\sigma_2^2} + \frac{\sigma_2^2}{2\sigma_2^2}} + 1} = 0,998$$

c) $P(B_2|x) = 0,820$

OPPGAVE 2

$\underline{z} = H\underline{x} + \underline{w}$, $E\{\underline{x}\} = E\{\underline{w}\} = 0$

$E\{\underline{x}\,\underline{x}^t\} = P$, $E\{\underline{w}\,\underline{w}^t\} = R$, $E\{\underline{x}\,\underline{w}^t\} = S$

$\underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{w} \end{bmatrix}$ $E\{\underline{u}\} = 0$ $P_{uu} = \begin{bmatrix} P & S \\ S^t & R \end{bmatrix}$

$\underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix}$ $E\{\underline{y}\} = 0$ $P_{yy} = \begin{bmatrix} P & PH^t + S \\ HP + S^t & HPH^t + HS + S^tH^t + R \end{bmatrix}$

$E\{\underline{x}|\underline{z}\} = [PH^t + S][HPH^t + HS + S^tH^t + R]^{-1}\underline{z}$

$E\{\underline{x}\underline{x}^t|\underline{z}\} = P - [PH^t + S][HPH^t + HS + S^tH^t + R]^{-1}[HP + S^t]$

OPPGAVE 3

$\ddot{\varepsilon}(t) = u(t) \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix}\varepsilon \\ \dot{\varepsilon}\end{bmatrix} \qquad n_x = 2$

a) $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\underline{x} + \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}\underline{u}$

b) STYRBARHETSMATRISE:

$$[L \quad FL] = \left[\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

RANG $[L \quad FL] = 2$ JA, DEN ER STYRBAR!

c) $\underline{z} = H\underline{x} = [1 \quad 0]\,\underline{x}$

OBS. MATRISE:

$$[H^t \quad F^t H^t] = \left[\begin{matrix}1 \\ 0\end{matrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

RANG $[H^t \quad F^t H^t] = 2$ JA, DEN ER OBSERVERBAR

d) $[H^t \quad F^t H^t] = \left[\begin{matrix}0 \\ 1\end{matrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$ IKKE OBS.

OPPGAVE 4

$\ddot{p}(t) = 0 \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} p \\ \dot{p} \end{bmatrix}$

$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + G\underline{v} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$z_k = H\underline{x}_k + \underline{w}_k \qquad v \sim N(0, \sigma_v^2 \delta(t-\tau)) \quad w_k \sim N(0, \sigma_w^2 \delta_{kl})$

DISKRETISERER

$\underline{x}_{k+1} = \Phi \underline{x}_k + \Gamma \underline{v}_k$

$\tilde{\tilde{F}} = \begin{bmatrix} F & GQG^t \\ 0 & -F^t \end{bmatrix} \quad \tilde{\tilde{\Phi}} = e^{\tilde{\tilde{F}}\Delta t} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\Phi}}_{11} & \tilde{\tilde{\Phi}}_{12} \\ 0 & \tilde{\tilde{\Phi}}_{22} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \Phi = \tilde{\tilde{\Phi}}_{11} \qquad \Gamma Q \Gamma^t = \tilde{\tilde{\Phi}}_{12} \tilde{\tilde{\Phi}}_{22}^{-1}$

KAN FINNE Γ V.H.A. CHOLESKY NÅR $Q = I$

ØVING 3

OPPGAVE 1. a)

$x_{k+1} = x_k = x \quad , \quad z_{1k} = x + w_{1k} \quad , \quad z_{2k} = x + w_{2k}$

$w_{1k} \sim w_{2k} \sim N(0, R\delta_{kl}) \quad , \quad R = 1 \quad , \quad H = 1$

$\hat{P} = (H^t R^{-1} H)^{-1} = 1 \qquad K = \hat{P} H^t R^{-1} = 1$

$\Rightarrow \hat{x}_k = z_k$

b)

$$\underline{z}_k = \begin{bmatrix} z_{1k} \\ z_{2k} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{H} x + \begin{bmatrix} w_{1k} \\ w_{2k} \end{bmatrix}$$

$\hat{P} = (H^t R^{-1} H)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = 1$

$K = \hat{P} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\hat{x}_k =$

OPPGAVE 2

$$x_{k+1} = 2x_k + 3v_k \qquad \hat{x}_0 \sim N(0, \hat{P}_0) \qquad v_k \sim N(0, Q\delta_{kl})$$

$$z_k = x_k + w_k \qquad w_k \sim N(0, R\delta_{kl})$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= 2\hat{x}_k \\ \bar{P}_{k+1} &= 4\hat{P}_k + 9Q \end{aligned}\right\} \text{TO}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}_k &= \bar{x}_k + K_k(z_k - \bar{x}_k) \\ K_k &= \bar{P}_k(\bar{P}_k + R)^{-1} \\ \hat{P}_k &= (1 - K_k)\bar{P}_k \end{aligned}\right\} \text{MO}$$

OPPGAVE 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \qquad A = LL^t \quad (\sqrt{A} = L)$$

$$l_{11} = \sqrt{1} = 1 \qquad l_{31} = \frac{1}{1} \cdot 2 = 2$$

$$l_{21} = \frac{1}{1} \cdot 1 = 1$$

$$l_{22} = \sqrt{5 - 1^2} = \sqrt{4} = 2 \qquad l_{32} = \frac{1}{2}(4 - 2\cdot 1) = 1$$

$$l_{12} = \frac{1}{2}(1 - 1\cdot 1) = 0 \qquad l_{33} = \sqrt{9 - 2^2 - 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$l_{13} = \frac{1}{2}(2 - 1\cdot 2 - 0\cdot 1) = 0 \qquad l_{23} = 0$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

OPPGAVE 4

$\alpha = 1 \text{ RAD}/h \quad v \sim N(0, \tilde{Q}\delta(t-\tau)) \quad \tilde{Q} = \frac{2\pi^2}{180^2} \text{ RAD}^2/h$

$z_k = x_k + w_k \quad w_k \sim N(0, R\,\delta_{kl}) \quad R = \frac{0{,}5\pi^2}{180^2} \text{ RAD}^2/h^2 \quad \Delta t = 0{,}25h$

a) $x = \frac{\alpha}{s+\alpha} \cdot v \Rightarrow xs + x\alpha = v\alpha$

$\Rightarrow$ LAPLACE: $\dot{x} = -\alpha x + \alpha v$

b) $x_{k+1} = \varphi x_k + \Gamma v_k \quad v_k \sim N(0, Q\delta_{kl})$

$\varphi = e^{-\alpha\Delta t} = e^{-0{,}25}$

$$\Gamma Q \Gamma^t = \int_0^{\Delta t} e^{-\alpha(\Delta t-\tau)} G \tilde{Q} G^t \left(e^{-\alpha(\Delta t-\tau)}\right)^t d\tau$$

$$= \frac{2\pi^2}{180^2} \int_0^{0{,}25} e^{-2(0{,}25-\tau)} d\tau = \frac{2\pi^2}{180^2} e^{-0{,}5} \int_0^{0{,}25} e^{2\tau} d\tau$$

$$= \frac{\pi^2}{180^2} e^{-0{,}5}\left(e^{0{,}5}-1\right) = \frac{\pi^2}{180^2}\left(1-e^{-0{,}5}\right)$$

VELGER $Q = 1 \Rightarrow \Gamma = \frac{\pi}{180}\sqrt{1-e^{-0{,}5}}$

c) $\bar{x}_{k+1} = e^{-0{,}25} \hat{x}_k$

$\bar{P}_{k+1} = e^{-0{,}5} \hat{P}_k + \frac{\pi^2}{180^2}\left(1-e^{-0{,}5}\right)$

$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k(z_k - \bar{x}_k)$

$K_k = \bar{P}_k\left(\bar{P}_k + \frac{0{,}5\pi^2}{180^2}\right)^{-1}$

$\hat{P}_k = (1 - K_k)\bar{P}_k$

KONTINUERLIG KALMANFILTER

MODELL: $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u} + G\underline{v}$ $\qquad \underline{x}_0 \sim N(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0)$

$\qquad \underline{v} \sim N(\underline{0}, \tilde{Q}\delta(t-\tau))$

$\underline{z} = H\underline{x} + \underline{w}$ $\qquad \underline{w} \sim N(\underline{0}, \tilde{R}\delta(t-\tau))$

$E\{\underline{x}_0 \underline{v}^t(t)\} = 0, \; E\{\underline{x}_0 \underline{w}^t(t)\} = 0, \; E\{\underline{v}(t)\underline{w}(\tau)\} = 0$ ALLE t, τ

PROBLEM: FINN ET MINIMUM VARIANSESTIMAT, $\hat{\underline{x}}(t)$, AV TILSTANDEN $\underline{x}(t)$ OG DETS FEILKOVARIANS $P(t) = \hat{P}(t)$ NÅR MÅLINGEN $\underline{z}(t^*)$ ER GITT FOR $t^* \in [0, t]$

LØSNING: KF FOR KONT. SYSTEMER

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{P}(t) &= \underbrace{FP + PF^t + G\tilde{Q}G^t}_{a)} \underbrace{- K\tilde{R}K^t}_{b)}, \quad P(t_0) \text{ GITT} \\ K(t) &= PH^t\tilde{R}^{-1} \\ \dot{\hat{\underline{x}}}(t) &= F\hat{\underline{x}} + L\underline{u} + K(\underline{z} - H\hat{\underline{x}}), \quad \hat{\underline{x}}(t_0) \text{ GITT} \end{aligned}}$$

($F, G, \tilde{Q}, \tilde{R}, H$ KAN VÆRE TIDSVARIANTE)

a) SAMME SOM I PREDIKSJON FOR KONT. SYSTEM

b) REDUKSJON AV KOVARIANS PGA MÅLINGENE

EGENSKAPER:

* ESTIMATET ER FORVENTNINGSRETT: $E\{\hat{\underline{x}}(t)\} = E\{\underline{x}(t)\}$

* INNOVASJONEN $\gamma(t) = \underline{z}(t) - H\hat{\underline{x}}(t)$ ER HVIT

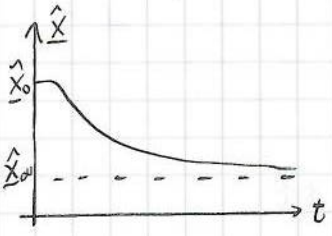
DVS. $E\{\gamma(t)\gamma^t(t)\} = (H\hat{P}H^t + \tilde{R})\delta(t-\tau)$

"KF KLARER Å TREKKE UT ALL INFORMASJON I MÅLINGENE"

* DIFF. LIGNING FOR ESTIMATET:

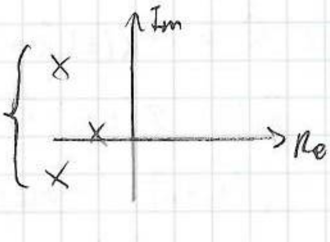
$$\dot{\hat{\underline{x}}} = F\hat{\underline{x}} + L\underline{u} + K(\underline{z} - H\hat{\underline{x}}) = \underbrace{(F - KH)\hat{\underline{x}}}_{\text{BESTEMMER INNSVINGNINGEN}} + \underbrace{K\underline{z} + L\underline{u}}_{\text{KJENT}}$$

DERSOM $K(t) \to K_\infty$ NÅR $t \to \infty$



KAN EGENVERDIENE FOR ESTIMATOREN BEREGNES

EGENVERDIER FOR $F - K_\infty H$



"BEVIS:"

VI BEVISER DE KONT. KF-LIGNINGENE VED Å FORETA EN GRENSEOVERGANG FRA DE DISKRETE KF-LIGNINGENE

i) $\Phi \approx I + F \cdot \Delta t$

ii) $t_k = k \Delta t$, VI LAR $\Delta t \to 0$ OG $k \to \infty$ SLIK AT PRODUKTET $\Delta t k$ HELE TIDEN ER t_k, ANTAR $t_0 = 0$

iii) $\Gamma = G \Delta t$, $Q = \tilde{Q}/\Delta t$ (FRA $\Gamma Q \Gamma^t \approx G \tilde{Q} G^t \Delta t$)

iv) $R \approx \tilde{R}/\Delta t$

$\Rightarrow$ SETTER APPROKSIMASJONENE i) - iv) INN I DE DISKRETE KF-LIGNINGENE OG LAR $\Delta t \to 0$

$\Rightarrow$ KF FOR KONT. SYSTEMER

EKSEMPEL:

$$\dot{x} = 0, \quad x(t_0) \sim N(\hat{x}_0, \hat{P}_0)$$
$$z = x + w \quad w(t) \sim N(0, \tilde{R}\delta(t-\tau))$$

FINN $\hat{P}(t)$, $K(t)$ OG $\hat{x}(t)$

$$\dot{\hat{P}} = -K(t)\tilde{R}K^t(t) = -\hat{P}H^t\tilde{R}^{-1}\tilde{R}\tilde{R}^{-1}H\hat{P} = -\frac{\hat{P}^2}{\tilde{R}}, \quad \hat{P}(0) = \hat{P}_0$$

$$\frac{d\hat{P}}{dt} = \frac{-\hat{P}^2}{\tilde{R}} \Rightarrow \int_{\hat{P}_0}^{\hat{P}} \frac{d\hat{P}}{\hat{P}^2} = -\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\tilde{R}} \Rightarrow \left[-\frac{1}{\hat{P}}\right]_{\hat{P}_0}^{\hat{P}} = \frac{1}{\tilde{R}}\left[t\right]_0^t$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\hat{P}} + \frac{1}{\hat{P}_0} = -\frac{t}{\tilde{R}} \Rightarrow \frac{1}{\hat{P}} = \frac{1}{\hat{P}_0} + \frac{t}{\tilde{R}} = \frac{\tilde{R} + t\hat{P}_0}{\tilde{R}\hat{P}_0}$$

$$\Rightarrow \hat{P}(t) = \frac{\tilde{R}\hat{P}_0}{\tilde{R} + t\hat{P}_0} = \frac{\hat{P}_0}{1 + t\frac{\hat{P}_0}{\tilde{R}}}$$

$$K(t) = \frac{\hat{P}_0/\tilde{R}}{1 + t\hat{P}_0/\tilde{R}}$$

GENERELT: $\dot{\hat{x}} = \overset{0}{F}\hat{x} + \overset{0}{L}u + K(z - \overset{1}{H}\hat{x})$

$$\Rightarrow \dot{\hat{x}} = -K(t)\hat{x} + K(t)z(t)$$

$$\hat{x}(t) = \Phi(t, t_0)\hat{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)K(\tau)z(\tau)\,d\tau \ldots$$

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = -K(t)\Phi(t, t_0) \quad \text{DER } \Phi(t_0, t_0) = 1$$

$$\dot{\Phi} = -\frac{\hat{P}_0/\tilde{R}}{1 - t\hat{P}_0/\tilde{R}} \cdot \Phi \quad \text{(SEPARABEL DIFF. LIGNING)}$$

NB! VI SER AT FOR Å BEREGNE ESTIMATET $\hat{x}(t)$ BLIR $z(t)$ OG DERMED OGSÅ HVIT STØYEN $w(t)$ INTEGRERT OPP (RANDOM WALK)

RICCATI - LIGNINGEN

FOR ET KONTINUERLIG SYSTEM ER RICCATILIGNINGEN:

$$\dot{P} = FP + PF^t + G\tilde{Q}G^t - PH^t\tilde{R}^{-1}HP \quad , \; P(t_0) \text{ GITT} \qquad (1)$$

MATRISE DIFF. LIGNING, IKKE - LINEÆR

DENNE TYPEN LIGNING FINNER MAN BÅDE I OPTIMALESTIMERING OG I OPTIMALREGULERING (DUALE PROBLEMER).

OPTIMALREGULERINGSPROBLEMET

GITT SYSTEMET

$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u}$$

FINN DEN $\underline{u}(t)$ SOM MINIMALISERER

$$J = \frac{1}{2}x(t_1)Sx(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \underline{x}^t(t)V\underline{x}(t) + \underline{u}^t(t)W\underline{u}(t)\, dt$$

DER V OG W ER VEIEMATRISER

OG SOM BRINGER SYSTEMET FRA $x(t_0) \rightarrow x(t_1)$

DEN ULINEÆRE RICCATI LIGNINGEN DUKKER OPP NÅR VI SKAL LØSE DETTE PROBLEMET

TIDSVARIANTE SYSTEMER:

RICCATILIGNINGEN (1) LØSES V.H.A. NUMERISK INTEGRASJON

TIDSINVARIANTE SYSTEMER:

VI KAN ENTEN BRUKE EN INTEGRASJONSRUTINE, ELLER EN METODE TILSVARENDE DEN VI HAR BRUKT FOR DEN LINEÆRE RICCATI-LIGNINGEN

VI DEFINERER: $P = XZ^{-1}$ DVS. $X = PZ$, DER $X(t_0) = P(t_0)$ $Z(t_0) = I$

VI DERIVERER MHP. TIDEN:

$$\dot{X} = \dot{P}Z + P\dot{Z}$$

SETTER INN FOR $\dot{P}$ OG ORDNER, FÅR VI:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F & G\tilde{Q}G^t \\ H^t\tilde{R}^{-1}H & -F^t \end{bmatrix}}_{F_a} \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} X(t_0) \\ Z(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(t_0) \\ I \end{bmatrix}$$

$$\dot{\Phi}_a(t,t_0) = F_a\Phi_a(t,t_0) \quad , \quad \Phi_a(t_0,t_0) = I$$

$$\Phi_a(t,t_0) = \text{EXPM}(F_a(t-t_0))$$

DETTE GIR, TILSVARENDE HOLLENG TILFELLER:

$$P(t) = \Phi_{a,11}(t,t_0)\,P(t_0) + \Phi_{a,12}(t,t_0)\left(\Phi_{a,21}(t,t_0)\,P(t_0)\,\Phi_{a,22}(t,t_0)\right)^{-1}$$

$$\Phi_a = \begin{bmatrix} \Phi_{a,11} & \Phi_{a,12} \\ \Phi_{a,21} & \Phi_{a,22} \end{bmatrix} \qquad \left(P(t) = X Z^{-1}\right) \qquad \begin{bmatrix} X(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} = \Phi_a \begin{bmatrix} X(t_0) \\ Z(t_0) \end{bmatrix}$$

EKSEMPEL: (RICCATILIGNING FOR KONT. SKALART SYSTEM)

$$\dot{x} = -x + \sqrt{2}\,v \qquad \Big| \qquad \tilde{Q} = \tilde{R} = 1, \quad P_0 \text{ GITT}$$

$$z = x + w \qquad \Big| \qquad F = -1 \quad H = 1 \quad G = \sqrt{2}$$

PROBLEM: FINN $P(t)$

$$P = X Z^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^{F_a} \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{y}} = F_a \underline{y}, \quad \begin{bmatrix} X(0) \\ Z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

VI VELGER Å LØSE DENNE DIFF. LIGNING V.HJ.A. EGENVERDIER OG EGENVEKTORER

$$|\lambda I - F_a| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-1) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 1 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{3}$$

EGENVEKTORENE: $(\lambda_i I - F_a)\underline{m}_i = \underline{0}, \quad i = 1,2$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 & -2 \\ -1 & \sqrt{3}-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} = \underline{0}, \quad \begin{bmatrix} -\sqrt{3}+1 & -2 \\ -1 & -\sqrt{3}-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

VELGER $m_{21} = 1$ OG $m_{22} = -1$

$$M = [\underline{m}_1 \ \underline{m}_2] = \begin{bmatrix} \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Lambda_a = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M^{-1} F_a M = \Lambda_a \quad \left(F_a = M \Lambda_a M^{-1}\right)$$

VELGER EN NY TILSTANDSVEKTOR $\underline{y} = M\underline{q} = \underline{m}_1 q_1 + \underline{m}_2 q_2$

$$\dot{\underline{q}} = M^{-1} F_a M \underline{q} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \underline{q}$$

$$q_1(t) = e^{\sqrt{3}t} q_1(0), \quad q_2(t) = e^{-\sqrt{3}t} q_2(0) \Rightarrow \underline{q}(t) = e^{\Lambda_a t} \underline{q}(0)$$

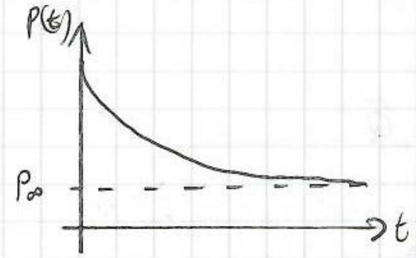
$$\underline{y}(t) = M\underline{q}(t) = M e^{\Lambda_a t} M^{-1} \underline{y}(0)$$

MYE REGNING $\Rightarrow$

$$P(t) = \frac{P_0 \cosh(\sqrt{3}t) + \frac{2-P_0}{\sqrt{3}} \sinh(\sqrt{3}t)}{\cosh(\sqrt{3}t) + \frac{P_0+1}{\sqrt{3}} \sinh(\sqrt{3}t)}$$

$$\sinh(x) = \tfrac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$$

$$\cosh(x) = \tfrac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$$



$t \to \infty$

KONTINUERLIG – DISKRET SYSTEMER

MODELL: $\dot{\underline{x}}(t) = F(t)\,\underline{x}(t) + L(t)\,\underline{u} + G(t)\,\underline{v}$

$\underline{z}_k = H_k \underline{x}_k + \underline{w}_k \quad , \quad t_k = k\Delta t \quad \underline{x}_k = \underline{x}(t_k)$

$x(t_0) \sim N(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0) \; , \; v(t) \sim N(\underline{0}, \tilde{Q}(t)\delta(t-\tau)) \; , \; w_k \sim N(\underline{0}, R\delta_{kl})$

$E\{\underline{x}(t_0)\, v^t(t)\} = 0 \; , \; E\{\underline{x}(t_0)\, \underline{w}_k^t\} = 0 \; , \; E\{\underline{v}(t)\, \underline{w}_k\} = 0$ ALLE t,k

PROBLEM: FINN ET LINEÆRT MINIMUM VARIANS ESTIMAT $(\hat{\underline{x}}_k, \hat{P}_k, \bar{\underline{x}}(t), \bar{P}(t))$ GITT MÅLINGENE $\underline{z}_k$

LØSNING: KONTINUERLIG – DISKRET KF

KOMBINERER DE KONTINUERLIGE PREDIKSJONSLIGNINGENE MED DE DISKRETE MÅLEOPPDATERINGENE:

$$\text{TO} \begin{cases} \dot{\bar{\underline{x}}} = F(t)\,\bar{\underline{x}} + L(t)\,\underline{u} \; , \; \bar{\underline{x}}(t_k^+) = \hat{\underline{x}}_k \\ \dot{\bar{P}} = F(t)P + PF^t(t) + G(t)\tilde{Q}G^t(t) \; , \; P(t_k^+) = \hat{P}_k \end{cases} \quad t \in [t_k^+, t_{k+1}]$$

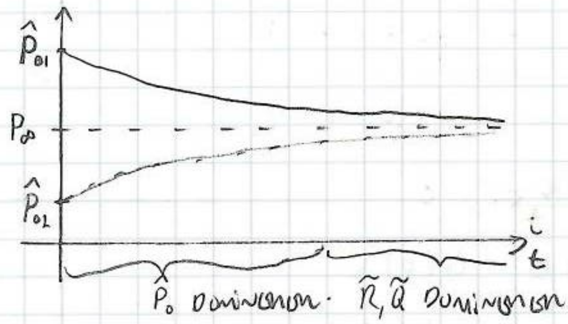
$$\text{MO} \begin{cases} \bar{\underline{x}}_k = \bar{\underline{x}}(t_k) \quad \bar{P}_k = \bar{P}(t_k) \\ \hat{\underline{x}}_k = \bar{\underline{x}}_k + K_k(\underline{z}_k - H\bar{\underline{x}}_k) \\ K_k = \bar{P}_k H_k^t (H_k \bar{P}_k H_k^t + R_k)^{-1} \\ P_k = (I - K_k H_k)\bar{P}_k \end{cases}$$

DET KONT-DISKRETE KF ER DET VANLIGSTE I ANVENDELSEN.

DERSOM SYSTEMET ER TIDSINVARIANT, DISKRETISERER OGSÅ TO-FORMLENE, ELLERS MÅ EN BRUKE INTEGRASJONSRUTINER (NUMERISK) PÅ DISSE

DIVERGENS AV KF

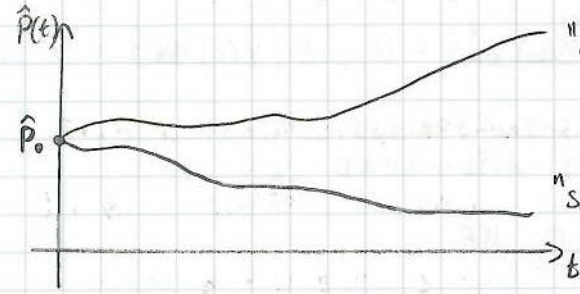
SAMMENHENGEN MELLOM $\hat{P}_0$, $\hat{P}(t)$, $\tilde{R}$, $\tilde{Q}$



$\hat{P}_{01}$ OG $\hat{P}_{02}$ VISER TO ULIKE FORLØP MED ULIKE INITIELLE KOVARIANSER

$\tilde{Q}$ OG $\tilde{R}$ BESTEMMER $\hat{P}_\infty$

SPØRSMÅLET OM VI HAR EN STASJONÆRVERDI $\hat{P}_\infty$, AVHENGER AV MATRISENE $\tilde{Q}$ OG $\tilde{R}$, OG AV SYSTEMLIGNINGENE.



TOLKNING AV KF-FORSTERKNINGEN

$K(t) = \hat{P}(t) H^t \tilde{R}^{-1}$, $K_k = \bar{P}_k H^t R^{-1}$

ANTA AT: $H = I$, DVS. VI MÅLER ALLE TILSTANDENE DIREKTE

$R = \text{Diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2)$, DVS. MÅLESTØYEN MELLOM ULIKE TILSTANDER ER UKORRELERT

$\hat{P} = \text{Diag}(\hat{P}_{11}, \hat{P}_{22}, \dots, \hat{P}_{nn})$

$\Rightarrow K(t) = \hat{P} H^t R^{-1} = \text{Diag}(\hat{P}_{11}/\sigma_1^2, \hat{P}_{22}/\sigma_2^2, \dots, \hat{P}_{nn}/\sigma_n^2)$

$\hat{x} = \bar{x}_k + K_k(z_k - H_k \bar{x}_k)$

DVS. VI LEGGER STOR VEKT PÅ NØYAKTIGE MÅLINGER (SMÅ σ_i^2) NÅR VI HAR STOR USIKKERHET I TILSTANDEN FRA FØR (STOR $\hat{P}_{ii}$)

KF-DIVERGENS

VI SIER AT KF DIVERGERER DERSOM $\delta \underline{x} = \underline{x} - \hat{\underline{x}}$ (FEILEN I EST.) ER STOR FOR STORE t SAMMENLIGNET MED KVADRATROTEN AV $\text{Diag}(\hat{P})$

$\|\delta x\| \gg \|\text{Diag}(\hat{P})^{1/2}\|$

SANN USIKKERHET (ESTIMERINGSFEILEN) ER MYE STØRRE ENN ESTIMERT

STOKASTISK STYRBARHET OG OBSERVERBARHET

Stokastisk styrbarhet:

HVORDAN PÅVIRKER PROSESSSTØYEN SYSTEMET?

SER PÅ ET SYSTEM MED $\hat{P}_0 = 0$ OG UTEN MÅLING

$$\Rightarrow \dot{\hat{P}} = F\hat{P} + \hat{P}F^t + G\tilde{Q}G^t \quad , \quad \hat{P}(t_0) = 0$$

VI HAR TIDLIGERE FUNNET:

$$\hat{P}(t) = \cancel{\Phi(t,t_0)\hat{P}(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) G\tilde{Q}G^t \Phi^t(t,\tau)\, d\tau$$

TILSTANDSLIGNINGENE:

$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + G\underline{v} \quad , \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

DEF: SYSTEMET ER STOKASTISK STYRBART HVIS OG BARE HVIS:

$$\hat{P}(t) > 0 \text{ FOR ALLE } t > t_0 \quad (\text{POSITIV DEFINITT}) \text{ OG } \hat{P}(t_0) = 0$$

TEOREM: DERSOM SYSTEMET $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + G\underline{v}$ ER TIDSINVARIANT, SÅ ER SYSTEMET STOKASTISK STYRBART HVIS OG BARE HVIS:

$$\text{RANG}\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix} = n_x \quad \text{OG} \quad \tilde{Q} > 0$$

NB! VED DISKRETISERING AV PROSESSSTØYEN FOR ET SYSTEM SOM IKKE ER STOKASTISK STYRBART, MÅ VI FØRST SPALTE UT DEN DETERMINISTISKE DELEN AV SYSTEMET.

EKS:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{T} + v$$

$$\dot{x}_2 = 0 \qquad F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{RANG}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{T} & \frac{1}{T^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 < n_x = 2$$

$\Rightarrow$ SYSTEMET ER IKKE STOKASTISK STYRBART. x_2 ER IKKE PÅVIRKET AV PROSESSSTØYEN, DVS. DETERMINISTISK.

Stokastisk observerbarhet:

VI ØNSKER Å SE PÅ HVORDAN MÅLINGENE I ET STOKASTISK SYSTEM GIR OSS INFORMASJON OM TILSTANDSVEKTOREN.

VI ANTAR AT $x(t_0)$ ER FULLSTENDIG UKJENT, DVS $\hat{P}(t_0) = \infty$ ELLER $\hat{P}^{-1}(t) = 0$

DEF: SYSTEMET $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u}$, $\underline{z} = H\underline{x} + \underline{w}$ HVOR $\underline{x}(t_0)$ ER UKJENT SIES Å VÆRE STOKASTISK OBSERVERBART HVIS OG BARE HVIS

$$\hat{P}^{-1}(t) > 0 \text{ FOR } t > t_0$$

$P^{-1}(t) \leftarrow$ INFORMASJONSMATRISEN

HVA BLIR DIFF. LIGN. FOR $P^{-1}(t)$?

$$\dot{\hat{P}} = F\hat{P} + \hat{P}F^t - \hat{P}H^t\tilde{R}^{-1}H\hat{P} \quad \text{(ULINEÆR RICCATI MED } \tilde{Q} = 0\text{)}$$

$$\hat{P}\cdot\hat{P}^{-1} = I$$

$$\frac{d}{dt}(\hat{P}\cdot\hat{P}^{-1}) = \dot{\hat{P}}\hat{P}^{-1} + \hat{P}\frac{d}{dt}(\hat{P}^{-1}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{P}^{-1} = -\hat{P}^{-1}\dot{\hat{P}}\hat{P}^{-1} = -\hat{P}^{-1}(F\hat{P} + \hat{P}F^t - \hat{P}H^t\tilde{R}^{-1}H\hat{P})\hat{P}^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\hat{P}^{-1} = -\hat{P}^{-1}F - F^t\hat{P}^{-1} + H^t\tilde{R}^{-1}H \quad , \quad \hat{P}^{-1}(t_0) = 0}$$

DENNE DIFF. LIGN. KAN LØSES VHA. METODENE VI ALLEREDE HAR UTVIKLET FOR Å BEREGNE $\hat{P}^{-1}(t)$ OG SJEKKE $\hat{P}^{-1}(t) > 0$

TEOREM: DET TIDSINVARIANTE SYSTEMET

$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u} + G\underline{v} \quad , \quad \underline{z} = H\underline{x} + \underline{w}$$

SAMME SOM I DET DISKRETE TILFELLE

ER STOKASTISK OBSERVERBART HVIS OG BARE HVIS:

$$\text{RANG}\left[H^t \;\; F^tH^t \;\; (F^t)^2H^t \; \cdots \; (F^t)^{n_x-1}H^t\right] = n_x \quad \text{OG} \quad 0 < \tilde{Q} < \infty, \; 0 < \tilde{R} < \infty$$

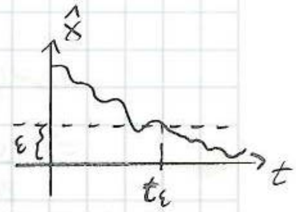
STABILITET

DEFINISJON:

DET KONTINUERLIGE KF SIES Å VÆRE STABILT HVIS OG BARE HVIS LØSNINGEN AV DIFF. LIGN

$\dot{\hat{\underline{x}}} = (F - KH)\hat{\underline{x}}$ TILFREDSSTILLER:

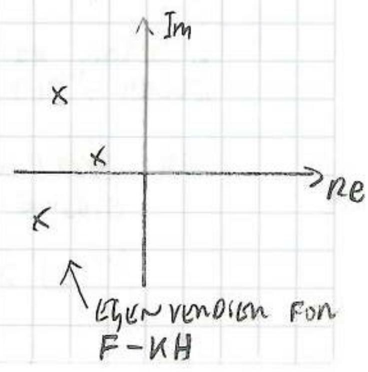
- FOR EN HVER $\varepsilon > 0$ FINNES EN $t_\varepsilon > t_0$ SLIK AT $\|\hat{\underline{x}}(t)\| < \varepsilon$ FOR ALLE $t > t_\varepsilon$



DERSOM $\|\hat{\underline{x}}(t)\| \to 0$ NÅR $t \to \infty$ HAR VI ASYMPTOTISK STABILITET

TEOREM: DET TIDSINVARIANTE SYSTEMET $\dot{\hat{\underline{x}}} = (F - KH)\hat{\underline{x}}$ ER ASYMPTOTISK STABILT HVIS OG BARE HVIS:

EGENVERDIENE FOR F-KH LIGGER I VENSTRE HALVPLAN



TEOREM: DERSOM SYSTEMET $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u} + G\underline{v}$, $\underline{z} = H\underline{x} + \underline{w}$ ER STOKASTISK STYRBART OG OBSERVERBART, OG $0 < \tilde{Q} < \infty$, $0 < \tilde{R} < \infty$, SÅ ER SYSTEMET

$\dot{\hat{\underline{x}}} = (F - KH)\hat{\underline{x}}$ ASYMPTOTISK STABILT ($K(t) \to K_\infty$ NÅR $t \to \infty$)

STABILITET ER VIKTIG FORDI EVENTUELLE FORSTYRRELSER DA DØR UT. FORSTYRRELSENE KAN VÆRE UMODELLERT STØY ELLER FEIL I FILTERMODELLEN

SELV OM KF ER EN OPTIMAL ESTIMATOR, TRENGER DET IKKE VÆRE STABILT. VI KAN F.EKS. HA IKKE-OBSERVERBARE TILSTANDER

WIENERFILTERET

VI ANTAR AT VÅRT SYSTEM ER TIDSINVARIANT, OG AT DET HAR NÅDD EN STASJONÆRTILSTAND. (+ STOKASTISK STYRBART & OBSERVERBART)

DVS AT FOR STOR t ($t \gg t_0$), HAR VI:

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = (F - K_\infty H)\hat{\underline{x}} + K_\infty \underline{z}$$

LAPLACE TRANSFORMERER:

$$s\,\hat{\underline{x}}(s) = (F - K_\infty H)\hat{\underline{x}}(s) + K_\infty \underline{z}(s)$$

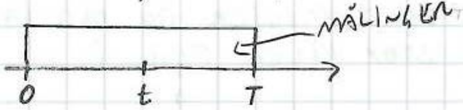
$$\Rightarrow \hat{\underline{x}}(s) = \overbrace{\left(I \cdot s - (F - K_\infty H)\right)^{-1} K_\infty}^{Y(s)} \underline{z}(s)$$

$Y(j\omega)$: WIENERFILTERET

GLATTING I LINEÆRE STOKASTISKE SYSTEMER

VI SER HER PÅ ET KONTINUERLIG SYSTEM, MENS DE I BOKA SER PÅ ET DISKRET SYSTEM.

TYPER GLATTING:



1. FAST INTERVALL-GLATTING:

   T: FAST, $0 < t < T$, FINN $\hat{\underline{x}}(t|T)$, $\hat{P}(t|T)$

2. FAST FORSINKELSE-GLATTING:

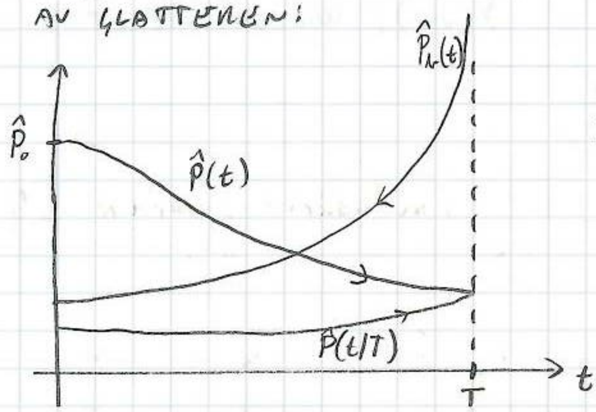
   T: ØKER, $T-t$: KONSTANT, FINN $\hat{\underline{x}}(t|T)$, $\hat{P}(t|T)$

3. FASTPUNKTGLATTER:

   T: ØKER, t: FAST, FINN $\hat{\underline{x}}(t|T)$, $\hat{P}(t|T)$

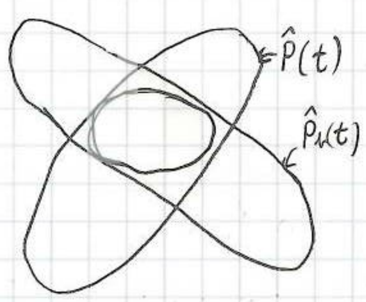
VI SER I UNIK4500 BARE PÅ FAST INTERVALL-GLATTING

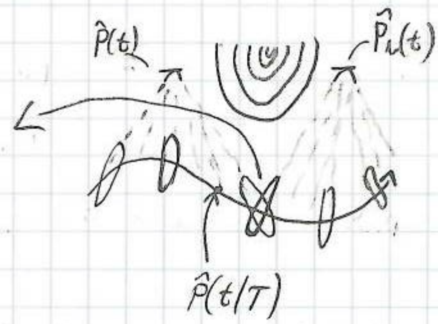
VI ØNSKER Å SE PÅ DEN SÅKALTE FOROVER-BAKOVER-FORMULERINGEN AV GLATTEREN:



FOR $t=T$ SÅ ER $\hat{P}(t|T) = \hat{P}(t)$

GITT ET 2D EKSEMPEL PÅ KOMBINASJON AV TO MÅLINGER:





AVHENGIG AV MÅLEGEOMETRIEN OG SENSORENE KAN GLATTING GI STORE FORBEDRINGER I ESTIMATORS USIKKERHET

FOROVER FILTERET

DETTE ER ET VANLIG KALMANFILTER:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\hat{\underline{x}}} &= F\hat{\underline{x}} + K(t)(\underline{z} - H\hat{\underline{x}}), \quad \hat{\underline{x}}_0 \text{ GITT} \\ \dot{\hat{P}} &= F\hat{P} + \hat{P}F^t + G\tilde{Q}G^t - \hat{P}H^t\tilde{R}^{-1}H\hat{P}, \quad \hat{P}_0 \text{ GITT} \\ K(t) &= \hat{P}H^t\tilde{R}^{-1} \end{aligned}\right\} \text{FF (1) (FOROVERFILTER)}$$

BAKOVERFILTERET

VI MÅ SKRIVE OM KF-LIGNINGENE SLIK AT TILSTANDEN I SLUTTIDSPUNKTET KAN VÆRE FULLSTENDIG UKJENT, DVS:

$$\hat{P}_r^{-1}(T) = 0$$

VI ØNSKER OGSÅ Å SKIFTE DEN FRIE VARIABELEN t SLIK AT TIDEN STARTER I $t = T$ OG GÅR TIL $t = 0$:

$$\tau = T - t \quad , \quad d\tau = -dt$$

$$\hat{S} = \hat{P}_r^{-1} \quad : \text{INFORMASJONSMATRISE}$$

$$\hat{\underline{s}} = \hat{P}_r^{-1}\hat{\underline{x}}_r = \hat{S}\hat{\underline{x}}_r \quad , \quad \hat{\underline{x}}_r = \hat{S}^{-1}\hat{\underline{s}}$$

VI ØNSKER Å FORMULERE LIGNINGENE FOR BAKOVERFILTERET I $\hat{\underline{s}}$ OG $\hat{S}$ ISTEDEN FOR: $\hat{\underline{x}}_r$ OG $\hat{P}_r$, OG MED τ SOM FRI VARIABEL. DETTE GIR:

$$\hat{\underline{s}}(t=T) = \hat{\underline{s}}(\tau=0) = \hat{S}(t=T)\hat{\underline{x}}_r(t=T) = \hat{P}_r^{-1}(t=T)\hat{\underline{x}}_r(t=T) = 0$$

$$\hat{\underline{s}}(\tau=0) = \hat{\underline{s}}(0) = 0$$

$$\hat{S}(\tau=0) = \hat{S}(0) = 0$$

I UTLEDNINGEN BENYTTER VI:

$$\hat{P}_r \cdot \hat{P}_r^{-1} = I = \hat{P}_r \cdot \hat{S} = \hat{S} \cdot \hat{P}_r$$

VI DERIVERER MHP. τ; $d\tau = -dt$:

SETT OPP KF-LIGNINGENE FOR $\hat{\underline{x}}_r$ OG $\hat{P}_r$, ERSTATT $\hat{\underline{x}}_r$ MED $\hat{S}^{-1}\hat{\underline{s}}$ OG UTNYTT SAMMENHENGEN MELLOM $\hat{S}$ OG $\hat{P}_r^{-1}$, OG:

$$\dot{\hat{P}}_r\hat{S} + \hat{P}_r\dot{\hat{S}} = 0 \quad , \quad \dot{\hat{P}}_r = -\hat{P}_r\dot{\hat{S}}\hat{S}^{-1}$$

ETTER INNSETTING:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\hat{\underline{s}}(\tau) &= (F^t - \hat{S}G\tilde{Q}G^t)\hat{\underline{s}}(\tau) + H^t\tilde{R}^{-1}\underline{z}(\tau), \quad \hat{\underline{s}}(0) = \underline{0} \\ \frac{d}{d\tau}\hat{S}(\tau) &= \hat{S}F + F^t\hat{S} + H^t\tilde{R}^{-1}H - \hat{S}G\tilde{Q}G^t\hat{S}, \quad \hat{S}(0) = 0 \end{aligned}\right\} BF\ (2)$$

KOMBINERER FF-ESTIMATENE MED BF-ESTIMATENE

PROBLEM: HVORDAN KAN VI KOMBINERE (UTNYTTE) $\hat{\underline{s}}$ OG $\hat{\underline{x}}$, $\hat{S}$ OG $\hat{P}$, FOR Å BEREGNE $\hat{\underline{x}}(t|T)$ OG $\hat{P}(t|T)$.

LØSNING: FISHER ESTIMATOREN KAN BRUKES FORDI VI KAN SE PÅ $\hat{\underline{x}}(t)$ OG $\hat{\underline{s}}(t)$ SOM TO UAVHENGIGE MÅLINGER AV DEN FULLSTENDIG UKJENTE TILSTAND $x(t)$

FISHER ESTIMERING GENERELT:

$\underline{z} = H\underline{x} + \underline{w}$, x: FULLSTENDIG UKJENT Á PRIORI, $\underline{w} \sim N(\underline{0}, R)$

$$\hat{\underline{x}}_F = \hat{P}_F H^t R^{-1} \underline{z} \qquad (3)$$

$$\hat{P}_F = (H^t R^{-1} H)^{-1} \qquad (4)$$

FISHER ESTIMERING FOR GLATTING:

$$\underbrace{\underline{z} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}} \\ \hat{\underline{x}}_r \end{bmatrix}}_{\text{MÅLEVERDI}} = \underbrace{H\underline{x} + \underline{w}}_{\text{MÅLEMODELL}}$$

$$H = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{bmatrix} \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\underline{0}, \begin{bmatrix} \hat{P} & 0 \\ 0 & \hat{P}_r \end{bmatrix}\right) = N(\underline{0}, R)$$

BRUKER (4) FOR Å FINNE GLATTEKOVARIANSEN:

$$\hat{P}(t|T) = (H^t R^{-1} H)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P} & 0 \\ 0 & \hat{P}_r \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \left(\hat{P}^{-1}(t) + \hat{P}_r^{-1}(t)\right)^{-1} = \underline{\left(\hat{P}^{-1}(t) + \hat{S}(t)\right)^{-1}}$$

TILSTANDSESTIMATET ER GITT AV (3):

$$\hat{\underline{x}}(t|T) = \hat{P}(t|T) \begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P} & 0 \\ 0 & \hat{P}_r \end{bmatrix}^{-1} \cdot \underline{z} = \hat{P}(t|T) \begin{bmatrix} \hat{P} & \hat{P}_r \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}} \\ \hat{\underline{x}}_r \end{bmatrix}$$

$$= \hat{P}(t|T)\left(\hat{P}^{-1}\hat{\underline{x}} + \hat{S}\hat{\underline{x}}_r\right) = \underline{\hat{P}(t|T)\left(\hat{P}^{-1}\hat{\underline{x}} + \hat{\underline{s}}\right)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{P}(t|T) &= \left(\hat{P}^{-1}(t) + \hat{S}(t)\right)^{-1} \\ \hat{\underline{x}}(t|T) &= \hat{P}(t|T)\left(\hat{P}^{-1}\hat{\underline{x}}(t) + \hat{\underline{s}}(t)\right) \end{aligned}}$$

GLATTBARHET

DEF: EN TILSTAND ER GLATTBAR HVIS OG BARE HVIS EN OPTIMAL GLATTER GIR ET TILSTANDSESTIMAT SOM HAR MINDRE KOVARIANS ENN TILSTANDSESTIMATET MAN FÅR VED Å EKSTRAPOLERE DET OPTIMALE FILTERESTIMAT I SLUTTIDSPUNKTET TILBAKE TIL TIDSPUNKT t, DVS. HVIS:

$$\hat{P}(t|T) < \Phi(t,T)\hat{P}(T)\Phi^t(t,T)$$

DET EKSTRAPOLERTE TILSTANDSESTIMAT:

$$\underline{\hat{x}}'(t) = \Phi(t,T)\underline{\hat{x}}(T)$$

EKS:

$$\dot{x} = 0 \quad , \quad \underline{z} = H\underline{x} + \underline{w} \quad , \quad \underline{w} \sim N(\underline{0}, \tilde{R}\delta(t-\tau))$$

KF:

$$\dot{\hat{P}} = -\hat{P}H^t\tilde{R}^{-1}H$$, ER SYSTEMET GLATTBART ?

RTS - FORMLENE (SE NOTAT FORELESNING 13) GIR:

$$\dot{\hat{P}}(t/T) = 0 \quad , \quad \hat{P}(T/T) = \hat{P}(T)$$

$$\hat{P}(t/T) = \hat{P}(T) \quad , \quad \text{HER ER } \Phi(t,T) = I \quad \left(e^{F\delta t} = e^0 = I\right)$$

$\Rightarrow$ IKKE GLATTBART

TEOREM: BARE TILSTANDER SOM ER STOKASTISK STYRBARE ER GLATTBARE

UTVIDELSE AV ANVENDELSESOMRÅDE FOR KF

FARGET PROSESSTØY

GITT SYSTEMET: $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + G\underline{v}$, $\underline{x}(t_0) \sim N(\hat{\underline{x}}_0, \hat{P}_0)$

$\dot{\underline{v}} = F_v\underline{v} + \underline{v}_1$, $\underline{v}_1 \sim N(\underline{0}, \tilde{Q}_1\delta(t-\tau))$

$\underline{v}(t_0) \sim N(\hat{\underline{v}}_0, \hat{P}_{v_0})$

$\underline{z} = H\underline{x} + \underline{w}$, $\underline{w} \sim N(\underline{0}, \tilde{R}\delta(t-\tau))$

DETTE KAN SETTES PÅ STANDARDFORM:

$\tilde{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{v} \end{bmatrix}$, $\tilde{\underline{v}} = \underline{v}_1$ $\quad$ ($\underline{x}(t_0)$, $\underline{v}_1(t)$ og $w(\tau)$ ER UKORRELERTE)

$$\left.\begin{aligned} \dot{\tilde{\underline{x}}} &= \begin{bmatrix} F & G \\ 0 & F_v \end{bmatrix}\tilde{\underline{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}\tilde{\underline{v}} = \tilde{F}\tilde{\underline{x}} + \tilde{G}\tilde{\underline{v}} \\ \underline{z} &= \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix}\tilde{\underline{x}} + \underline{w} = \tilde{H}\tilde{\underline{x}} + \underline{w} \end{aligned}\right\} \text{STANDARDFORM}$$

KORRELASJON MELLOM PROSESS- OG MÅLESTØY

GITT SYSTEMET: $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + G\underline{v}$, $\underline{x}(t_0) \sim N(\hat{\underline{x}}_0, \hat{P}_0)$

$\underline{v}(t) \sim N(\underline{0}, \tilde{Q}\delta(t-\tau))$

$\underline{z} = H\underline{x} + \underline{w}$, $\underline{w}(t) \sim N(\underline{0}, \tilde{R}\delta(t-\tau))$

$\underline{x}(t_0)$ OG $\underline{v}(t)$ ER UKORRELERTE, $x(t_0)$ OG $w(t)$ ER UKORRELERTE

$E\{\underline{v}(t)\, w^t(\tau)\} = C(t)\,\delta(t-\tau)$

DVS $\underline{v}$ OG $\underline{w}$ ER KORRELERTE

VI FÅR SYSTEMET OVER PÅ STANDARDFORM VED Å ADDERE FØLGENDE 0-UTTRYKK TIL PROSESSLIGNINGEN:

$G C \tilde{R}^{-1}(\underline{z} - H\underline{x} - \underline{w})$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= F\underline{x} + G\underline{v} + GC\tilde{R}^{-1}(\underline{z} - H\underline{x} - \underline{w}) \\ &= (F - GC\tilde{R}^{-1}H)\underline{x} + GC\tilde{R}^{-1}\underline{z} - GC\tilde{R}^{-1}\underline{w} + G\underline{v} \\ &= \underbrace{(F - GC\tilde{R}^{-1}H)}_{\tilde{F}}\underline{x} + \underbrace{(G\underline{v} - GC\tilde{R}^{-1}\underline{w})}_{\tilde{G}\tilde{\underline{v}}} + GC\tilde{R}^{-1}\underline{z} \end{aligned}$$

$\tilde{\underline{v}} = \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \underline{w} \end{bmatrix}$

$\tilde{G} = \begin{bmatrix} G & -GC\tilde{R}^{-1} \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \tilde{F}\underline{x} + \tilde{G}\tilde{\underline{v}} + GC\tilde{R}^{-1}\underline{z} \\ \underline{z} &= H\underline{x} + \underline{w} \end{aligned}\right\} \text{STANDARDFORM}$$

PÅDRAG

$x(t_0)$ OG $\tilde{\underline{v}}(t)$: UKORRELERT , $x(t_0)$ OG $\underline{w}(t)$: UKORRELERT,

$G\,\underline{v}(t)$ og $\underline{w}(\tau)$: UKORRELERT :

$$E\{(G\underline{v}(t) - GC\tilde{R}^{-1}\underline{w}(t))\underline{w}^t(\tau)\}$$

$$= E\{G\underline{v}(t)\underline{w}^t(\tau) - GC\tilde{R}^{-1}\underline{w}(t)\underline{w}^t(\tau)\}$$

$$= GC\delta(t-\tau) - GC\tilde{R}^{-1}\tilde{R}\delta(t-\tau)$$

$$= GC\delta(t-\tau) - GC\delta(t-\tau) = (GC-GC)\delta(t-\tau) = 0\,\delta(t-\tau) = 0$$

PGA DIRAC PULS KUN DEFINERT UNDER INTEGRAL

FARGET MÅLESTØY

GITT SYSTEMET: $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + G\underline{v}$

$$\underline{z} = H\underline{x} + \underline{w}$$

VI HAR DE VANLIGE ANTAGELSER FOR USIKKERHET I INITIALBETINGELSER, PROSESS- OG MÅLESTØY, MEN MÅLESTØYEN ER FARGET.

$\dot{\underline{w}} = F_w\underline{w} + \underline{v}_w$, $\underline{v}_w \sim N(\underline{0}, \tilde{Q}_w\delta(t-\tau))$, $\underline{v}_w$ og $\underline{v}$ er ukorrelerte

NB! VI KAN IKKE UTVIDE TILSTANDSVEKTOREN DIREKTE FORDI DA VIL MÅLELIGNINGEN BLI DETERMINISTISK

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{w} \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} H \\ I \end{bmatrix}\tilde{x} \quad \text{DVS} \quad \tilde{R} = 0$$

PROBLEM: HVORDAN FÅ DETTE SYSTEMET OVER PÅ STANDARDFORM?

LØSNING: DEFINERER EN NY MÅLELIGNING

$$z_1 = \dot{\underline{z}} - F_w\underline{z}$$

HVIS H ER TIDSVARIANT

$$= H\dot{\underline{x}} + \dot{\underline{w}} - F_w\underline{z} + \dot{H}\underline{x}$$

$$= (\dot{H} + HF - F_wH)\underline{x} + HG\underline{v} + \underline{v}_w + F_w\underline{w} = \tilde{H}\underline{x} + \tilde{\underline{w}}$$

DENNE MÅLELIGNINGEN HAR HVIT MÅLESTØY:

$$E\{\tilde{\underline{w}}(t)\tilde{\underline{w}}^t(\tau)\} = E\{(HG\underline{v} + \underline{v}_w)(HG\underline{v} + \underline{v}_w)^t\}$$

$$= (HGQG^tH^t + \tilde{Q}_w)\delta(t-\tau)$$

HAR VI KORRELASJON MELLOM $\underline{v}$ OG $\tilde{\underline{w}}$?

$$E\{\tilde{\underline{w}}(t)\underline{v}^t(\tau)\} = HG\tilde{Q}\,\delta(t-\tau)$$

VI HAR TIDLIGERE LØST PROBLEMET MED KORRELASJON MELLOM MÅLESTØYEN OG PROSESSTØYEN

INFORMASJONSFILTERET

VI HAR ALLEREDE SETT PÅ VARIANTER AV DETTE FILTERET I FORBINDELSE MED STOKASTISK OBSERVERBARHET OG FOR BAKOVER-FILTERET I FORBINDELSE MED GLATTING.

DERSOM NOEN AV TILSTANDENE ER FULLSTENDIG UKJENTE VED t_0 MÅ KF FORMULERES VHA:

$\hat{S} = \hat{P}^{-1}$: INFORMASJONSMATRISEN

$\hat{\underline{y}} = \hat{S}\,\hat{\underline{x}}$

SUBOPTIMAL FILTERDESIGN

- HVORFOR SUBOPTIMAL KF?
- MODELLREDUKSJON
- VERIFIKASJON AV FILTERDESIGN
- FORENKLEDE BEREGNINGER AV KF-FORSTERKNINGEN

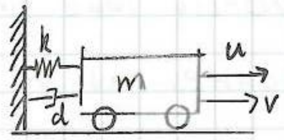
SE KAP. 13 NOTATET.

ANALYSE AV SUBOPTIMALE KF

SE NOTAT 7: MONTE CARLO- OG KOVARIANSANALYSE AV KF

FYSISK SYSTEM, MODELLEN OG ESTIMATOREN

EKS:



FYSISK SYSTEM ①

MÅ ANSLÅ/MÅLE VERDIENE FOR k, d og m

VI VELGER KOORDINATSYSTEM OG BRUKER N. 2. LOV FOR Å SETTE OPP DIFF. LIGNINGEN.

SIMULERINGSMODELL / SYSTEMMODELL ②

$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + G\underline{v} + L\underline{u}$$

DERSOM VI GIR KRAFTA VHA EN ELEKTRISK MOTOR, KAN u BETEGNE SPENNING OG ANTALL TILSTANDER KAN F. EKS BLI $n_x = 5$

$\Rightarrow$ FORENKLER SYSTEMMODELL

FILTERMODELL (F. EKS. $n_x^* = 3$) ③

$$\dot{\underline{x}}^* = F^*\underline{x}^* + G^*\underline{v}^* + L^*\underline{u}$$

$\Downarrow$

KALMANFILTER/ESTIMATOR ④

BLOKKSKJEMA:

1. SANNTIDSSKJEMA

2. ANALYSESKJEMA

PROBLEM

FINN MIDDELVERDI OG KOVARIANS TIL ESTIMERINGSFEILEN

$$\hat{e}_k = N\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^*$$

N: PLUKKER UT DE TILSTANDENE SOM ER MED I KF (OFTE ER $N = [I^* : 0]$)

MONTE CARLO SIMULERING

KAN BRUKES BÅDE PÅ LINEÆRE OG ULINEÆRE SYSTEMER

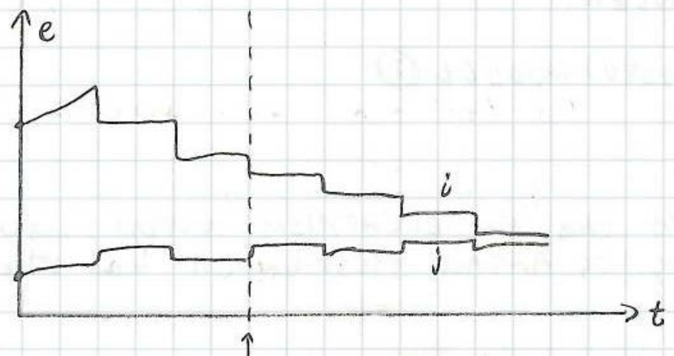
MC-SIMULERINGEN BRUKER TILSTANDSLIGNINGENE OG KAN DERFOR AVSLØRE FORTEGNSFEIL

VED KOVARIANS SIMULERINGEN KAN VISSE FORTEGNSFEIL IKKE AVSLØRES

SIMULERER SYSTEMMODELL OG KF, STØYEN TREKKES FRA DE ANGITTE FORDELINGER

$\Rightarrow \underline{x}_k$ OG $\hat{\underline{x}}_k^*$: $\hat{\underline{e}}_k = N\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^*$

$\underline{x}_k$ OG $\bar{\underline{x}}_k$: $\bar{\underline{e}}_k = N\underline{x}_k - \bar{\underline{x}}_k^*$



BEREGNER MIDDELVERDI OG KOVARIANS

$\hat{\hat{e}}_k^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{e}_k^i$ ← MC-SIMULERINGSNUMMER, ← TIDSPUNKT

KOVARIANSANALYSE

BRUKES BARE FOR LINEÆRE SYSTEMER, AVSLØRER IKKE ALLE FORTEGNSFEIL

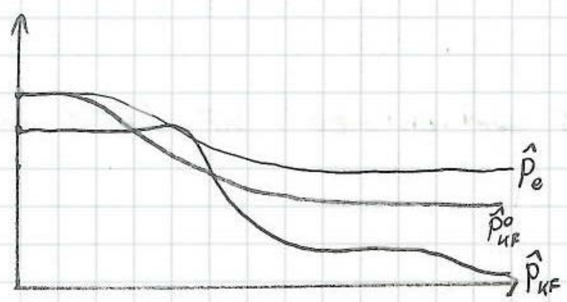
BEREGNER "SANNE" MIDDELVERDIER OG KOVARIANSEN, DVS. $E\{\hat{e}_k\}$ OG $KOV\{\hat{e}_k\}$

KOMMENTARER :

* $\hat{P}_{KF}$: KOVARIANSENE KF BEREGNER

  $\hat{P}_{KF}^{o}$: KOVARIANSENE ET OPTIMALT KF BEREGNER (SYSTEMMODELL = FILTERMODELL)

  $\hat{P}_{e}$: SANNE KOVARIANSER (SYSTEMMODELL ≠ FILTERMODELL)



EKSAMEN

FEILBUDSJETT

SE NOTATET FORELESNING 14.

BRUK AV KF PÅ ULINEÆRE SYSTEMER

VEKTOR OG MATRISEDERIVASJON

SE NOTAT 2

LINEARISERT KF (LKF)

GITT SYSTEMMODELLEN:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) + G\underline{v} \quad (1) \qquad E\{\underline{x}(t_0)\} = \bar{\underline{x}}_0 \quad \text{KOV}\{\underline{x}(t_0)\} = \bar{P}_0$$

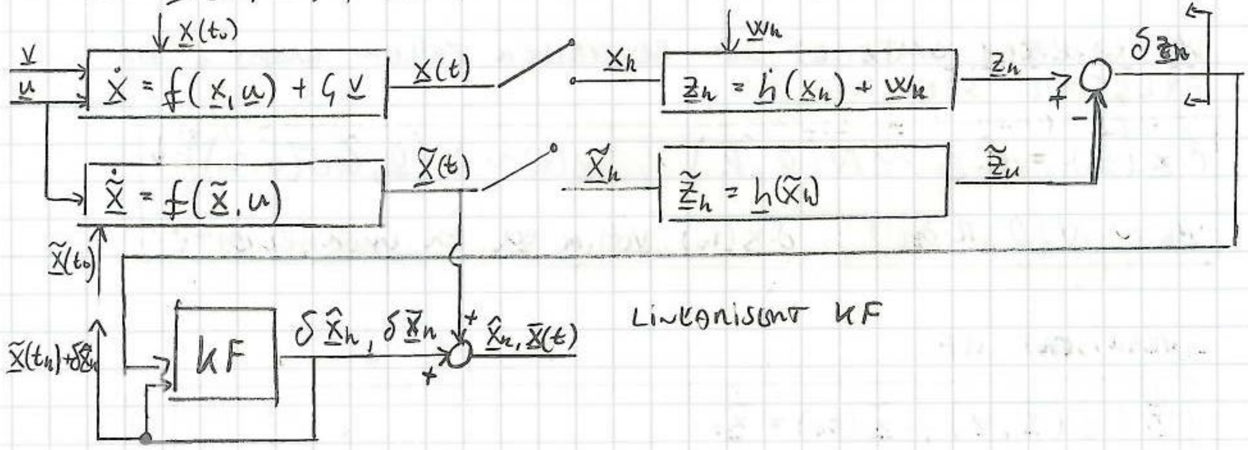
$$\underline{z}_k = \underline{h}_k(x) + \underline{w}_k \quad (2) \qquad E\{\underline{v}(t)\,\underline{w}_k^t\} = 0$$

$$E\{\underline{x}(t_0)\,\underline{v}^t(t)\} = 0, \quad E\{\underline{v}(t)\} = 0, \quad E\{v(t)\,v^t(\tau)\} = \tilde{Q}\,\delta(t-\tau)$$

$$E\{\underline{x}(t_0)\,\underline{w}_k^t\} = 0, \quad E\{\underline{w}_k\} = 0, \quad E\{\underline{w}_k\,\underline{w}_l^t\} = R\,\delta_{kl}$$

NOMINELL LØSNING AV (1) (VHA. EN INTEGRASJONSMETODE):

$$\dot{\tilde{\underline{x}}} = \underline{f}(\tilde{\underline{x}}, \underline{u}), \quad \tilde{\underline{x}}(t_0) = \bar{\underline{x}}_0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\underline{x}}(t)$$



MÅLELIGNINGA:

$$\delta\underline{z}_k = \underline{z}_k - \tilde{\underline{z}}_k = \underline{h}(\underline{x}_k) + \underline{w}_k - \underline{h}(\tilde{\underline{x}}_k) \quad (3)$$

$$\delta\underline{x}_k = \underline{x}_k - \tilde{\underline{x}}_k, \quad \underline{x}_k = \tilde{\underline{x}}_k + \delta\underline{x}_k \quad (4)$$

SETTER (4) INN I (3) OG TAYLORUTVIKLER

$$\delta\underline{z}_k = \underline{h}(\tilde{\underline{x}}_k + \delta\underline{x}_k) + \underline{w}_k - h(\tilde{\underline{x}}_k)$$

$$= \underline{h}(\tilde{\underline{x}}_k) + \left.\frac{\partial h}{\partial \underline{x}^t}\right|_{\tilde{\underline{x}}_k} \delta\underline{x}_k + \text{H.O.L.} + \underline{w}_k - h(\tilde{\underline{x}}_k)$$

DERSOM VI SER BORT FRA HØYERE ORDENS LEDD:

$$\boxed{\begin{aligned} \delta \underline{z}_k &= H(\tilde{\underline{x}}_k)\delta \underline{x}_k + \underline{w}_k \\ H &= \frac{\partial h}{\partial \underline{x}^t}\bigg|_{\tilde{\underline{x}}_k} \end{aligned}} \qquad (5)$$

PROSESSLIGNINGA:

$$\delta \underline{x}(t) = \underline{x}(t) - \tilde{\underline{x}}(t), \quad \underline{x}(t) = \tilde{\underline{x}}(t) + \delta \underline{x}(t)$$

$$\delta \dot{\underline{x}} = \dot{\underline{x}} - \dot{\tilde{\underline{x}}} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) + G\underline{v} - \underline{f}(\tilde{\underline{x}},\underline{u}) = \underline{f}(\tilde{\underline{x}}+\delta\underline{x},\underline{u}) + G\underline{v} - \underline{f}(\tilde{\underline{x}},\underline{u})$$

$$= \underline{f}(\tilde{\underline{x}},\underline{u}) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}^t}\bigg|_{\tilde{\underline{x}}} \delta \underline{x} + \text{H.O.L.} + G\underline{v} - \underline{f}(\tilde{\underline{x}},\underline{u})$$

VI SER BORT FRA H.O.L.

$$\boxed{\begin{aligned} \delta \dot{\underline{x}} &= F(\tilde{\underline{x}},\underline{u})\delta \underline{x} + G\underline{v} \\ F(\tilde{\underline{x}},\underline{u}) &= \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}^t}\bigg|_{\tilde{\underline{x}}_k} \end{aligned}} \qquad (6)$$

LIGNINGENE (5) OG (6) BESKRIVER ET LINEÆRT TIDSVARIANT STOKASTISK SYSTEM

DVS. ET SYSTEM VI KAN LAGE ET KF FOR OG ESTIMERE $\delta\underline{x}(t)$ og $\delta\underline{x}_k$

DET LINEÆRE SYSTEMET SOM BESKRIVER FEILEN ANTAS Å HA FØLGENDE STØYER:

$$\boxed{\begin{aligned} &\delta \underline{x}(t_0) = \delta \underline{x}_0 \sim N(\underline{0}, \bar{P}_0), \quad \underline{v}(t) \sim N(\underline{0}, \tilde{Q}\cdot\delta(t-\tau)) \\ &\underline{w}_k \sim N(\underline{0}, R\cdot\delta_{kl}), \quad \delta\underline{x}(t_0), \underline{v}(t) \text{ og } \underline{w}_k \text{ ER UKORRELERTE.} \end{aligned}}$$

LINEARISERT KF:

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{\tilde{\underline{x}}} = \underline{f}(\tilde{\underline{x}},\underline{u}), \quad \tilde{\underline{x}}(t_0) = \bar{\underline{x}}_0 \\ &\delta\hat{\underline{x}}_k = \delta\bar{\underline{x}}_k + K_k(\delta\underline{z}_k - H(\tilde{\underline{x}}_k)\delta\bar{\underline{x}}_k) \\ &\delta\dot{\bar{\underline{x}}} = F(\tilde{\underline{x}},\underline{u})\delta\bar{\underline{x}}, \quad \delta\bar{\underline{x}}(t_k) = \delta\hat{\underline{x}}_k \\ &\dot{\bar{P}} = FP + PF^t + G\tilde{Q}G^t, \quad \bar{P}(t_k) = \hat{P}_k \\ &K_k = \bar{P}_k H_k^t (H_k \bar{P}_k H_k^t + R_k)^{-1}, \quad \bar{P}_k = \bar{P}(t_k^-) \quad (\text{FOR MO}) \\ &\hat{P}_k = (I - K_k H_k)\bar{P}_k \\ &\underline{x}(t) = \tilde{\underline{x}}(t) + \delta\bar{\underline{x}}(t), \quad \hat{\underline{x}}_k = \tilde{\underline{x}}_k + \delta\hat{\underline{x}}_k \end{aligned}}$$

UTVIDET KF (UKF) (EKF (ENGELSK))

DERSOM VI KOBLER $\delta \hat{\underline{x}}_k$ TILBAKE OG OPPDATERER NOMINELL TRAJEKTOR:

$\underline{\bar{x}}_k^+ = \bar{\underline{x}}_k + \delta \hat{\underline{x}}_k$ OG SETTER $\delta \bar{\underline{x}}_k = 0$ FORDI $\delta \hat{\underline{x}}_k$ ALLEREDE ER BRUKT TIL Å FORBEDRE DEN NOMINELLE LØSNINGEN

$\dot{\bar{\underline{x}}}(t) = \underline{f}(\bar{\underline{x}}, \underline{u})$, $\bar{\underline{x}}(t_k^+) = \bar{\underline{x}}(t_k) + \delta \hat{\underline{x}}_k$

DENNE D.L. LØSES SÅ FOR $t \in [t_k, t_{k+1}]$

SIDEN $\delta \bar{\underline{x}}(t_k^+) = 0 \Rightarrow \delta \bar{\underline{x}}(t_{k+1}) = 0$

$\delta \hat{\underline{x}}_k = \underline{0} + K_k(\delta \underline{z}_k - H \cdot \underline{0}) = K_k \cdot \delta \underline{z}_k = K_k(\underline{z}_k - \bar{\underline{z}}_k)$

$\Rightarrow$ LIGNINGENE FOR DET LINEÆRE KF FORENKLES

$\Rightarrow$ UTVIDET KF:

$$\boxed{\begin{aligned}
\dot{\bar{\underline{x}}}(t) &= \underline{f}(\bar{\underline{x}}, \underline{u}), \quad \bar{\underline{x}}(t_k^+) = \hat{\underline{x}}_k \\
\hat{\underline{x}}_k &= \bar{\underline{x}}(t_k) + K_k(\underline{z}_k - \underline{h}(\bar{\underline{x}}_k)) \\
\dot{\bar{P}} &= F\bar{P} + \bar{P}F^t + G\tilde{Q}G^t, \quad \bar{P}(t_k^+) = \hat{P}_k \\
K_k &= \bar{P}(t_k)H^t(H\bar{P}(t_k)H^t + R)^{-1} \\
\hat{P}_k &= (I - K_k H)\bar{P}(t_k)
\end{aligned}}$$

TILBAKEKOBLET KF (TKF)

VI KAN OGSÅ TILBAKEKOBLE BARE NOEN AV TILSTANDENE

$\Rightarrow$ TILBAKEKOBLET KF (VANLIG I TNS)

SPESIALTILFELLER AV TKF:

1) LKF: INGEN TILSTANDER TILBAKEKOBLES

2) UKF: ALLE TILSTANDER TILBAKEKOBLES

ANDRE ORDENS KF

TAR MED TIL OG MED 2. ORDENS LEDDA I TAYLORUTVIKLINGENE

ITERERT KF

NÅR VI HAR BEREGNET $\hat{X}_k$ KAN VI LINEARISERE PÅ NYTT RUNDT DENNE VERDIEN (H BLE I FØRSTE OMGANG BEREGNET RUNDT $\bar{X}(t_k)$)

UD FAKTORISERING AV KF

$$\bar{P} = \bar{P}^t = \bar{U}\bar{D}\bar{U}^t, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x \end{bmatrix}$$

$$\hat{P} = \hat{P}^t = \hat{U}\hat{D}\hat{U}^t$$

KOVARIANSLIGNINGENE I KF KAN SKRIVES OM TIL LIGNINGER I $\bar{U},\bar{D}$ OG $\hat{U},\hat{D}$. DE NUMERISKE ALGORITMENE SOM BRUKES ER:

i) CHOLESKY - FAKTORISERING

ii) RANG - EN OPPDATERING

iii) MODIFIED WEIGHTED GRAHM - SCHMIDT

ALLE DISSE ALGORITMENE HAR GODE NUMERISKE EGENSKAPER

ANALYTISK EKVIVALENTE FORMLER KAN HA HELT FORSKJELLIGE NUMERISKE EGENSKAPER, F.EKS:

$$y = \sqrt{x+\delta} - \sqrt{x} = \frac{\delta}{\sqrt{x+\delta} + \sqrt{x}}$$

EKSAMEN FREDAG 3/6 - 2016

SPØRRETIME MANDAG 31/5 - 2016 ROM 308 KL 10^{15}

EKSAMEN 2009

OPPGAVE 1.

a) EN OPTIMAL ESTIMATOR ER EN BEREGNINGSALGORITME SOM PÅ BASIS AV KUNNSKAP OM PROSESS OG SENSOR, PROSESS- OG MÅLESTØY, BEREGNER ET MINIMUM VARIANS ESTIMAT AV TILSTANDEN

b) A ER POSITIVT DEFINITT DERSOM

$x^t A x > 0$ FOR ALLE $x \neq 0$

HVIS A ER POSITIVT DEFINITT ER EGENVERDIENE POSITIVE

c) OBSERVERBART HVIS:

$$\text{RANG} \left[H^t \; F^t H^t \; (F^t)^2 H^t \; \dots \; (F^t)^{n_x - 1} H^t \right] = n_x$$

STYRBART HVIS:

$$\text{RANG} \left[L \; FL \; F^2 L \; \dots \; F^{n_x - 1} L \right] = n_x$$

d) OBSERVERBART:

$\Rightarrow$ FRA KUNNSKAP OM $z(t)$ FOR $t \in [t_0, t]$ KAN FINNES $x(t)$ FOR DET SAMME TIDSINTERVALLET

FEIL

STYRBART:

$\Rightarrow$ FOR ENHVER $x(t_0)$, $x(t_1)$, SÅ FINNES DET EN $u(t)$ $t \in [t_0, t_1]$ SOM BRINGER SYSTEMET FRA $x(t_0)$ TIL $x(t_1)$.

SYSTEMET I OPPGAVEN KAN IKKE VÆRE STYRBART SIDEN $L = 0$

e) EN HENDELSE ER ET RESULTAT ELLER UTFALL AV ET EKSPERIMENT KAN VÆRE SATT SAMMEN AV EN ELLER FLERE ENKELTUTFALL.

STOKASTISK VARIABEL: KNYTTER ELEMENTER I UTFALLSROMMET TIL EN TALLVERDI

STOKASTISK PROSESS: ER EN PROSESS SOM GIR ULIKE STOKASTISKE VARIABLE PÅ ULIKE TIDSPUNKT

f) MIDDELVERDIEN $\bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$

X: STOK VARIABEL x_i: REALISASJON

GJØR N EKSPERIMENTER

?

g) STASJONÆR DERSOM ENSEMBLEMIDDELVERDIEN OG HØYERE ORDENS MOMENTER ER TIDSINVARIANTE

ERGODISK DERSOM ENSEMBLE- OG TIDSMIDDELVERDIEN ER LIKE FOR ALLE MOMENTER AV $z(t)$

1. ORDENS

h) EN PROSESS ER EN MARKOV PROSESS HVIS MAN KAN GJØRE FORUTSIGELSER OM FREMTIDEN TIL PROSESSEN KUN BASERT PÅ INFORMASJON FRA NÅVÆRENDE TILSTAND

EN GAUSS-MARKOV PROSESS ER EN MARKOV PROSESS DER SANNSYNLIGHETSTETTHETSFUNKSJONEN ER NORMALFORDELT

i) EN SIMULERINGSMODELL ER EN MATEMATISK MODELL AV ET FYSISK SYSTEM

FILTER MODELL ER EN FORENKLET SYSTEMMODELL SOM KALMANFILTERET BASERER SEG PÅ

OPPGAVE 2

a)

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ p_{n1} & p_{n2} & & p_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{HVOR} \quad p_{mn} = \mathrm{KOV}(X_m, X_n)$$

KOVARIANSMATRISEN ER SYMMETRISK OG POSITIV SEMIDEFINITT
EGENVERDIENE ER REELLE OG POSITIVE

EGENVEKTORENE DANNER EN LIKELIHOOD ELLIPSOIDE, HVIS EN AV EGENVERDIENE ER NULL MISTER DENNE ELLIPSOIDEN EN DIMENSJON

b) ANTAR:

$\underline{x}_0 \sim N(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0)$, $\underline{v}_k \sim N(\underline{0}, Q\delta_{kl})$, $\underline{x}_0$ $\underline{v}_k$ ER UKORRELERTE FOR ALLE k, l

c) MIDDELVERDI:

$$E\{\underline{x}_{k+1}\} = E\{\Phi \underline{x}_k\} + E\{\Lambda \underline{u}_k\} + E\{\Gamma \underline{v}_k\}$$

$$\Rightarrow \bar{\underline{x}}_{k+1} = \Phi \bar{\underline{x}}_k + \Lambda \underline{u}_k + 0 \qquad (\text{PGA. } \underline{u} \text{ IKKE STOKASTISK})$$

KOVARIANS:

$$\bar{P}_{k+1} = E\{(\underline{x}_{k+1} - \bar{\underline{x}}_{k+1})(\underline{x}_{k+1} - \bar{\underline{x}}_{k+1})^t\}$$

$$= E\{(\Phi(\underline{x}_k - \bar{\underline{x}}_k) + \Gamma \underline{v}_k)((\underline{x}_k^t - \bar{\underline{x}}_k^t)\Phi^t + \underline{v}_k^t \Gamma^t)\}$$

$$= \Phi \bar{P}_k \Phi^t + \underbrace{0 + 0}_{\text{VISES NESTE SIDE}} + \Gamma Q \Gamma^t$$

$$\underline{x}_k - \bar{\underline{x}}_k = \Phi(\underline{x}_{k-1} - \bar{\underline{x}}_{k-1}) + \Gamma \underline{v}_k$$
$$= \Phi(\Phi(\underline{x}_{k-2} - \bar{\underline{x}}_{k-2}) + \Gamma \underline{v}_{k-1}) + \Gamma \underline{v}_k$$
$$\vdots$$
$$= \Phi^k(\underline{x}_0 - \bar{\underline{x}}_0) + \Gamma \underline{v}_{k-1} + \Phi\Gamma \underline{v}_{k-2} + \Phi^2\Gamma \underline{v}_{k-3} + \dots + \Phi^{k-1}\Gamma \underline{v}_0$$

$$E\{(\underline{x}_k - \bar{\underline{x}}_k)\underline{v}_k^t\}$$
$$= \Phi^k E\{(\underline{x}_0 - \bar{\underline{x}}_0)\underline{v}_k^t\} + \Gamma E\{\underline{v}_{k-1}\underline{v}_k\} + \dots + \Phi^{k-1}\Gamma E\{\underline{v}_0 \underline{v}_k^t\}$$
$$= \Phi^k \underbrace{E\{\underline{x}_0 \underline{v}_k^t\}}_{0 \text{ PGA ANTAGELSE}} + \underbrace{E\{\bar{\underline{x}}_0 \underline{v}_k^t\}}_{0 \text{ PGA } E\{\underline{v}_k^t\} = 0} + 0 + 0 \dots + 0 \quad \text{(FORDI } \underline{v}_k \text{ ER HVIT)}$$
$$= 0 \quad \text{QED}$$

d) BRUKER CHOLESKY-FAKTORISERING:

$$\underline{x} = \bar{\underline{x}} + \mathrm{CHOL}(\bar{P})^t \cdot \underline{n} \qquad \underline{n} \sim N(\underline{0}, I)$$

TRANSPONERT PGA MATLAB CHOLESKY REGNEMÅTE

OPPGAVE 3.

a)
$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{\underline{x}}}(t) &= F \bar{\underline{x}}(t) \\ \dot{\bar{P}}(t) &= F \bar{P}(t) + \bar{P} F^t + G\tilde{Q}G^t \end{aligned}\right\} \text{TO}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\underline{x}}_k &= \bar{\underline{x}}_k + K_k(\underline{z}_k - H_k \bar{\underline{x}}_k) \\ \hat{P}_k &= (I - K_k H_k)\bar{P}_k \\ K_k &= \bar{P}_k H_k^t (H_k \bar{P}_k H_k^t - R_k)^{-1} \end{aligned}\right\} \text{MO}$$

b)
$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u} + G\underline{v} \qquad \underline{x}_0 \sim N(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0), \quad \underline{v}(t) \sim N(\underline{0}, \tilde{Q}\delta(t-\tau))$$
$$\underline{z} = H\underline{x} + \underline{w} \qquad w(t) \sim N(\underline{0}, \tilde{R}\delta(t-\tau))$$
$$E\{\underline{x}_0 v(t)^t\} = 0 \quad E\{\underline{x}_0 w(t)^t\} = 0 \quad E\{v(t)w(\tau)\} = 0 \quad \text{FOR ALLE } t, \tau$$

c)
$$\Phi = e^{F\Delta t}$$
$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\Phi} = e^{\tilde{F}\Delta t} = \begin{bmatrix} \Phi & \Lambda \\ 0 & I \end{bmatrix}$$
$$\tilde{\tilde{F}} = \begin{bmatrix} F & G\tilde{Q}G^t \\ 0 & -F^t \end{bmatrix} \quad \tilde{\tilde{\Phi}} = e^{\tilde{\tilde{F}}\Delta t} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\Phi}}_{11} & \tilde{\tilde{\Phi}}_{12} \\ 0 & \tilde{\tilde{\Phi}}_{22} \end{bmatrix} \quad \Phi = \tilde{\tilde{\Phi}}_{11} \quad \Gamma Q \Gamma^t = \tilde{\tilde{\Phi}}_{12}\tilde{\tilde{\Phi}}_{22}^{-1}$$

FOR Å FINNE Γ VELGER VI $Q = I \Rightarrow \Gamma = \mathrm{CHOL}(\tilde{\tilde{\Phi}}_{12}\tilde{\tilde{\Phi}}_{22}^{-1})$

d) $\tilde{\underline{x}}_k = \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \underline{v}_k \end{bmatrix}$ $\quad \tilde{\underline{v}}_k = \underline{n}_k$

$$\tilde{\underline{x}}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi & \Gamma \\ 0 & \varphi_v \end{bmatrix}}_{\tilde{\varphi}} \tilde{\underline{x}}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}_{\tilde{\Gamma}} \tilde{\underline{v}}_k$$

$$\tilde{\underline{x}}_{k+1} = \tilde{\varphi}\,\tilde{\underline{x}}_k + \tilde{\Gamma}\,\tilde{\underline{v}}_k$$

e) TILSTAND ER GLATTBAR HVIS EN OPTIMAL GLATTER GIR ET TILSTANDSESTIMAT SOM HAR MINDRE KOVARIANS ENN TILSTANDS-ESTIMATET EN FÅR VED Å EKSTRAPOLERE DET OPTIMALE TILSTANDS-ESTIMATET I SLUTTIDSPUNKTET TILBAKE TIL TIDSPUNKT t

DVS. HVIS $\hat{P}(t|T) < \varphi(t,T)\,\hat{P}(T)\,\varphi^t(t,T)$

EKSTRAPOLERT TILSTANDSESTIMAT: $\hat{\underline{x}}'(t) = \varphi(t,T)\,\hat{\underline{x}}(T)$

f) $\dot{\underline{x}} = F\underline{x}$

$\underline{z} = H\underline{x} + \underline{w}$

RTS:

$\dot{\hat{\underline{x}}}(t|T) = F\hat{\underline{x}}(t|T)$

$\hat{\underline{x}}(T|T) = \hat{\underline{x}}(T)$

$\dot{\hat{P}}(t|T) = F\,P(t|T) + P(t|T)F^t$?

$P(T|T) = \hat{P}(T)$

OPPGAVE 4

a) $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Delta F^* = NF - F^*N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & \frac{1}{T_2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & \frac{1}{T_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_2} \end{bmatrix}$$

$F_a = \begin{bmatrix} F^* & \Delta F^* \\ 0 & F \end{bmatrix}$ $\quad G_a = \begin{bmatrix} NG \\ G \end{bmatrix}$ $\quad H_a = \begin{bmatrix} H^* & \Delta H \end{bmatrix}$ $\quad K_a = \begin{bmatrix} K_a^* \\ 0 \end{bmatrix}$

LØSNING:

$\dot{x}_a(t) = F_a \underline{x}_a + G_a \underline{v}$ $\quad$ TO

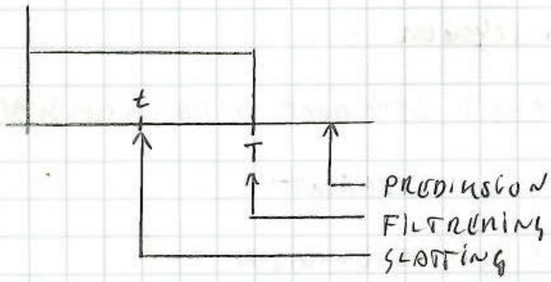
$\underline{x}_a(\hat{t}_k) = (I_a - K_a H_a)\, \underline{x}_a(\bar{t}_k) - K_a \underline{w}_a$ $\quad$ MO

EKSAMEN 2010

OPPGAVE 1.

a) BEREGNINGSALGORITME SOM PÅ BASIS AV KUNNSKAP OM PROSESS OG SENSOR, PROSESS- OG MÅLESTØY, BEREGNER ET MINIMUM VARIANS ESTIMAT AV TILSTANDEN

b)



PREDIKSJON: PREDIKERER FREMTIDIG TILSTAND PÅ BAKGRUNN AV TIDLIGERE TILSTANDER

FILTRERING: FORBEDRER NÅVÆRENDE TILSTAND

GLATTING: FORBEDRER TIDLIGERE TILSTANDER PÅ BAKGRUNN AV FREMTIDIG INFORMASJON (DERSOM DET ER GLATTBAR)

c) STYRBART:

$$\text{RANG} \left[L \quad FL \quad F^2L \ \dots \ F^{n_x-1}L \right] = n_x$$

OBSERVERBART:

$$\text{rang} \left[H^t \quad F^t H^t \quad (F^t)^2 H^t \ \dots \ (F^t)^{n_x-1} H^t \right] = n_x$$

d) STOKASTISK STYRBART HVIS:

$\hat{P}(t) > 0$ FOR ALLE $t > t_0$ og $\hat{P}(t_0) = 0$

DERSOM SYSTEMET $\dot{x} = F\underline{x} + G\underline{v}$ ER TIDSINVARIANT ER SYSTEMET STOKASTISK STYRBART

$$\Longleftrightarrow \text{rang} \left[G \quad FG \quad F^2G \ \dots \ F^{n_x-1}G \right] = n_x \quad \text{og} \quad \tilde{Q} > 0$$

STOKASTISK OBSERVERBART HVIS:

$\hat{P}^{-1}(t) > 0$ FOR $t > t_0$

$$\Longleftrightarrow \text{rang} \left[H^t \quad F^t H^t \quad (F^t)^2 H^t \ \dots \ (F^t)^{n_x-1} H^t \right] = n_x \quad \text{og} \quad 0 < \tilde{Q} < \infty, \ 0 < \tilde{R} < \infty$$

SAMME SOM DET. TILFELLE

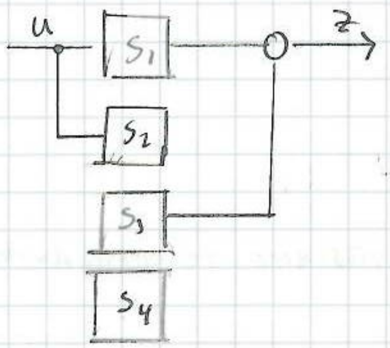
e) HENDELSE: RESULTAT/UTFALL AV EKSPERIMENT

STOK. VAR.: KNYTTER ELEMENTER I UTFALLSROMMET TIL TALLVERDI

STOK. PROSESS: PROSESS SOM GIR ULIKE STOKASTISKE VARIABLE PÅ ULIKE TIDSPUNKT

f) ET LINEÆRT SYSTEM: $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u}$, $\underline{z} = H\underline{x}$

KAN DELES OPP I 4 UNDERSYSTEMER



- S_1: STYRBART + OBSERVERBART
- S_2: STYRBART
- S_3: OBSERVERBART
- S_4: HVERKEN STYRBART ELLER OBSERVERBART

g) $F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)\, dx$

h) GITT $\dot{\underline{x}} = F\underline{x}$, $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

LØSNING: $\underline{x}(t) = \Phi(t, t_0)\,\underline{x}(t_0)$ HVOR $\dot{\Phi}(t, t_0) = F\Phi(t, t_0)$, $\Phi(t_0, t_0) = I$

TIDSINVARIANT TILFELLE: $\Phi(t, t_0) = e^{F(t-t_0)}$

GITT $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u}$, $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

LØSNING: $\underline{x}(t) = \Phi(t, t_0)\,\underline{x}(t_0) + \overbrace{\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) L\, u(\tau)\, d\tau}^{\text{SUPERPOSISJONSINTEGRALET}}$

i) SIMULERINGSMODELL ER EN MATEMATISK MODELL AV ET FYSISK SYSTEM

FILTERMODELL ER EN FORENKLET SIMULERINGSMODELL SOM BRUKES I KALMANFILTERET

OPPGAVE 2

a) For vektoren $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ er elementene i kovar. matrisen:

$P_{ij} = \text{kov}(x_i, x_j) = E\{(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)\}$ hvor $\bar{x}_i = E\{x_i\}$

matrisen P er symmetrisk og positiv semidefinitt

egenverdi = 0 ?

b) $\underline{x}_0 \sim N(\underline{\bar{x}}_0, \bar{P}_0)$, $\underline{v}_k \sim N(\underline{0}, Q\delta_{kl})$, $E\{\underline{x}_0 \underline{v}_k^t\} = 0$

c) $E\{\underline{x}_{k+1}\} = E\{\Phi \underline{x}_k\} + E\{\Lambda \underline{u}_k\} + E\{\Gamma \underline{v}_k\}$

$\underline{\bar{x}}_{k+1} = \Phi \underline{\bar{x}}_k + \Lambda \underline{u}_k + 0$

$\bar{P}_{k+1} = E\{(\underline{x}_{k+1} - \underline{\bar{x}}_{k+1})(\underline{x}_{k+1} - \underline{\bar{x}}_{k+1})^t\}$

$= E\{\Phi(\underline{x}_k - \underline{\bar{x}}_{k+1}) + \Gamma \underline{v}_k)((\underline{x}_{k+1} - \underline{\bar{x}}_{k+1})^t \Phi^t + \Gamma^t \underline{v}_k^t)\}$

$= \Phi \bar{P}_k \Phi^t + 0 + 0 + \Gamma Q \Gamma^t$

d) 1. diskretiser prosessligningen

2. trekk initialverdi $\underline{x}_0 = \underline{\bar{x}} + \text{chol}(\bar{P})^t \cdot \text{randn}(n_x)$

3. simuleringen:

```
For k = t0 : t
    x(k+1) = Φ x(k) + Γ · chol(Q) · randn(nx)
    z(k) = H x(k) + chol(R) · randn(nx)
END
```

OPPGAVE 3

a)
$$\left.\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= F\bar{x}\\ \dot{\bar{P}} &= F\bar{P} + \bar{P}F^t + G\tilde{Q}G^t\end{aligned}\right\}\ \text{TO}$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{x}_k &= \bar{x}_k + K_k(z_k - H\bar{x}_k)\\ K_k &= \bar{P}_k H^t (H\bar{P}_k H^t - R)^{-1}\\ \hat{P}_k &= (I - K_k H)\bar{P}_k\end{aligned}\right\}\ \text{MO}$$

b)
$$\dot{x} = Fx + Lu + Gv \qquad x_0 \sim N(\bar{x}_0, \bar{P}_0),\ v \sim N(0, \tilde{Q}\delta(t-\tau))$$
$$z_k = Hx_k + w_k \qquad w_k \sim N(0, R\delta_{kl})$$
$$E\{\bar{x}_0 v^t(t)\} = 0,\ E\{\bar{x}_0 w_k^t\} = 0,\ E\{v(t)w_k\} = 0 \quad \text{for alle } t, k$$

c) Bayes: KF-MO formlene gitt i a)

Fisher:
$$\hat{x} = Kz$$
$$K = \hat{P}H^t R^{-1}$$
$$\hat{P} = (H^t R^{-1} H)^{-1}$$

VKM:
$$J = (x-\bar{x})^t S^{-1}(x-\bar{x}) + (z - H\bar{x})^t T^{-1}(z - H\bar{x})$$
$$\hat{x} = \bar{x} + K(z - H\bar{x})$$
$$K = (S^{-1} + H^t T^{-1} H)^{-1} H^t T^{-1}$$

$\hat{x}$ er den verdien av x som minimaliserer J når $\bar{x}$ og z er gitt, S og T velges etter beste skjønn

d) Forover- og bakover filter (FF og BF)

Foroverfilteret er et vanlig KF

For å finne BF skriver vi om KF-ligningene slik at tilstanden i sluttidspunktet er fullstendig ukjent $\hat{P}_k^{-1}(T) = 0$

Vi skifter også t slik at tiden starter i $t=T$ og går til $t=0$

$$\Rightarrow \hat{S} = \hat{P}_k^{-1},\quad \hat{s} = \hat{P}_k^{-1}\hat{x}_k = \hat{S}\hat{x}_k$$

Etter utregning får vi BF:
$$\frac{d}{d\tau}\hat{s}(\tau) = (F^t - \hat{S}G\tilde{Q}G^t)\hat{s}(\tau) + H^t\tilde{R}^{-1}z(\tau)$$
$$\frac{d}{d\tau}\hat{S}(\tau) = \hat{S}F + F^t\hat{S} + H^t\tilde{R}^{-1}H - \hat{S}G\tilde{Q}G^t\hat{S}$$

e) DEFINERER $P = XZ^{-1}$ HVOR $P(t_0) = X(t_0)$, $Z(t_0) = I$

$\Rightarrow X = P \cdot Z$

DERIVERER $\dot{X} = \dot{P}Z + P\dot{Z}$

SETTER INN $\dot{P} = FP + PF^t + G\tilde{Q}G^t$ (RICCATILIGNINGEN)

$\Rightarrow \dot{X} = (FP + PF^t + G\tilde{Q}G^t)Z + P\dot{Z}$

$\dot{X} = F\underbrace{PZ} + PF^tZ + G\tilde{Q}G^tZ + P\dot{Z}$

$\dot{X} = FX + PF^tZ + G\tilde{Q}G^tZ + P\dot{Z}$

$\dot{X} - FX - G\tilde{Q}G^tZ = PF^tZ + P\dot{Z}$

ANTAR AT HVER AV SIDENE $= 0$ FOR ALLE t

HAR TO DIFF. LIGN. ! $\dot{X} = FX + G\tilde{Q}G^tZ$ (1)

$P(F^tZ + \dot{Z}) = 0$

ANTA P^{-1} EKSISTERER $\Rightarrow \dot{Z} = -F^tZ$ (2)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G\tilde{Q}G^t \\ 0 & -F^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} \quad (3)$$

LØSNING: $\begin{bmatrix} X(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} = e^{\tilde{F}(t-t_0)} \begin{bmatrix} P(t_0) \\ I \end{bmatrix}$, HVOR $\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & G\tilde{Q}G^t \\ 0 & -F^t \end{bmatrix}$

$$e^{\tilde{F}(t-t_0)} = \tilde{\Phi}(t, t_0) = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11} & \tilde{\Phi}_{12} \\ 0 & \tilde{\Phi}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P(t) = (\tilde{\Phi}_{11}(t,t_0)P(t_0) + \tilde{\Phi}_{12}(t,t_0))\tilde{\Phi}_{22}^{-1}(t,t_0)$$

OPPGAVE 4

a) NUMERISK LØSNING: $\tilde{x}_{k+1} = f(x_k, u_k)$, $\tilde{z}_k = h(\tilde{x}_k)$

MÅLELIGNINGEN:

$$\delta z_k = z_k - \tilde{z}_k = h(x_k) + w_k - h(\tilde{x}_k) \qquad (1)$$

$$\delta x_k = x_k - \tilde{x}_k \Rightarrow x_k = \tilde{x}_k + \delta x_k \qquad (2)$$

SETTER (2) INN I (1) OG TAYLORUTVIKLER:

$$\delta z_k = h(\tilde{x}_k + \delta x_k) + w_k - h(\tilde{x}_k)$$

$$= \cancel{h(\tilde{x}_k)} + \frac{\partial h}{\partial x^t}\Big|_{\tilde{x}_k} \delta x_k + h.o.l. + w_k - \cancel{h(\tilde{x}_k)}$$

SER BORT IFRA h.o.l.:

$$\delta z_k = H(\tilde{x}_k)\delta x_k + w_k \ , \quad H(\tilde{x}_k) = \frac{\partial h}{\partial x^t}\Big|_{\tilde{x}_k} \qquad (3)$$

PROSESSLIGNINGEN:

$$\delta x_{k+1} = x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1} = f(x_k, u_k) + \Gamma v_k - f(\tilde{x}_k, u_k)$$

$$= f(\tilde{x}_k + \delta x_k, u_k) + \Gamma v_k - f(\tilde{x}_k, u_k)$$

$$= \cancel{f(\tilde{x}_k, u_k)} + \frac{\partial f}{\partial x^t}\Big|_{\tilde{x}} \delta x + h.o.l. + \Gamma v_k - \cancel{f(\tilde{x}_k, u_k)}$$

SER BORT IFRA h.o.l.:

$$\delta x_{k+1} = F(\tilde{x}, u)\delta x + \Gamma v_k \ , \quad F(\tilde{x}, u) = \frac{\partial f}{\partial x^t}\Big|_{\tilde{x}} \qquad (4)$$

LIGNINGENE (3) OG (4) BESKRIVER ET LINEÆRT TIDSVARIANT STOK. SYSTEM

b) $\delta \hat{x}_k = \delta \bar{x}_k + K_k(\delta z_k - H_k \cdot \delta \bar{x}_k)$

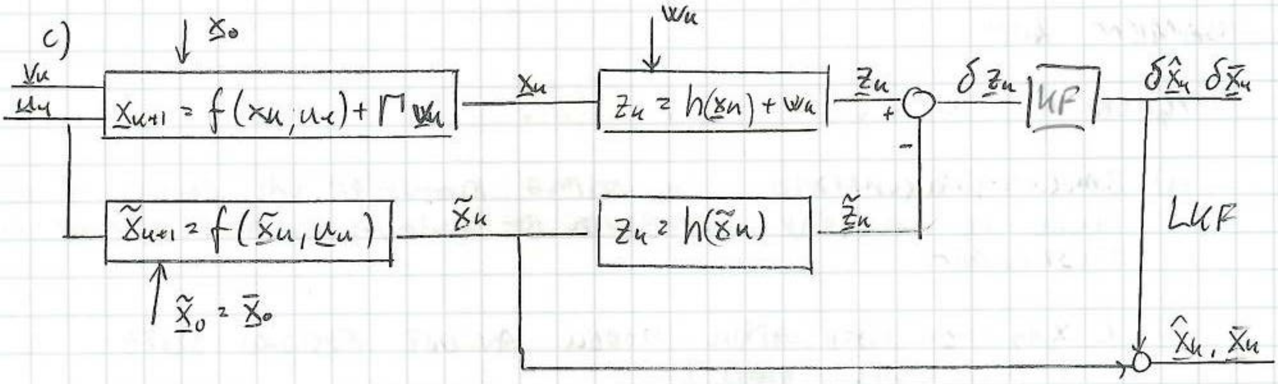
$\delta \bar{x}_{k+1} = F(\tilde{x}_k, u)\delta \hat{x}_k$

$\bar{P}_{k+1} = F\bar{P} + \bar{P}F^t + GQG^t$

$K_k = \bar{P}_k H_k^t (H_k \bar{P}_k H^t + R_k)^{-1}$

$\hat{P}_k = (I - K_k H_k)\bar{P}_k$

c)



d) KOBLER $\delta \hat{\underline{x}}_k$ TILBAKE OG OPPDATERER NOMINELL TRAJEKTOR:

$\tilde{\underline{x}}_k^+ = \tilde{\underline{x}}_k + \delta \hat{\underline{x}}_k$ OG SETTER $\delta \bar{\underline{x}}_k = 0$ FORDI $\delta \hat{\underline{x}}_k$ ALLEREDE ER BRUKT TIL Å FORBEDRE DEN NOMINELLE LØSNINGEN.

HVIS VI KUN TILBAKEKOBLER ENKELTE AV TILSTANDENE FÅR VI ET DELVIS TILBAKEKOBLET KF

e) BRUKER MC-SIMULERING FOR Å BESTEMME $E\{\hat{\underline{e}}_k\}$ OG $\text{KOV}\{\hat{\underline{e}}_k\}$.

IMPLEMENTERER SYSTEM OG KF-LIGNINGER PÅ EN DATAMASKIN, OG TREKKER $\underline{x}_0$, $\underline{w}_k$ OG $\underline{v}_k$ FRA DE GITTE FORDELINGER.

KJØRER FLERE GANGER OG BEREGNER ET SETT MED TRAJEKTORIER:

$$\{\{\hat{\underline{e}}_k^i, k = 1, 2, \ldots M\}\ i = 1, 2, \ldots N\}$$

LAGRER ALLE TRAJEKTORIENE OG BEREGNER:

$$\hat{\underline{m}}_k^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \hat{\underline{e}}_k^i$$

$$\hat{P}_k^N = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (\hat{\underline{e}}_k^i - \hat{\underline{m}}_k^i)(\hat{\underline{e}}_k^i - \hat{\underline{m}}_k^i)^t$$

VED HVERT TIDSPUNKT $(k = 0, 1, \ldots, M)$

I GRENSEN $N \to \infty$ HAR MAN:

$$\lim_{N\to\infty} \hat{\underline{m}}_k^N = E\{\hat{\underline{e}}_k\}$$

$$\lim_{N\to\infty} \hat{P}_k^N = \text{KOV}\{\hat{\underline{e}}_k\}$$

EKSAMEN 2011

OPPGAVE 1.

a) BEREGNINGSALGORITME SOM UTNYTTER KUNNSKAP OM PROSESS OG SENSOR, PROSESS- OG MÅLESTØY, I BEREGNINGEN ET MINIMUM VARIANS ESTIMAT FOR TILSTANDER

b) 1. LAG EN MATEMATISK MODELL AV DET FYSISKE SYSTEM (SIMULERINGSMODELL)

2. FORETA EN MODELLREDUKSJON HVIS SIMULERINGSMODELLEN ER KOMPLISERT FOR Å FÅ EN FILTERMODELL.

3. KALMANFILTERET SETTES OPP DIREKTE FRA FILTERMODELLEN

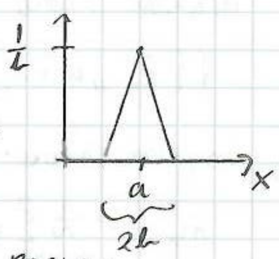
4. KALIBRERE KF. I ET ANALYSEOPPSETT

5. IMPLEMENTERING OG TESTING AV KF I SANNTIDSSYSTEM

c) KRONECKER-DELTA: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{FOR } i = j \\ 0 & \text{FOR } i \neq j \end{cases}$

DIRAC-DELTA FUNKSJON: DEFINERT I ET INTEGRAL:

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx$$



$$\delta(x-a) = \lim_{h \to 0} \text{"ARGUMENT AV TREKANTEN"}$$

I DETTE FAGET BRUKES DISSE TIL Å DEFINERE FORDELINGEN TIL STØYEN I EN PROSESS

I.E.: $\underline{v}(t) \sim N(\underline{0}, \tilde{Q}\,\delta(t-\tau))$, $\underline{w}_k \sim N(\underline{0}, R\,\delta_{kl})$

d) DET BETYR AT VI HAR INGEN STATISTISK INFO OM $\underline{x}$ OG $\underline{w}$

PROBLEMET: $J = (\underline{x} - \bar{\underline{x}})^t S^{-1} (\underline{x} - \bar{\underline{x}}) + (\underline{z} - H\underline{x})^t T^{-1} (\underline{z} - H\underline{x})$

$\hat{\underline{x}}$ ER DEN VERDIEN AV $\underline{x}$ SOM MINIMALISERER J NÅR $\bar{\underline{x}}$ OG $\underline{z}$ ER GITT. S OG T VELGES ETTER BESTE SKJØNN

$\hat{\underline{x}} = \bar{\underline{x}} + K(\underline{z} - H\bar{\underline{x}})$ $\quad K = (S^{-1} + H^t T^{-1} H)^{-1} H^t T^{-1}$

HVIS $S = \bar{P}$ OG $T = R$ $\Rightarrow$ BAYESLIGNINGENE

e) $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u \qquad x_1 = x \qquad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$

$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}u$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m}\end{bmatrix}}_{F}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}}_{L}u$$

$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + Lu$$

f) $\begin{bmatrix}\dot{\underline{x}}\\ \dot{\underline{u}}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}F & L\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{\tilde{F}}\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{u}\end{bmatrix} \qquad \tilde{\varphi} = e^{\tilde{F}\Delta t} = \begin{bmatrix}\varphi & \Lambda\\ 0 & I\end{bmatrix}$

MATLAB: BRUK EXPM $(\tilde{F}\cdot\Delta t)$ OG PLUKK UT φ OG Λ

g) STYRBARHET: $\hat{P}(t) > 0$ FOR ALLE $t > t_0$ OG $\hat{P}(t_0) = 0$

OBSERVERBARHET: $\hat{P}^{-1}(t) > 0$ FOR $t > t_0$

h) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$

OPPGAVE 2

a) ELEMENT ij i P = kov$\{(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)\}$

DIAGONALELEMENTENE ER VARIANSEN TIL TILSTANDENE

P ER SYMMETRISK OG POSITIVT SEMIDEFINITT (EGENVERDIENE ER ~~[illegible]~~ ≥ 0)

EGENVERDI $= 0 \Rightarrow$ EN AV TILSTANDENE ER DETERMINISTISK

b) $\underline{x}_0 \sim N(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0)\,,\ \underline{v}(t) \sim N(\underline{0}, \tilde{Q}\delta(t-\tau))\,,\ E\{\underline{x}_0 \underline{v}^t(t)\} = 0$

c) $E\{\dot{\underline{x}}\} = E\{F\underline{x}\} + E\{L\underline{u}\} + E\{G\underline{v}\}$

$\dot{\bar{\underline{x}}} = F\bar{\underline{x}} + L\underline{u} + 0$ ← PGA. ANTAGELSEN

$$\bar{P} = E\{(\underline{x} - \bar{\underline{x}})(\underline{x} - \bar{\underline{x}})^t\}$$

$$\dot{\bar{P}} = \underbrace{E\{(\dot{\underline{x}} - \dot{\bar{\underline{x}}})(\underline{x} - \bar{\underline{x}})^t}_{S} + \underbrace{(\underline{x} - \bar{\underline{x}})(\dot{\underline{x}} - \dot{\bar{\underline{x}}})^t\}}_{S^t}$$

$$S = E\{(\dot{\underline{x}} - \dot{\bar{\underline{x}}})(\underline{x} - \bar{\underline{x}})^t\}$$

$$= E\{F(\underline{x} - \bar{\underline{x}}) + G\underline{v})(\underline{x} - \bar{\underline{x}})^t\}$$

KAN VISES

$$= F\bar{P} + E\{G\underline{v}(\underline{x} - \bar{\underline{x}})^t\} = F\bar{P} + \frac{1}{2}G\tilde{Q}G^t$$

d) FOR $k = t_0 : t$

$z(k) = H \cdot x(k) + \text{CHOL}(R)^t \cdot \text{RANDN}(n_x)$

$x(k+1) = \Phi \cdot x(k) + \Gamma \cdot \text{CHOL}(Q)^t \cdot \text{RANDN}(n_x)$

END

CHOLESKY-FAKTORISERING BRUKES SIDEN RANDN FUNKSJONEN ER $\sim N(\underline{0}, I)$

e)

$$\Phi = e^{F\Delta t} \approx I + \Delta t F$$

$$\Lambda \approx \Delta t L \qquad \Gamma Q \Gamma^t \approx \Delta t\, G \tilde{Q} G^t$$

FINNER Γ VHA. UD FAKTORISERING:

VELGER $Q = I \qquad \Gamma = (UD^{1/2})^t \qquad (UDU^t = \Delta t\, G\tilde{Q}G^t)$

OPPGAVE 3

a) BAYES:

$\underline{x} \sim N(\bar{\underline{x}}, \bar{P}_0)$, $w \sim N(\underline{0}, R\delta_{kl})$ $E\{\underline{x}\, \underline{w}^t\} = 0$

FISHER:

x - FULLSTENDIG UKJENT, KONSTANT VEKTOR Á PRIORI $w \sim N(\underline{0}, R)$

b)

$$\hat{x}_{N+1} = \frac{1}{N+1}\sum_{i=1}^{N+1} z_i = \frac{N}{N+1} \cdot \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i + \frac{1}{N+1} z_{N+1}$$

$$= \frac{N}{N+1}\hat{x}_N + \frac{1}{N+1} z_{N+1} = \frac{N+1}{N+1}\hat{x}_N + \frac{1}{N+1} z_{N+1} - \frac{1}{N+1}\hat{x}_N$$

$$= \hat{x}_N + \frac{1}{N+1}(z_{N+1} - \hat{x}_N)$$

MO TO

$$\Rightarrow \hat{\underline{x}}_{k+1} = \hat{\underline{x}}_k + \frac{1}{k+1}(z_{k+1} - \hat{\underline{x}}_k), \qquad \bar{x}_{k+1} = \hat{x}_k$$

KONSTANT

$$\Rightarrow K_k = \frac{1}{k+1}, \quad \Phi = I$$

c) $K_k = \bar{P}_k I (I\bar{P}_k I + R)^{-1} = \bar{P}_k(\bar{P}_k + R)^{-1} = \bar{P}_k(\bar{P}_k + \sigma^2)^{-1}$

$\hat{P}_k = (I - K_k I)\bar{P}_k = (I - K_k)\bar{P}_k$

$\bar{P}_{k+1} = \hat{P}_k$

$$\hat{P}_k = (1 - K_k)\bar{P}_k = (1 - \bar{P}_k(\bar{P}_k + \sigma^2)^{-1})\bar{P}_k = \frac{\bar{P}_k + \sigma^2 - \bar{P}_k}{\bar{P}_k + \sigma^2}\bar{P}_k$$

$$= \frac{\sigma^2}{\bar{P}_k + \sigma^2}\bar{P}_k = \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2/\bar{P}_k} = \frac{\sigma^2 \cdot \frac{\bar{P}_k}{\sigma^2}}{\left(1 + \frac{\sigma^2}{\bar{P}_k}\right)\frac{\bar{P}_k}{\sigma^2}} = \frac{\bar{P}_k}{1 + \frac{\bar{P}_k}{\sigma^2}} = \frac{\hat{P}_{k-1}}{1 + \hat{P}_{k-1}/\sigma^2}$$

$$\hat{P}_1 = \frac{\bar{P}_1}{1+\bar{P}_1/\sigma^2} \qquad \hat{P}_2 = \frac{\hat{P}_1}{1+\hat{P}_1/\sigma^2} = \frac{\frac{\bar{P}_1}{1+\bar{P}_1/\sigma^2}}{1+\frac{\bar{P}_1}{1+\bar{P}_1/\sigma^2}} = \frac{\bar{P}_1}{1+\bar{P}_1/\sigma^2+\bar{P}_1/\sigma^2} = \frac{\bar{P}_1}{1+2\bar{P}_1/\sigma^2}$$

$$\Rightarrow \hat{P}_k = \frac{\bar{P}_1}{1+k\bar{P}_1/\sigma^2}$$

$$K_k = \hat{P}_k H^t R^{-1} \quad (\text{FASIT EN})$$

$$= \hat{P}_k I \frac{1}{\sigma^2}$$

$$= \frac{\bar{P}_1}{1+k\bar{P}_1/\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} = \frac{\bar{P}_1}{\sigma^2+k\bar{P}_1} = \frac{1}{k+\sigma^2/\bar{P}_1}$$

DENNE KF-FORSTERKNINGEN ER LIK DEN I OPPGAVE 3b)
HVIS VI SETTER $\sigma^2/\bar{P}_1 = 1$ $(\bar{P}_1 = \sigma^2)$

d) $$\dot{\hat{P}}(t) = F\hat{P}(t) + \hat{P}(t)F + G\tilde{Q}G^t - \hat{P}(t)H^t\tilde{R}^{-1}H\hat{P}(t)$$

$$F = 0 \quad G = 0 \quad H = I$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{P}}(t) = -\hat{P}(t)\tilde{R}^{-1}\hat{P}(t) = -\frac{\hat{P}^2}{\tilde{R}}$$

$$\frac{d\hat{P}}{dt} = -\frac{P^2}{\tilde{R}} \Rightarrow \int_{\hat{P}_0}^{\hat{P}} \frac{1}{\hat{P}^2}\,d\hat{P} = -\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tilde{R}}\,dt$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{\hat{P}}\right]_{\hat{P}_0}^{\hat{P}} = -\frac{1}{\tilde{R}}\left[t\right]_0^t \Rightarrow -\frac{1}{\hat{P}} + \frac{1}{\hat{P}_0} = -\frac{t}{\tilde{R}}$$

$$\frac{1}{\hat{P}} = \frac{1}{\hat{P}_0} + \frac{t}{\tilde{R}} = \frac{\tilde{R}+t\hat{P}_0}{\tilde{R}\hat{P}_0} \Rightarrow \underline{\underline{\hat{P}(t) = \frac{\tilde{R}\hat{P}_0}{\tilde{R}+t\hat{P}_0}}} = \frac{\hat{P}_0}{1+t\hat{P}_0/\tilde{R}}$$

$$K(t) = \hat{P}(t)H^t\tilde{R}^{-1}$$

$$= \frac{\tilde{R}\hat{P}_0}{\tilde{R}+t\hat{P}_0}\cdot\frac{1}{\tilde{R}} = \underline{\underline{\frac{\hat{P}_0}{\tilde{R}+t\hat{P}_0}}}$$

e) $$\hat{P}_k = P(t_k)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{P}_1}{1+k\bar{P}_1/R} = \frac{\tilde{R}\hat{P}_0}{\tilde{R}+t\hat{P}_0} = \frac{\hat{P}_0}{1+t\hat{P}_0/\tilde{R}} \qquad \bar{P}_{k+1} = \hat{P}_k \Rightarrow \bar{P}_1 = \hat{P}_0$$

$$t_k = k\Delta t$$

$$\Rightarrow R = \tilde{R}$$

OPPGAVE 4

a) NOMINELL TILSTAND:

$$\tilde{\underline{x}}_{k+1} = f(\tilde{\underline{x}}_k, \underline{u})$$

$$\tilde{\underline{z}}_k = h(\tilde{\underline{x}}_k)$$

MÅLEFEIL:

$$\delta \underline{z}_k = \underline{z}_k - \tilde{\underline{z}}_k = h(\underline{x}_k) + \underline{w}_k - h(\tilde{\underline{x}}_k)$$

$$\delta \underline{x}_k = \underline{x}_k - \tilde{\underline{x}}_k \Rightarrow \underline{x}_k = \tilde{\underline{x}}_k + \delta \underline{x}_k$$

SETTER INN

$$\delta \underline{z}_k = h(\tilde{\underline{x}}_k + \delta \underline{x}_k) + \underline{w}_k - h(\tilde{\underline{x}}_k)$$

TAYLORUTVIKLER:

$$\delta \underline{z}_k = \cancel{h(\tilde{\underline{x}}_k)} + \left.\frac{\partial h}{\partial \underline{x}^t}\right|_{\tilde{\underline{x}}} \delta \underline{x}_k + h.o.l. + \underline{w}_k - \cancel{h(\tilde{\underline{x}}_k)}$$

SER BORT FRA h.o.l.

$$\delta \underline{z}_k = H \delta \underline{x}_k + \underline{w}_k \quad \text{HVOR} \quad H = \left.\frac{\partial h}{\partial \underline{x}^t}\right|_{\tilde{\underline{x}}}$$

PROSESSFEIL:

$$\delta \underline{x}_{k+1} = \underline{x}_{k+1} - \tilde{\underline{x}}_{k+1} = \underbrace{f(\underline{x}_k, \underline{u})}_{= f(\tilde{\underline{x}}_k + \delta \underline{x}_k)} + \Gamma \underline{v}_k - f(\tilde{\underline{x}}_k, \underline{u})$$

TAYLORUTVIKLER:

$$\delta \underline{x}_{k+1} = f(\tilde{\underline{x}}_k, \underline{u}) + \left.\frac{\partial f}{\partial \underline{x}^t}\right|_{\tilde{\underline{x}}} \delta \underline{x}_k + h.o.l. + \Gamma \underline{v}_k - \cancel{f(\tilde{\underline{x}}_k, \underline{u})}$$

SER BORT FRA h.o.l.

$$\delta \underline{x}_{k+1} = F \delta \underline{x}_k + \Gamma \underline{v}_k \quad \text{HVOR} \quad F = \left.\frac{\partial f}{\partial \underline{x}^t}\right|_{\tilde{\underline{x}}}$$

b)

$$\delta \bar{\underline{x}}_{k+1} = F \delta \hat{\underline{x}}_k$$

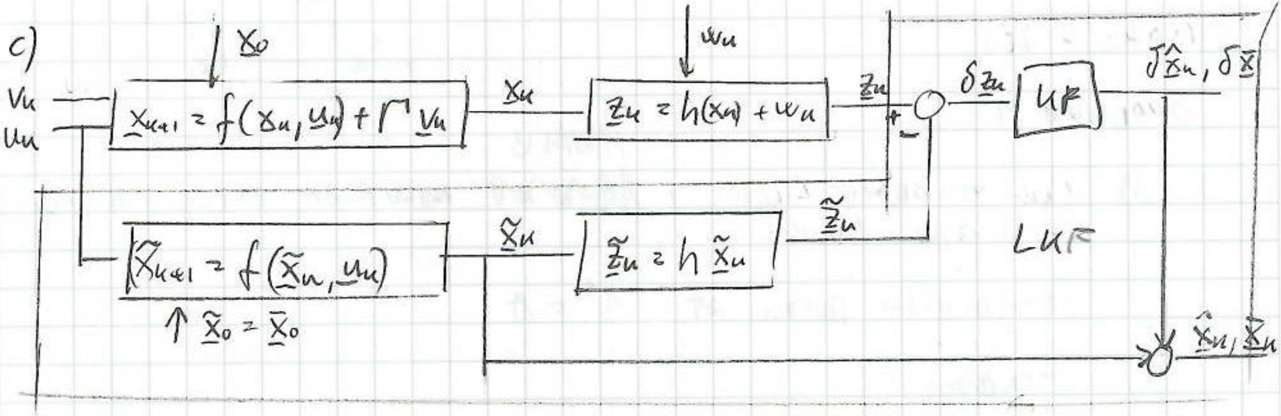
$$\bar{P}_{k+1} = F \hat{P}_k F^t + \Gamma Q \Gamma^t$$

$$\delta \hat{\underline{x}}_k = \delta \bar{\underline{x}}_k + K_k (\delta \underline{z}_k - H \delta \bar{\underline{x}}_k)$$

$$K_k = \bar{P}_k H^t (H \bar{P}_k H^t + R)^{-1}$$

$$\hat{P}_k = (I - K_k H) \bar{P}_k$$

c)



d) Vi tilbakekobler tilstandsvektoren og bruker denne til å oppdatere den nominelle trajektorien

$$\tilde{x}_k^+ = \tilde{x}_k + \delta\hat{x}_k$$

Setter så $\delta\bar{x}_k = 0$ siden $\delta\hat{x}_k$ allerede er brukt til å forbedre den nominelle løsningen

Delvis tilbakekoblet KF får vi hvis vi kun kobler tilbake enkelte av tilstandene

e) Bruker MC-sim for å finne $E\{\hat{e}_k\}$ og $\text{kov}\{\hat{e}_k\}$

Implementerer system- og KF-ligninger på datamaskin, trekker $\underline{x}_0$, $\underline{w}_k$ og $\underline{v}_k$ fra kjente fordelinger og beregner $\hat{\underline{e}}_k$

Vi kjører så dette flere ganger og danner et sett med trajektorier

Når vi lagrer unna alle trajektoriene kan vi beregne:

$$\hat{\underline{m}}_k^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \hat{\underline{e}}_k^i$$

$$\hat{P}_k^N = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (\hat{\underline{e}}_k^i - \hat{\underline{m}}_k^N)(\hat{\underline{e}}_k^i - \hat{\underline{m}}_k^N)^t$$

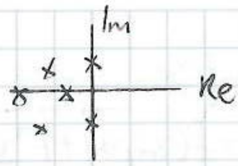
I grensen $N \to \infty$ har man:

$$\lim_{N\to\infty} \hat{m}_k^N = E\{\hat{e}_k\} \quad \text{og} \quad \lim_{N\to\infty} \hat{P}_k^N = \text{kov}\{\hat{e}_k\}$$

Estimatet er derfor forventningsrett

Kan også løses rekursivt

EKSAMEN 2012



OPPGAVE 1.

a) EGENVERDIENE LIGGER I ~~[illegible]~~ HØYRE HALVPLAN ELLER PÅ DEN IMAGINÆRE AKSEN

SYMMETRISK BETYR AT $A^t = A$

b) STYRBART:

$$\text{rang}\,[\Delta \;\; \Phi\Delta \;\; \Phi^2\Delta \;\dots\; \Phi^{n-1}\Delta] = n_x$$

OBSERVERBART:

$$\text{rang}\,[H^t \;\; \Phi^t H^t \;\; (\Phi^t)^2 H^t \;\dots\; (\Phi^t)^{n-1} H^t] = n_x$$

c) STOKASTISK STYRBART:

$\hat{P}(t) > 0$ FOR ALLE $t > t_0$ OG $\hat{P}(t_0) = 0$

$$\text{rang}\,[G \;\; FG \;\; F^2G \;\dots\; F^{n-1}G] = n_x \qquad \tilde{Q} > 0$$

STOKASTISK OBSERVERBARHET

$\hat{P}^{-1}(t) > 0$ FOR ALLE $t > t_0$

$$\text{rang}\,[H^t \;\; F^t H^t \;\; (F^2)^t H^t \;\dots\; (F^t)^{n-1} H^t] = n_x \qquad 0 < \tilde{Q} < \infty \text{ og } 0 < \tilde{R} < \infty$$

d) $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

e) STOKASTISK PROSESS ER STASJONÆR HVIS ENSEMBLEMIDDELVERDIEN OG HØYERE ORDENS LEDD ER TIDSINVARIANTE

STASJONÆR STOK. PROSESS $z(t)$ ER ERGODISK DERSOM ENSEMBLE- OG TIDSMIDDELVERDIEN ER LIKE FOR ALLE $z(t)$

f) $$\left.\begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \\ R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \end{aligned}\right\} \text{FOURIERTRANSFORM}$$

g) SUBOPTIMAL < OPTIMAL < SANN KOVARIANS

h) $t_0 \quad t \quad T$

PREDIKSJON $t > T$

FILTRERING $t = T$

GLATTING $0 < t < T$

i)

1. T ER FAST → INTERVALLGLATTING
2. t ER FAST → FASTPUNKTGLATTING
3. $T-t$ ER KONSTANT → FAST FORSINKELSESGLATTING

PREDIKSJON: PREDIKSJON NESTE TILSTAND

FILTRERING: FORBEDRET ESTIMAT AV NÅVÆRENDE TILSTAND

GLATTING: —— " —— TIDLIGERE TILSTANDER

OPPGAVE 2

a) $P_{ij} = \text{Kov}\{x_i x_j\} = E\{(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)\}$

P ER SYMMETRISK OG POSITIV SEMIDEFINITT

b) OMFORMULERER:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F & L \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{F}} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{u} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\tilde{\underline{x}}} = \tilde{F}\tilde{\underline{x}}$$

$$x(t_k) = \tilde{\underline{x}}_k = \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \underline{u}_k \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{\underline{x}}_{k+1} = e^{\tilde{F}\Delta t}\tilde{\underline{x}}_k$$

$$\tilde{\varphi} = e^{\tilde{F}\Delta t} = \begin{bmatrix} \varphi & \Lambda \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

BRUKER MATLAB: $\text{EXPM}(\tilde{F}\cdot\Delta t)$ OG PLUKKER UT UNDERMATRISENE

c) $\underline{x}_0 \sim N(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0) \quad \underline{v}_k \sim N(\underline{0}, Q\delta_{kl})$

d) $E\{\underline{x}_{k+1}\} = E\{\varphi\underline{x}_k\} + E\{\Lambda\underline{u}_k\} + E\{\Gamma\underline{v}_k\}$

$\bar{\underline{x}}_{k+1} = \varphi\bar{\underline{x}}_k + \Lambda\underline{u}_k + 0 \qquad \underline{\text{QED}}$

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k+1} &= E\{(\underline{x}_{k+1} - \bar{\underline{x}}_{k+1})(\underline{x}_{k+1} - \bar{\underline{x}}_{k+1})^t\} \\ &= E\{(\varphi(\underline{x}_k - \bar{\underline{x}}_k) + \Gamma\underline{v}_k)((\underline{x}_k^t - \bar{\underline{x}}_k^t)\varphi^t + \underline{v}_k^t\Gamma^t)\} \\ &= \varphi\bar{P}_k\varphi^t + \underbrace{0 + 0}_{\text{KAN VISES}} + \Gamma Q\Gamma^t \end{aligned}$$

e) $\underline{x} = \bar{\underline{x}} + \mathrm{CHOL}(P)^t \cdot n$ HVOR $n \sim N(\underline{0}, I)$

BRUKER CHOLESKY, TRANSPONERT PGA MATLAB

f) 1. DISKRETISER PROSESSLIGNINGEN $(\mathrm{EXPM}(\tilde{F}\Delta t))$

2. TREKK INITIALVERDI $\underline{x}_0 = \bar{\underline{x}}_0 + \mathrm{CHOL}(P_0) \cdot \mathrm{RANDN}(nx)$

3. TIDSUTVIKLING: FOR $k = t_0 : t$.
$z(k) = H \cdot x(k) \cdot \mathrm{CHOL}(R)^t \,\mathrm{RANDN}(ny)$
$x(k+1) = \Phi \cdot x(k) + \Gamma \cdot \mathrm{CHOL}(Q)^t \,\mathrm{RANDN}(nx)$
END

OPPGAVE 3.

a)
$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{\underline{x}}} &= F\bar{\underline{x}} \;\; (+L\underline{u}) \\ \dot{\bar{P}} &= F\bar{P} + \bar{P}F^t + G\tilde{Q}G^t \end{aligned}\right\} \text{TO} \quad \left.\begin{aligned} \bar{\underline{x}}(t_k) &= \hat{\underline{x}}_k \\ \bar{P}(t_k) &= \hat{P}_k \end{aligned}\right\} t \in [t_k^+, t_{k+1}]$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\underline{x}}_k &= \bar{\underline{x}}_k + K_k(\underline{z}_k - H\bar{\underline{x}}_k) \\ K_k &= \bar{P}_k H^t (H\bar{P}_k H^t - R)^{-1} \\ \hat{P}_k &= (I - K_k H)\bar{P}_k \end{aligned}\right\} \text{MO} \quad \begin{aligned} \bar{\underline{x}}_k &= \bar{\underline{x}}(t_k) \\ \bar{P}_k &= \bar{P}(t_k) \end{aligned}$$

b) $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + G\underline{u} + L\underline{v}$ $\quad \underline{x}_0 \sim N(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0)$ $\quad \underline{v} \sim N(\underline{0}, \tilde{Q}\delta(t-\tau))$

$\underline{z} = H\underline{x} + \underline{w}$ $\quad \underline{w} \sim N(\underline{0}, \tilde{R}\delta(t-\tau))$

$E\{\underline{x}_0 \underline{v}^t_{(t)}\} = 0$ $\quad E\{\underline{x}_0 \underline{w}^t_{(t)}\} = 0$ $\quad E\{V(t)\, W(\tau)\} = 0$ FOR ALLE t, τ

c) $\Phi \approx I + F\Delta t$ $\quad \Lambda \approx L\Delta t$ $\quad \Gamma Q \Gamma \approx G\tilde{Q}G\Delta t$

$R \approx \dfrac{\tilde{R}}{\Delta t}$ $\quad Q = \dfrac{\tilde{Q}}{\Delta t} \rightarrow$ FRA

d) $P = XZ^{-1} \Rightarrow X = PZ$ DERIVERER:

$\dot{X} = \dot{P}Z + P\dot{Z} = (FP + PF^t + G\tilde{Q}G^t - PH^t\tilde{R}^{-1}HP)Z + P\dot{Z}$

$= FPZ + PF^tZ + G\tilde{Q}G^tZ - PH^t\tilde{R}^{-1}HPZ + P\dot{Z}$

$\dot{X} - FX - G\tilde{Q}G^t = P\dot{Z} + PF^tZ - PH^t\tilde{R}^{-1}HX$ TO DIFFLIGN. ANTAR HVER SIDE $= 0$

$\dot{X} - FX - G\tilde{Q}G^t = 0$

$P(\dot{Z} + F^tZ - H^t\tilde{R}^{-1}HX) = 0$ ANTA P^{-1} EKSISTERER

$\Rightarrow \dot{Z} = -F^tZ + H^t\tilde{R}^{-1}HX$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F & G\tilde{Q}G^t \\ H^t\tilde{R}^{-1}H & -F^t \end{bmatrix}}_{F_a} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} x(t_0) \\ z(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(t_0) \\ I \end{bmatrix}$$

$$\dot{\underline{x}} = F_a \underline{x}$$

LØSNING : $\begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = e^{F_a(t-t_0)} \begin{bmatrix} P(t_0) \\ I \end{bmatrix}$

$$e^{F_a(t-t_0)} = \varphi(t,t_0) = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \qquad \varphi(t_0,t_0) = I$$

$$P(t) = \varphi_{11}(t,t_0)P(t_0) + \varphi_{12}(t,t_0)\left(\varphi_{21}(t,t_0)P(t_0)\varphi_{22}(t,t_0)\right)^{-1}$$

e) FOROVERFILTER OG BAKOVERFILTER

FOROVERFILTER ER ET VANLIG KF

BAKOVERFILTER: KF SKRIVES OM SLIK AT VI STARTER I $t=T$ OG GÅR TIL $t=0$, I TILLEGG ER $\hat{P}_k^{-1}(T)=0$

FORMULERER MED $\hat{S}$ OG $\hat{\underline{s}}$ ISTEDENFOR $\hat{P}_k$ OG $\hat{x}_k$

$$\hat{S} = \hat{P}_k^{-1} \qquad \hat{\underline{s}} = \hat{P}_k^{-1}\hat{x}_k$$

OPPGAVE 4.

a) $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x},\underline{u}) \qquad \tilde{\underline{z}}_k = h(\tilde{x}_k)$

$$\delta \underline{z}_k = z_k - \tilde{z}_k \qquad \delta \underline{x}_k = \underline{x}_k - \tilde{\underline{x}}_k \Rightarrow \underline{x}_k = \tilde{\underline{x}}_k + \delta \underline{x}_k$$

$$\delta \underline{z}_k = h(\underline{x}_k) + \underline{w}_k - h(\tilde{\underline{x}}_k) = h(\tilde{\underline{x}}_k + \delta \underline{x}_k) + \underline{w}_k - h(\tilde{\underline{x}}_k)$$

TAYLOR UTVIKLER:

$$\delta \underline{z}_k = h(\tilde{x}_k) + \left.\frac{\partial h}{\partial \underline{x}^t}\right|_{\tilde{x}} \delta x_k + h.o.l. + \underline{w}_k - h(\tilde{\underline{x}}_k)$$

SER BORT FRA h.o.l. :

$$\delta \underline{z}_k = H\delta \underline{x}_k + \underline{w}_k \qquad \text{HVOR} \quad H = \left.\frac{\partial h}{\partial \underline{x}^t}\right|_{\tilde{x}}$$

b) $\delta \dot{\bar{\underline{x}}} = F\delta\bar{\underline{x}}$

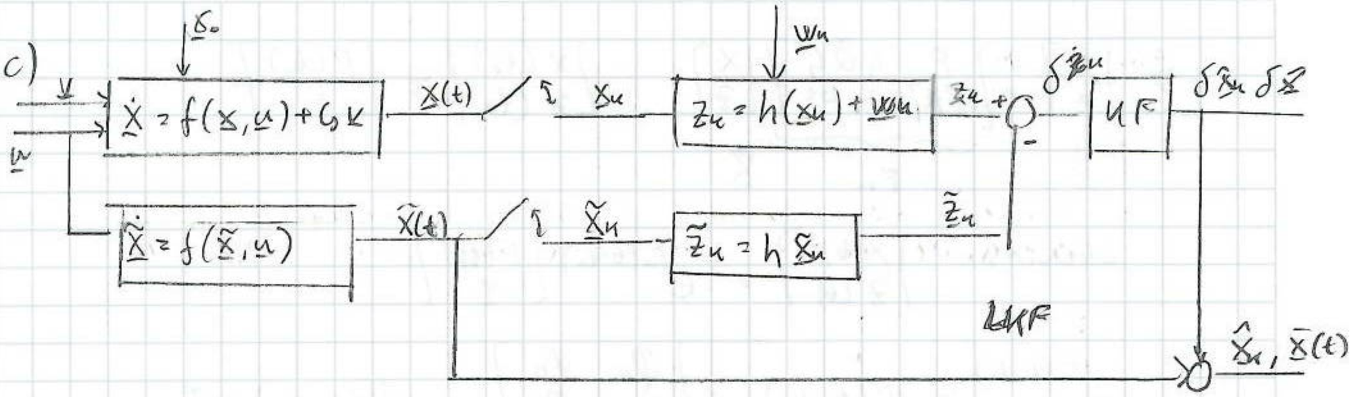
$$\dot{\bar{P}} = F\bar{P} + \bar{P}F + G\tilde{Q}G$$

$$\delta\hat{\underline{x}}_k = \delta\bar{\underline{x}}_k + K_k(\delta \underline{z}_k - H\delta\bar{\underline{x}}_k)$$

$$K_k = \bar{P}_k H^t (H\bar{P}_k H^t + R)^{-1}$$

$$\hat{P}_k = (I - K_k H)\bar{P}_k$$

c)



d) TILBAKEKOBLER $\delta\hat{\underline{x}}_k$ OG BRUKER DEN TIL Å OPPDATERE DEN NOMINELLE TRAJEKTORIEN:

$$\tilde{\underline{x}}_k^+ = \tilde{\underline{x}}_k + \delta\hat{\underline{x}}_k$$

SETTER SÅ $\delta\bar{\underline{x}}_k = 0$ FORDI $\delta\hat{\underline{x}}_k$ ALLEREDE ER BRUKT FOR Å FORBEDRE NOMINELLE LØSN.

FOR DELVIS TILBAKEKOBLET NÅR VI KUN KOBLER TILBAKE ENKELTE AV TILSTANDENE

e) 2. ORDEN:

TAR MED 2. ORDENS LEDD FRA TAYLORUTVIKLINGEN

ITERERT:

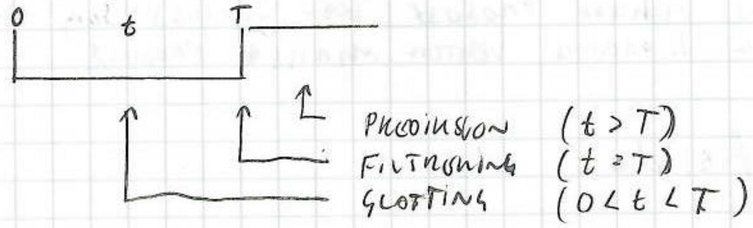
ETTER VI BEREGNER $\hat{\underline{x}}_k$ LINEARISERER VI PÅ NYTT RUNDT DENNE VERDIEN.

EKSAMEN 2015

OPPGAVE 1.

a) BEREGNINGSALGORITME SOM PÅ BAKGRUNN FRA KUNNSKAP OM PROSESS OG SENSOR, PROSESS- OG MÅLESTØY, BEREGNER ET MINIMUM VARIANSESTIMAT FOR TILSTANDEN

b)



PREDIKSJON ESTIMERER FREMTIDIG TILSTAND BASERT PÅ TIDLIGERE TILSTANDER

FILTRERING ESTIMERER NÅVÆRENDE TILSTAND BASERT PÅ TIDLIGERE TILSTANDER OG MÅLINGER

GLATTING FORBEDRER TIDLIGERE ESTIMAT VED Å BRUKE FREMTIDIG INFORMASJON

c) STYRBART:

$$\text{rang}\,[L \;\; FL \;\; F^2L \;\ldots\; F^{n_x-1}L] = n_x$$

OBSERVERBART:

$$\text{rang}\,[H^t \;\; F^tH^t \;\; (F^t)^2H^t \ldots (F^t)^{n_x-1}H^t] = n_x$$

d) STOKASTISK STYRBART

$\hat{P}(t) > 0$ FOR ALLE $t > t_0$ OG $\hat{P}(t_0) = 0$

$$\text{rang}\,[G \;\; FG \;\; F^2G \;\ldots\; F^{n_x-1}G] = n_x \qquad \tilde{Q} > 0$$

STOKASTISK OBSERVERBART:

$\hat{P}^{-1}(t) > 1$ FOR ALLE $t > t_0$

$$\text{rang}\,[H^t \;\; F^tH^t \;\; (F^t)^2H^t \ldots (F^t)^{n_x-1}H^t] = n_x, \quad 0 < \tilde{Q} < \infty, \quad 0 < \tilde{R} < \infty$$

e) HENDELSE: EN ELLER FLERE UTFALL AV ET EKSPERIMENT

STOK. VAR.: FUNKSJON SOM MAPPER HENDELSESROMMET TIL $\mathbb{R}$

STOK. PROSESS: PROSESS SOM GIR ULIKE STOK. VAR. VED ULIKE TIDSPUNKT

f) I EN K'TE ORDENS MARKOV PROSESS INNEHOLDES ALL STATISTISKE INFORMASJON I DEN SISTE TIDSSKRITT

EKS: 1. ORDENS MARKOV PROSESS:

$$p(x(t_n) | x(t_{n-1}), x(t_{n-2}), \ldots x(t_1)) = p(x(t_n) | x(t_{n-1}))$$

EN K'TE ORDENS MARKOV-PROSESS KAN SKRIVES SOM EN K-DIMENSJONAL 1. ORDENS VEKTOR MARKOV PROSESS.

g) $F(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\underline{x}} f(\underline{x})\, d\underline{x}$

h) GITT SYSTEMET $\dot{\underline{x}} = F\underline{x}$ ER EN LØSNING

$x(t) = \Phi(t, t_0)\, x(t_0)$, $\Phi(t_0, t_0) = I$ HVOR $\Phi(t, t_0)$ ER TRANSISJONSMATRISA

HVOR $\dot{\Phi}(t, t_0) = F\, \Phi(t, t_0)$

FOR ET TIDSINVARIANT SYSTEM ER

$\Phi(t, t_0) = e^{F(t-t_0)}$

GITT SYSTEMET $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u}$ KAN DET VISES AT

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\, x(t_0) + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, L\, u(\tau)\, d\tau}_{\text{SUPERPOSISJONSINTEGRALET}}$$

i) SIMULERINGSMODELL ER EN MATEMATISK MODELL AV DET FYSISKE SYSTEM

FILTERMODELL ER EN SIMULERINGSMODELL HVOR VI HAR FORETATT EN MODELLREDUKSJON. KF SETTES OPP DIREKTE FRA FILTERMODELLEN (HVIS SIMULERINGSMODELLEN ER KOMPLEKS)

OPPGAVE 2.

a) ELEMENTENE i KOVARIANSMATRISA P ER GITT SOM

$$P_{ij} = E\{(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)\} = \mathrm{Kov}\{x_i x_j\}$$

P ER SYMMETRISK OG POSITIV SEMIDEFINITT

b) $\underline{x}_0 \sim N(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0)$, $v \sim N(\underline{0}, \tilde{Q}\delta(t-\tau))$ $\quad E\{\underline{x}_0, v(t)^t\} = 0$

c) $E\{\dot{\underline{x}}\} = E\{F\underline{x}\} + E\{L\underline{u}\} + E\{G\underline{v}\}$

$$\dot{\bar{\underline{x}}} = F\bar{\underline{x}} + L\underline{u} + 0$$

PGA ANTAGELSEN

PGA. u IKKE STOKASTISK

$$\bar{P} = E\{(\underline{x}-\bar{\underline{x}})(\underline{x}-\bar{\underline{x}})^t\}$$

$$\dot{\bar{P}} = E\{\underbrace{(\dot{\underline{x}}-\dot{\bar{\underline{x}}})(\underline{x}-\bar{\underline{x}})^t}_{S} + \underbrace{(\underline{x}-\bar{\underline{x}})(\dot{\underline{x}}-\dot{\bar{\underline{x}}})^t}_{S^t}\}$$

$$S = E\{(F(\underline{x}-\bar{\underline{x}}) + G\underline{v})(\underline{x}-\bar{\underline{x}})^t\}$$

$$= F\bar{P} + E\{G\underline{v}(\underline{x}-\bar{\underline{x}})^t\}$$ ← KORRELERT

SETTER $\tilde{\underline{x}} = \underline{x} - \bar{\underline{x}}$

$$\dot{\tilde{\underline{x}}} = \dot{\underline{x}} - \dot{\bar{\underline{x}}} = F\tilde{\underline{x}} + G\underline{v}$$

SETTER INN I LØSNINGEN

$$\tilde{\underline{x}}(t) = \Phi(t,t_0)\tilde{\underline{x}}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\,G\,\underline{v}(\tau)\,d\tau$$

$$E\{\underline{v}(t)\,\tilde{x}^t(t)\} = E\{\underline{v}(t)\,(\tilde{x}(t_0)^t\Phi(t,t_0)^t + \int_{t_0}^{t} v^t(\tau)G^t\Phi^t(t,\tau)\,d\tau)\}$$

$$= E\{\underline{v}(t)\,\tilde{x}^t(t_0)\}\,\Phi^t(t,t_0) + E\{\int_{t_0}^{t} v(t)v^t(\tau)\,G^t\Phi^t(t,\tau)\,d\tau\}$$

$$= \underbrace{E\{\underline{v}(t)(\underline{x}_0^t - \bar{\underline{x}}_0^t)}_{0 \text{ FRA ANTAGELSEN}}\Phi^t + E\{\int_{t_0}^{t}\underbrace{v(t)v^t(\tau)}_{E\{v(t)v^t\tau\} = \tilde{Q}\delta(t-\tau)}G^t\Phi^t(t,t_0)\,d\tau\}$$

$$E\{\underline{v}(t)\,\tilde{\underline{x}}^t(t)\} = \int_{t_0}^{t}\tilde{Q}\delta(t-\tau)G^t\Phi^t(t,\tau)\,d\tau = \tfrac{1}{2}\tilde{Q}G^t I = \tfrac{1}{2}\tilde{Q}G^t$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{P}} = S + S^t = F\bar{P} + \bar{P}F + G\tilde{Q}G^t$$ QED

d) FØRST TREKKE STARTVERDI:

$$\underline{X}_0 = \bar{\underline{X}} + \mathrm{CHOL}(\bar{P}_0)^t \cdot \mathrm{RANDN}(n_x)$$

BRUKER CHOLESKYFAKTORISERING SIDEN RANDN-FUNKSJONEN ER $\sim N(\underline{0}, I)$

TIDSUTVIKLER: FOR $k = t_0 : t$

$$z(k) = H \cdot x(k) + \mathrm{CHOL}(R)^t \cdot \mathrm{RANDN}(n_z)$$
$$x(k+1) = \varphi\, x(k) + \Gamma \cdot \mathrm{CHOL}(Q)^t \cdot \mathrm{RANDN}(n_\delta)$$

END

CHOL ER TRANSPONERT PGA. HVORDAN MATLAB REGNER UT CHOLESKY-FAKTORISERINGEN

e) $\varphi = e^{F\Delta t} \approx I + \Delta t F$

$$\Lambda \underline{u}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(t_{k+1}, \tau) L u(\tau) d\tau \approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} I L \underline{u}(t_k) d\tau = \Delta t L \underline{u}_k$$

$$\Rightarrow \Lambda \approx \Delta t \cdot L$$

$$\Gamma Q \Gamma^t = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(t_{k+1}, \tau) G \tilde{Q} G^t \varphi^t(t_{k+1}, \tau)\, d\tau \approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} I G \tilde{Q} G^t I\, d\tau$$

$$\Rightarrow \Gamma Q \Gamma^t \approx \Delta t G \tilde{Q} G^t$$

FINNER Γ VHA UD-FAKTORISERING, VELGER $Q = I$

$$\Rightarrow \Gamma = (UD^{1/2})^t \qquad (UDU^t = \Delta t\, G Q G^t)$$

OPPGAVE 3

a) BAYES: $\underline{X} \sim N(\bar{\underline{X}}, \bar{P}) \quad w \sim N(\underline{0}, \tilde{R}\delta(t-\tau))$

FISHER: $\underline{X}$: FULLSTENDIG UKJENT $\quad w \sim N(\underline{0}, \tilde{R}\delta(t-\tau))$

b) $$\hat{x}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} z_i = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} w_k = x + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} w_k \xrightarrow[\text{NÅR } k \to \infty]{} x$$

HAR NÅ:

$$\hat{x}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} z_i = \frac{k}{k+1} \underbrace{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} z_i}_{\bar{x}_k} + \frac{1}{k+1} z_{k+1}$$

$$\hat{x}_{k+1} = \frac{k}{k+1}\bar{x}_k + \frac{1}{k+1} z_{k+1} = \frac{k+1}{k+1}\bar{x}_k - \frac{1}{k+1}\bar{x}_k + \frac{1}{k+1} z_{k+1}$$

$$= \bar{x}_k + \frac{1}{k+1}(z_{k+1} - \bar{x}_k) \quad \text{REKURSIV FORM}$$

SER AT $K_k = \frac{1}{k+1}$ OG $\varphi = I$ SIDEN X ER EN KONSTANT

c) $x_{k+1} = x_k \quad , \quad x_1 \sim N(\bar{x}, \bar{P})$

$z_k = x_k + w_k \quad , \quad w_k \sim N(0, R\,\delta_{kl})$

$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k(z_k - \bar{x}_k)$

$\hat{P}_k = (I - K_k)\bar{P}_k$

$K_k = \bar{P}_k(\bar{P}_k + R)^{-1}$

$\bar{P}_{k+1} = \hat{P}_k \qquad \bar{x}_{k+1} = \hat{x}_k$

$$\hat{P}_k = (1 - (\bar{P}_k(\bar{P}_k + R)^{-1})\bar{P}_k = \left(1 - \frac{\bar{P}_k}{\bar{P}_k + R}\right)\bar{P}_k = \left(\frac{\bar{P}_k + R - \bar{P}_k}{\bar{P}_k + R}\right)\bar{P}_k$$

$$= \frac{R}{\bar{P}_k + R}\cdot \bar{P}_k = \frac{R}{1 + R/\bar{P}_k} = \frac{R\cdot\frac{\bar{P}_k}{R}}{(1 + R/\bar{P}_k)\frac{\bar{P}_k}{R}} = \frac{\bar{P}_k}{\bar{P}_k/R + 1} = \frac{\hat{P}_{k-1}}{1 + \hat{P}_{k-1}/R}$$

$$\hat{P}_1 = \frac{\hat{P}_0}{1 + \hat{P}_0/R} = \frac{\bar{P}_1}{1 + \bar{P}_1/R}$$

$$\hat{P}_2 = \frac{\hat{P}_1}{1 + \hat{P}_1/R} = \frac{\frac{\bar{P}_1}{1 + \bar{P}_1/R}}{1 + \frac{\bar{P}_1/R}{1 + \bar{P}_1/R}} = \frac{\frac{\bar{P}_1}{1 + \bar{P}_1/R}}{\frac{1 + \bar{P}_1/R + \bar{P}_1/R}{1 + \bar{P}_1/R}} = \frac{\bar{P}_1}{1 + \bar{P}_1/R + \bar{P}_1/R} = \frac{\bar{P}_1}{1 + 2\bar{P}_1/R}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{P}_k = \frac{\bar{P}_1}{1 + k\bar{P}_1/R}$$

$$K_k = \hat{P}_k H^t R^{-1} = \frac{\bar{P}_1}{1 + k\bar{P}_1/R}\cdot\frac{1}{R} = \frac{\bar{P}_1}{R + k\bar{P}_1} = \frac{1}{k + R/\bar{P}_1}$$

i 3b) $K_k = \frac{1}{k+1}$ som er det vi likev når $\frac{R}{\bar{P}_1} = 1$

d) $\dot{x} = 0 \qquad x(0) \sim N(\bar{x}, \bar{P})$

$z(t) = x + w \qquad w \sim N(\underline{0}, \tilde{R}\,\delta(t - \tau))$

$$\dot{\hat{P}} = F\hat{P} + \hat{P}F^t + G\tilde{Q}G^t - \hat{P}H^t\tilde{R}^{-1}H\hat{P}$$

$$= -\hat{P}\tilde{R}^{-1}\hat{P} \qquad (\text{siden } F = 0,\ G = 0 \text{ og } H = I)$$

$$= -\frac{\hat{P}^2}{\tilde{R}} \qquad \frac{d\hat{P}}{dt} = -\frac{\hat{P}^2}{\tilde{R}}$$

$$\int_{\hat{P}_0}^{\hat{P}} \frac{1}{\hat{P}^2}\,d\hat{P} = -\int_0^t \frac{1}{\tilde{R}}\,dt \Rightarrow \left[-\frac{1}{\hat{P}}\right]_{\hat{P}_0}^{\hat{P}} = -\frac{1}{\tilde{R}}\left[t\right]_{t_0}^{t}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\hat{P}} + \frac{1}{\hat{P}_0} = -\frac{t}{\tilde{R}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\hat{P}} = \frac{1}{\hat{P}_0} + \frac{t}{\tilde{R}} = \frac{\tilde{R} + t\hat{P}_0}{\hat{P}_0\tilde{R}}$$

$$\hat{P}(t) = \frac{\tilde{R}\hat{P}_0}{\tilde{R} + t\hat{P}_0} = \frac{\hat{P}_0}{1 + t\hat{P}_0/\tilde{R}} \qquad K_k = \hat{P}(t)\tilde{R}^{-1} = \frac{\hat{P}_0}{1 + t\hat{P}_0/\tilde{R}}\cdot\frac{1}{\tilde{R}} = \frac{\hat{P}_0}{\tilde{R} + t\hat{P}_0}$$

$$= \frac{1}{t + \tilde{R}/\hat{P}_0}$$

e) Når $\hat{P}_k = \hat{P}(t_k)$ får vi:

$$\frac{\bar{P}_1}{1+k\hat{P}_1/R} = \frac{\hat{P}_0}{1+t\hat{P}_0/\tilde{R}} \qquad \text{SIDEN} \quad \bar{P}_{k+1} = \hat{P}_k \Rightarrow \bar{P}_1 = \hat{P}_0$$

VISER DA AT $R = \tilde{R}$, NOE SOM FØRER TIL:

$$K_k = \bar{P}_k H^t R^{-1} = \hat{P}(t_k) H^t \tilde{R}^{-1} = K(t_k)$$

KF-FORSTERKNINGENE BLIR DERFOR LIKE

OPPGAVE 4

a) MÅLELIKNING: $\delta \underline{z} = \underline{z} - \tilde{\underline{z}}$, $\delta \underline{x} = \underline{x} - \tilde{\underline{x}} \Rightarrow \underline{x} = \tilde{\underline{x}} - \delta \underline{x}$

$$\delta \underline{z} = h(\underline{x}) + \underline{w} - h(\tilde{\underline{x}}) = h(\tilde{\underline{x}} - \delta \underline{x}) + \underline{w} - h(\tilde{\underline{x}})$$

TAYLORUTVIKLER:

$$\delta \underline{z} = h(\tilde{\underline{x}}) + \frac{\partial h}{\partial \underline{x}^t}\Big|_{\tilde{\underline{x}}} \delta \underline{x} + h.o.l. + \underline{w} - h(\tilde{\underline{x}})$$

SER BORT FRA h.o.l.

$$\delta \underline{z} = H \delta \underline{x} + \underline{w} \qquad \text{HVOR} \quad H = \frac{\partial h}{\partial \underline{x}^t}\Big|_{\tilde{\underline{x}}}$$

PROSESSLIKNING:

$$\delta \dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}) + G\underline{v} - f(\tilde{\underline{x}}, \underline{u}) = f(\tilde{\underline{x}} - \delta \underline{x}, \underline{u}) + G\underline{v} - f(\tilde{\underline{x}}, \underline{u})$$

TAYLORUTVIKLER:

$$\delta \dot{\underline{x}} = f(\tilde{\underline{x}}, \underline{u}) + \frac{\partial f}{\partial \underline{x}^t}\Big|_{\tilde{\underline{x}}} \delta \underline{x} + h.o.l. + G\underline{v} - f(\tilde{\underline{x}}, \underline{u})$$

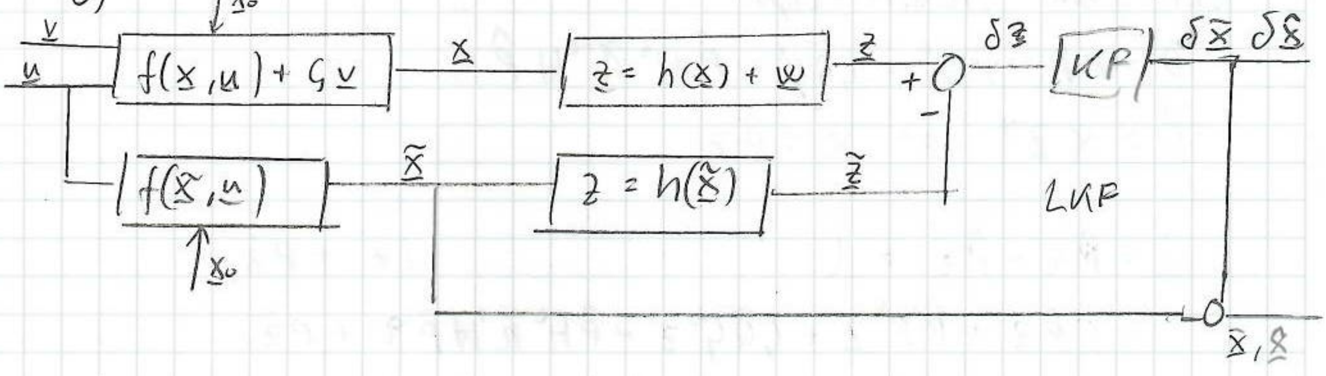
SER BORT FRA h.o.l.:

$$\delta \dot{\underline{x}} = F \delta \underline{x} + G \underline{v} \qquad \text{HVOR} \quad F = \frac{\partial f}{\partial \underline{x}^t}\Big|_{\tilde{\underline{x}}}$$

b)
$$\left.\begin{aligned} \delta \dot{\bar{\underline{x}}} &= F \delta \bar{\underline{x}} \\ \dot{\bar{P}} &= F\bar{P} + \bar{P}F^t + G\tilde{Q}G^t \end{aligned}\right\} \text{TO}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta \dot{\hat{\underline{x}}} &= F\delta\hat{\underline{x}} + K(\delta \underline{z} - H\delta\hat{\underline{x}}) \\ \dot{\hat{P}} &= F\hat{P} + \hat{P}F^t + G\tilde{Q}G^t + \hat{P}H^t\tilde{R}^{-1}H\hat{P} \\ K &= \hat{P}H^t R^{-1} \end{aligned}\right\} \text{MO}$$

c)



d) UKF: kobler tilbake $\delta\hat{\underline{x}}$ og bruk denne til å forbedre traj.

$\hat{\underline{x}}^{+} = \tilde{\underline{x}} + \delta\hat{\underline{x}}$ $\quad \delta\tilde{\underline{x}} = 0$ siden $\delta\hat{\underline{x}}$ er brukt til forbedring

Delvis tilb. UKF: kobler kun tilbake enkelte av tilstandene

e) 2. ord. KF: tar med 2. ord. ledd i Taylor utv. (oppg a)

Iterert: når $\hat{x}$ er funnet, linearisere på nytt rundt denne

ULINEÆR RICATTI-LIGN.

$$\dot{\hat{P}} = F\hat{P} + \hat{P}F^t + G\tilde{Q}G^t - \hat{P}H^t\tilde{R}^{-1}H\hat{P}$$

$$\hat{P} = XZ^{-1} \Rightarrow X = \hat{P}Z$$

$$\dot{X} = \dot{\hat{P}}Z + \hat{P}\dot{Z} = (\qquad\qquad)Z + P\dot{Z}$$

$$= F\hat{P}Z + \hat{P}F^tZ + G\tilde{Q}G^tZ - \hat{P}H^t\tilde{R}^{-1}H\hat{P}Z + P\dot{Z}$$

$$\dot{X} - FX - G\tilde{Q}G^tZ = P\dot{Z} + \hat{P}F^tZ - \hat{P}H^t\tilde{R}^{-1}HX$$

~~S~~ BEGGE SIDER $= 0$

ANTAR 2. DIFF LIGN.

$$\dot{X} = FX + G\tilde{Q}G^tZ \qquad \text{ANTAR } \hat{P}^{-1} \text{ eksisterer}$$

$$\hat{P}(\dot{Z} + F^tZ - H^t\tilde{R}^{-1}HX) = 0 \Rightarrow \dot{Z} = -F^tZ + H^t\tilde{R}^{-1}HX$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{Z}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}F & G\tilde{Q}G^t\\ H^t\tilde{R}^{-1}H & -F^t\end{bmatrix}}_{\tilde{F}}\begin{bmatrix}X\\ Z\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}X(t_0)\\ Z(t_0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{P}(t_0)\\ I\end{bmatrix}$$

LØSN: $\begin{bmatrix}X(t)\\ Z(t)\end{bmatrix} = e^{\tilde{F}\Delta t}\begin{bmatrix}\hat{P}(t_0)\\ I\end{bmatrix}$

$$e^{\tilde{F}\Delta t} = \tilde{\Phi}(t, t_0) = \begin{bmatrix}\tilde{\Phi}_{11} & \tilde{\Phi}_{12}\\ \tilde{\Phi}_{21} & \tilde{\Phi}_{22}\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}X(t)\\ Z(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tilde{\Phi}_{11} & \tilde{\Phi}_{12}\\ \tilde{\Phi}_{21} & \tilde{\Phi}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P(t_0)\\ I\end{bmatrix}$$

$$X(t) = \tilde{\Phi}_{11}P(t_0) + \Phi_{12} \qquad Z(t) = \Phi_{21}P(t_0) + \Phi_{22}$$

$$P(t) = X(t)Z(t)^{-1}$$

$$P(t) = (\Phi_{11}P(t_0) + \Phi_{12})(\Phi_{21}P(t_0) + \Phi_{22})^{-1}$$

$\bar{P}_{k+1} = \Phi \bar{P}_k \Phi^t + \Gamma Q \Gamma^t$ BEVIS

$$\bar{P}_{k+1} = E\{(\underline{x}_k - \bar{\underline{x}}_k)(\underline{x}_k - \bar{\underline{x}}_k)^t\}$$
$$= E\{(\Phi(\underline{x}_k - \bar{\underline{x}}_k) + \Gamma v_k)((\underline{x}_k^t - \bar{\underline{x}}_k^t)\Phi^t + \underline{v}_k^t \Gamma^t)\}$$
$$= \Phi \bar{P}_k \Phi^t + \underbrace{0 + 0}_{\text{BEVISES UNDER}} + \Gamma Q \Gamma^t$$

SER PÅ $\underline{x}_k - \bar{\underline{x}}_k = \Phi(\underline{x}_{k-1} - \bar{\underline{x}}_{k-1}) + \Gamma \underline{v}_k$

$$= \Phi(\Phi(\underline{x}_{k-2} - \bar{\underline{x}}_{k-2}) + \Gamma \underline{v}_{k-1}) + \Gamma \underline{v}_k$$
$$\vdots$$
$$= \Phi^k(\underline{x}_0 - \bar{\underline{x}}_0) + \Gamma v_{k-1} + \Phi\Gamma v_{k-2} + \Phi^2\Gamma \underline{v}_{k-3} + \dots + \Phi^{k-1}\Gamma v_0$$

$$E\{(\underline{x} - \bar{\underline{x}})\underline{v}_k^t\} = \Phi^k \underbrace{E\{(x_0 - \bar{x}_0)\underline{v}_k^t\}}_{0 \text{ FRA ANTAGELSEN}} + \underbrace{\Gamma E\{v_{k-1}, v_k^t\} + \dots + \Phi^{k-1}\Gamma E\{\underline{v}_0 \underline{v}_k^t\}}_{0 \text{ FORDI } v_k \text{ ER HVIT}}$$

$= 0$ QED

$\dot{\bar{P}} = F\bar{P} + \bar{P}F^t + G\hat{Q}G$ BEVIS

$$\bar{P} = E\{(x_k - \bar{x}_k)(x_k - \bar{x}_k)^t\}$$
$$\dot{\bar{P}} = E\{\underbrace{(\dot{x}_k - \dot{\bar{x}}_k)(x_k - \bar{x}_k)^t}_{S} + \underbrace{(x_k - \bar{x}_k)(\dot{x}_k - \dot{\bar{x}}_k)^t}_{S^t}\}$$

$$S = E\{(\dot{x}_k - \dot{\bar{x}}_k)(x_k - \bar{x}_k)^t\}$$
$$= E\{(F(x_k - \bar{x}_k) + G\underline{v})(\underline{x}_k - \bar{\underline{x}}_k)^t\}$$
$$= F\bar{P} + E\{G\underline{v}(\underline{x}_k - \bar{x}_k)^t\}$$ KORRELERT?

SETT $\tilde{\underline{x}}_k = \underline{x}_k - \bar{\underline{x}}_k$

$\dot{\tilde{\underline{x}}}_k = \dot{\underline{x}}_k - \dot{\bar{\underline{x}}}_k = F\tilde{\underline{x}}_k + G\underline{v}_k$ SETTER INN I LØSN.

$$\tilde{\underline{x}}(t) = \Phi(t,t_0)\tilde{\underline{x}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) G \underline{v}(\tau)\, d\tau$$

$$E\{\underline{v}(t)\tilde{\underline{x}}^t(t)\}$$
$$= E\{v(t)(\tilde{\underline{x}}(t_0))^t\Phi^t + \int_{t_0}^{t} v^t(\tau) G^t \Phi^t\, d\tau)\}$$
$$= \underbrace{E\{v(t)(\underline{x}(t_0) - \bar{\underline{x}}(t_0))\}}_{0 \text{ FRA ANTAGELSEN}}\Phi^t + E\{\int_{t_0}^{t} \underbrace{v(t)\, v^t(\tau)} G^t \Phi^t\, d\tau\}$$

$E\{v(t) v^t(\tau)\} = \tilde{Q}\delta(t-\tau)$

$$E\{\underline{v}(t)\tilde{x}^t(t)\} = \int_{t_0}^{t} \tilde{Q}\delta(t-\tau) G^t \Phi^t\, d\tau = \frac{1}{2}\tilde{Q}G^t \implies S = F\bar{P} + G \cdot E\{v(t)\tilde{x}^t\}$$
$$= F\bar{P} + \frac{1}{2} G\tilde{Q}G^t$$