TEK4040 – MATEMATISK MODELLERING AV DYNAMISKE SYSTEMER

Referanser:
- O. Hallingstad: Matematisk modellering av dyn. sys.
- John J. Craig: Robotics (kap 1-6)
- Peter H. Zipfel: Modelling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics

Anders Rødningsby
anders.rodningsby@ffi.no
924 94 675

Vi ønsker å simulere:

- Satellitten stilling i rommet
- Fly (ikke aerodynamikk)
- Roboter - mekanismer
- Treghetsnavigasjon (TNS) INS
    * Banegenerator (gir posisjon og stilling) $\xRightarrow{\text{derivere}}$ hastighet, ak. vinkelhast.
    * Navigasjonsligninger
    * Ser bare på deterministiske ligninger
    * Støy tas med i Stokastiske systemer

Vi ønsker å beskrive bevegelsen av fysiske objekter vha.:

Nok for punkt.
- Posisjon (vanligvis massesenteret)
- Hastighet
- Akselerasjon

Utstrakt legeme
- Stilling
- Vinkel hastighet
- Vinkelakselerasjon

DYNAMIKK

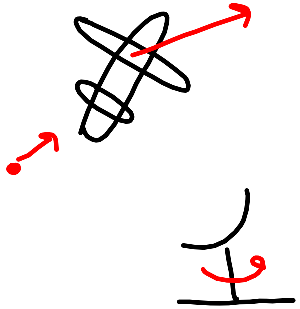
1) Kinematikk : Beskrive bevegelsen matematisk } DEL A

2) Kinetikk : Beskrive sammenhengen mellom bevegelsen og de krefter og momenter som forårsaker bevegelsen. } DEL B

Et stivt legemes bevegelse kan settes sammen av translasjon + rotasjon.

Framgangsmåte for modellering

1. Beskrive det fysiske system, velg objekter



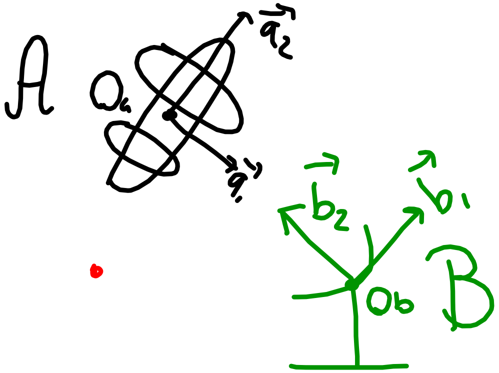
Vi må anta at objektene med tilstrekkelig nøyaktighet kan beskrives som partikler (punkter med masse) og stive legemer (molekylene har en fast stilling i forhold til hverandre)

2. Definer referanserom og treghetsrom (pga kinetikk)

Vi får referanserommet til et legeme ved å ekspandere legemet med punkter som fyller rommet og som ligger fast i forhold til molekylene i legemet.

NB! Referanserom kan defineres ulikt i ulike lærebøker

3. Definere Affine rom (modell av referanserom).



A: affint rom

Objekter: vektorer + punkter

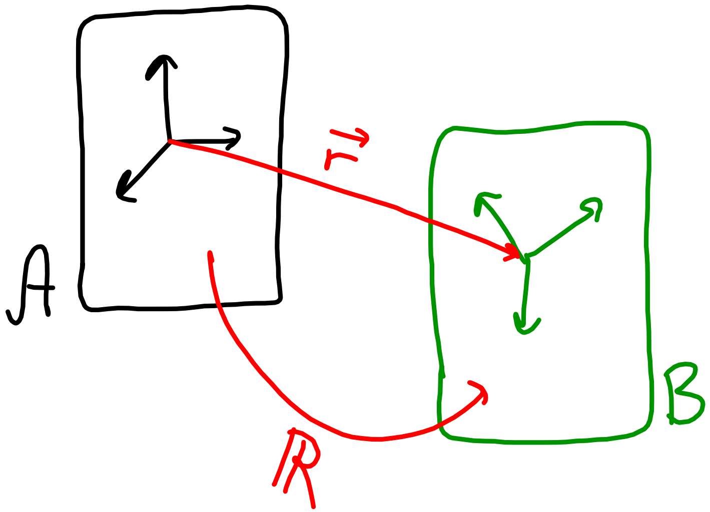
Operasjoner: $P = Q + \vec{v}$, $\vec{v} = P - Q$

4. Innføre (referanse) rammer i det affine rom

$$A: \quad \mathcal{F}_A^a = \{O_a, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \{a\}$$

$$B: \quad \mathcal{F}_B^b = \{O_b, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\} = \{b\}$$

5. Beskrive sammenhengen mellom objekter i ulike affine rom (referanserom)



De opprinnelige stive legemer er nå beskrevet av punkter og rammer i affine rom.

Dersom vi har endringer som funksjon av tiden får vi

$\vec{r}(t)$, $\mathbb{R}(t)$

6. Definere avbildning fra affine rom til $\mathbb{R}^n$ (n-ab.er reelle tall)

Avbildningen gjøres ved å dekomponere vektorer ($\vec{r}$) og operatorer ($\mathcal{S}$) vha basisvektor settene (rammer)

$$\underbrace{\vec{y} = \mathcal{S}\,\vec{x}}_{\text{Affine rom}} \quad \overset{}{\underset{\vec{F}_A^{\,a}}{\Longleftrightarrow}} \quad \underbrace{\underline{y}^a = \underline{S}^a \underline{x}^a}_{\mathbb{R}^n}$$

$\underline{x}^a$, $\underline{y}^a$ er kolonnematriser (kolonnevektorer)

$\underline{S}^a$ er matrise

7. Innføre tidsavhengige vektorer og operatorer. Definerer derivasjon og integrasjon.

$$\vec{r}(t),\ \mathcal{S}(t) \Longleftrightarrow \underline{r}^a(t),\ \underline{S}^a(t)$$

$$\dot{\vec{r}}^{\,b}(t),\ \dot{\mathcal{S}}^{b}(t) \Longleftrightarrow \dot{\underline{r}}^{ba}(t),\ \dot{\underline{S}}^{ba}(t)$$

Nå har vi all matematikken for å beskrive kinematikken

8. Kinetikk: finn sammenhengen mellom krefter og bevegelse

Krefter: modelleres av vektorer

$$\vec{f} \in \mathcal{A}(V) \iff \underline{f}^a \in \mathbb{R}^n$$

Momenter: modelleres av vektorer

$$\vec{n} \in \mathcal{A}(V) \iff \underline{n}^a \in \mathbb{R}^n$$

Massen til en partikkel eller stivt legeme: m

Newtons 2. lov: $\vec{f} = m\, \vec{a}^{\,ii} \iff \underline{f}^i = m \cdot \underline{a}^{iii}$

i: treghetsrom

Treghetsmatrisa for stive legemer (tilsvarer masse for partikler for roterende legemer)

$$\vec{n} = \dot{\vec{h}}^{\,i} \iff \underline{n}^i = T\, \underline{\dot{w}}^{iii}$$

$\vec{h}$: spinn $\qquad$ T: treghetsmatrise

Kommentarer

Våre ligninger blir:

- algebraiske
- ordinære vektordifferensialligninger (tilstandsromligninger)