UNIVERSITETET I OSLO
Det matematisk-naturvitenskaplige fakultet

Eksamen i:	**UNIK4540 - Matematisk modellering av dynamiske systemer**
Eksamensdag:	Torsdag 7. juni 2012
Tid for eksamen:	09:15 - 13:15
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Kalkulator (men ikke nødvendig)
Oppgavesettet er på:	2 sider (ett ark)
Kontaktperson:	Oddvar Hallingstad, tlf: 784 eller 95991445 Eksamenslokalet besøkes kl 10.15

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Hvor mye (ca) hver oppgave og hvert spørsmål veier ved bedømning er vist i % (totalt deles det ut 100% poeng).

Oppgave 1 (40%) Matematisk grunnlag

a) (2%) Forklar hva som menes med *referanserom* og *treghetsrom.*

b) (2%) Hvilke objekter har vi i et affint rom? Hvilke operasjoner er definert i rommet?

c) (4%) Gitt vektorene $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$. Definer *indreproduktet* og *kryssproduktet* for vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Gitt *dyaden* $\vec{a}\vec{b}$, hva blir $\vec{a}\vec{b}\cdot\vec{c}$ og $\vec{c}\cdot\vec{a}\vec{b}$

d) (4%) Gitt basisvektorene $\vec{p}_1$ og $\vec{p}_2$, finn de ortonormale basisvektorene $\vec{e}_1$ og $\vec{e}_2$ vha Grahm-Schmidts ortogonaliseringsmetode. Lag en tegning som viser vektorene som inngår.

e) (4%) Gitt det ortonormale basisvektorsettet $\{\vec{p}_i\}$, og vektorene $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$. Da har vi utledet at koordinatisert kan kryssproduktet skrives

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]^p = S\left(\underline{a}^p\right)\underline{b}^p$$

hvor $S\left(\underline{a}^p\right)$ er den skjevsymmetriske formen av vektoren $\underline{a}^p$. Finn koordinatiseringene $\left[\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}\right]^p$ og $\left[\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right]^p$

f) (3%) Gitt den ortonormale retningskosinmatrisa (RKM) R_b^a, hvilke tre tolkninger har vi av en slik matrise?

g) (4%) Utled den elementære RKM $R_2(\theta)$ (dreier vinkelen θ om basisvektor 2) og vis framgangsmåten vha en skisse. Gitt de elementære RKM $R_1(\theta_1), R_2(\theta_2)$ og $R_3(\theta_3)$, hvordan beregnes RKM R_b^a når vi har et 2-3-1 Eulervinkelsett?

h) (5%) Gitt den ortonormale RKM R_b^a, vis at den deriverte kan skrives

$$\overset{\circ}{R}{}_b^a = S\left(\underline{\omega}_b^{aa}\right)R_b^a = R_b^a S\left(\underline{\omega}_b^{ab}\right)$$

hvor $S\left(\underline{\omega}_b^{aa}\right)$ er en skjevsymmetrisk matrise og dermed avhenger av tre parametre som vi tolker som vinkelhastigheten $\underline{\omega}_b^{aa}$.

i) (4%) Anta ramma $\mathcal{F}^b$ roterer relativt ramme $\mathcal{F}^a$ med vinkelhastigheten $\vec{\omega}_b^a$. Vis at

$$\overset{\circ}{\underline{\omega}}{}_b^{abb} = R_a^b \overset{\circ}{\underline{\omega}}{}_b^{aaa}$$

j) (8%) Dersom vi representerer det samme punktet vha radiusvektorene $\underline{r}^a$ og $\underline{\rho}^b$ i de to rammene $\mathcal{F}^a$ og $\mathcal{F}^b$ får vi likningen

$$\underline{r}^a = \underline{r}_b^a + R_b^a\underline{\rho}^b$$

hvor $\underline{r}_b^a$ er vektoren fra origo i $\mathcal{F}^a$ til origo i $\mathcal{F}^b$.
Finn sammenhengen mellom punktets hastighet sett fra de to rammene, dvs mellom $\underline{v}^a = \underline{v}^{aa} = \underline{\dot{r}}^{aa}$ og $\underline{v}^b = \underline{v}^{bb} = \underline{\dot{\rho}}^{bb}$, $\underline{a}^a = \underline{a}^{aaa} = \underline{\ddot{r}}^{aaa}$ og $\underline{a}^b = \underline{a}^{bbb} = \underline{\ddot{\rho}}^{bbb}$.

Oppgave 2 (30%) Dynamikk

a) (2%) Hva betyr kinetimatikk og kinetikk?

b) (6%) Chasleys teorem sier at en vilkårlig bevegelse kan settes sammen av en translasjon og en rotasjon. Bevis dette.

c) (6%) Dersom spinnet er definert om massesenteret ($\underline{h}_c^{\mathbf{i}b} = T_c^b \underline{\omega}_b^{\mathbf{i}b}$) kan spinnsatsen for et stivt legeme skrives

$$\underline{n}_c^b = T_c^b \underline{\dot{\omega}}_b^{\mathbf{i}bb} + S\left(\underline{\omega}_b^{\mathbf{i}b}\right) T^b \underline{\omega}_b^{\mathbf{i}b}$$

hvor rammene $\mathcal{F}^{\mathbf{i}}$ og $\mathcal{F}^b$ er hhv en treghetsramme og en ramme som ligger fast i legemet.
Vis at dersom $\mathcal{F}^b$ ramma faller sammen med hovedaksene så får vi Eulerlikningene

$$\left.\begin{array}{l} n_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(I_{zz} - I_{yy}) \\ n_y = I_{yy}\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x(I_{xx} - I_{zz}) \\ n_z = I_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y(I_{yy} - I_{xx}) \end{array}\right\}, \quad \underline{n}_c^b = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}, \quad \underline{\omega}_b^{\mathbf{i}b} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

d) (6%) Dersom det ytre momentet $\underline{n}_c^b = \underline{0}$, vis at vinkelhastighetsvektoren $\underline{\omega}_b^{\mathbf{i}b}$ må ligge på spinnellipsoida

$$\frac{\omega_x^2}{\left(\frac{h_0}{I_{xx}}\right)^2} + \frac{\omega_y^2}{\left(\frac{h_0}{I_{yy}}\right)^2} + \frac{\omega_z^2}{\left(\frac{h_0}{I_{zz}}\right)^2} = 1 \quad \text{hvor} \quad h_0 = \left\|\underline{h}_c^{\mathbf{i}b}\right\| = \sqrt{I_{xx}^2\omega_x^2(t_0) + I_{yy}^2\omega_y^2(t_0) + I_{zz}^2\omega_z^2(t_0)}$$

e) (6%) Dersom det ytre momentet $\underline{n}_c^b = \underline{0}$, vis at vinkelhastighetsvektoren $\underline{\omega}_b^{\mathbf{i}b}$ må ligge på den kinetiske rotasjonsenergiellipsoida

$$\frac{\omega_x^2}{2\frac{K_0}{I_{xx}}} + \frac{\omega_y^2}{2\frac{K_0}{I_{yy}}} + \frac{\omega_z^2}{2\frac{K_0}{I_{zz}}} = 1 \quad \text{hvor} \quad K_0 = \frac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2(t_0) + I_{yy}\omega_y^2(t_0) + I_{zz}\omega_z^2(t_0)\right)$$

f) (4%) Hvordan beveger vinkelhastighetsvektoren $\underline{\omega}_b^{\mathbf{i}b}$ seg sett fra $\mathcal{F}^b$-ramma

Oppgave 3 (30%) Matematiske modeller for roboter

a) (10%) Tegn en figur med to linker (nr $i-1$ og i) med et *prismatisk ledd* imellom. Vis følgende parametre i figuren og forklar hvordan de defineres:

a_{i-1}: linklengde for link $i-1$.
α_{i-1}: linkvridning for link $i-1$
d_i: linkforskyvning mellom linkene $i-1$ og i
θ_i: leddvinkel mellom linkene $i-1$ og i

b) (10%) Tegn figuren ovenfor på nytt og tegn inn rammene $\mathcal{F}^{i-1}$ og $\mathcal{F}^i$ samt nødvendige hjelperammer for å vise at transformasjonsmatrisa T_i^{i-1} kan beregnes fra

$$T_i^{i-1} = T_{x^{i-1}}(\alpha_{i-1})\, T_{x^{i-1}}(a_{i-1})\, T_{z^i}(\theta_i)\, T_{z^i}(d_i)$$

(Forklar hva de gjør og sett opp strukturen på transformasjonsmatrisene $T_{x^{i-1}}(\alpha_{i-1})$, $T_{x^{i-1}}(a_{i-1})$, $T_{z^i}(\theta_i)$ og $T_{z^i}(d_i)$)

c) (2%) Dersom vi har alle $T_i^{i-1}$for $i = 1, 2, \ldots N$ hvordan kan vi da beregne T_N^0?

d) (8%) Beskriv med ord hvordan en går fram for å sette opp simuleringslikningene for en robotarm.