GRUNNLEGGENDE PRINSIPPER I KLASSISK MEKANIKK

UNIK4500 Matematisk modellering av dynamiske systemer

Oddvar Hallingstad

20131010

Notatet bygger på boka *Edward A. Deloge - Classical Mechanics Volume 1* og bruker samme kapittelinndelinga som i denne boka.

DEL 1. NEWTONS MEKANIKK FOR PARTIKLER

Eksperiment har vist at de grunnleggende fenomen i klassisk mekanikk kan utledes fra noen få enkle postulater. Det er mange måter å formulere de grunnleggende postulatene i klassisk mekanikk. Her er det valgt postulater som ligger nær de opprinnelige historiske postulatene.

Seksjon 1. Grunnleggende prinsipper for Newtons kinematikk

1. Rom og tid

Mekanikk: Studium av bevegelsen av materielle objekter og de forhold som påvirker denne bevegelsen.

Rom (space): Alle partiklene i universet kan brytes ned til subgrupper av partikler hvis medlemmer er i ro i forhold til hverandre. Hver slik undergruppe danner et tredimensjonalt kontinuum av punkt, som vi kaller et rom (space), referanseramme (reference frame) eller referansesystem.

Måling av lengde: Lengden av en kurve er en viktig egenskap. Bruker den samme stav til å måle lengder i alle referansesystemer.

Geometri: Hvilken geometri vi har avgjøres ved å studere sammenhengen mellom målingene vi utfører med vår lengdestav.

Tid: Dersom den indre tilstand av en partikkel forandres, defineres de suksessive tilstander et endimensjonert kontinuum som vi kan kalle tid.

Måling av tidsintervall: Velger en referansepartikkel (et referanseobjekt) hvis indre tilstand endres på en syklisk måte. Teller så perioder.

Klokker: Ved å bruke referansepartikkelen kan vi dele tidslinjen for en gitt partikkel i like intervaller. Dersom vi nummererer tidspunktet mellom intervaller fortløpende kan referansepartikkelen kalles en klokke.

Synkronisering av klokker: Vi flytter vår referanseklokke uendelig langsomt fra punkt til punkt i rommet og synkroniserer klokken i hvert punkt med vår referanseklokke. Vi kan også gå tilbake å sjekke om vi har fått synkronisert klokken. Dersom det er mulig å synkronisere klokkene i referansesystemet kan vi snakke om en felles tid i systemet.

Referansesystem og koordinatsystem: NB: Det er en viktig forskjellen mellom disse.
Referansesystem: Fysisk enhet

Koordinatsystem: Praktisk matematisk enhet som kan brukes til å beskrive posisjonen av et punkt mht. referansesystemet.

2. Treghetssystemer (inertial frames)

Det er mulig å beskrive bevegelsen av en partikkel mht. et hvilket som helst referansesystem. Men eksperiment viser at det er visse referansesystemer hvor bevegelseslovene får en spesiell enkel form. Dette avsnittet tar for seg disse referansesystemene.

Treghetssystemer: Dersom vi ser på alle mulige referansesystemer finner vi at følgende postulat gjelder (i det minste lokalt):

Postulat 1 *Det eksisterer minst et referansesystem, kalt et treghetssystem, som har følgende egenskaper:*
1. Geometrien er Euklidsk
2. Klokkene kan synkroniseres
3. Alle posisjoner, retninger og tidspunkter er ekvivalente mht. formuleringen av bevegelseslovene.

Relativitetsprinsippet: Det følgende postulat kalles ofte for relativitetsprinsippet og ble først brukt praktisk av Christian Huygens (1629-1695). Det er også et av de fundamentale prinsipper i den spesielle relativitetsteorien.

Postulat 2 *Referansesystemer har de følgende egenskaper :*
1. Alle referansesystemer som beveger seg med en konstant hastighet mht et treghetssystem er også et treghetssystem.
2. Alle treghetssystem er ekvivalente mht. formuleringer av bevegelseslikningene.

Lov 1 ***Newtons 1. lov (treghetsloven):*** *Dersom en partikkel er langt borte fra innflytelsen fra alle andre partiklene i universet, vil den bevege seg med konstant hastighet mht. et treghetssystem.*

3. Transformasjon mellom treghetssystemene

En ønsker ofte å bestemme bevegelsen av en partikkel mht ett treghetssystem, men vise resultatet i et annet treghetssystem.

Teorem: 1 ***(transformasjonsloven):*** *La $\mathcal{R}$ være et treghetssystem og $\mathcal{R}'$ et annet treghetssystem som beveger seg mht $\mathcal{R}$. La $\mathcal{S}$ og $\mathcal{S}'$ være to kartesiske koordinatsystemer som ligger fast i hhv. $\mathcal{R}$ og $\mathcal{R}'$. Koordinatene for et punkt er hhv. x og x' i de to koordinatsystemene, og tidene betegnes t og t'. Dersom vi velger koordinatsystemene og klokkene slik att $t = t\prime = 0$ når origo faller sammen i de to koordinatsystema, og den relative bevegelsen av $\mathcal{S}'$ relativt $\mathcal{S}$ er i den positive x-retning, blir sammenhengen mellom koordinatene (x, t) og $(x\prime, t\prime)$ for den samme partikkel* *i de to koordinatsystemene*

$$
\begin{aligned}
x' &= \Gamma\,(x - vt) \\
t' &= \Gamma\left(t - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\
\Gamma &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}
\end{aligned}
$$

hvor v er hastigheten av $\mathcal{S}'$ relativt $\mathcal{S}$ og c er dens tørste hastigheten partikkeler kan bevege seg med mht. treghetssystemet. Dersom det ikke er noen øvre grense for hastigheten er $c = \infty$ og $\Gamma = 1$.

Det finns en tilsvarende formel for vektortilfellet.

Galilei transformasjonen: Eksperimenter viser at det er en øvre grense for hastigheten en partikkel kan ha. Denne hastigheten er lik den hastigheten lyset beveger seg med relativt et treghetssystem. I klassisk mekanikk er hastighetene som er aktuelle små sammenliknet med lyshastigheten. Vi kan derfor i klassisk mekanikk anta at den øvre grense for hastigheten er $c = \infty$. Dette formulerer vi i følgende postulat.

Postulat 3 *Det er ingen øvre hastighetsbegrensning for hastigheten en partikkel kan bevege seg med relativt et treghetssystem (klassisk mekanikk).*

Definisjon: 1 ***Galilei transformasjonen*** *: Dersom Postulat 3 gjelder er $c = \infty$ og $\Gamma = 1$. Dvs. i klassisk mekanikk er transformasjonen mellom $\mathcal{S}$ og $\mathcal{S}'$ i teorem 1 gitt ved :*

$$
\begin{aligned}
x' &= x - vt \\
t' &= t
\end{aligned}
$$

Relativistisk mekanikk: I relativistisk mekanikk har en hastigheter som nærmer seg lysets hastighet, c. Postulat 3 kan derfor ikke aksepteres. Transformasjonen en får ved å sette c lik lysets hastighet i teorem 1 kalles Lorentz transformasjonen.

4. Absolutt tid og rom

I forrige kapittel innførte vi treghetssystemer og viste hvordan resultater kan transformeres fra et treghetssystem til et annet. I dette kapittelet ser vi på hvordan resultatene kan generaliseres til ikke-treghetssystemer.

Absolutt tid: Dersom Galilei transformasjonen gjelder er det mulig å synkronisere klokker i forskjellige treghetssystemer. Dette er det samme som å si at det finns en felles tid for alle treghetssystemer. Vi vil gjøre en sterkere antagelse, nemlig at det eksisterer en felles tid i både treghets- og ikke-treghetssystemer. Dette er det samme som å anta at det eksisterer en absolutt tid. Fra nå av betyr derfor tid det samme som absolutt tid.

Absolutt rom: Vi antar at sett fra en observatør i et referansesystem er rommet absolutt slik at målinger gjort i en annen observatørs referansesystem kan tolkes som om målingene var gjort i den første observatørens referansesystem, men bare referert til et koordinatsystem i bevegelse (ikke nødvendigvis konstant hastighet mellom systemene).

Referanse- og koordinatsystemer: Dersom vi antar at rom og tid er absolutte vil ikke det skille vi gjorde mellom treghets- og koordinatsystemer være så kritisk.

Seksjon 2 Tilleggsprinsipper for Newtons kinematikk

5. Relativ bevegelse mellom partikler

6. Relativ bevegelse mellom referansesystemer

7. Beskrivelse av bevegelse ved bruk av ortogonale curvilineære koordinater

Seksjon 3 Grunnprinsippene for Newtons dynamikk

8. Masse og moment

Postulat 4 *Til enhver partikkel i i universet kan en assosiere en størrelse μ_i med den følgende egenskap: dersom to eller flere partikler interakterer med hverandre, vil størrelsen $\sum_i \mu_i \vec{v}_i$, hvor $\vec{v}_i$ er hastigheten til partikkel i ha den samme verdi etter interaksjonen og i hvert øyeblikk under interaksjonen som før interaksjonen.*

Masse: Gitt to partikler i og j så vil forholdet μ_i/μ_jvære entydig selv om μ_i og μ_j ikke vil være unike. Dersom vi velger en referansepartikkel μ_0 vil verdien μ_i for alle andre partikler være bestemt. Dersom vi setter $\mu_0 = 1$ vil vi kalle forholdet μ_i/μ_0 for massen til partikkel i. Massen m_i til enhver partikkel kan da i prinsippet bestemmes ved å la den interaktere med referansepartikelen 0 fordi postulat 4 gir at

$$\mu_i \Delta\vec{v}_i + \mu_0 \Delta\vec{v}_0 = 0$$

hvor $\Delta\vec{v}_i$ og $\Delta\vec{v}_0$ er hastighetsendringene for hhv. partikkel i og j. Dette gir oss følgende definisjon av masse :

Definisjon: 2 *Dersom vi velger partikkel* 0 *som referansepartikkel, kan massen for enhver annen partikkel i bestemmes fra forholdet*

$$m_i = \frac{\mu_i}{\mu_0} = -\frac{\Delta\vec{v}_0}{\Delta\vec{v}_i}$$

Lineært moment: Størrelsen $m\vec{v}$ er av stor betydning i klassisk mekanikk og den kalles lineært moment (bevegelsesmengde)

Definisjon: 3 *Dersom en partikkel med masse m beveger seg med hastigheten $\vec{v}^{\boldsymbol{i}}$ i et treghetssystem, er partikkelens lineære moment definert ved*

$$\vec{p}^{\boldsymbol{i}} = m\vec{v}^{\boldsymbol{i}}$$

Konservering av lineært moment: Postulat 4 og definisjonene 1 og 2 gir oss følgende teorem

Teorem: 2 ***Konservering av lineært moment.*** *Dersom 2 eller flere isolerte partikler interakterer med hverandre, vil det totale lineære moment av systemet forbli konstant.*

$$\sum_i m_i \vec{v}_i^{\boldsymbol{i}}(t_1) = \sum_i m_i \vec{v}_i^{\boldsymbol{i}}(t_2)$$

9 Kraft

Når vi analyserer interaksjon mellom en bestemt partikkel og en eller flere andre, er vi ofte bare interessert i oppførselen til den ene partikkelen. Kraftbegrepet er nyttig ved en slik analyse.

Lov 2 ***Newtons 2. lov*** *Dersom det lineære moment for en partikkel i et treghetssystem endres med tiden sies partikkelen å være påvirket av en kraft J og kraften er definert kvantitativt ved*

$$\vec{f} = \dot{\vec{p}^{i}}$$

hvor $\dot{\vec{p}^{i}}$ *er den deriverte av det lineære moment* $\vec{p}^{i}$ *med hensyn på tiden sett fra treghetsrommet. Ekvivalent*

$$\vec{f} = m\vec{a}^{i}$$

hvor m *er massen til partikkelen og* $\vec{a}^{i}$ *er akselerasjonen i treghetssystemet.*

Loven om aksjon og reaksjon: Dette er den siste av Newtons lover

Lov 3 ***Newtons 3. lov:*** *Dersom to isolerte partikler interakterer med hverandre, vil kraften partikkel en utsetter partikkel to for være like i størrelse, men motsatt rettet av den kraften partikkel to påvirker partikkel en med.*

Klassifikaskjon av krefter: I Newtonsk dynamikk deler en kreftene som kan påvirke en partikkel inn i to klasser
1. Kontaktkrefter: Krafta et legeme som er i kontakt med partikkelen påvirker partikkelen med. F.eks. den kraft et bord utsetter en partikkel for når partikkelen ligger på bordet.
2. Massekrefter: Den kraft et legeme påvirker en partikkel med uten å være i kontakt med partikkelen. F.eks. gravitasjonskrafta.

En vil få problem med disse definisjonene i kvantefysikken.

10 Massesenter

Postulata og lovene vi introduserte i forrige avsnitt gjalt bevelgelsen av en punktpartikkel. Men det kan vises at de kan generaliseres til å gjelde et system av n partikler når likningene settes opp for massesenteret.