

## PROSJKETOPPGAVE

TTK Anvendt parameter - og tilstandsestimering  
Anders Rødningby

### 1 Simuleringsmodell $\mathcal{M}^S$

Det kontinuerlige-diskrete systemet er gitt som følger:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= F\underline{x} + Lu + Gv \\ z_k &= H\underline{x}_k + w_k \\ \underline{x}_0 &\sim \mathcal{N}(\underline{0}, \hat{P}_0), v \sim \mathcal{N}(\underline{0}, \tilde{Q}\delta(t - \tau)), w_k \sim \mathcal{N}(\underline{0}, R\delta_{kl})\end{aligned}$$

med tilhørende matriser

$$\begin{aligned}F &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & \frac{1}{T_2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} \end{bmatrix}, & L &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_3} \end{bmatrix}, & G &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

hvor

$$\begin{aligned}x_1 &: && \text{posisjon} \\ x_2 &: && \text{hastighet} \\ x_3 &: && \text{ankerstrøm}\end{aligned}$$

Tallverdiene som blir brukt i simuleringen er:

$$T_2 = 5s, T_3 = 1s, \hat{P}_0 = \text{diag}(1, 0.1^2, 0.1^2), \tilde{Q} = 2 * 0.1^2, R = 1, t_0 = 0, t_f = 100$$

Standardavvikene defineres slik:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}, \underline{s} = \text{diag}(P)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} p_{11}^{1/2} & p_{22}^{1/2} & p_{33}^{1/2} \end{bmatrix}$$

### 2 Diskretisering

Det er laget tre funksjoner i Matlab som finner matrisene i den diskrete prosessligningen:

$$\underline{x}_{k+1} = \Phi \underline{x}_k + \Lambda \underline{u}_k + \Gamma \underline{v}_k; \quad \underline{v}_k \sim \mathcal{N}(\underline{0}, Q\delta_{kl})$$

når  $\Delta t = 0.01s$ . Kildekoden til disse er vedlagt, og funksjonene er kalt:

$$\begin{aligned}\text{function } [La, Fi] &= kp2dpLa(F, L, d) \\ \text{function } Ga &= kp2dpGa(F, G, Q, d) \\ \text{function } S &= kp2dpS(F, G, Q, d)\end{aligned}$$

Fi matrisa beregnes ut fra følgende formel:  $\Phi = \exp(F * \Delta t)$ , mens  $La(\Lambda)$  og  $S(\Gamma Q \Gamma^T)$  matrisene finnes analytisk ved å bruke formlene gitt i [1]. Matrisen  $Ga(\Gamma)$  finnes fra  $S$  ved å sette  $Q = I$  og deretter cholesky-faktorisering av  $\Gamma Q \Gamma^T = \Gamma \Pi \Gamma^T = \Gamma \Gamma^T$ .

### 3 Simulering av stokastisk system

Vi skal nå simulere systemet både som en deterministisk og en stokastisk prosess ved å anta  $u = 1$ . Resultatet er vist i figur 1. Vi ser at hastigheten svinger seg inn mot pådraget, og at den stokastiske prosessen er utsatt for støy, noe den deterministiske prosessen ikke er.

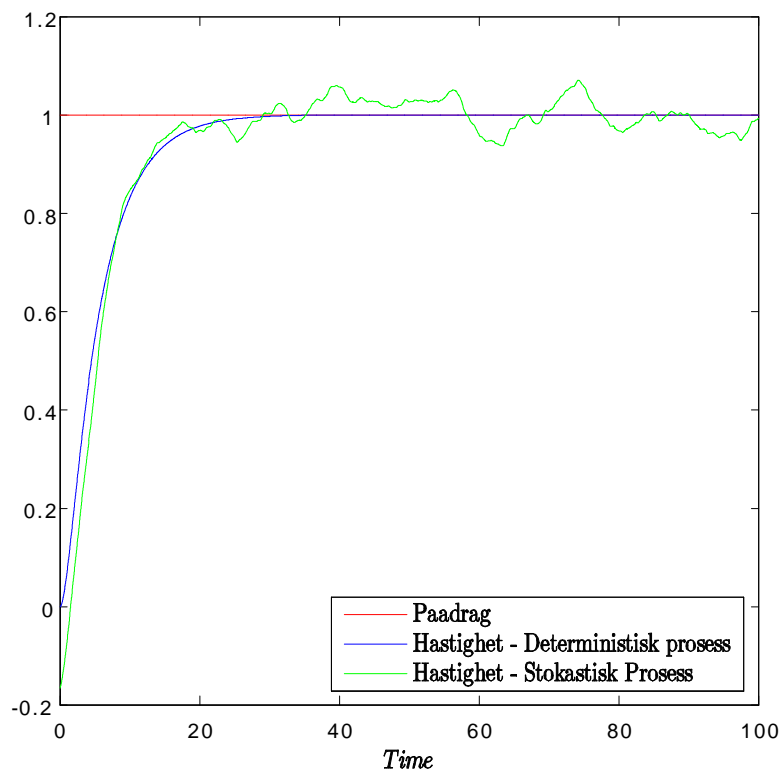


Figure 1: Simulering av stokastisk og deterministisk prosess

## 4 Optimalt Kalmanfilter

Vi skal nå se på Kalmanfilteret for det optimale systemet, dvs når simuleringsmodellen er lik filtermodellen. Vi starter med tidsopdateringen, og denne vil oppdateres med en frekvens på 100 Hz. Måleoppdateringen går med en frekvens på 1 Hz. Kalmanfilterligningene er vist i ligning (1), og Matlab-programmet OptimalKalmanfilter.m gir resultatene vist i figurene 2, 3 og 4. Av figurene kan man se at Kalmanfilteret predikterer lineært frem til det får inn en ny måling. Denne målingen korrigerer/treker systemet inn slik at det ikke sklir ut. Resultatet av dette vises i en hakkete kurve, der hakkene kommer for hver måleoppdatering. Man ser også at den feilen Kalmanfilteret viser (1. standardavvik) stemmer bra overens med den virkelige feilen. Man kan her anta at den 68% av den virkelige feilen holder seg innenfor kurvene for 1. standardavvik. Den estimerte feilen er beregnet hvert sekund, mens den predikterte feilen hvert hundredelsekund.

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= \Phi \hat{x}_k + \Lambda_k u_k; & \hat{x}_0 \text{ gitt} \\ \bar{P}_{k+1} &= \Phi \hat{P}_k \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T; & \hat{P}_0 \text{ gitt} \end{aligned} \right\} \quad \text{TO} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_k &= \bar{x}_k + K_k (z_k - H \bar{x}_k) \\ K_k &= \bar{P}_k H^T (H \bar{P}_k H^T + R)^{-1} \\ \hat{P}_k &= (I - K_k H) \bar{P}_k \end{aligned} \right\} \quad \text{MO}$$

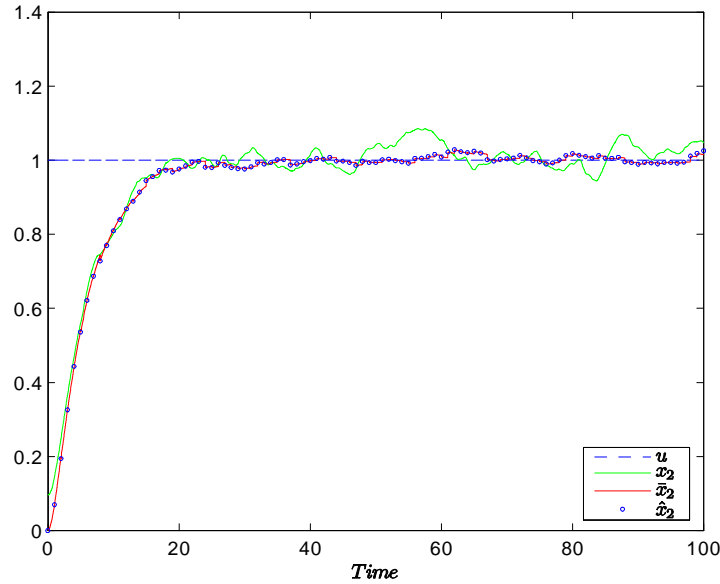


Figure 2: Hastighet ved optimalt Kalmanfilter

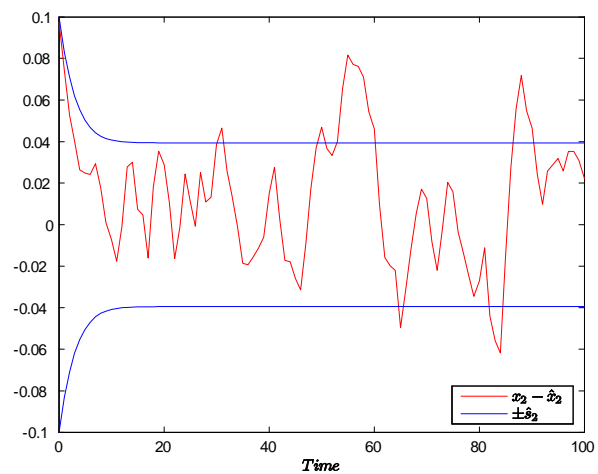


Figure 3: Feil av estimert hastighet og standardavviket til hastighetsfeilen beregnet av Kalmanfilteret

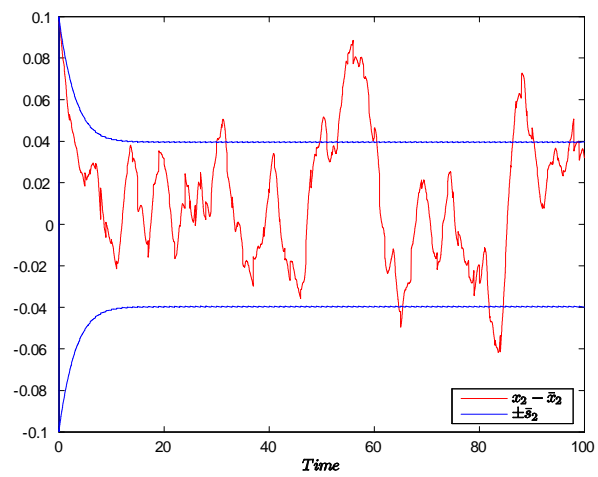


Figure 4: Feil av prediktert hastighet og standardavviket til hastighetsfeilen beregnet av Kalmanfilteret

## 5 Monte Carlo simulering av optimalt system

For å estimere  $E\{\hat{e}_k\}$  og  $Kov\{\hat{e}_k\}$  er det benyttet Monte Carlo simuleringer. Matlab-programmet som gjør dette er kalt MonteCarlo.m, og programmet beregner estimatene rekursivt vha. formlene gitt i forelesningsnotat 7, se [2]. I figur 5 er estimert og prediktert verdi fra Kalmanfilteret vist for 10 Monte Carlo kjøring, og den tilhørende feilen mellom virkelig verdi og verdi gitt av Kalmanfilteret er vist i figur 6. Estimatene av  $E\{\hat{e}_k\}$  og  $Kov\{\hat{e}_k\}$  kalt  $\hat{m}_k^N$  og  $\hat{P}_k^N$ , hvor standardavvikene defineres av:  $diag(\hat{P}_k^N)^{\frac{1}{2}} = [\hat{s}_1^N; \hat{s}_2^N; \hat{s}_3^N]$ , er sammen med  $\hat{s}_2$  gitt av kalmanfilteret vist i figurene 7, 8 og 9 for henholdsvis 10, 100 og 200.000 Monte Carlo kjøring. Vi ser da at når N (antall Monte Carlo kjøring) øker, går estimatet for  $E\{\hat{e}_k\}$  mot 0 og  $Kov\{\hat{e}_k\}$  går mot verdien som Kalmanfilteret gir. Vi kan derfor konkludere med at Kalmanfilteret er den optimale estimator for dette lineære systemet.

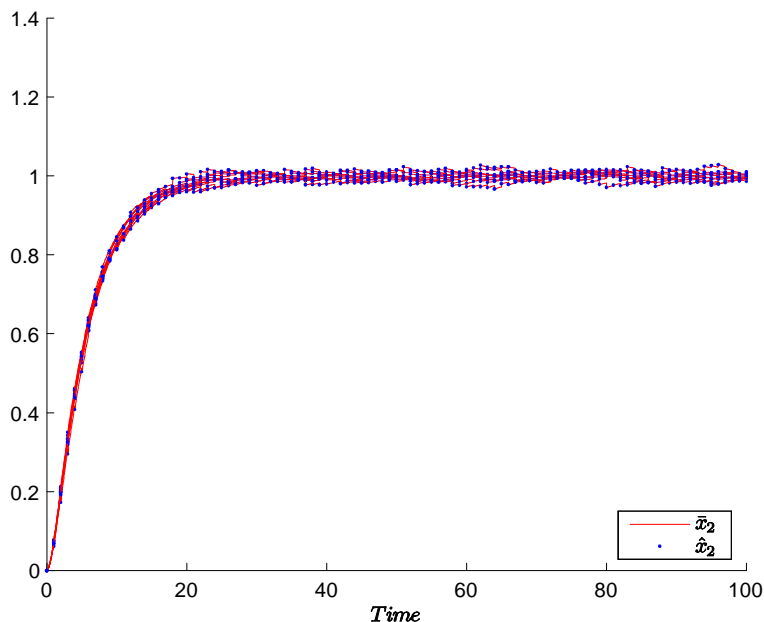


Figure 5: Monte Carlo simulering (10 kjøring)

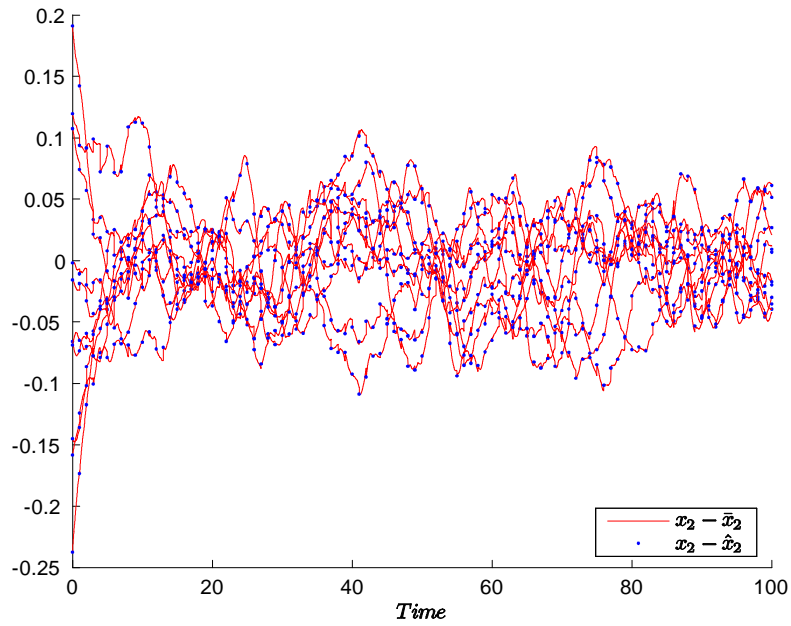


Figure 6: Monte Carlo simuleringer (feilen i 10 kjøringer)

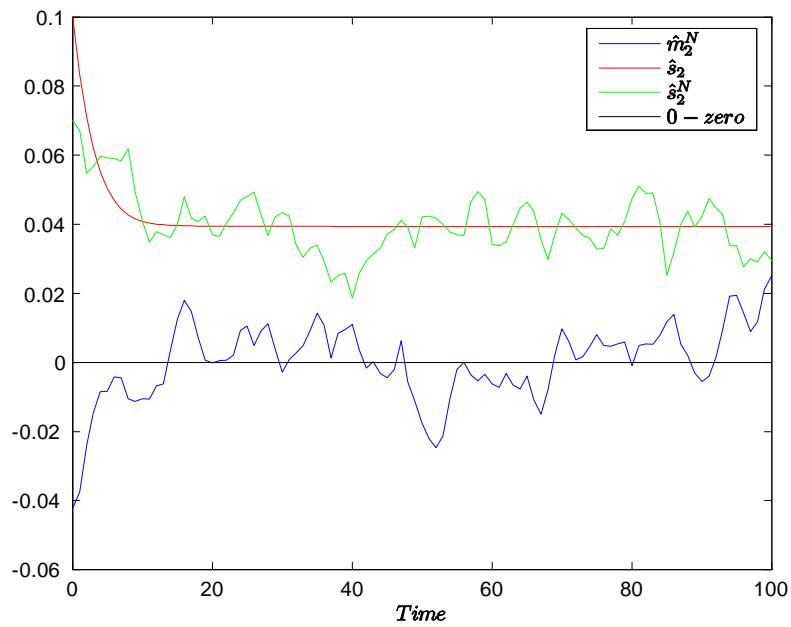


Figure 7: Estimert hastighetsfeil vha. 10 Monte Carlo kjøringer

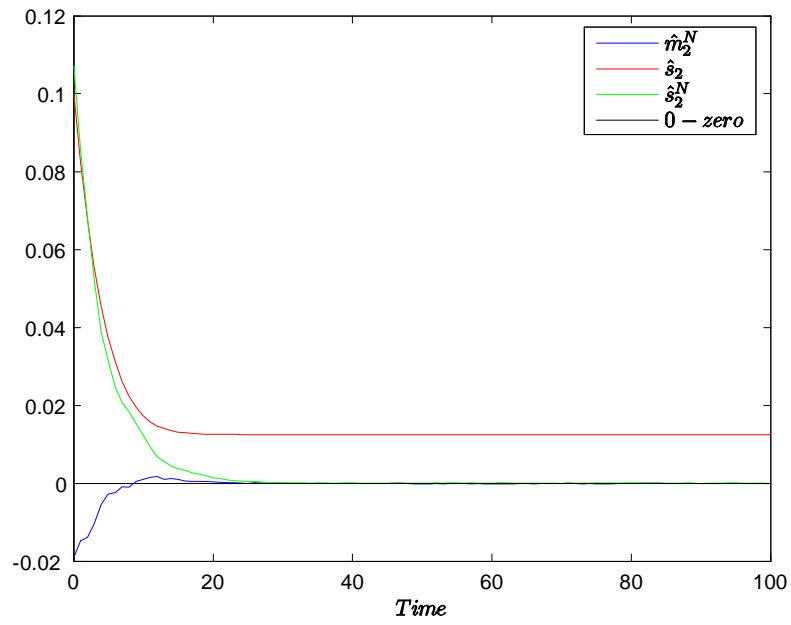


Figure 8: Estimert hastighetsfeil vha. 100 Monte Carlo kjøringer

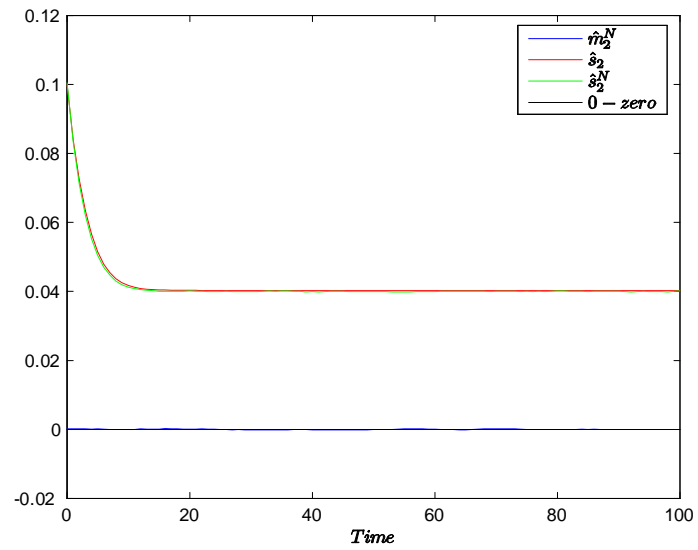


Figure 9: Estimert hastighetsfeil vha. 200.000 Monte Carlo kjøringer

## 6 Feilbudsjett for optimalt Kalmanfilter

Et feilbudsjett er en oversikt som viser bidragene fra hver enkelt feil eller gruppe av feil som utgjør totalfeilen. I Matlab-programmet ErrorBudgett.m (som også kaller funksjonen CovarianceAnalysis.m) lages et slikt feilbudsjett når systemmatrisene i simuleringsmodellen og filtermodellen er like:

$$\begin{aligned} F^* &= F & (\Delta F = 0) \\ H^* &= H & (\Delta H = H) \end{aligned}$$

Dette betyr at det er kun initialverdien  $P_0$  og støybeskrivelsene gitt av  $Q$  og  $R$  som kan bidra til totalfeilen. Dette forenkler feilligningene til:

$$\dot{\bar{P}}^e = F\bar{P}^e + \bar{P}^e F^T + G\tilde{Q}G^T, \quad t \in [\hat{t}_k, \bar{t}_{k+1}] \quad (\text{TO})$$

$$\hat{P}_k^e = (I - K_k H) \hat{P}(\bar{t}_k) (I - K_k H)^T + K_k R K_k^T, \quad (\text{MO})$$

$$\hat{P}_0^e = \hat{P}^*(\hat{t}_0) = \bar{P}_0^* \quad (\text{IV})$$

I figurene 10, 11 og 12 er feilbudsjett vist for henholdsvis posisjonen, hastigheten og ankerstrømmen. I tillegg til kurver for feilbidrag fra  $P_0$ ,  $Q$  og  $R$  er også den totale feilen vist. I figur 13 er RMS-summen av standardavvikene for feilbidragene til posisjonsfeilen og standardavviket til posisjonen beregnet av Kalmanfilteret vist. Av figurene ser man at feil i initialiseringen  $P_0$  bidrar mye i starten, men vil få lite å si etter hvert som tiden går. Det er også viktig å være klar over at det er RMS-summen av de enkelte feilbidragene som gir totalfeilen. Vi ser også at feilen som Kalmanfilteret beregner er nøyaktig lik den feilen vi har funnet i vårt feilbudsjett, noe som er forventet når systemet er optimalt.



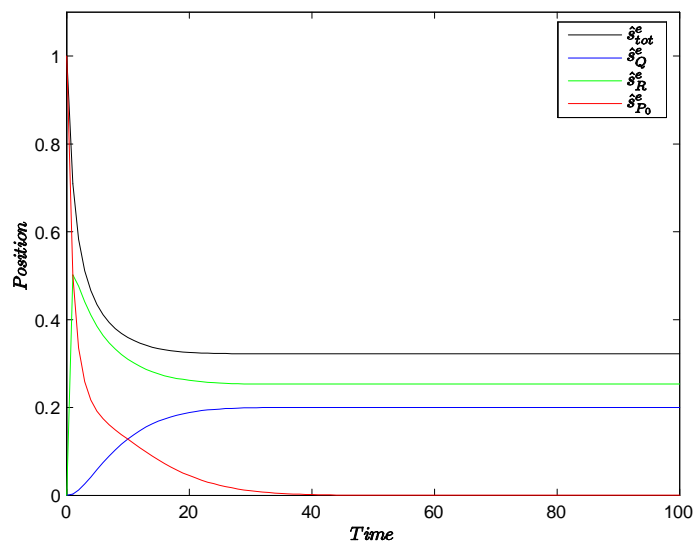


Figure 10: Feilbudsjett for posisjonen

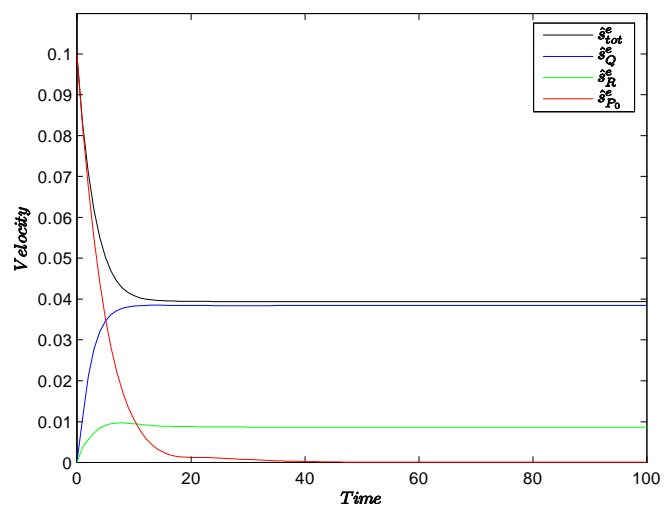


Figure 11: Feilbudsjett av hastigheten

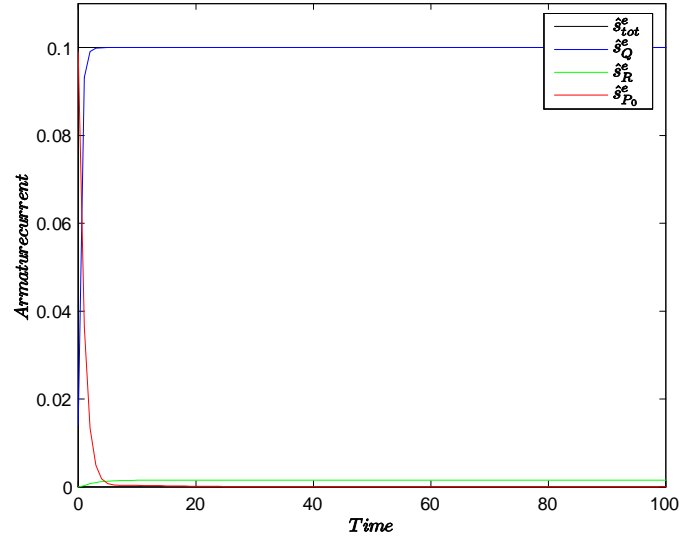


Figure 12: Feilbudsjett av ankerstrømmen

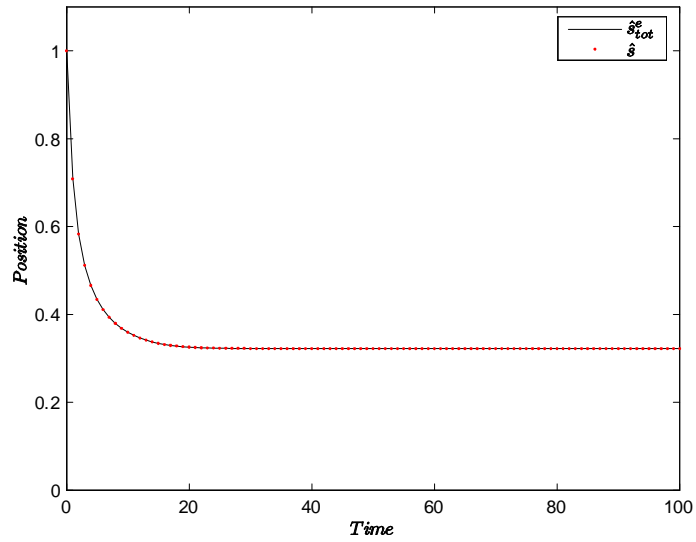


Figure 13: RMS-summen av standardavviket for feilbidragene til posisjonsfeilen og standardavviket til posisjonen beregnet av Kalmanfilteret

## 7 Suboptimale Kalmanfilter

Det er laget to suboptimale Kalmafiltere for vårt system, og disse skal vi videre analysere.

### 7.1 Suboptimalt Kalmanfilter designet ved hjelp av modellreduksjon

I det første suboptimale Kalmanfilteret anser vi at ankerstrømmen er så høyfrekvent at den kan beskrives av hvit støy, og vi får derfor bare to tilstandsvariable. Matrisene i det suboptimale systemet markers med  $*$  for å skille dem fra matrisene i simuleringsmodellen, og systemet kan skrives slik:

$$\mathcal{M}^F \begin{cases} \dot{\underline{x}}^* = F^* \underline{x}^* + L^* u + G^* v^* \\ z_k = H^* \underline{x}_k^* + w_k^* \end{cases}$$

med tilhørende matriser:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}^* &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} \underline{x}^* + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_2} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_2} \end{bmatrix} v^* \\ z_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}_k^* + w_k^* \end{aligned}$$

hvor den nye støybeskrivelsen er gitt:

$$v^* \sim \mathcal{N}(\underline{0}, \frac{T_3}{2} \tilde{Q} \delta(t - \tau))$$

For å kjøre kovariansanalysen, danner vi oss en ny tilstandsvektor  $\underline{x}_a = \begin{bmatrix} \underline{e} \\ \underline{x} \end{bmatrix}$ , og de tilsvarende augmenterte matrisene funnet av formlene fra forelesningsnotat 7, se [2], blir som følger:

$$\dot{\underline{x}}_a(t) = F_a \underline{x}_a(t) + G_a v; \quad \underline{x}_a(t) = \begin{bmatrix} \bar{\underline{e}}(t) \\ \underline{x}(t) \end{bmatrix} \text{ for } t \in [\hat{t}_k, \bar{t}_{k+1}] \quad (\text{TO})$$

$$\underline{x}_a(\hat{t}_k) = (I_a - K_a H_a) \underline{x}_a(\bar{t}_k) - K_a v_k; \quad \underline{x}_a(\hat{t}_k) = \begin{bmatrix} \bar{\underline{e}}_k \\ \underline{x}_k \end{bmatrix} \quad (\text{MO})$$

hvor :

$$\begin{aligned} F_a &= \begin{bmatrix} F^* & \Delta F^* \\ 0 & F \end{bmatrix}, \quad G_a = \begin{bmatrix} NG \\ G \end{bmatrix}, \quad H_a = \begin{bmatrix} H^* & \Delta H \end{bmatrix}, \quad K_a = \begin{bmatrix} K_k^* \\ 0 \end{bmatrix} \\ I_a &= \begin{bmatrix} I^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Delta F^* = NF - F^*N, \quad \Delta H = H - H^*N \end{aligned}$$

Ligningene for den sanne kovarians av estimeringsfeilen er:

$$\dot{P}_a = F_a P_a + P_a F_a^T + G_a Q G_a^T, \quad t \in [\hat{t}_k, \bar{t}_{k+1}] \quad (\text{TO})$$

$$P_a(\hat{t}_k) = (I_a - K_a H_a) P_a(\bar{t}_k) (I_a - K_a H_a)^T - K_a R K_a^T \quad (\text{MO})$$

$$P_a(\hat{t}_0) = \begin{bmatrix} N \bar{P}_0 N^T & N \bar{P}_0 \\ \bar{P}_0 N^T & \bar{P}_0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV})$$

I Matlab-programmet ModelReduction.m beregnes standardavvik for posisjon og hastighet med både det optimale og det suboptimale Kalmanfilteret. I tillegg finnes det sanne standardavviket ved å bruke kovariansanalyseformlene gitt overnfor. Programmet viser også den virkelige hastigheten, den estimerte hastigheten fra det suboptimale KF, og differansen mellom disse. Se resultatene i figurene 14, 15 og 16. Man kan da legge merke til at Kalmanfilteret for det suboptimale systemet tror at estimeringsfeilen er ganske mye mindre enn for det optimale systemet. I virkeligheten er den sanne estimeringsfeilen litt større for det suboptimale systemet enn for det optimale.

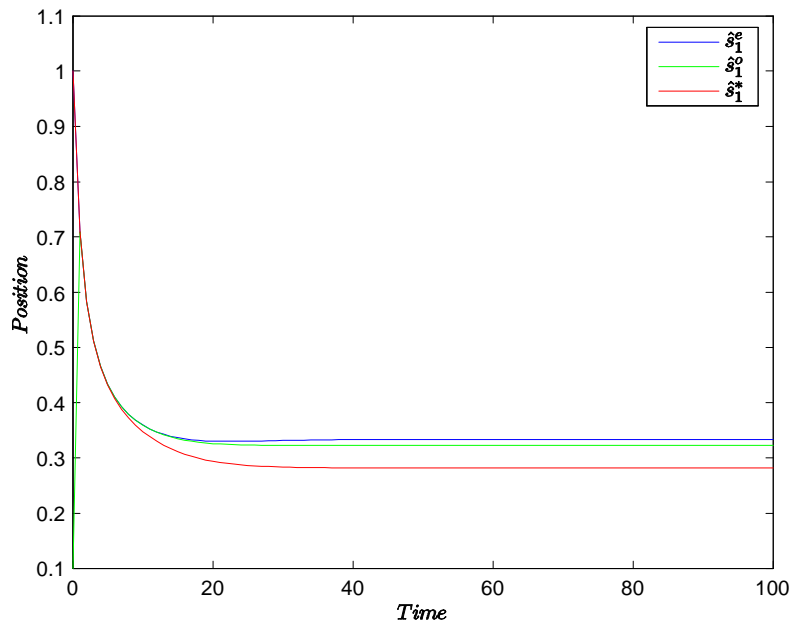


Figure 14: Standardavvikene for posisjonen

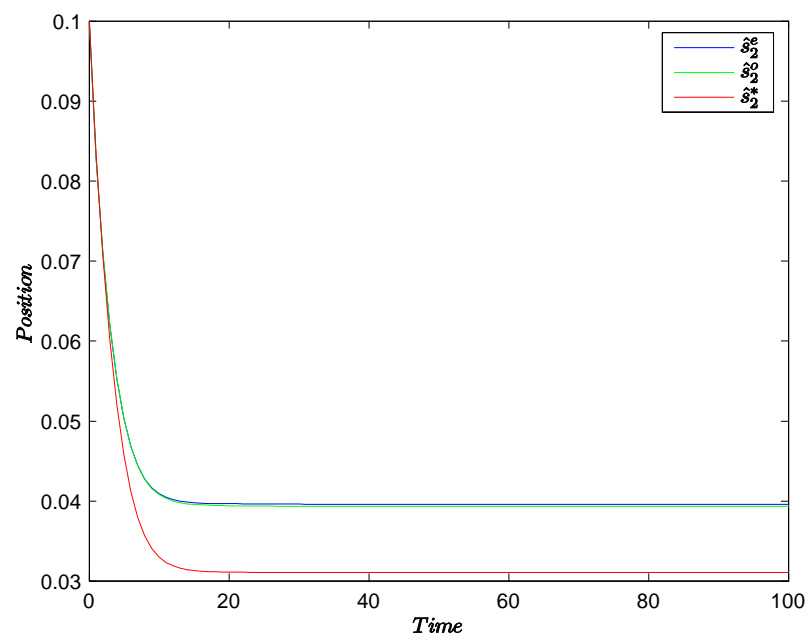


Figure 15: Standardavvikene for hastigheten

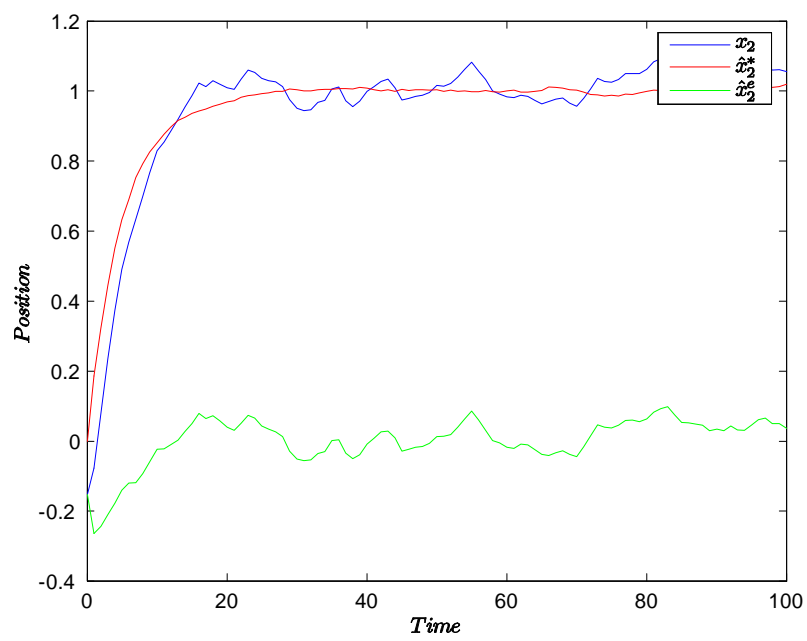


Figure 16: Hastighetene og den virkelige hastighetsfeilen

## 7.2 Suboptimalt Kalmanfilter designet ved hjelp av måling av tilstand $x_3$

Vi har nå et annet suboptimalt system der vi måler tilstande  $x_3$  og ser på denne som pådrag. Simuleringsmodellen blir da lik som i sted bortsett fra i måleligninga der nå også  $x_3$  måles:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= F\underline{x} + Lu + Gv \\ z_k &= H\underline{x}_k + \underline{w}_k \\ \underline{x}_0 &\sim \mathcal{N}(\underline{0}, \hat{P}_0), v \sim \mathcal{N}(\underline{0}, \tilde{Q}\delta(t - \tau)), \underline{w}_k \sim \mathcal{N}(\underline{0}, R\delta_{kl})\end{aligned}$$

hvor

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Den nye  $R$ -matrisen vil nå også få en usikkerhet for måling av ankerstrømmen. Vi antar denne er lik 1%, og at de to målingene av  $x_1$  og  $x_3$  er uavhengige slik at vi får:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.01^2 \end{bmatrix}$$

Filtermodellen blir nå:

$$\mathcal{M}^F \left\{ \begin{aligned} \dot{\underline{x}}^* &= F^*\underline{x}^* + L^*u^* + G^*v^* \\ z_k &= H^*\underline{x}_k^* + w_k^* \end{aligned} \right.$$

med tilhørende matriser:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}^* &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} \underline{x}^* + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_2} \end{bmatrix} u^* + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_2} \end{bmatrix} v^* \\ z_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}_k^* + w_k^*\end{aligned}$$

og pådraget er gitt av:

$$u^* = x_3 + v^*$$

I simuleringsmodellen kommer prosess-støyen inn på tilstand  $x_3$ , og forplanter seg videre til de andre tilstandene. I filtermodellen er  $x_3$  definert som pådrag, og prosess-støyen blir derfor innbygd i pådraget. Prosess-støyen vi vil bruke i filtermodellen blir derfor den måleusikkerheten vi har for  $x_3$ , slik at:

$$v^* \sim \mathcal{N}(0, \tilde{Q}^*\delta(t - \tau)), \text{ hvor } \tilde{Q}^* = 0.01^2$$

### 7.2.1 Utledning av feilligninger

Vi skal nå se på utledning av feillikningene når vi antar at målingene av  $x_3$  utføres med frekvens 100 Hz. Vi ser først på tidsopdateringen.

$$\bar{\underline{e}}(t) = N\underline{x}(t) - \bar{\underline{x}}^*(t), \quad \text{hvor } N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\bar{\underline{e}}} = N\dot{\underline{x}} - \dot{\bar{\underline{x}}}^* = NF\underline{x} + NLu + NGv - F^*\bar{\underline{x}}^* - L^*\bar{u}^* \quad (2)$$

$$u^* = x_3 + v^* \implies \bar{u}^* = x_3 = A\underline{x}, \text{ hvor } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Setter 3 inn i 2 og legger til  $(F^*N\underline{x} - F^*N\underline{x})$ :

$$\dot{\underline{\bar{e}}} = NF\underline{x} + NLu + NGv - F^*\underline{\bar{x}}^* - L^*A\underline{x} + F^*N\underline{\bar{x}} - F^*N\underline{x}$$

Ordner, og vet at  $NLu = NGv = 0$ :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\bar{e}}} &= F^*(N\underline{x} - \underline{\bar{x}}^*) + (NF - F^*N - L^*A)\underline{x} + NLu + NGv \\ \dot{\underline{\bar{e}}} &= F^*\underline{\bar{e}} + \Delta F^*\underline{x}\end{aligned}\tag{4}$$

$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + Lu + Gv\tag{5}$$

Ligningene 4 og 5 gir da den augmenterte feilligningen for tidsopdatering:

$$\dot{\underline{x}}_a(t) = F_a\underline{x}_a(t) + L_a u + G_a v; \quad \underline{x}_a(t) = \begin{bmatrix} \underline{\bar{e}}(t) \\ \underline{x}(t) \end{bmatrix} \text{ for } t \in [\hat{t}_k, \bar{t}_{k+1}] \quad (\text{TO})$$

hvor :

$$\begin{aligned}F_a &= \begin{bmatrix} F^* & \Delta F^* \\ 0 & F \end{bmatrix}, \quad L_a = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix}, \quad G_a = \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} \\ \Delta F^* &= NF - F^*N - L^*A\end{aligned}$$

Ser så på måleoppdateringa. Her må det "trikses" litt siden filtermodellen bare arbeider med tilstand  $x_1$  og  $x_2$ , og vi i virkeligheten nå også måler tilstand  $x_3$ . Dette får vi til ved å plukke ut bare tilstand  $x_1$  fra måleligningen ved å gange med en matrise vi kaller  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ :

$$\begin{aligned}\hat{\underline{e}}_k &= N\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^* = N\underline{x}_k - \underline{\bar{x}}_k^* - K_k^*(B\underline{z}_k - H^*\underline{\bar{x}}_k^*) \\ &= \underline{\bar{e}}_k - K_k^*(BH\underline{x}_k + B\underline{w}_k - H^*\underline{\bar{x}}_k^*)\end{aligned}$$

Legger til  $K_k^*(H^*N\underline{x}_k - H^*N\underline{x}_k)$ :

$$\begin{aligned}\hat{\underline{e}}_k &= \underline{\bar{e}}_k - K_k^*(BH\underline{x}_k + B\underline{w}_k - H^*\underline{\bar{x}}_k^* + H^*N\underline{x}_k - H^*N\underline{x}_k) \\ &= \underline{\bar{e}}_k - K_k^*(BH - H^*N)\underline{x}_k - K_k^*H^*(N\underline{x}_k - \underline{\bar{x}}_k^*) - K_k^*B\underline{w}_k \\ &= \underline{\bar{e}}_k - K_k^*\Delta H\underline{x}_k - K_k^*H^*\underline{\bar{e}}_k - K_k^*B\underline{w}_k \\ \hat{\underline{e}}_k &= (I^* - K_k^*H^*)\underline{\bar{e}}_k - K_k^*\Delta H\underline{x}_k - K_k^*B\underline{w}_k \\ \underline{x}_k &= \underline{x}_k\end{aligned}\tag{6}$$

Ligningene 6 og 7 gir da den augmenterte feilligningen for måleoppdatering:

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{e}}_k \\ \underline{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^* - K_k^*H^* & -K_k^*\Delta H \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\bar{e}}_k \\ \underline{x}_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_k^* \\ 0 \end{bmatrix} B\underline{w}_k$$

Skriver dette på en mer kompakt form:

$$\underline{x}_a(\hat{t}_k) = (I_a - K_a H_a)\underline{x}_a(\bar{t}_k) - K_a B\underline{w}_k; \quad \underline{x}_a(\hat{t}_k) = \begin{bmatrix} \hat{\underline{e}}_k \\ \underline{x}_k \end{bmatrix} \quad (\text{MO})$$

hvor :

$$\begin{aligned}H_a &= \begin{bmatrix} H^* & \Delta H \end{bmatrix}, \quad \Delta H = BH - H^*N \\ I_a &= \begin{bmatrix} I^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad K_a = \begin{bmatrix} K_k^* \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$



### 7.2.2 Utledning av kovariansanalyseformlene

Det neste vi skal gjøre er å finne kovariansligningene til  $\underline{x}_a(t) - \underline{\bar{x}}_a(t)$  og  $\underline{x}_a(\hat{t}_k) - \underline{\bar{x}}_a(\hat{t}_k)$ , også kalt kovariansanalyseformlene. Vi starter med tidsopdateringen:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}_a(t) &= F_a \underline{x}_a(t) + L_a u(t) + G_a v \\ \dot{\underline{P}}_a(t) &= \frac{d}{dt} E \left\{ (\underline{x}_a(t) - \underline{\bar{x}}_a(t)) (\underline{x}_a(t) - \underline{\bar{x}}_a(t))^T \right\}\end{aligned}$$

Kaller  $\underline{x}_a(t) - \underline{\bar{x}}_a(t) = \underline{\tilde{x}}_a(t)$ , og dropper benevning av  $t$  og  $a$  i utledningen:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{P}} &= \frac{d}{dt} E \left\{ \underline{\tilde{x}} \underline{\tilde{x}}^T \right\} = E \left\{ \dot{\underline{\tilde{x}}} \underline{\tilde{x}}^T + \underline{\tilde{x}} \dot{\underline{\tilde{x}}}^T \right\} \\ \dot{\underline{\tilde{x}}} &= \dot{\underline{x}} - \dot{\underline{\bar{x}}} = F \underline{x} + L u + G v - F \underline{\bar{x}} - L u \\ &= F \underline{\tilde{x}} + G v\end{aligned}$$

Superposisjonsintegralet gir videre:

$$\underline{\tilde{x}}(t) = e^{F(t-t_0)} \underline{\tilde{x}}_0 + \int_{t_0}^t e^{F(t-\tau)} G v(\tau) d\tau$$

Definerer  $S = E \left\{ \dot{\underline{\tilde{x}}} \underline{\tilde{x}}^T \right\}$  og  $S^T = E \left\{ \underline{\tilde{x}} \dot{\underline{\tilde{x}}}^T \right\}$ :

$$\begin{aligned}S &= E \left\{ \dot{\underline{\tilde{x}}} \underline{\tilde{x}}^T \right\} = E \left\{ (F \underline{\tilde{x}} + G v) \underline{\tilde{x}}^T \right\} \\ &= F E \left\{ \underline{\tilde{x}} \underline{\tilde{x}}^T \right\} + G E \left\{ v(t) \left( e^{F(t-t_0)} \underline{\tilde{x}}_0 + \int_{t_0}^t e^{F(t-\tau)} G v(\tau) d\tau \right)^T \right\} \\ &= \underbrace{F E \left\{ \underline{\tilde{x}} \underline{\tilde{x}}^T \right\}}_{\underline{\bar{P}}} + \underbrace{G E \left\{ v(t) \underline{\tilde{x}}_0^T \right\}}_0 e^{F^T(t-t_0)} + G \cdot E \left\{ v(t) \int_{t_0}^t v^T(\tau) G^T e^{F^T(t-\tau)} d\tau \right\}\end{aligned}$$

Ser nøyere på det siste leddet:

$$\begin{aligned}G \cdot E \left\{ \int_{t_0}^t v(t) v^T(\tau) G^T e^{F^T(t-\tau)} d\tau \right\} &= G \int_{t_0}^t E \left\{ v(t) v^T(\tau) \right\} G^T e^{F^T(t-\tau)} d\tau \\ &= G \int_{t_0}^t \tilde{Q} \delta(t-\tau) G^T e^{F^T(t-\tau)} d\tau \\ &= G \frac{1}{2} \tilde{Q} G^T = \frac{1}{2} G \tilde{Q} G^T\end{aligned}$$

Får her kun verdier når  $t = \tau$  på grunn av Dirac-pulsen, slik at  $e^{F^T(t-\tau)} = e^0 = 1$ . Dessuten integrerer vi bare over halve Dirac-pulsen slik at integralet blir lik  $\frac{1}{2}$ . Vi får videre:

$$\begin{aligned} S &= F\bar{P} + \frac{1}{2}G\tilde{Q}G^T \\ \dot{\bar{P}} &= S + S^T = F\bar{P} + \frac{1}{2}G\tilde{Q}G^T + \bar{P}F^T + \frac{1}{2}G\tilde{Q}G^T \end{aligned}$$

Viser at matrisene er augmenterte og funksjon av tiden:

$$\dot{\bar{P}}_a(t) = F_a\bar{P}_a(t) + \bar{P}_a(t)F_a^T + G_aQ G_a^T, \quad t \in [\hat{t}_k, \bar{t}_{k+1}]$$

For å vise måleligningen dører vi om noen av matrisene slik:

$$\begin{aligned} \underline{x}_a(\hat{t}_k) &= \underbrace{(I_a - K_a H_a) \underline{x}_a(\bar{t}_k)}_C - \underbrace{K_a B \underline{w}_k}_D \\ \underline{x}_a(\hat{t}_k) &= C \underline{x}_a(\bar{t}_k) + D \underline{w}_k \end{aligned}$$

Utleddningen blir som følger:

$$P_a(\hat{t}_k) = E \left\{ (\underline{x}_a(\hat{t}_k) - \bar{\underline{x}}_a(\hat{t}_k)) * (\underline{x}_a(\hat{t}_k) - \bar{\underline{x}}_a(\hat{t}_k))^T \right\}$$

Dropper benevnning av  $(\hat{t}_k)$ ,  $k$  og  $a$  i utledningen:

$$P = E \left\{ (\underline{x} - \bar{\underline{x}}) (\underline{x} - \bar{\underline{x}})^T \right\} \quad (8)$$

$$= E \left\{ (C(\underline{x} - \bar{\underline{x}}) + D\underline{w}) (C(\underline{x} - \bar{\underline{x}}) + D\underline{w})^T \right\} \quad (9)$$

Kaller igjen  $\underline{x} - \bar{\underline{x}} = \tilde{\underline{x}}$

$$\begin{aligned} P &= E \left\{ C\tilde{\underline{x}}\tilde{\underline{x}}^T C^T + D\underline{w}\underline{w}^T D^T + C\tilde{\underline{x}}\underline{w}^T D^T + C\underline{w}\tilde{\underline{x}}^T D^T \right\} \\ &= \underbrace{E\{C\tilde{\underline{x}}\tilde{\underline{x}}^T C^T\}}_{C\bar{P}C^T} + \underbrace{E\{D\underline{w}\underline{w}^T D^T\}}_{D\bar{R}D^T} + \underbrace{E\{C\tilde{\underline{x}}\underline{w}^T D^T\}}_0 + \underbrace{E\{D\underline{w}\tilde{\underline{x}}^T C^T\}}_0 \\ &= C\bar{P}C^T + D\bar{R}D^T \end{aligned} \quad (10)$$

De to siste leddene er bare transponert av hverandre, slik at det holder å vise at det ene leddet = 0. For å være presise her tar vi også med benevninger:

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{x}}_a(\hat{t}_k) &= \underline{x}_a(\hat{t}_k) - \bar{\underline{x}}_a(\hat{t}_k) \\ &= \Phi_a \underline{x}_a(\hat{t}_{k-1}) + \Lambda_a \underline{u}_{k-1} + \Gamma_a \underline{v}_{k-1} - \Phi_a \bar{\underline{x}}_a(\hat{t}_{k-1}) - \Lambda_a \underline{u}_{k-1} \\ &= \Phi_a \tilde{\underline{x}}_a(\hat{t}_{k-1}) + \Gamma_a \underline{v}_{k-1} \\ &= \Phi_a^2 \tilde{\underline{x}}_a(\hat{t}_{k-2}) + \Phi_a \Gamma_a \underline{v}_{k-2} + \Gamma_a \underline{v}_{k-1} \\ &= \Phi_a^3 \tilde{\underline{x}}_a(\hat{t}_{k-3}) + \Phi_a^2 \Gamma_a \underline{v}_{k-3} + \Phi_a \Gamma_a \underline{v}_{k-2} + \Gamma_a \underline{v}_{k-1} \end{aligned}$$

Dette kan formuleres generelt:

$$\tilde{x}_a(\hat{t}_k) = \Phi_a^k \tilde{x}_a(\hat{t}_0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_a^{k-1-i} \Gamma_a v_i$$

Tar forventningen:

$$\begin{aligned} E \{ C \tilde{x} w^T D^T \} &= CE \{ \tilde{x} w^T \} D^T \\ E \{ \tilde{x} w^T \} &= E \left\{ \Phi_a^k \tilde{x}_a(\hat{t}_0) w^T + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_a^{k-1-i} \Gamma_a v_i w^T \right\} \\ &= E \left\{ \Phi_a^k \underline{x}_a(\hat{t}_0) \underline{w}^T - \Phi_a^k \bar{x}_a(\hat{t}_0) \underline{w}^T + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_a^{k-1-i} \Gamma_a v_i \underline{w}^T \right\} \\ &= \underbrace{\Phi_a^k E \{ \underline{x}_a(\hat{t}_0) \underline{w}^T \}}_0 - \underbrace{\Phi_a^k E \{ \bar{x}_a(\hat{t}_0) \underline{w}^T \}}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_a^{k-1-i} \Gamma_a \underbrace{E \{ v_i \underline{w}^T \}}_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Avslutter utledningen ved å sette inn faktiske verdier for  $C$  og  $D$  i formel 10:

$$P_a(\hat{t}_k) = (I_a - K_a H_a) P_a(\bar{t}_k) (I_a - K_a H_a)^T + K_a B R B^T K_a^T$$

Skal til slutt se på initialverdien til  $P_a$ :

$$\begin{aligned} P_a &= E \{ (\underline{x}_a - \bar{x}_a)(\underline{x}_a - \bar{x}_a)^T \} \\ \underline{x}_a &= \begin{bmatrix} \underline{\bar{e}} \\ \underline{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \underline{x} - \underline{\bar{x}}^* \\ \underline{x} \end{bmatrix} \\ \bar{x}_a &= \begin{bmatrix} \bar{\underline{e}} \\ \bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \bar{x} - \bar{x}^* \\ \bar{x} \end{bmatrix} \\ \underline{x}_a - \bar{x}_a &= \begin{bmatrix} N(\underline{x} - \bar{x}) \\ \underline{x} - \bar{x} \end{bmatrix} \\ P_a &= E \left\{ \begin{bmatrix} N(\underline{x} - \bar{x}) \\ \underline{x} - \bar{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\underline{x} - \bar{x})^T N^T & (\underline{x} - \bar{x})^T \end{bmatrix} \right\} \\ &= E \left\{ \begin{bmatrix} N(\underline{x} - \bar{x})(\underline{x} - \bar{x})^T N^T & N(\underline{x} - \bar{x})(\underline{x} - \bar{x})^T \\ (\underline{x} - \bar{x})(\underline{x} - \bar{x})^T N^T & (\underline{x} - \bar{x})(\underline{x} - \bar{x})^T \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} N P N^T & N P \\ P N^T & P \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

Setter inn  $t = 0$ :

$$P_a(\bar{t}_0) = \begin{bmatrix} N P_0 N^T & N P_0 \\ P_0 N^T & P_0 \end{bmatrix}$$

## References

- [1] C. F. V. Loan, “Computing integrals involving the matrix exponential,” *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, vol. AC-23, NO. 3, pp. 395–404, 1978.
- [2] O. Hallingstad, “Monte carlo og kovariansanalyse av kalmanfilteret,” 7.