Eksempler på TNS-modeller

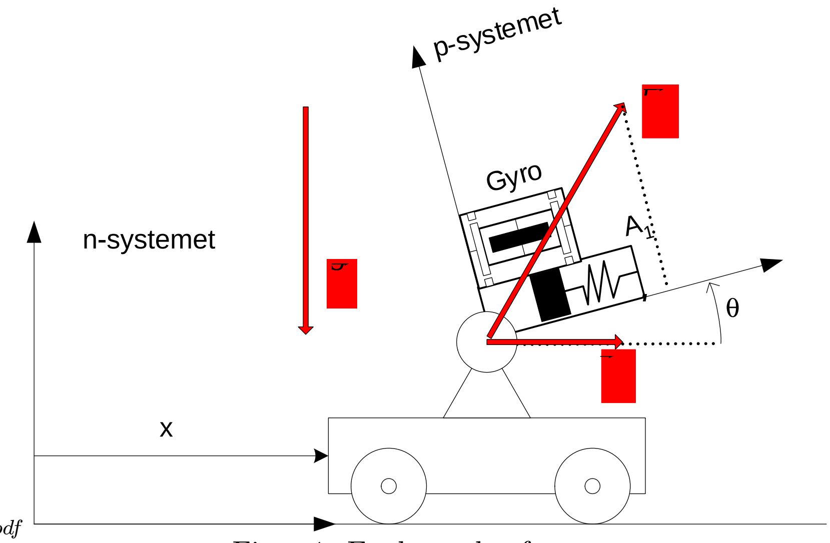
Oddvar Hallingstad

20171129

1 En-akset plattform

Figuren nedenfor viser en en-akset plattform (den måler akselerasjonen bare langs en akse) som kan dreie seg om en akse vinkelrett på papirplanet. Denne dreiningen måles av en gyro.

plattform



$_1.pdf$

Figur 1: Enakset plattform

Feildefinisjoner		
$\delta f = f - \tilde{f}$	$\delta x = x - \tilde{x}$	$\delta\theta = \theta - \tilde{\theta}$
$\delta\omega = \omega - \tilde{\omega}$	$\delta v = v - \tilde{v}$	

Legg merke til definisjonene av feil. De er valgt på denne måten fordi dette gir en standard systemmodell for et eventuelt Kalmanfilter. Målingene $\tilde{f}$ og $\tilde{\omega}$ kan ses på som pådrag. Dersom vi måler posisjonen for bruk i et Kalmanfilter må feilmodellen være $z = \tilde{x} = x + w$ hvor w er hvit støy.

Systemmodell	Navigasjonslikninger	Feillikninger
$\dot{x} = v$	$\dot{\tilde{x}} = \tilde{v}$	$\delta\dot{x} = \delta v$
$\dot{v} = \frac{f - g\sin\theta}{\cos\theta}$	$\dot{\tilde{v}} = \frac{\tilde{f} - g\sin\tilde{\theta}}{\cos\tilde{\theta}}$	$\delta\dot{v} = \frac{1}{\cos^2\tilde{\theta}}\left(\tilde{f}\sin\tilde{\theta} - g\right)\delta\theta + \frac{1}{\cos\tilde{\theta}}\delta f$
	$\dot{\tilde{\theta}} = \tilde{\omega}$	$\delta\dot{\theta} = \delta\omega$

Denne systemmodellen er ikke på standardform fordi stamdardformen krever et kjent pådrag, men f og ω er de sanne verdiene som vi ikke kjenner. Vi setter derfor inn for disse fra feildefinisjonene, dvs vi setter inn $f = \tilde{f} + \delta f$ og $\omega = \tilde{\omega} + \delta\omega$ og får den nye systemmodellen:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= v \\
\dot{v} &= \frac{\tilde{f} + \delta f - g\sin\theta}{\cos\theta} \\
\dot{\theta} &= \tilde{\omega} + \delta\omega
\end{aligned}
$$

Denne likninga er på standardformen

$$\underline{\dot{x}} = \underline{f}\left(\underline{x}, \underline{u}, \underline{v}\right)$$

men antall tilstander og detaljert struktur avhenger av støymodellene for δf og $\delta\omega$. Dersom disse bare er hvitstøy, dvs $\delta f = v_f$ og $\delta\omega = v_\omega$ kan vi definer:

$$
\begin{aligned}
\underline{x} &= [x; v; \theta] \\
\underline{u} &= \left[\tilde{f}; \tilde{\omega}; g\right] \\
\underline{v} &= [v_f; v_\omega]
\end{aligned}
$$

og får systemmodellen

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{\cos x_3}\left(u_1 - u_3 \sin x_3 + v_1\right) \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$$

I navigasjonslikningene ser en bort fra støyen, men bruker det samme pådraget som går inn på systemmodellen:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \frac{1}{\cos \tilde{x}_3}\left(u_1 - u_3 \sin \tilde{x}_3\right) \\ u_2 \end{bmatrix}$$

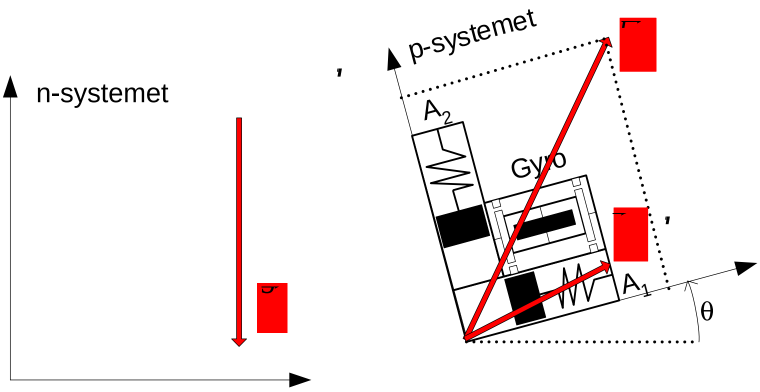
Bare likningen for $\delta\dot{v}$ krever en egen utledning:

$$\delta\dot{v} = \frac{f - g\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\tilde{f} - g\sin\tilde{\theta}}{\cos\tilde{\theta}} = \frac{\tilde{f} + \delta f - g\sin\left(\tilde{\theta} + \delta\theta\right)}{\cos\left(\tilde{\theta} + \delta\theta\right)} - \frac{\tilde{f} - g\sin\tilde{\theta}}{\cos\tilde{\theta}} = \frac{\delta f}{\cos\tilde{\theta}} + \left(\frac{\tilde{f}\sin\tilde{\theta}}{\cos^2\tilde{\theta}} - g\left(1 + \tan^2\theta\right)\right)\delta\theta + O\left(\delta\theta^2, \delta f^2\right)$$

$$= \frac{1}{\cos^2\tilde{\theta}}\left(\tilde{f}\sin\tilde{\theta} - g\right)\delta\theta + \frac{1}{\cos\tilde{\theta}}\delta f + O\left(\delta\theta^2, \delta f^2\right) \; \delta\dot{v} = \frac{f - g\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\tilde{f} - g\sin\tilde{\theta}}{\cos\tilde{\theta}}$$

2 To-akset plattform

plattform



$_2.pdf$

Figur 2: To-akset plattform

Feildefinisjoner		
$\delta\underline{f} = \underline{f}^p - \underline{\tilde{f}}^p$	$\delta\underline{x} = \underline{x}^n - \underline{\tilde{x}}^n$	$\delta\theta = \theta - \tilde{\theta}$
$\delta\omega = \omega - \tilde{\omega}$	$\delta\underline{v} = \underline{v}^n - \underline{\tilde{v}}^n$	$R_p^n = R\left(\tilde{\theta}\right)\left(I + \delta\theta\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$

Den elementære rotasjonsmatrisa R er gitt ved

$$R_p^n = R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Feillikningene skrevet på vektorform:

Systemmodell	Navigasjonslikninger	Feillikninger
$\dot{\underline{x}}^n = \underline{v}^n$	$\dot{\tilde{\underline{x}}}^n = \tilde{\underline{v}}^n$	$\delta\dot{\underline{x}} = \delta\underline{v}$
$\dot{\underline{v}}^n = R_p^n \underline{f}^p - \underline{g}^n$	$\dot{\tilde{\underline{v}}}^n = \tilde{R}_p^n \tilde{\underline{f}}^p - \underline{g}^n$	$\delta\dot{\underline{v}}^n = R_3\left(\tilde{\theta}\right)\begin{bmatrix} -\tilde{f}_y \\ \tilde{f}_x \end{bmatrix}\delta\theta + R_3\left(\tilde{\theta}\right)\delta\underline{f}$
$\dot{\theta} = \omega$	$\dot{\tilde{\theta}} = \tilde{\omega}$	$\delta\dot{\theta} = \delta\omega$

Feilikningene skrevet på komponentform:

Systemmodell	Navigasjonslikninger	Feillikninger
$\dot{\underline{x}} = \underline{v}$	$\dot{\tilde{\underline{x}}} = \tilde{\underline{v}}$	$\delta\dot{\underline{x}} = \delta\underline{v}$
$\dot{v}_1 = f_x\cos\theta - f_y\sin\theta$	$\dot{\tilde{v}}_1 = \tilde{f}_x\cos\tilde{\theta} - \tilde{f}_y\sin\tilde{\theta}$	$\delta\dot{v}_1 = -\left(\tilde{f}_x\sin\tilde{\theta} + \tilde{f}_y\cos\tilde{\theta}\right)\delta\theta + \delta f_x\cos\tilde{\theta} - \delta f_y\sin\tilde{\theta}$
$\dot{v}_2 = f_x\sin\theta + f_y\cos\theta - g$	$\dot{\tilde{v}}_2 = \tilde{f}_x\sin\tilde{\theta} + \tilde{f}_y\cos\tilde{\theta} - g$	$\delta\dot{v}_2 = \left(\tilde{f}_x\cos\tilde{\theta} - \tilde{f}_y\sin\tilde{\theta}\right)\delta\theta + \delta f_x\sin\tilde{\theta} + \delta f_y\cos\tilde{\theta}$
$\dot{\theta} = \omega$	$\dot{\tilde{\theta}} = \tilde{\omega}$	$\delta\dot{\theta} = \delta\omega$

Utledning av likningen for hastighetsfeil:

$$\delta\dot{\underline{v}}^n = R_p^n\underline{f}^p - \tilde{R}_p^n\tilde{\underline{f}}^p = R\left(\tilde{\theta}\right)\left(I + \delta\theta\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\left(\tilde{\underline{f}}^p + \delta\underline{f}\right) - R\left(\tilde{\theta}\right)\tilde{\underline{f}}^p = R\left(\tilde{\theta}\right)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\tilde{\underline{f}}^p\delta\theta + R\left(\tilde{\theta}\right)\delta\underline{f} = R\left(\tilde{\theta}\right)\begin{bmatrix} -\tilde{f}_y \\ \tilde{f}_x \end{bmatrix}\delta\theta + R\left(\tilde{\theta}\right)\delta\underline{f}$$

3 Tre-akset plattform, flat ikke-roterende jord

For en tre-akset plattform kan feilen defineres på flere måter.

3.3 Tranformasjonsfeilen referert n-systemet

Vi skal her se på feillikningene når feilen i beregningen av rotasjonsmatrisa R_p^n refereres til n-systemet.

Feildefinisjoner		
$\delta\underline{f} = \underline{f}^p - \tilde{\underline{f}}^p$	$\delta\underline{x}^n = \underline{x}^n - \tilde{\underline{x}}^n$	$R_p^n = R(\underline{\varepsilon})\tilde{R}_p^n$
$\delta\underline{\omega} = \underline{\omega}_p^{np} - \tilde{\underline{\omega}}_p^{np}$	$\delta\underline{v}^n = \underline{v}^n - \tilde{\underline{v}}^n$	$R(\underline{\varepsilon}) = I + S(\underline{\varepsilon})$

Systemmodell	Navigasjonslikninger	Feillikninger
$\dot{\underline{x}}^n = \underline{v}^n$	$\dot{\tilde{\underline{x}}}^n = \tilde{\underline{v}}^n$	$\delta\dot{\underline{x}}^n = \delta\underline{v}^n$
$\dot{\underline{v}}^n = R_p^n\underline{f}^p - \underline{g}^n$	$\dot{\tilde{\underline{v}}}^n = \tilde{R}_p^n\tilde{\underline{f}}^p - \underline{g}^n$	$\delta\dot{\underline{v}}^n = -S\left(\tilde{R}_p^n\tilde{\underline{f}}^p\right)\underline{\varepsilon} + \tilde{R}_p^n\delta\underline{f}$
$\dot{R}_p^n = R_p^n S\left(\underline{\omega}_p^{np}\right)$	$\dot{\tilde{R}}_p^n = \tilde{R}_p^n S\left(\tilde{\underline{\omega}}_p^{np}\right)$	$\dot{\underline{\varepsilon}} = \tilde{R}_p^n\delta\underline{\omega}$

Bevis av d.l. for $\delta\underline{v}^n$:

$$\delta\dot{\underline{v}}^n = R_p^n\underline{f}^p - \underline{g}^n - \left(\tilde{R}_p^n\tilde{\underline{f}}^p - \underline{g}^n\right) = (I + S(\underline{\varepsilon}))\tilde{R}_p^n\left(\tilde{\underline{f}}^p + \delta\underline{f}\right) - \tilde{R}_p^n\tilde{\underline{f}}^p = S(\underline{\varepsilon})\tilde{R}_p^n\tilde{\underline{f}}^p + \tilde{R}_p^n\delta\underline{f}$$

$=$

Bevis av d.l. for $\underline{\varepsilon}$:

V. siden: $\dot{R}_p^n - \dot{\tilde{R}}_p^n = S\left(\dot{\underline{\varepsilon}}\right)\tilde{R}_p^n + \left(I + S\left(\underline{\varepsilon}\right)\right)\dot{\tilde{R}}_p^n - \dot{\tilde{R}}_p^n = S\left(\dot{\underline{\varepsilon}}\right)\tilde{R}_p^n + S\left(\underline{\varepsilon}\right)\dot{\tilde{R}}_p^n = S\left(\dot{\underline{\varepsilon}}\right)\tilde{R}_p^n + S\left(\underline{\varepsilon}\right)\tilde{R}_p^n S\left(\underline{\tilde{\omega}}_p^{np}\right)$

H. siden: $R_p^n S\left(\underline{\omega}_p^{np}\right) - \tilde{R}_p^n S\left(\underline{\tilde{\omega}}_p^{np}\right) = \left(I + S\left(\underline{\varepsilon}\right)\right)\tilde{R}_p^n\left(S\left(\underline{\tilde{\omega}}_p^{np}\right) + S\left(\delta\underline{\omega}\right)\right) - \tilde{R}_p^n S\left(\underline{\tilde{\omega}}_p^{np}\right) = S\left(\underline{\varepsilon}\right)\tilde{R}_p^n S\left(\underline{\tilde{\omega}}_p^{np}\right) + \tilde{R}_p^n S\left(\delta\underline{\omega}\right)$

Satt sammen:

$S\left(\dot{\underline{\varepsilon}}\right)\tilde{R}_p^n + S\left(\underline{\varepsilon}\right)\tilde{R}_p^n S\left(\underline{\tilde{\omega}}_p^{np}\right) = S\left(\underline{\varepsilon}\right)\tilde{R}_p^n S\left(\underline{\tilde{\omega}}_p^{np}\right) + \tilde{R}_p^n S\left(\delta\underline{\omega}\right)$

$S\left(\dot{\underline{\varepsilon}}\right)\tilde{R}_p^n = \tilde{R}_p^n S\left(\delta\underline{\omega}\right)$

$S\left(\dot{\underline{\varepsilon}}\right) = \tilde{R}_p^n S\left(\delta\underline{\omega}\right)\tilde{R}_n^p \Leftrightarrow \dot{\underline{\varepsilon}} = \tilde{R}_p^n \delta\underline{\omega}$