UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskaplige fakultet

Eksamen i:	**UNIK4500 - Stokastiske systemer**
Eksamensdag:	Fredag 17. desember 2010
Tid for eksamen:	09:15 - 13:15
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen
Oppgavesettet er på:	3 sider
Kontaktperson:	Oddvar Hallingstad, tlf: 784 eller 95991445 Eksamenslokalet besøkes kl 10.15

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Hvor mye (ca) hver oppgave og hvert spørsmål veier ved bedømning er vist i %.

Oppgave 1 (25%) Grunleggende begreper og definisjoner

a) (3%) Hva er en optimal estimator for et stokastisk system.

b) (3%) Forklar hva som menes med prediksjon, filtrering og glatting.

c) (3%) Hvilke krav må matrisene oppfylle for at det tidsinvariante systemet

$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + L\underline{u}; \quad \underline{z} = H\underline{x}$$

skal være styrbart og observerbart

d) (5%) Hvordan defineres stokastisk styrbarhet og observerbarhet for et tidsinvariant stokastisk system?

$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + G\underline{v}; \quad \underline{z} = H\underline{x} + \underline{w} \tag{1}$$

Hvilke krav må matrisene oppfylle for at det skal være stokastisk styrbart og observerbart?

e) (3%) Forklar hva som menes med en hendelse, en stokastisk variabel og en stokastisk prosess.

f) (2%) Hva er Kalmans kanoniske form?

g) (2%) Hva er sammenhengen mellom en sannsynlighet-tetthetsfunksjon (stf) $f(\underline{x})$, og den tilhørende kumlutative sannsynighetsfunksjon (ksf) $F(\underline{x})$?

h) (2%) Definer transisjonsmatrisa $\Phi(t, t_0)$. Hva blir $\Phi(t, t_0)$ når det dynamiske systemet er tidsinvariant? Hva er superposisjonsintegralet?

i) (2%) Forklar forskjellen på simuleringsmodell og filtermodell.

Oppgave 2 (25%) Prediksjon og simulering av stokastiske prosesser

a) (3%) Definer kovariansmatrisen P for den stokastiske vektorprosessen $\underline{x}(t)$. Hvilke egenskaper har kovariansmatrisen P? Hva betyr det at en av egenverdiene til kovariansmatrisen P er 0?

b) (4%) Gitt den diskrete, tidsinvariante, stokastiske prosesslikningen

$$\underline{x}_{k+1} = \Phi \underline{x}_k + \Lambda \underline{u}_k + \Gamma \underline{v}_k.$$

Hvilke antagelser må vi gjøre for $\underline{x}_0$ og $\underline{v}_k$ for at vi skal få prediksjonslikningene vist under?

$$\begin{aligned} \bar{\underline{x}}_{k+1} &= \Phi \bar{\underline{x}}_k + \Lambda \underline{u}_k, \quad \bar{\underline{x}}_0 \text{ gitt} \\ \bar{P}_{k+1} &= \Phi \bar{P}_k \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T, \quad \bar{P}(t_0) = \bar{P}_0 \end{aligned}$$

c) (10%) Utled prediksjonslikningene i punkt b) ovenfor, kommenter.

d) (8%) Gitt systemet

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= F\underline{x} + G\underline{v} \\ \underline{z}_k &= H\underline{x}_k + \underline{w}_k \\ \underline{x}(t_0) &\backsim \mathcal{N}\left(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0\right), \quad \underline{v}(t) \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, \tilde{Q}\delta(t-\tau)\right), \quad \underline{w}_k \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, R\delta_{kl}\right) \\ & \underline{x}(t_0), \underline{v}(t) \text{ og } \underline{w}_k \text{ er ukorrelerte.} \end{aligned}$$

Beskriv hvordan du ville simulere dette systemet på en datamaskin.

Oppgave 3 (25%) Filtrering og glatting.

Kalmanfilterlikningene i det diskrete og kontinuerlige tilfellet (tidsinvariante system uten pådrag) er:

Diskret Kalmanfilter:

$$\begin{array}{l|l} \bar{\underline{x}}_{k+1} = \Phi \hat{\underline{x}}_k; \quad \hat{\underline{x}}_0 \text{ gitt} & \bar{P}_{k+1} = \Phi \hat{P}_k \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T; \quad \hat{P}_0 \text{ gitt} \\ \hat{\underline{x}}_k = \bar{\underline{x}}_k + K_k\left(\underline{z}_k - H\bar{\underline{x}}_k\right) & K_k = \bar{P}_k H^T \left(H\bar{P}_k H^T + R\right)^{-1} \\ & \hat{P}_k = (I - KH)\bar{P}_k \end{array}$$

Kontinuerlig Kalmanfilter:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\underline{x}}}(t) &= F\hat{\underline{x}}(t) + K(t)\left(\underline{z}(t) - H\hat{\underline{x}}(t)\right); \quad \hat{\underline{x}}(t_0) \text{ gitt} \\ \dot{\hat{P}}(t) &= F\hat{P}(t) + \hat{P}(t)F^T + G\tilde{Q}G^T - \hat{P}(t)H^T\tilde{R}^{-1}H\hat{P}(t); \quad \hat{P}(t_0) \text{ gitt} \qquad \text{(RL)} \\ K(t) &= \hat{P}(t)H^T\tilde{R}^{-1} \end{aligned}$$

a) (3%) Skriv opp likningene for det kontinuerlig-diskrete Kalmanfilter.

b) (3%) Skriv opp likningene for det kontinuerlige-diskrete systemet det kontinuerlige-diskrete Kalmanfilteret er optimalt for. Få med alle antagelsene.

c) (3%) Definere de lineære målemodellene som bli brukt ved Bayes-, Fisher- og Minstekvadratersestimering.

d) (6%) Beskriv strukturen til en optimal intervall glatter for det lineært stokastisk systemet (forover-bakover formen)

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= F\underline{x} + G\underline{v} \\ \underline{z} &= H\underline{x} + \underline{w} \\ \underline{x}(t_0) &\backsim \mathcal{N}\left(\bar{\underline{x}}_0, \bar{P}_0\right), \quad \underline{v}(t) \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, \tilde{Q}\delta(t-\tau)\right), \quad \underline{w}(t) \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, \tilde{R}\delta(t-\tau)\right) \\ & \underline{x}(t_0), \underline{v}(t) \text{ og } \underline{w}(t) \text{ er ukorrelerte} \end{aligned}$$

Hvorfor omformuleres bakoverlikningene i $\hat{S} = \hat{P}^{-1}$ og $\hat{\underline{s}} = S\hat{\underline{x}}$

e) (10%) Dersom en definerer

$$\hat{P} = XZ^{-1}$$

kan en finne løsningen av Riccatilikningen (RL) vha matriseeksponetialfunksjonen, vis dette.

Oppgave 4 (25%) Bruk av Kalmanfilteret på ulineære systemer.

Gitt systemet

$$\begin{aligned}
\underline{x}_{k+1} &= \underline{f}\left(\underline{x}_k, \underline{u}_k\right) + \Gamma \underline{v}_k \\
\underline{z}_k &= \underline{h}\left(\underline{x}_k\right) + \underline{w}_k \\
\underline{x}\left(t_0\right) &\backsim \mathcal{N}\left(\underline{\bar{x}}_0, \bar{P}_0\right), \quad \underline{v}_k \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, Q\delta_{kl}\right), \quad \underline{w}_k \backsim \mathcal{N}\left(\underline{0}, R\delta_{kl}\right) \\
& \underline{x}\left(t_0\right), \underline{v}_k \text{ og } \underline{w}_l \text{ er ukorrelerte}
\end{aligned}$$

a) (10%) Sett opp de ulineære prosesslikningene for nominell tilstand ($\underline{\tilde{x}}$) og utled en lineær beskrivelse av tilstandsfeilen $\delta\underline{x}_k = \underline{x}_k - \underline{\tilde{x}}_k$ og målefeilen $\delta\underline{z}_k = \underline{z}_k - \underline{\tilde{z}}_k$

b) (5%) Sett opp likningene for det lineariserte Kalmanfilter (LKF). Likningene for det diskrete lineære Kalmanfilteret er gitt i oppgave 3.

c) (3%) Tegn blokkskjemaet for det lineariserte Kalmanfilter.

d) (2%) Hvordan kan vi lage et utvidet Kalmanfilter (UKF) fra et LKF? Hva er et delvis tilbakekoblet Kalmanfilter

e) (5%) Forklar hvordan en kan undersøke et ulineært Kalmanfilter vha Monte Carlo simuleringer.