UNIVERSITETET I OSLO
Det matematisk-naturvitenskaplige fakultet

Eksamen i:	**UNIK4540 - Matematisk modellering av dynamiske systemer**
Eksamensdag:	Fredag 11. juni 2010
Tid for eksamen:	09:15 - 12:15
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen
Oppgavesettet er på:	2 sider
Kontaktperson:	Oddvar Hallingstad, tlf: 784 eller 95991445 Eksamenslokalet besøkes kl 10.15

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Hvor mye (ca) hver oppgave og hvert spørsmål veier ved bedømning er vist i % (totalt deles det ut 90% poeng).

Oppgave 1 (44%) Matematisk grunnlag

I det følgende er $\{\vec{p}_i\}$ og $\{\vec{q}_i\}$ to forskjellige basiser for det samme vektorrommet V. De tilhørende duale basisene er $\{\vec{p}_i^*\}$ og $\{\vec{q}_i^*\}$.

a) (3%) Forklar hva som menes med geometriske og algebraiske vektorer. Hvilke to aspekter vises med notasjonen $\underline{\dot{x}}^{qp}$?

b) (8%) Definer den duale basis $\{\vec{p}_i^*\}$ til basisen $\{\vec{p}_i\}$ og vis at en vilkårlig vektor $\vec{r}$ kan representeres i basisen $\{\vec{p}_i\}$ ved $\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} r_i^p \vec{p}_i$ hvor $r_i^p = \langle \vec{r}, \vec{p}_i^* \rangle$.

c) (10%) Hvilke krav må operatoren $\mathbf{A}$ tilfredstille dersom den skal være lineær. Vis at en lineær operator $\mathbf{A}$ kan representeres vha en matrise A^p i basisen $\{\vec{p}_i\}$ hvor

$$A^p = \left[a_{ij}^p\right] = [\langle \mathbf{A}\vec{p}_j, \vec{p}_i^* \rangle]$$

d) (6%) La $\vec{r}$ og $\mathbf{A}$ være hhv en vektor og en lineær operator i V. Vis at vi får følgende sammenhenger mellom matriserepresentasjonene i de to basissystemene $\{\vec{p}_i\}$ og $\{\vec{q}_i\}$:

$$\underline{r}^q = C_p^q \underline{r}^p \quad \text{hvor} \quad C_p^q = [\langle \vec{p}_j, \vec{q}_i^* \rangle] \tag{1}$$

$$A^q = C_p^q A^p C_q^p \tag{2}$$

e) (6%) Hvilke tre tolkninger av retningskosinmatrisa (RKM) C_p^q ble gitt i forelesningene?

f) (3%) Anta at basisvektorene $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ og $\vec{q}_3$ står vinkelrett på hverandre hva blir da de duale vektorene $\vec{q}_1^*, \vec{q}_2^*$ og $\vec{q}_3^*$

g) (8%) Finn den elementære RKM for dreining en vinkel θ om basisvektor $\vec{q}_2$ (ornonormale basisvektorer).

Oppgave 2 (26%) Dynamikk

a) (8%) Hva sier Chasleys teorem? Bevis teoremet.

b) (8%) Spinnsatsen for er stivt legeme er:

Teorem: 1 ***Spinnsatsen for stive legemer***

Gitt treghetssystemet $\mathbf{i}$ *og et k.s.* b *som ligger fast i legemet og har sitt origo i* A*. Dersom* A *tilfredstiller 1 eller 2 :*
1). A ligger i massesenteret, eller
2). A ligger i ro i treghetsrommet.
er spinnsatsen på en koordinatuavhengig form :

$$\begin{aligned} \vec{n}_A &= \dot{\vec{h}}^{\mathbf{ii}}{}_A \\ &= \dot{\vec{h}}^{\mathbf{ib}}{}_A + \vec{\omega}^{\mathbf{i}}_b \times \vec{h}^{\mathbf{i}}_A \end{aligned} \tag{3}$$

eller representert i b-systemet :

$$\begin{aligned} \underline{n}^b_A &= \dot{\underline{h}}^{\mathbf{i}bb}_A + \underline{\omega}^{\mathbf{i}b}_b \times \underline{h}^{\mathbf{i}b}_A \\ &= T^b_A \dot{\underline{\omega}}^{\mathbf{i}bb}_b + \underline{\omega}^{\mathbf{i}b}_b \times (T^b_A \underline{\omega}^{\mathbf{i}b}_b) \\ &= T^b_A \dot{\underline{\omega}}^{\mathbf{i}bb}_b + S\left(\underline{\omega}^{\mathbf{i}b}_b\right) T^b_A \underline{\omega}^{\mathbf{i}b}_b \end{aligned} \tag{4}$$

hvor spinnet er definert ved :

$$\underline{h}^{\mathbf{i}b}_A = T^b_A \underline{\omega}^{\mathbf{i}b}_b$$

Treghetsmatrisa T^b *beregnes via treghetsmomenta,* I_{ii}*, og treghetsprodukta,* I_{ij} *:*

$$T^b_A = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Hvordan må en legge b-systemet når en ønsker å finne Eulerlikningene? Utled Eulerlikningene (definer $\underline{n}^b_A = [n_x; n_y; n_z]$ og $\underline{\omega}^{\mathbf{i}b}_b = [\omega_x; \omega_y; \omega_z]$)

c) **(10%)** Anta b-systemet faller sammen med hovedaksene for det stive legemet og $I_{xx} > I_{yy} > I_{zz}$. Undersøk stabiliteten om $\vec{b}_y$-aksen (finn differensiallikningen for det lineariserte systemet).

Oppgave 3 (20%) Matematiske modeller for roboter

a) (5%) Sammenhengen mellom koordinatene $\underline{r}^q$ og $\underline{\rho}^p$ for et punkt i to koordinatsystemer er en inhomogen likning

$$\underline{r}^q = \underline{r}^q_{qp} + R^q_p \underline{\rho}^p$$

Vis hvordan en kan formulere denne likningen på en homogen form

$$\underline{\tilde{r}}^q_A = T^q \underline{\tilde{\rho}}^q_B$$

b) (10%) For å beskrive en robotarm kan en bruke Denavit-Hartenberg notasjonen. Forklar og definer ut fra en tegning som viser to linker hva som menes med *linklengde* a_{i-1}, *linkvridning* α_{i-1}, *linkforskyvning* d_i og *leddvinkel* θ_i. Anta at det er et revolut ledd (rotasjonsledd).

c) (5%) Forklar med ord trinnene for å finne en dynamisk matematisk modell av en robotarm (iterativ Newton-Euler dynamisk formulering).