VEKTOR- OG MATRISEDERIVASJON

Oddvar Hallingstad

Notat 2

27. september 2000

Vi skal her vise derivasjonsregeler for skalarer, vektorer, matriser og trace. Notatet har følgende avsnitt : 1. Definisjoner, 2. Regler, 3. Eksempler og 4. Bevis

1 Definisjoner

z, h, t	Skalarer
$\underline{x}, \underline{y}, \underline{f}, \underline{g}$	Vektorer ($\underline{f}, \underline{g}$ er også vektorfelt)
A, B, C, X	Matriser
$\underline{x} = [x_i]$	Vektor (kolonnevektor) skrevet på komponentform
$\underline{x}^T = [x_j]$	Transponert vektor (linjevektor) skrevet på komponentform
$A = [a_{ij}]$	Matrise skrevet på komponentform
$\frac{\partial z}{\partial t} = \lim\limits_{z \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta}$	Derivasjon av skalar mhp. skalar
$\frac{\partial \underline{x}(t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial x_i(t)}{\partial t}\right]$	Derivasjon av vektor mhp. skalar
$\frac{\partial A(t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial a_{ij}(t)}{\partial t}\right]$	Derivasjon av matrise mhp. skalar
$\frac{\partial z}{\partial \underline{x}} = \left[\frac{\partial z}{\partial x_i}\right]$	Derivasjon av skalar mhp. vektor
$\frac{\partial z}{\partial \underline{x}^T} = \left[\frac{\partial z}{\partial x_j}\right]$	Derivasjon av skalar mhp. transponert vektor.
$\frac{\partial z}{\partial X} = \left[\frac{\partial z}{\partial x_{ij}}\right]$	Derivasjon av skalar mhp. mhp matrise
$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}^T} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]$	Derivasjon av vektor mhp. transponert vektor (Jackobimatrisa)
$\frac{\partial \underline{f}^T}{\partial \underline{x}} = \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right] = \left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}^T}\right)^T$	Derivasjon av transponert vektor mhp. vektor
$\frac{\partial^2 z}{\partial \underline{x} \partial \underline{x}^T} = \left[\frac{\partial z}{\partial x_i \partial x_j}\right]$	Den 2. deriverte av en skalar mhp. en vektor
$\frac{\partial \underline{f}}{\partial X}, \frac{\partial X}{\partial \underline{f}}$	Kan også defineres, men krever tensor notasjon
$\mathrm{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$	Trace (sporet) til en matrise

$L_f^0 h = h$	
$L_f h = \frac{\partial h}{\partial \underline{x}^T} \underline{f}(\underline{x})$	Lie-deriverte av $h(\underline{x})$ langs vektorfeltet $\underline{f}$
$L_f^k h = \frac{\partial L_f^{k-1} h}{\partial \underline{x}^T} \underline{f}\,(\underline{x})$	Lie-deriverte av $L_f^{k-1} h(\underline{x})$ langs vektorfeltet $\underline{f}$
$L_g L_f^k h(\underline{x}) = \frac{\partial L_f^k h(\underline{x})}{\partial \underline{x}^T} \underline{g}(\underline{x})$	Lie-deriverte av $L_f^k h(\underline{x})$ langs vektorfeltet $\underline{g}$
$\left[\underline{f}, \underline{g}\right] = \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}^T} \underline{f} - \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}^T} \underline{g}$	Lie brakett (produkt)
$ad_f^0 \underline{g} = \underline{g}$	Notasjon for å forenkle notasjonen ved gjentatte brakett operasjoner
$ad_f \underline{g} = \left[\underline{f}, \underline{g}\right]$	
$ad_f^k \underline{g} = \left[\underline{f}, ad_f^{k-1} \underline{g}\right]$	
$L_{[\underline{f},\underline{g}]} h = L_f L_g h - L_g L_f h$	Dette kan utledes fra definisjonene ovenfor

2 Regler

Regneregler for derivasjon mhp. vektorer og matriser :

1. Produktregelen (derivasjon av indreprodukt)

$$\frac{\partial[\underline{f}^T(\underline{x})\cdot\underline{g}(\underline{x})]}{\partial\underline{x}}=\frac{\partial\underline{f}^T(\underline{x})}{\partial\underline{x}}\cdot\underline{g}(\underline{x})+\frac{\partial\underline{g}^T(\underline{x})}{\partial\underline{x}}\cdot\underline{f}(\underline{x}) \tag{1}$$

2. Kjerneregler

$$\frac{\partial z(\underline{y}(\underline{x}))}{\partial\underline{x}}=\frac{\partial\underline{y}^T(\underline{x})}{\partial\underline{x}}\cdot\frac{\partial z(\underline{y})}{\partial\underline{y}} \tag{2}$$

$$\frac{\partial\underline{f}(\underline{y}(\underline{x}))}{\partial\underline{x}^T}=\frac{\partial\underline{f}}{\partial\underline{y}^T}\cdot\frac{\partial\underline{y}}{\partial\underline{x}^T} \tag{3}$$

$$\frac{d\underline{f}(\underline{x}(t),t)}{dt}=\frac{\partial\underline{f}}{\partial t}+\frac{\partial\underline{f}}{\partial\underline{x}^T}\frac{d\underline{x}}{dt} \tag{4}$$

Legg merke til av vi i den siste formelen deriverer mhp $\underline{x}^T$ og ikke $\underline{x}$.

3. Derivasjon av trace. Disse formlene kan bl a brukes ved utledning av måleoppdateringa i Kalmanfilteret.

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{tr}(A(t))=\operatorname{tr}(\frac{\partial}{\partial t}A(t))$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\operatorname{tr}(X)=I \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\operatorname{tr}(AXB)=\frac{\partial}{\partial X}\operatorname{tr}(B^TX^TA^T)=A^TB^T \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\operatorname{tr}(XAX^T)=2XA??? \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\operatorname{tr}(e^X)=e^X \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}|AXB|=|AXB|\,X^{-T} \tag{9}$$

3 Eksempler

Det er nedenfor vist 3 eksempler på bruk av reglene ovenfor.

1. Derivasjon av matrise-vektor produkt :

$$\frac{\partial A\underline{x}}{\partial\underline{x}^T}=A \tag{10}$$

2. Derivasjon av transponert matrise-vektor produkt :

$$\frac{\partial\underline{x}^TA^T}{\partial\underline{x}}=A^T \tag{11}$$

3. Derivasjon av kvadratisk uttrykk :

$$\frac{\partial\underline{x}^TA\underline{x}}{\partial\underline{x}}=A\underline{x}+A^T\underline{x} \tag{12}$$

4 Bevis

- Produktregelen (likning (1)):

$$\frac{\partial\left[\underline{f}^T(\underline{x})\cdot\underline{g}(\underline{x})\right]}{\partial\underline{x}}=\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_k f_k g_k\right]=\left[\sum_k\frac{\partial f_k}{\partial x_i}g_k+\sum_k f_k\frac{\partial g_k}{\partial x_i}\right]=\frac{\partial\underline{f}^T(\underline{x})}{\partial\underline{x}}\cdot\underline{g}(\underline{x})+\frac{\partial\underline{g}^T(\underline{x})}{\partial\underline{x}}\cdot\underline{f}(\underline{x}) \quad (13)$$

- Kjerneregel 1 (likning (2)):

$$\frac{\partial z(\underline{y}(\underline{x}))}{\partial\underline{x}}=\left[\frac{\partial z(\underline{y}(\underline{x}))}{\partial x_i}\right]=\left[\sum_k\frac{\partial z}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right]=\frac{\partial\underline{y}^T(\underline{x})}{\partial\underline{x}}\cdot\frac{\partial z(\underline{y})}{\partial\underline{y}} \quad (14)$$

- Kjerneregel 2 (likning (3))

$$\frac{\partial\underline{f}(\underline{y}(\underline{x}))}{\partial\underline{x}^T}=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]=\left[\sum_k\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right]=\frac{\partial\underline{f}}{\partial\underline{y}^T}\cdot\frac{\partial\underline{y}}{\partial\underline{x}^T} \quad (15)$$

- Derivasjon av matrise-vektor produkt (likning (10)):

$$\frac{\partial A\underline{x}}{\partial\underline{x}^T}=\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_k a_{ik}x_k\right]=[a_{ij}]=A \quad (16)$$

- Derivasjon av kvadratisk uttrykk (likning (12)) (bruker produktregelen) :

$$\frac{\partial\underline{x}^T A\underline{x}}{\partial\underline{x}}=\frac{\partial\underline{x}^T}{\partial\underline{x}}\cdot A\underline{x}+\frac{\partial\underline{x}^T A^T}{\partial\underline{x}}\underline{x}=A\underline{x}+A^T\underline{x} \quad (17)$$