UNIVERSITETET I OSLO
Det matematisk-naturvitenskaplige fakultet

Eksamen i:	**UNIK4500 - Stokastiske systemer**
Eksamensdag:	Fredag 11. desember 2009
Tid for eksamen:	09:15 - 12:15
Vedlegg:	Forelesning 13, 14 og notat 7
Tillatte hjelpemidler:	Ingen
Oppgavesettet er på:	3 sider
Kontaktperson:	Oddvar Hallingstad, tlf: 784 eller 95991445 Eksamenslokalet besøkes kl 10.15

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Hvor mye (ca) hver oppgave og hvert spørsmål veier ved bedømning er vist i %.

Oppgave 1 (25%) Grunleggende begreper og definisjoner

a) (3%) Hva er en optimal estimator for et stokastisk system.

b) (2%) Hva betyr det at den symmetriske reelle matrisen A er positiv definit? Hvilke verdier har da egenverdiene?

c) (3%) Hvilke krav må matrisene oppfylle for at det tidsinvariante systemet

$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u}; \quad \underline{z} = H\underline{x}$$

skal være styrbart og observerbart

d) (5%) Hvordan defineres stokastisk styrbarhet og observerbarhet for et tidsinvariant stokastisk system?

$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + G\underline{v}; \quad \underline{z} = H\underline{x} + \underline{w} \tag{1}$$

Hvilke krav må matrisene oppfylle for at det skal være stokastisk styrbart og observerbart?

e) (3%) Forklar hva som menes med en hendelse, en stokastisk variabel og en stokastisk prosess.

f) (3%) Definer middelverdien, korrelasjons- og effektspekteret til den skalare stokastiske prosessen $x(t)$

g) (2%) Hva er en stasjonære stokastiske prosesser og en ergodiske prosess?

h) (2%) Hva er en Gauss-Markov prosess?

i) (2%) Forklar forskjellen på simuleringsmodell og filtermodell.

Oppgave 2 (25%) Prediksjon og simulering av stokastiske prosesser

a) (3%) Definer kovariansmatrisen P for den stokastiske vektorprosessen $\underline{x}(t)$. Hvilke egenskaper har kovariansmatrisen P? Hvilken betydning har det for systemet om en av egenverdiene til kovariansmatrisen P er 0?

b) (5%) Gitt den diskrete, tidsinvariante, stokastiske prosesslikningen

$$\underline{x}_{k+1} = \Phi\underline{x}_k + \Lambda\underline{u}_k + \Gamma\underline{v}_k.$$

Hvilke antagelser må vi gjøre for $\underline{x}_0$ og $\underline{v}_k$ for at vi skal få prediksjonslikningene vist under?

$$\begin{aligned}\bar{\underline{x}}_{k+1} &= \Phi\bar{\underline{x}}_k + \Lambda\underline{u}_k, \quad \bar{\underline{x}}_0 \text{ gitt} \\ \bar{P}_{k+1} &= \Phi\bar{P}_k\Phi^T + \Gamma Q\Gamma^T, \quad \bar{P}(t_0) = \bar{P}_0\end{aligned}$$

c) (12%) Utled prediksjonslikningene i punkt b) ovenfor, kommenter.

d) (5%) Anta at den stokastiske vektoren $\underline{x}$ har middelverdi $\bar{\underline{x}}$ og kovarians $\bar{P}$. Dersom vår tallgenerator bare kan generere en stokastisk vektor $\underline{\eta} \backsim \mathcal{N}(\underline{0}, I)$ hvor I er identitetsmatrisa, hvordan kan vi da generere den stokastiske vektoren $\underline{x}$?

Oppgave 3 (25%) Filtrering og glatting.

Kalmanfilterlikningene i det diskrete og kontinuerlige tilfellet (tidsinvariante system uten pådrag) er:

Diskret Kalmanfilter:

$$\begin{array}{l|l}\bar{\underline{x}}_{k+1} = \Phi\hat{\underline{x}}_k; \quad \hat{\underline{x}}_0 \text{ gitt} & \bar{P}_{k+1} = \Phi\hat{P}_k\Phi^T + \Gamma Q\Gamma^T; \quad \hat{P}_0 \text{ gitt} \\ \hat{\underline{x}}_k = \bar{\underline{x}}_k + K_k\left(\underline{z}_k - H\bar{\underline{x}}_k\right) & K_k = \bar{P}_k H^T\left(H\bar{P}_k H^T + R\right)^{-1} \\ & \hat{P}_k = (I - KH)\,\bar{P}_k\end{array}$$

Kontinuerlig Kalmanfilter:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\underline{x}}}(t) &= F\hat{\underline{x}}(t) + K(t)\left(\underline{z}(t) - H\hat{\underline{x}}(t)\right); \quad \hat{\underline{x}}(t_0) \text{ gitt} \\ \dot{\hat{P}}(t) &= F\hat{P}(t) + \hat{P}(t)F^T + G\tilde{Q}G^T - \hat{P}(t)H^T\tilde{R}^{-1}H\hat{P}(t); \quad \hat{P}(t_0) \text{ gitt} \qquad \text{(RL)} \\ K(t) &= \hat{P}(t)H^T\tilde{R}^{-1}\end{aligned}$$

a) (3%) Skriv opp likningene for det kontinuerlig-diskrete Kalmanfilter.

b) (3%) Skriv opp likningene for det kontinuerlige systemet det kontinuerlige Kalmanfilteret er optimalt for. Få med alle antagelsene.

c) (4%) Utledningen av det kontinuerlige Kalmanfilteret ble gjort ved grenseovergang fra de tilsvarende diskrete likningene. Skriv opp hvilke sammenheng som antas å gjelde mellom matrisene i det diskrete og kontinuerlige tilfellet når samplingsintervallet går mot null (1. ordens approksimasjon). Kommenter på sammenhengen mellom støybeskrivelsene.

d) (5%) Gitt systemet

$$\begin{aligned}\underline{x}_{k+1} &= \Phi\underline{x}_k + \Gamma\underline{v}_k \\ \underline{v}_{k+1} &= \Phi_v\underline{v}_k + \underline{n}_k \\ \underline{x}_0 &\backsim \mathcal{N}\left(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0\right), \quad \underline{n}_k \backsim \mathcal{N}(\underline{0}, Q\delta_{kl}) \\ & \underline{x}_0 \text{ og } \underline{n}_k \text{er ukorrelerte.}\end{aligned}$$

Bring dette systemet over på standardform (lineært stokastisk system drevet av hvit støy).

e) (2%) Hva betyr det at en tilstand er glattbar? Når er en tilstand glattbar?

e) (8%) Bruk Rauch-Tung-Striebel formlene til å vise at

$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x}, \quad \underline{z} = H\underline{x} + \underline{w}$$

ikke er glattbar.

Oppgave 4 (25%) Kovariansanalyse

Gitt simuleringsmodellen $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}
\underline{\dot{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & \frac{1}{T_2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_3} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \\
z_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}_k + w_k \\
\underline{x}_0 &\sim \mathcal{N}(\underline{0}, \hat{P}_0), v \sim \mathcal{N}(\underline{0}, \tilde{Q}\delta(t-\tau)), w_k \sim \mathcal{N}(\underline{0}, R\delta_{kl})
\end{aligned}$$

og filtermodellen $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned}
\underline{\dot{x}}^* &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} \underline{x}^* + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_2} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_2} \end{bmatrix} v^*, \qquad v^* \sim \mathcal{N}(0, \frac{T_3}{2}\tilde{Q}\delta\left(t-\tau\right)) \\
\underline{z}_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}_k^* + w_k^* \\
\underline{x}_0^* &\sim \mathcal{N}(\underline{0}, \hat{P}_0^*), v \sim \mathcal{N}(\underline{0}, \tilde{Q}^*\delta(t-\tau)), w_k \sim \mathcal{N}(\underline{0}, R\delta_{kl})
\end{aligned}$$

a) (13%) Finn alle matrisene som inngår i beregning av sann middelverdi og kovarians uttrykt vha matrisene ovenfor.

b) (12%) Skisser et program (pseudokode) som beregner sann middelverdi og kovarians for estimeringsfeilen.

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskaplige fakultet

Eksamen i:	**UNIK4500 - Stokastiske systemer**
Eksamensdag:	Fredag 17. desember 2010
Tid for eksamen:	09:15 - 13:15
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen
Oppgavesettet er på:	3 sider
Kontaktperson:	Oddvar Hallingstad, tlf: 784 eller 95991445 Eksamenslokalet besøkes kl 10.15

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Hvor mye (ca) hver oppgave og hvert spørsmål veier ved bedømning er vist i %.

Oppgave 1 (25%) Grunleggende begreper og definisjoner

a) (3%) Hva er en optimal estimator for et stokastisk system.

b) (3%) Forklar hva som menes med prediksjon, filtrering og glatting.

c) (3%) Hvilke krav må matrisene oppfylle for at det tidsinvariante systemet

$$\underline{\dot{x}} = F\underline{x} + L\underline{u}; \quad \underline{z} = H\underline{x}$$

skal være styrbart og observerbart

d) (5%) Hvordan defineres stokastisk styrbarhet og observerbarhet for et tidsinvariant stokastisk system?

$$\underline{\dot{x}} = F\underline{x} + G\underline{v}; \quad \underline{z} = H\underline{x} + \underline{w} \tag{1}$$

Hvilke krav må matrisene oppfylle for at det skal være stokastisk styrbart og observerbart?

e) (3%) Forklar hva som menes med en hendelse, en stokastisk variabel og en stokastisk prosess.

f) (2%) Hva er Kalmans kanoniske form?

g) (2%) Hva er sammenhengen mellom en sannsynlighet-tetthetsfunksjon (stf) $f(\underline{x})$, og den tilhørende kumlutative sannsynighetsfunksjon (ksf) $F(\underline{x})$?

h) (2%) Definer transisjonsmatrisa $\Phi(t, t_0)$. Hva blir $\Phi(t, t_0)$ når det dynamiske systemet er tidsinvariant? Hva er superposisjonsintegralet?

i) (2%) Forklar forskjellen på simuleringsmodell og filtermodell.

Oppgave 2 (25%) Prediksjon og simulering av stokastiske prosesser

a) (3%) Definer kovariansmatrisen P for den stokastiske vektorprosessen $\underline{x}(t)$. Hvilke egenskaper har kovariansmatrisen P? Hva betyr det at en av egenverdiene til kovariansmatrisen P er 0?

b) (4%) Gitt den diskrete, tidsinvariante, stokastiske prosesslikningen

$$\underline{x}_{k+1} = \Phi\underline{x}_k + \Lambda\underline{u}_k + \Gamma\underline{v}_k.$$

Hvilke antagelser må vi gjøre for $\underline{x}_0$ og $\underline{v}_k$ for at vi skal få prediksjonslikningene vist under?

$$\begin{aligned} \bar{\underline{x}}_{k+1} &= \Phi\bar{\underline{x}}_k + \Lambda\underline{u}_k, \quad \bar{\underline{x}}_0 \text{ gitt} \\ \bar{P}_{k+1} &= \Phi\bar{P}_k\Phi^T + \Gamma Q\Gamma^T, \quad \bar{P}(t_0) = \bar{P}_0 \end{aligned}$$

c) (10%) Utled prediksjonslikningene i punkt b) ovenfor, kommenter.

d) (8%) Gitt systemet

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= F\underline{x} + G\underline{v} \\ \underline{z}_k &= H\underline{x}_k + \underline{w}_k \\ \underline{x}(t_0) &\backsim \mathcal{N}\left(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0\right), \quad \underline{v}(t) \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, \tilde{Q}\delta(t-\tau)\right), \quad \underline{w}_k \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, R\delta_{kl}\right) \\ & \underline{x}(t_0), \underline{v}(t) \text{ og } \underline{w}_k \text{ er ukorrelerte.} \end{aligned}$$

Beskriv hvordan du ville simulere dette systemet på en datamaskin.

Oppgave 3 (25%) Filtrering og glatting.

Kalmanfilterlikningene i det diskrete og kontinuerlige tilfellet (tidsinvariante system uten pådrag) er:

Diskret Kalmanfilter:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\underline{x}}_{k+1} &= \Phi\hat{\underline{x}}_k; \quad \hat{\underline{x}}_0 \text{ gitt} \\ \hat{\underline{x}}_k &= \bar{\underline{x}}_k + K_k\left(\underline{z}_k - H\bar{\underline{x}}_k\right) \end{aligned}\right| \begin{aligned} &\bar{P}_{k+1} = \Phi\hat{P}_k\Phi^T + \Gamma Q\Gamma^T; \quad \hat{P}_0 \text{ gitt} \\ &K_k = \bar{P}_k H^T\left(H\bar{P}_k H^T + R\right)^{-1} \\ &\hat{P}_k = (I - KH)\bar{P}_k \end{aligned}$$

Kontinuerlig Kalmanfilter:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\underline{x}}}(t) &= F\hat{\underline{x}}(t) + K(t)\left(\underline{z}(t) - H\hat{\underline{x}}(t)\right); \quad \hat{\underline{x}}(t_0) \text{ gitt} \\ \dot{\hat{P}}(t) &= F\hat{P}(t) + \hat{P}(t)F^T + G\tilde{Q}G^T - \hat{P}(t)H^T\tilde{R}^{-1}H\hat{P}(t); \quad \hat{P}(t_0) \text{ gitt} \qquad \text{(RL)} \\ K(t) &= \hat{P}(t)H^T\tilde{R}^{-1} \end{aligned}$$

a) (3%) Skriv opp likningene for det kontinuerlig-diskrete Kalmanfilter.

b) (3%) Skriv opp likningene for det kontinuerlige-diskrete systemet det kontinuerlige-diskrete Kalmanfilteret er optimalt for. Få med alle antagelsene.

c) (3%) Definere de lineære målemodellene som bli brukt ved Bayes-, Fisher- og Minstekvadraters-estimering.

d) (6%) Beskriv strukturen til en optimal intervall glatter for det lineært stokastisk systemet (forover-bakover formen)

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= F\underline{x} + G\underline{v} \\ \underline{z} &= H\underline{x} + \underline{w} \\ \underline{x}(t_0) &\backsim \mathcal{N}\left(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0\right), \quad \underline{v}(t) \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, \tilde{Q}\delta(t-\tau)\right), \quad \underline{w}(t) \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, \tilde{R}\delta(t-\tau)\right) \\ & \underline{x}(t_0), \underline{v}(t) \text{ og } \underline{w}(t) \text{ er ukorrelerte} \end{aligned}$$

Hvorfor omformuleres bakoverlikningene i $\hat{S} = \hat{P}^{-1}$ og $\underline{\hat{s}} = S\hat{\underline{x}}$

e) (10%) Dersom en definerer

$$\hat{P} = XZ^{-1}$$

kan en finne løsningen av Riccatilikningen (RL) vha matriseeksponetialfunksjonen, vis dette.

Oppgave 4 (25%) Bruk av Kalmanfilteret på ulineære systemer.

Gitt systemet

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \underline{f}\left(\underline{x}_k, \underline{u}_k\right) + \Gamma \underline{v}_k \\ \underline{z}_k &= \underline{h}\left(\underline{x}_k\right) + \underline{w}_k \\ \underline{x}\left(t_0\right) &\backsim \mathcal{N}\left(\underline{\bar{x}}_0, \bar{P}_0\right), \quad \underline{v}_k \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, Q\delta_{kl}\right), \quad \underline{w}_k \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, R\delta_{kl}\right) \\ & \underline{x}\left(t_0\right), \underline{v}_k \text{ og } \underline{w}_l \text{ er ukorrelerte} \end{aligned}$$

a) (10%) Sett opp de ulineære prosesslikningene for nominell tilstand ($\underline{\tilde{x}}$) og utled en lineær beskrivelse av tilstandsfeilen $\delta\underline{x}_k = \underline{x}_k - \underline{\tilde{x}}_k$ og målefeilen $\delta\underline{z}_k = \underline{z}_k - \underline{\tilde{z}}_k$

b) (5%) Sett opp likningene for det lineariserte Kalmanfilter (LKF). Likningene for det diskrete lineære Kalmanfilteret er gitt i oppgave 3.

c) (3%) Tegn blokkskjemaet for det lineariserte Kalmanfilter.

d) (2%) Hvordan kan vi lage et utvidet Kalmanfilter (UKF) fra et LKF? Hva er et delvis tilbakekoblet Kalmanfilter

e) (5%) Forklar hvordan en kan undersøke et ulineært Kalmanfilter vha Monte Carlo simuleringer.

UNIVERSITETET I OSLO
Det matematisk-naturvitenskaplige fakultet

Eksamen i:	**UNIK4500 - Stokastiske systemer**
Eksamensdag:	Mandag 12. desember 2011
Tid for eksamen:	09:15 - 13:15
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen
Oppgavesettet er på:	3 sider
Kontaktperson:	Oddvar Hallingstad, tlf: 784 eller 95991445 Eksamenslokalet besøkes kl 10.30

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Hvor mye hver oppgave og hvert punkt veier ved bedømning er vist i %. Vær oppmerksom på at et punkt kan inneholde flere spørsmål.

Oppgave 1 (25%) Grunleggende begreper og definisjoner

a) (3%) Hva er en optimal estimator for et stokastisk system.

b) (5%) Forklar framgangsmåten når en skal lage et Kalmanfilter for et gitt fysisk system.

c) (3%) Definer matematisk Kroneckerdeltaet δ_{kl} og Diracpulsen $\delta(t-\tau)$. Hva brukes disse to funksjonene til.

d) (3%) Hva betyr det at vi har en minstekvadraters modell for målelikninga

$$\underline{z} = H\underline{x} + \underline{w} \tag{1}$$

Hvordan formulerer vi matematisk estimeringsproblemet og hva blir estimatet for minstekvadraters modellen?

e) (3%) Den matematiske modellen for en vogn som ruller på et horisontalt underlag, utsettes for kraften u og er festen i veggen med fjær og demper kan skrives

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u \tag{2}$$

Utled tilstandsromformen for denne likninga

f) (3%) Gitt den tidsinvariante tilstandsromlikninga

$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u}; \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \tag{3}$$

$$\underline{u}_k = \underline{u}(t) \text{ for } t \in [t_k, t_{k+1}\rangle \tag{4}$$

Hvordan kan en finne matrisene som inngår i den diskrete modellen

$$\underline{x}_{k+1} = \Phi\underline{x}_k + \Lambda\underline{u}_k; \quad \underline{x}_0 \text{ er gitt} \tag{5}$$

vha Matlab.

g) (3%) Hvordan defineres stokastisk styrbarhet og observerbarhet for et tidsinvariant stokastisk system?

$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + G\underline{v}; \quad \underline{z} = H\underline{x} + \underline{w} \tag{6}$$

h) (2%) Hva er sammenhengen mellom en sannsynlighet-tetthetsfunksjon (stf) $f(\underline{x})$, og den tilhørende kumlutative sannsynighetsfunksjon (ksf) $F(\underline{x})$?

Oppgave 2 (25%) Prediksjon og simulering av stokastiske prosesser

a) (3%) Definer kovariansmatrisa P for den stokastiske vektorprosessen $\underline{x}(t)$. Hvilke egenskaper har kovariansmatrisa P? Hva betyr det for tilstandsvariablene dersom en av egenverdiene til kovariansmatrisa P er 0?

b) (4%) Gitt den kontinuerlige, tidsinvariante, stokastiske prosesslikningen

$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u} + G\underline{v} \tag{7}$$

Hvilke antagelser må vi gjøre for $\underline{x}_0$ og $\underline{v}(t)$ for at vi skal få prediksjonslikningene

$$\dot{\bar{\underline{x}}} = F\bar{\underline{x}} + L\underline{u}; \quad \bar{\underline{x}}(t_o) = \bar{\underline{x}}_0 \text{ er gitt} \tag{8}$$

$$\dot{\bar{P}} = F\bar{P} + \bar{P}F^T + G\tilde{Q}G^T; \quad \bar{P}(t_0) = \bar{P}_0 \text{ er gitt} \tag{9}$$

c) (10%) Utled prediksjonslikningene i punkt b ovenfor, kommenter.

d) (6%) Gitt systemet

$$\underline{x}_{k+1} = \Phi\underline{x}_k + \Gamma\underline{v}_k \tag{10}$$

$$\underline{z}_k = H\underline{x}_k + \underline{w}_k \tag{11}$$

$$\underline{x}_0 \backsim \mathcal{N}\left(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0\right), \quad \underline{v}_k \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, Q\delta_{kl}\right), \quad \underline{w}_k \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, R\delta_{kl}\right)$$

$\underline{x}_0, \underline{v}_k$ og $\underline{w}_l$ for vilkårlig k og l er ukorrelerte.

Beskrive hvordan du vil gå fram for å simulere dette systemet på en datamaskin vha Matlab.

e) (2%) Skriv opp en 1. ordens approksimasjon av matrisene $\Phi, \Lambda, \Gamma Q\Gamma^T, \Gamma$ og Q vha matrisene $F, L, G\tilde{Q}G^T, G, \tilde{Q}$ og Δ_t (tidsinkrementet).

Oppgave 3 (25%) Filtrering

Kalmanfilterlikningene i det diskrete og kontinuerlige tilfellet (tidsinvariante system uten pådrag) er:

Diskret Kalmanfilter:

$$\begin{array}{l|l} \bar{\underline{x}}_{k+1} = \Phi\hat{\underline{x}}_k; \quad \hat{\underline{x}}_0 \text{ gitt} & \bar{P}_{k+1} = \Phi\hat{P}_k\Phi^T + \Gamma Q\Gamma^T; \quad \hat{P}_0 \text{ gitt} \\ \hat{\underline{x}}_k = \bar{\underline{x}}_k + K_k\left(\underline{z}_k - H\bar{\underline{x}}_k\right) & K_k = \bar{P}_kH^T\left(H\bar{P}_kH^T + R\right)^{-1} \\ & \hat{P}_k = (I - KH)\bar{P}_k \end{array}$$

Kontinuerlig Kalmanfilter:

$$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = F\hat{\underline{x}}(t) + K(t)\left(\underline{z}(t) - H\hat{\underline{x}}(t)\right); \quad \hat{\underline{x}}(t_0) \text{ gitt}$$

$$\dot{\hat{P}}(t) = F\hat{P}(t) + \hat{P}(t)F^T + G\tilde{Q}G^T - \hat{P}(t)H^T\tilde{R}^{-1}H\hat{P}(t); \quad \hat{P}(t_0) \text{ gitt}$$

$$K(t) = \hat{P}(t)H^T\tilde{R}^{-1}$$

a) (2%) Gitt målelikninga

$$\underline{z} = H\underline{x} + \underline{w} \tag{12}$$

Hvile antagelser gjøres for hhv en Fishermodell og en Bayesmodell?

b) (7%) Fra statistikken har vi at dersom vi har målingene

$$z_k = x + w_k; \quad w_k \sim \mathcal{N}(0, \delta_{kl}R) \tag{13}$$

av den ukjent konstanten x beregner vi estimatet ved

$$\hat{x}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} z_i \tag{14}$$

Utled en tilsvarende rekursiv form av denne likninga som den vi har for det diskret Kalmanfilteret (med likningene splittet i tidsoppdatering og måleoppdatering). Hva blir Φ og K_k?

c) (7%) Gitt systemet

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k; \quad x_1 \sim \mathcal{N}\left(\bar{x}, \bar{P}\right) && (15) \\ z_k &= x_k + w_k; \quad w_k \sim \mathcal{N}\left(0, R\delta_{kl}\right) && (16) \end{aligned}$$

Finn formlene for $\hat{P}_k$ og K_k. Sammenlikn kalmanfilterforsterkninga funnet i punktene 3.b og 3.c og kommenter.

d) (7%) Gitt systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0; \quad x(0) \sim \mathcal{N}\left(\bar{x}, \bar{P}\right) && (17) \\ z(t) &= x + w; \quad w \sim \mathcal{N}\left(0, \tilde{R}\delta(t-\tau)\right) && (18) \end{aligned}$$

Skriv opp differentiallikninga for $\hat{P}(t)$ og løs den. Hva blir $K(t)$?

e) (2%) Dersom

$$t_k = k\Delta_t \qquad (19)$$

hva blir sammenhengen mellom R og $\tilde{R}$ dersom vi setter $\hat{P}_k = \hat{P}(t_k)$ (punktene 3.c og 3.d)?

Oppgave 4 (25%) Bruk av Kalmanfilteret på ulineære systemer.

Gitt systemet

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \underline{f}\left(\underline{x}_k, \underline{u}_k\right) + \Gamma \underline{v}_k && (20) \\ \underline{z}_k &= \underline{h}\left(\underline{x}_k\right) + \underline{w}_k && (21) \\ \underline{x}(t_0) &\backsim \mathcal{N}\left(\underline{\bar{x}}_0, \bar{P}_0\right), \quad \underline{v}_k \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, Q\delta_{kl}\right), \quad \underline{w}_k \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, R\delta_{kl}\right) \\ & \underline{x}(t_0), \underline{v}_k \text{ og } \underline{w}_l \text{ er ukorrelerte} \end{aligned}$$

a) (10%) Sett opp de ulineære systemlikningene for nominell tilstand ($\underline{\tilde{x}}$) og utled en lineær beskrivelse av tilstandsfeilen $\delta\underline{x}_k = \underline{x}_k - \underline{\tilde{x}}_k$ og målefeilen $\delta\underline{z}_k = \underline{z}_k - \underline{\tilde{z}}_k$

b) (5%) Sett opp likningene for det lineariserte Kalmanfilter (LKF). Likningene for det diskrete lineære Kalmanfilteret er gitt i oppgave 3.

c) (3%) Tegn blokkskjemaet for det lineariserte Kalmanfilter.

d) (2%) Hvordan kan vi lage et utvidet Kalmanfilter (UKF) fra et LKF? Hva er et delvis tilbakekoblet Kalmanfilter

e) (5%) Forklar hvordan en kan undersøke et ulineært Kalmanfilter vha Monte Carlo simuleringer.

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskaplige fakultet

Eksamen i:	**UNIK4500 - Stokastiske systemer**
Eksamensdag:	Torsdag 13. desember 2012
Tid for eksamen:	09:15 - 13:15
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Lommeregner
Oppgavesettet er på:	3 sider
Kontaktperson:	Oddvar Hallingstad, tlf: 784 eller 95991445
	Eksamenslokalet besøkes kl 10.15

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Hvor mye (ca) hver oppgave og hvert spørsmål veier ved bedømning er vist i %.

Oppgave 1 (25%) Grunleggende begreper og definisjoner

a) (2%) Hvor ligger egenverdiene for den symmetriske reelle matrisen A når den er positiv semidefinit? Hva vil det si at en matrise er symmetrisk?

b) (3%) Hvilke krav må matrisene oppfylle for at det tidsinvariante systemet

$$\underline{x}_{k+1} = \Phi \underline{x}_k + \Lambda \underline{u}_k; \quad \underline{z}_k = H \underline{x}_k$$

skal være styrbart og observerbart

c) (4%) Hvordan defineres stokastisk styrbarhet og observerbarhet for et tidsinvariant stokastisk system?

$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + G\underline{v}; \quad \underline{z} = H\underline{x} + \underline{w} \tag{1}$$

Hvilke krav må matrisene oppfylle for at det skal være stokastisk styrbart og observerbart?

d) (3%) Hva er den matematiske sammenhengen mellom sannsynlighetstetthetsfunksjonen (stf) $f(x)$og den kummulative sannsynlighetsfunksjonen $F(x)$ for den stokastiske variabelen X? Hvordan defineres $F(x)$?

e) (2%) Hva er en stasjonære stokastiske prosesser og hva er krava til at den også er ergodiske.

f) (3%) Anta vi har en skalar stokastisk prosess $x(t)$. For dens autokorrelasjonsfunksjon og effekttetthet bruker vi notasjonene $R_{xx}(\tau)$ og $S_{xx}(\omega)$.Dersom $R_{xx}(\tau)$ er kjent hvordan bestemmes $S_{xx}(\omega)$? Og omvendt: hvordan bestemmes $R_{xx}(\tau)$ dersom $S_{xx}(\omega)$ er kjent?

g) (3%) Hva kan du si om de relative størrelsene på kovariansen til et optimalt Kalmanfilter, et suboptimal Kalmanfilter og sann kovarins for estimeringsfeilen?

h) (3%) Hva menes med prediksjon, filtrering og glatting?

i) (2%) Definer tre typer glatteproblem.

Oppgave 2 (25%) Prediksjon og simulering av stokastiske prosesser

a) (2%) Definer kovariansmatrisa P for den stokastiske vektorprosessen $\underline{x}(t)$. Hvilke egenskaper har kovariansmatrisa P?

b) (5%) Gitt det tidsinvariante systemet

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= F\underline{x}(t) + L\underline{u}, \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \\ \underline{u}(t) &= \underline{u}_k \text{ for } t \in [t_k, t_{k+1}\rangle \end{aligned}$$

Hvordan kan vi beregne matrisene Φ og Λ for det diskrete systemet vha matriseeksponentialfunksjonen *ekspm*() i MatLab?

c) (2%) Gitt den diskrete, tidsinvariante, stokastiske prosesslikningen

$$\underline{x}_{k+1} = \Phi\underline{x}_k + \Lambda\underline{u}_k + \Gamma\underline{v}_k$$

Hvilke antagelser må vi gjøre for $\underline{x}_0$ og $\underline{v}_k$ for at vi skal få prediksjonslikningene

$$\begin{aligned} \bar{\underline{x}}_{k+1} &= \Phi\bar{\underline{x}}_k + \Lambda\underline{u}_k, \quad \bar{\underline{x}}_0 \text{ gitt} \\ \bar{P}_{k+1} &= \Phi\bar{P}_k\Phi^T + \Gamma Q\Gamma^T, \quad = \bar{P}_0 \text{ gitt} \end{aligned}$$

????? **d) (8%)** Utled prediksjonslikningene i punkt b ovenfor, kommenter.

e) (2%) Anta den stokastiske vektoren $\underline{x}$ har middelverdien $\bar{\underline{x}}$ og kovarians $\bar{P}$. Dersom vår tallgenerator bare kan generere en stokastisk vektor $\underline{\eta} \backsim \mathcal{N}(\underline{0}, I)$ hvor I er identitetsmatrisa, hvordan kan vi da generere den stokastiske vektoren $\underline{x}$?

f) (6%) Gitt systemet

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= F\underline{x} + G\underline{v} \\ \underline{z}_k &= H\underline{x}_k + \underline{w}_k \\ \underline{x}(t_0) &\backsim \mathcal{N}(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0), \quad \underline{v}(t) \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, \tilde{Q}\delta(t-\tau)\right), \quad \underline{w}_k \backsim \mathcal{N}(\underline{0}, R\delta_{kl}) \\ & \underline{x}(t_0), \underline{v}(t) \text{ og } \underline{w}_k \text{ er ukorrelerte} \end{aligned}$$

Beskriv hvordan du ville simulere dette systemet på datamaskin.

Oppgave 3 (25%) Filtrering og glatting.

Kalmanfilterlikningene i det diskrete og kontinuerlige tilfellet (tidsinvariante system uten pådrag) er:

Diskret Kalmanfilteret:

$$\begin{array}{l|l} \bar{\underline{x}}_{k+1} = \Phi\hat{\underline{x}}_k; \quad \hat{\underline{x}}_0 \text{ gitt} & \bar{P}_{k+1} = \Phi\hat{P}_k\Phi^T + \Gamma Q\Gamma^T; \quad \hat{P}_0 \text{ gitt} \\ \hat{\underline{x}}_k = \bar{\underline{x}}_k + K_k(\underline{z}_k - H\bar{\underline{x}}_k) & K_k = \bar{P}_k H^T\left(H\bar{P}_k H^T + R\right)^{-1} \\ & \hat{P}_k = (I - KH)\bar{P}_k \end{array}$$

Kontinuerlig Kalmanfilter:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\underline{x}}}(t) &= F\hat{\underline{x}}(t) + K(t)(\underline{z}(t) - H\hat{\underline{x}}(t)); \quad \hat{\underline{x}}(t_0) \text{ gitt} \\ \dot{\hat{P}}(t) &= F\hat{P}(t) + \hat{P}(t)F^T + G\tilde{Q}G^T - \hat{P}(t)H^T\tilde{R}^{-1}H\hat{P}(t); \quad \hat{P}(t_0) \text{ gitt} \qquad \text{(RL)} \\ K(t) &= \hat{P}(t)H^T\tilde{R}^{-1} \end{aligned}$$

a) (3%) Skriv opp likningene for det kontinuerlig-diskrete Kalmanfilter.

b) (3%) Skriv opp likningene for det kontinuerlige systemet det kontinuerlige Kalmanfilteret er optimalt for. Få med alle antagelsene.

c) (3%) Utledningen av det kontinuerlige Kalmanfilteret ble gjort ved grenseovergang fra de tilsvarende diskrete likningene. Skriv opp hvilke sammenheng som antas å gjelde mellom matrisene i det diskrete og kontinuerlige tilfellet når samplingsintervallet går mot null (1. ordens approksimasjon). Kommenter på sammenhengen mellom støybeskrivelsene.

d) (10%) Dersom en definerer

$$\hat{P} = XZ^{-1}$$

kan en finne løsningen av Riccatilikningen (RL)

$$\dot{\hat{P}}(t) = F\hat{P}(t) + \hat{P}(t)F^T + G\tilde{Q}G^T - \hat{P}(t)H^T\tilde{R}^{-1}H\hat{P}(t); \quad \hat{P}(t_0) \text{ gitt}$$

vha matriseeksponetialfunksjonen, vis dette.

e) (6%) Beskriv strukturen til en optimal intervall glatter for det lineært stokastisk systemet

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{x}} &= F\underline{x} + G\underline{v} \\
\underline{z} &= H\underline{x} + \underline{w} \\
\underline{x}(t_0) &\backsim \mathcal{N}\left(\underline{\bar{x}}_0, \bar{P}_0\right), \quad \underline{v}(t) \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, \tilde{Q}\delta(t-\tau)\right), \quad \underline{w}(t) \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, \tilde{R}\delta(t-\tau)\right) \\
& \underline{x}(t_0), \underline{v}(t) \text{ og } \underline{w}(t) \text{ er ukorrelerte}
\end{aligned}$$

Oppgave 4 (25%) Bruk av Kalmanfilteret på ulineære systemer.

Gitt systemet

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) + G\underline{v}, \quad \underline{z}_k = \underline{h}(\underline{x}_k) + \underline{w}_k \\
\underline{x}(t_0) &\backsim \mathcal{N}\left(\underline{\bar{x}}_0, \bar{P}_0\right), \quad \underline{v}(t) \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, \tilde{Q}\delta(t-\tau)\right), \quad \underline{w}_k \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, R\delta_{kl}\right) \\
& \underline{x}(t_0), \underline{v}(t) \text{ og } \underline{w}_k \text{ er ukorrelerte}
\end{aligned}$$

a) (12%) Sett opp likningen for den ulineære filtermodellen og utled en lineær beskrivelse av målefeilen $\delta\underline{z}_k = \underline{z}_k - \underline{\tilde{z}}_k$ (differensiallikning og algebraisk likning)

b) (5%) Sett opp alle likningene for det lineariserte Kalmanfilter (LKF).

c) (4%) Tegn blokkskjemaet for det lineariserte Kalmanfilter.

d) (2%) Hvordan kan vi lage et utvidet Kalmanfilter (UKF) fra et LKF? Hva er et delvis tilbakekoblet Kalmanfilter?

e) (2%) Hva er et annenordens kalmanfilter og et iterert kalmanfilter?