DEL A: MATEMATISK GRUNNLAG

I forelesningene går vi gjennom notatet. Figurer og utledninger tas på tavla. Bygger på: lineær algebra, matriseteori og ord. diff. ligninger

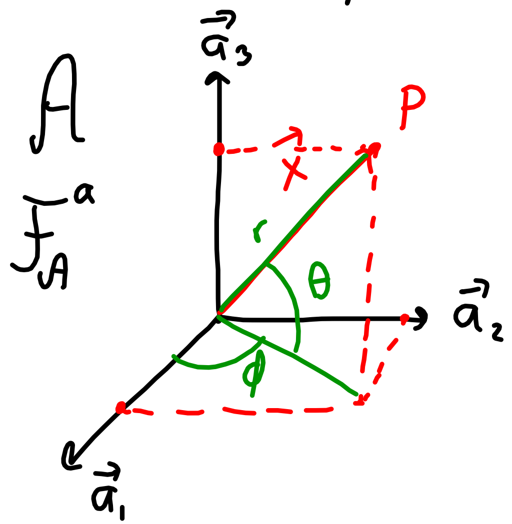
Rom	Rammer	Kommentar
Referanserrom		Fysisk rom bestående av punkter som er i ro i forhold til hverandre. Eng: (observational) frame of reference
Treghetsrom		Et referanserom hvor Newtons 2. lov har sin enkleste form, $\vec{f} = m\vec{a}^i$
Vektorrom $\mathcal{V}$	$\mathcal{F}^a_{\mathcal{V}} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \{\vec{a}_i\} = \{a\}$ ramme a i vektorrom $\mathcal{V}$ med basisvektorer $\vec{a}_i$	Matematisk definert rom med vektorer som objekter.
Affint rom $\mathcal{A}$	$\mathcal{F}^a_{\mathcal{A}} = \{O_a; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \{a\}$ ramme a i det affine rom $\mathcal{A}$ med origo O_a og basisvektorer $\vec{a}_i$	Matematisk definert rom med punkter og vektorer som objekter. Brukes som modell for referanse- og treghetsrom.

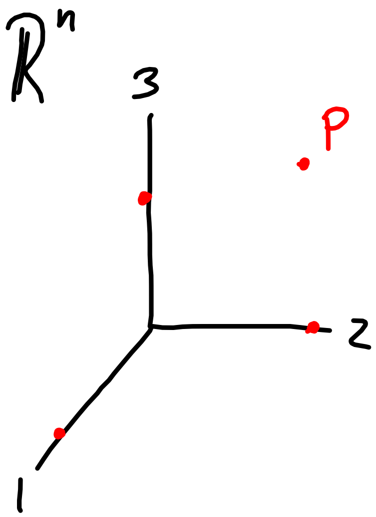
Definisjon A.1 *Et koordinatsystem $\mathcal{C}^a_{\mathcal{A}}$ for et affint rom $\mathcal{A}$ avbilder et punkt P inn i $\mathbb{R}^n$:*

$$\mathcal{C}^a_{\mathcal{A}} : P \to \underline{x}^a_P \text{ hvor } P \in \mathcal{A} \text{ og } \underline{x}^a_P \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{C}^a_{\mathcal{A}}(P) = \underline{x}^a_P$$

Koordinatsystemer





$$\underline{x}_p^a = \begin{bmatrix} x_1^a \\ x_2^a \\ x_3^a \end{bmatrix}$$ Kartesiske koordinater

$$\underline{y}_p^a = \begin{bmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{bmatrix}$$ Kule-koordinater

Et koordinatsystem er en funksjon (avbildning) fra et affint rom inn i $\mathbb{R}^n$. Koordinatene er avhengig av både ramma og om vi velger kule-, kartesiske- eller andre koordinater.

A.2 Vektorrom

$\mathcal{A}$: affint rom

$\mathcal{V}$: vektorrom

Jeg vil bruke følgende notasjon og forkortelser i tidsinvariante vektorrom:

$\vec{x}$ $\in \mathcal{A}$ eller $\mathcal{V}$	Geometrisk vektor
$\underline{x}$ $\in \mathbb{R}^n$	Algebraisk vektor (kolonnematrise)
$\mathbf{A}$ $\quad \vec{y} = \mathcal{A}\,\vec{x}$	Operator
$A^q = [\mathbf{A}]^q$ $\quad \underline{y}^q = A^q \underline{x}^q$	Operatoren $\mathbf{A}$ representert i q-systemet
$\{\vec{q}_i\}$	Basissystemet q
$\{\vec{q}_i^*\}$	Det duale basissystem for q
$S(\underline{\omega}^q) \equiv [\vec{\omega}\times]^q$	Matriserepresentasjon av "$\vec{\omega}\times$"-operatoren i q-systemet.
$< \vec{a}, \vec{b} >$	Indreproduktet av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
$\underline{x}^T = [x_1; x_2; \ldots; x_n]$	Transponert vektor (Matlab skrivemåte)
$\underline{x} = [x_i]\,, \quad x_i = [\underline{x}]_i$	Kolonnematrise med generelt element x_i
$D = [d_{ij}]\,, \quad d_{ij} = [D]_{ij}$	Matrise med generelt element d_{ij}
c_φ	$\cos(\varphi)$
s_φ	$\sin(\varphi)$
C_a^b	Retningskosinmatrise
R_a^b	Ortogonal retningskosinmatrise
k.s.	Koordinatsystem
$C_\mathcal{V}^a$	k.s. a i vektorrommet $\mathcal{V}$
$C_\mathcal{A}^a$	k.s. a i det affine rom $\mathcal{A}$
RKM	Retningskosinmatrise
$\mathbb{K}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Skalarkropp ($\mathbb{K}$), mengden ($\mathbb{R}$) av reelle tall, mengden av komplekse tall ($\mathbb{C}$)

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$$

$$\underline{x}^b = C_a^b \underline{x}^a$$

A.2.1 Definisjoner

$\mathbb{K}$: Skalarkropp: Definisjon av regneregler for bl.a. reelle og komplekse tall.

$\mathbb{N}$: naturlige tall: $1, 2, 3, \ldots$ danner ikke skalarkropp

$\mathbb{Z}$: heltall $\cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$

$\forall$: for alle

$\exists$: det finnes (eksisterer)

$\in$: element i mengden

Lineært vektorrom

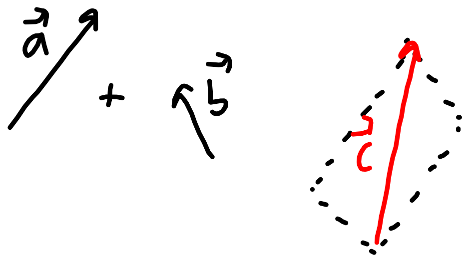
Et vektorrom defineres over en skalarkropp (bruker tall fra skalarkroppen)

- Vektoraddisjon (+)
- Skalarmultiplikasjon (·)

Eksempler på vektorer

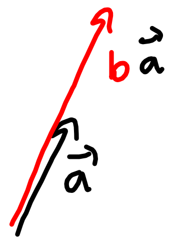
Piler i planet eller rommet:

(+)



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(·)



$\|\vec{a}\| = a$

$\|\vec{b}\| = b$

Kolonnematriser med dimensjon n (n-tupler av tall)

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

(+) $\underline{x} + \underline{y} = [x_i] + [y_i] = [x_i + y_i]$

(•) $a\,\underline{x} = a[x_i] = [a x_i]$

n'te ordens polynomer

$$\vec{x} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
$$\vec{y} = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

(+) $\vec{x} + \vec{y} = (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$

(•) $c\vec{x} = c a_n x^n + c a_{n-1} x^{n-1} + \dots + c a_1 x + c a_0$

Basis

Lineært uavhengige vektorer $\{\vec{q}_i\}$

hvis og bare hvis

$$a_1\vec{q}_1 + a_2\vec{q}_2 + \ldots + a_n\vec{q}_n = 0 \quad \forall\, \vec{q}_i \neq 0 \iff \text{alle } a_i = 0$$

Gitt basisen $\{\vec{q}_i\} \in V$ da kan enhver vektor $\vec{v} \in V$ skrives entydig som: $\vec{v} = v_1\vec{q}_1 + v_2\vec{q}_2 + \ldots + v_n\vec{q}_n$

Indreprodukt

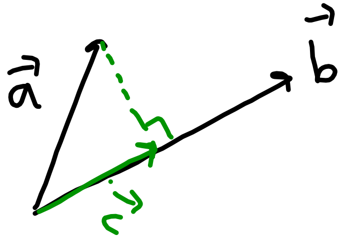
Brukes bl. a. til å beregne lengden av vektorer, vinkel mellom vektorer, ortogonalitet og for å projisere en vektor ned på en annen vektor.

Eksempler

Algebraiske vektorer

$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \qquad \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}^T \underline{y} = [x_1\ x_2 \dots x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_n + \dots + x_n y_n$

Geometriske vektorer



$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \angle \vec{a}\vec{b}$

$\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \cos \angle \vec{a}\vec{b}$

Dersom $\|\vec{b}\| = b = 1$ gir $\vec{b} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{c}$ Projisere $\vec{a}$ ned på $\vec{b}$

$\|\vec{a}\| = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle^{1/2} = a$ normen/lengden av $\vec{a}$

$|a|$: tallverdien til a

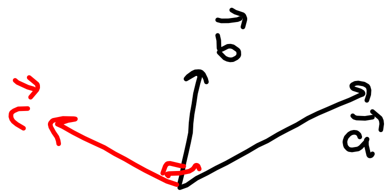
$|a| = |-a|$

Kryssprodukt

NB! $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Eksempler

- Geometriske vektorer



$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ $\quad \|\vec{c}\| = \left| \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \sin \angle \vec{a}\vec{b} \right|$

- Algebraiske vektorer

$$\underline{c}^q = \underline{a}^q \times \underline{b}^q = S(\underline{a}^q)\, \underline{b}^q$$

hvor $\{\vec{q}_i\}$ er ortogonal med enhets lengde

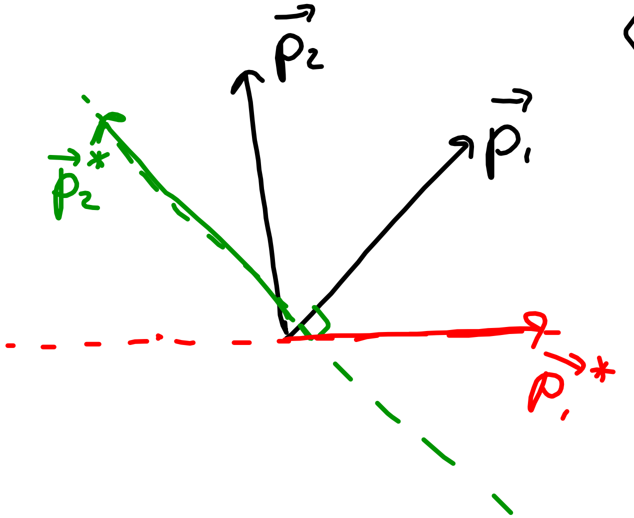
$$S(\underline{d}) = \begin{bmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{bmatrix}$$: Skjevsymmetrisk form av $\underline{d}$

Def. A.9 Dual basis

Brukes til å dekomponere vektorer vha en gitt basis (ramme)

NB! Dual basis forutsetter <u>ikke</u> ortogonale basisvektorer

Definisjon: Den duale basisen $\{\vec{p}_i^{\,*}\}$ til basis $\{\vec{p}_i\}$ er def. ved:



$$\langle \vec{p}_i, \vec{p}_j^{\,*} \rangle = \delta_{ij} \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ 1 & \text{for } i = j \end{cases}$$

, δ_{ij} kalles kronecker deltaet

$$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_1^{\,*} \rangle = 1, \quad \langle \vec{p}_2, \vec{p}_2^{\,*} \rangle = 1$$

$$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2^{\,*} \rangle = 0, \quad \langle \vec{p}_2, \vec{p}_1^{\,*} \rangle = 0$$

dvs $\vec{p}_1^{\,*} \perp \vec{p}_2$

Vi skal senere vise at $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i^p \vec{p}_i$ hvor $v_i^p = \langle \vec{v}, \vec{p}_i^{\,*} \rangle$

$$\Rightarrow \underline{v}^p = \begin{bmatrix} v_1^p \\ v_2^p \\ v_3^p \end{bmatrix}$$