

# Del D:

## MATEMATISKE MODELLER FOR ROBOTER

Dette kapittelet er et sammendrag av pensum i boka til Craig. Jeg vil bruke den samme kapittelindeling og figurnummerering som i boka. For likningene vil jeg også bruke Craigs nummerering.

### D.1 Innledning

#### D.1.1 Bakgrunn

Se innledninga i boka til Craig

#### D.1.2 Notasjon

I Del C vil jeg stort sett bruke notasjonen i boka til Craig. Craig operer ikke med det jeg har kalt geometriske vektorer (vektorer definert uten at basisen er gitt), alle vektorer og operatorer er refert til et koordinatsystem. Dvs han operer bare med linje- eller kolonnematriser og matriser. Jeg vil derfor kort kalle alle linje- og kolonnematriser for vektorer.

I Craig er alle koordinatsystem Kartesiske (basisvektorene er ortonormale). Craig antar at det alltid er definert et universelt koordinatsystem som vi kan refere det vi diskuterer til. Vektorer og matriser representeres alltid med store bokstaver. Koordinatsystemene er representert med presub- og presuperfiks. Jeg vil bruke samme notasjon som tidligere.

Craigs	Vår	Forklaring
${}^A P$	$\underline{p}^a$	Posisjonsvektor representert i koordinatsystemet a.
${}_B^A R$	$\underline{R}_b^a$	Koordinattransformasjonsmatrisa fra b til a systemet.
$c_1, s_1$	$c_{\theta_1}, s_{\theta_1}$	$\cos \theta_1, \sin \theta_1$
$c\theta_1, s\theta_1$	$c_{\theta_1}, s_{\theta_1}$	$\cos \theta_1, \sin \theta_1$
${}^A \hat{X}_B, {}^A \hat{Y}_B, {}^A \hat{Z}_B$	$\hat{x}_b^a, \hat{y}_b^a, \hat{z}_b^a$	Basisvektorene i k.s. b representert i k.s. a (kartesiske k.s.)

Se også starten på C.5 for notasjon mht hastighet og akselerasjon.

### D.2 Romlig beskrivelse og transformasjoner

#### D.2.1 Innledning

Craig antar at det alltid er definert et universelt koordinatsystem som vi kan refere det vi diskuterer til.

#### D.2.2 Beskrivelser : Posisjon, orientering og rammer

En *beskrivelse* brukes til å spesifisere attributer for objektene en manipulator består av. Vi skal i dette avsnittet beskrive posisjon og orientering i rommet av et objekt. Denne beskrivelesen kan sammenfattes i en ramme.

*Posisjon* beskrives som vi har sett i del A av en posisjonsvektor (se figur 2.1) som Craig alltid

representerer i et k.s.:

$$\underline{p}^a = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

*Orienteringa* beskrives av en retningskosinmatrise (se figur 2.2) som kan skrives på følgende måte dersom vi bruker notasjonen for basisvektore:

$$R_b^a = [\hat{x}_b^a, \hat{y}_b^a, \hat{z}_b^a]$$

En ramme er som vi så i del A et objekt i et affint rom bestå ende av et punkt og et sett basisvektorer. Craig definerer rammer på en tilsvarende måte:

$$\{b\} = \{R_b^a, \underline{p}_{0_b}^a\}$$

En grafisk representasjon av ramme er gitt i *figur 2.3*.

En ramme brukes til å beskrive et k.s. relativt et annet k.s. Den inneholder både en beskrivelse av posisjon og orientering.

### D.2.3 Avbildninger (mappings)

Innholdet her tilsvarer våre avbildninger av posisjoner i affine rom. Som vi så der kunne vi skrive avbildningene på inhomogen form (3-dimensjonale vektorer) (A-57)

$$\underline{r}^q = \underline{r}_{qp}^q + R_p^q \underline{r}^p$$

eller homogen form (4-dimensjonale vektorer) (A-58).

$$\underline{\tilde{r}}^q = T_p^q \underline{\tilde{r}}^p$$

Se også *figur 2.7*

### D.2.4 Operatorer : Translasjon, rotasjon og transformasjon

Den samme matematikken som blir brukt til å finne sammenhengen mellom posisjonsvektorer for punkt i ulike rammer kan også brukes til å definere en operator som kan translaterer, rotere eller både translaterer og rotere en vektor i et koordinatsystem. Den generelle homogene formen blir

$$\underline{\tilde{r}}_A^q = T^q \underline{\tilde{r}}_B^q$$

### D.2.5 Oppsummering av tolkninger

Vi kan her gi en tilsvarende tolkning av en homogen transformasjonsmatrisa  $T_p^q$  ( $4 \times 4$  matrise) som vi i A.2.5 ga av RKM (jeg bruker i det følgende notasjonen  $\underline{r}^q$  også om 4-dimensjonale vektorer):

1.  $T_p^q$  er en beskrivelse av ramme  $\{b\}$  relativt ramme  $\{a\}$
2.  $T_p^q$  er en transformasjonsoperator som opererer på  $\underline{r}^p$  og gir  $\underline{r}^q$ . Dvs den transformerer koordinatene for et punkt fra et k.s. til et annet.
3.  $T^q$  er en operator som roterer og strekker en vektor  $\underline{r}^q$

### D.2.6 Transformasjons aritmetikk

Ved sammensetning av transformasjonen i *figur 2.12* har vi reknereglene

$$\begin{aligned} T_c^a &= T_b^a T_c^b \\ \underline{p}^a &= T_c^a \underline{p}^c \end{aligned}$$

hvor

$$T_c^a = \begin{bmatrix} R_b^a R_c^b & R_b^a \underline{p}_{o_c}^b + \underline{p}_{o_b}^a \\ 0, 0, 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## D.2 Romlig beskrivelse og transformasjoner

Den inverse av ei transformasjonsmatrise er gitt ved

$$(T_b^a)^{-1} = T_a^b = \begin{bmatrix} (R_b^a)^T & -(R_b^a)^T \underline{p}_{o_b}^a \\ 0, 0, 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### D.2.7 Transform likninger

For den grafisk representasjonen i figur 2.14 har vi:

$$T_d^u = T_a^u T_d^a = T_b^u T_c^b T_d^c$$

Løst mhp  $T_c^b$ :

$$T_c^b = (T_b^u)^{-1} T_a^u T_d^a (T_d^c)^{-1}$$

### D.2.8 Representasjon av orientering

Dette har vi behandlet i avsnitt A.2.6.

I robot sammenheng er det et viktig skille mellom *lært og forhåndsdefinerte orienteringer*. Dersom robotsystemet tillater læring av posisjon og orientering, ved å lede verktøyet til riktig posisjon og orientering, kan dette være en stor fordel for operatøren. I tillegg kan det finnes forhåndsdefinerte orienteringer som ”pek ned”, ”pek opp”, osv.

### D.2.9 Transformasjon av frie vektorer

Ved bytte av koordinatssystem vil en posisjonsvektor transformeres forskjellig fra f.eks. hastighets- og kraftvektorer.

I mekanikken skiller en mellom *likhet* (equality) og *ekvivalens* mellom vektorer.

#### Definisjon D.1 *Likhet av vektorer*

Vektorene  $\underline{a}$  og  $\underline{b}$  sies å være like dersom de har samme dimensjon, størrelse og retning.

#### Definisjon D.2 *Ekvivalens av vektorer*

Vektorene  $\underline{a}$  og  $\underline{b}$  sies å være ekvivalente i en gitt tolkning (in a certain capacity) dersom de har samme virkning i denne tolkningen.

To vektorer er like selv om de ikke ligger på samme linje (se figur 2.21). Dersom tolkningen for vektorene i figur 2.21 er reiselengde, er de ekvivalente. Men de er ikke ekvivalente dersom tolkningen er høyde over xy-planet.

Vi definerer følgende typer vektorer :

#### Definisjon D.3 *Linjevektor*

En linjevektor er en vektor hvis virkning avhenger av retning, størrelse og angrepslinje.

En kraftvektor er eksempel på en linjevektor.

#### Definisjon D.4 *Fri vektor*

En fri vektor er en vektor hvis virkning bare avhenger av retning og størrelse.

Eksempler på frie vektorer : hastighet-, vinkelhastighet- og momentvektorer.

Frie vektorer transformerer i henhold til likninga :

$$\underline{v}^a = R_b^a \underline{v}^b$$

Mens en posisjonsvektor transformerer i henhold til likninga :

$$\underline{p}^a = R_b^a \underline{p}^b + \underline{p}_{O_b}^a$$

### D.2.10 Numeriske aspekt

Ved å utnytte strukturen til homogene transformasjoner kan en redusere reknekraftbehovet.

Reknekraft behovet kan også avhenge av rekkefølgen operasjonene utføres i. F.eks. vil uttrykket

$$R_b^a R_c^b R_d^c \underline{p}^d$$

kreve 63 multiplikasjoner og 42 addisjoner dersom en først beregner

$$R_d^a = R_b^a R_c^b R_d^c$$

Dersom en i stedet starter fra høyre med vektoren  $\underline{p}^d$  kreves det 27 multiplikasjoner og 18 addisjoner.

## D.3 Manipulator kinematikk

### D.3.1 Innledning

I dette kapitlet ser vi på posisjon og orientering av manipulatorens *linker* og *ledd* i statiske situasjoner. Hovedproblemet vi må løse er som følger.

**Problem D.1** Beregn posisjon og orientering av verktøyet relativt manipulatorens basis som en funksjon av leddvariablene.

### D.3.2 Link beskrivelse

*Figur 3.1* viser 6 typer ledd definert ved at to flater glir mot hverandre. Pga designproblem har de fleste manipulatorer bare revolute og/eller prismatiske ledd (dvs de har bare en frihetsgrad).

Ledd og link nummereringa starter med 0 for manipulatorens faste basis. så kommer ledd 1, link 1, ledd 2, link 2, osv.

For å kunne posisjonere og orientere et verktøy generelt må manipulatoren ha minst 6 ledd.

*Leddakse*  $i$  er definert vha en linje i rommet hvor link  $i$  kan rotere eller flytte seg relativt link  $i - 1$ .

Fra en kinematisk synsvinkel betraktes en link som et stivt legeme som definerer sammenhengen mellom aksene til to naboledd og kan beskrives av to tall,  $\alpha_i$  og  $a_i$ , som gir den relative lokasjon av to akser i rommet.

*Figur 3.2* definerer *linklengda*,  $a_{i-1}$ , og *linkvridninga*,  $\alpha_{i-1}$  :

1.  $a_{i-1}$  = avstanden mellom leddaksene  $i - 1$  og  $i$ .
2.  $\alpha_{i-1}$  = vinkelen mellom leddaksene  $i - 1$  og  $i$ .

### D.3.3 Ledd beskrivelse

#### Mellomliggende linker

Sett fra en kinematisk synsvinkel er sammenkoblinga av to linker fullstendig beskrevet av to parametre, se *figur 3.4*:

## D.3 Manipulator kinematikk

1.  $d_i = \text{linkforskyvninga}$ , dvs avstanden mellom der linklengdene  $a_{i-1}$  og  $a_i$  blir målt på leddakse  $i$ .
2.  $\theta_i = \text{leddvinkelen}$ , dvs vinkelen mellom avstandsvektorene  $\underline{a}_{i-1}$  og  $\underline{a}_i$ .

### Første og siste link

Her definerer vi :

1.  $a_0 = a_n = 0$
2.  $\alpha_0 = \alpha_n = 0$
3.  $d_1 = 0$  for revolute ledd og kan velges fritt for prismetiske ledd
4.  $\theta_1$  kan velges fritt for revolute ledd og velges lik 0 for prismetiske ledd.

### Linkparametre

Kinematisk kan som vi har sett, enhver manipulator beskrives av 4 tall for hver link. Det første tallet kalles *leddvariabelen* ( $\theta_i$  for revolute og  $d_i$  for prismetiske ledd) og angir linkenes relative stilling. De tre siste tallene kalles *linkparametrene* ( $a_i, \alpha_i, d_i$ : revolute;  $a_i, \alpha_i, \theta_i$ : prismetisk) og er konstanter.

Definisjon av en manipulator på denne måten kalles for *Denavit-Hartenberg notasjonen* (det finnes ulike definisjoner av denne i ulike bøker).

### D.3.4 Tilordning av rammer til linker

$\{i\}$ : ramme  $i$  ligger fast i link  $i$ .

### Mellomliggende linker

Figur 3.5 viser hvordan rammene plasseres.

### Første og siste link

For første og siste link må vi gjøre noe spesielt:

- $\{0\}$ : Fast i robotens basis. dersom  $\hat{z}_0$  velges langs akse 1 og slik at  $\{0\}$  faller sammen med  $\{1\}$  når leddvariabel 1 er null forenkles transformasjonsmatrisene.
- $\{N\}$ 
  - Revolute:  $\hat{x}_N$  velges slik at  $\hat{x}_N \parallel \hat{x}_{N-1}$  når  $\theta = 0$  og med origo for  $\{N\}$  slik at  $d_N = 0$ .
  - Prismetiske ledd:  $\hat{x}_N$  velges slik at  $\theta_N = 0$  og origo for  $\{N\}$  velges i skjæringa mellom  $\hat{x}_{N-1}$  og leddakse  $N$  når  $d_N = 0$ .

### Oppsummering

Dersom rammene defineres som ovenfor får vi følgende definisjon av linkparametrene :

1.  $a_i$  : avstanden mellom  $\hat{z}_i$  og  $\hat{z}_{i+1}$  målt langs  $\hat{x}_i$ .
2.  $\alpha_i$  : vinkelen mellom  $\hat{z}_i$  og  $\hat{z}_{i+1}$  målt langs  $\hat{x}_i$ .
3.  $d_i$  : avstanden mellom  $\hat{x}_{i-1}$  og  $\hat{x}_i$  målt langs  $\hat{z}_i$ .
4.  $\theta_i$  : vinkelen mellom  $\hat{x}_{i-1}$  og  $\hat{x}_i$  målt lom  $\hat{z}_i$ .

Parametrene  $\alpha_i, d_i$  og  $\theta_i$  er tall med fortegne, mens  $a_i \geq 0$ .

NB: Konvensjonen ovenfor resulterer ikke i en entydig måte å tilordne rammer til linker, fordi:

1. Vi må velge retningen på  $\hat{z}_i$ .
2. Vi må velge retningen på  $\hat{x}_i$  når aksene  $i$  og  $i + 1$  skjærer hverandre.
3. Vi må velge plassering av origo i  $\{i\}$  når aksene  $i$  og  $i + 1$  er parallelle.

**Prosedyre for tilordning av rammer til linker.**

1. Finn leddaksene (se på aksene  $i$  og  $i + 1$  i punktene 2 til 5).
2. Finn avstanden (og stedet hvor denne måles) mellom to og to akser. Plasser origo for ramme  $\{i\}$  der avstandsvektoren skjærer  $i$ 'te leddakse.
3. La  $\hat{z}_i$  falle sammen med  $i$ 'te leddakse.
4. La  $\hat{x}_i$  falle sammen med avstandsvektoren eller  $\perp$  planet definert av leddaksene dersom disse faller sammen.
5. Plasser  $\hat{y}_i$  slik at vi får et høyrehendt k.s.
6. La  $\{0\}$  falle sammen med  $\{1\}$  når den første leddvariabel er 0.  
For  $\{N\}$  velges origo og  $\hat{x}_N$ -retningen fritt, men helst slik at flest mulige linkparametre blir 0.

**Eksempel 3.3** : Se *figurene 3.6, 3.7 og 3.8*.

### D.3.5 Manipulator kinematikk

**Problem D.2** Bestem transformasjonen  $T_i^{i-1}$  som knytter sammen rammene  $\{i\}$  og  $\{i - 1\}$

**Løsning:** Vi innfører tre hjelperammer  $\{p\}$ ,  $\{q\}$  og  $\{r\}$ , se *figur 3.15*. Da kan vi skrive:

$$T_i^{i-1} = T_r^{i-1} T_q^r T_p^q T_i^p = R_x(\alpha_{i-1}) D_x(a_{i-1}) R_z(\theta_i) D_z(d_i) \quad (\text{D- 158})$$

Dvs hver matrise er bare avhengig av en linkparameter.

**Problem D.3** Beregn transformasjonen  $T_N^0$

**Løsning:**

$$T_N^0 = \prod_{i=1}^N T_i^{i-1}$$

### D.3.6 Aktuator-, ledd- og kartesiskrom

Vi har følgende terminologi:

- *Leddvektor*: vektor bestående av  $n$  leddvariable.
- *Leddrom*: rommet bestående av alle mulige leddvektorer.
- *Kartesiskrom*: Det tredimensjonalt rom hvor manipulatoren opererer. Det er lagt inn et kartesisk koordinatsystem. Posisjoner og stillinger angis som vist i del A. En bruker også navna oppgave- eller operasjonsrom på dette.
- *Aktuatorrom*: består av vektorer med elementer av aktuatorparametre.

*Figur 3.16* viser avbildningene mellom de forskjellige romma.

**D.3.7 Eksempler : Kinematikk for 2 industriroboter**

Puma 560: Ser på leddrom - kartesiskrom

Motoman L-3: Ser på aktuatorrom - leddrom - kartesiskrom.

**D.3.8 Rammer med standardnavn**

Se figur 3.27.

$\{b\}$  : Basisramme, samme som  $\{0\}$ .

$\{s\}$  : Stasjonsramma,  $T_s^b$  er oppgitt.

$\{w\}$  : Håndleddsramma, samme som  $\{N\}$ .

$\{t\}$  : Verktøyramma,  $T_t^w$  er oppgitt.

$\{g\}$  : Målramma, vi ønsker å få  $\{t\}$  til å falle sammen med  $\{g\}$ .

**D.3.9 Hvor er verktøyet?**

Posisjon og orientering av verktøyet er gitt ved:

$$T_t^s = \left(T_s^b\right)^{-1} T_w^b T_t^w$$

**D.3.10 Numeriske aspekt**

Vi må ta hensyn til det følgende:

1. Dersom vi bruker heltallsaritmetikk må vi ha minst 24 bits.
2. Vi bør ha hurtig beregning av transendentale funksjoner.
3. Vi kan utnytte at en retningskosinmatrise bare inneholder 3 uavhengige ledd.

**D.4 Invers manipulator kinematikk****D.4.1 Innledning**

I forrige kapittel beregnet vi posisjon og orientering av verktøyet relativt stasjonsramma som en funksjon av leddvariablene. I dette kaptittelet skal vi se på et langt vanskeligere problem.

**Problem D.4** Gitt posisjon og orientering av verktøyet, beregn leddvariablene.

Kapittel 3 behandlet det vi kaller *direkte kinematikk*, mens vi i dette kaptittelet behandler *invers kinematikk*.

**D.4.2 Løsbarhet**

**Problem D.5** Gitt de numeriske verdiene for matrisa  $T_N^0$  (16 verdier), finn leddvariablene  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ .

**Eksempel D.1** Manipulator med 6 frihetsgrader

$T_6^0$  gir 12 likninger (nederste linje i  $T_N^0$  inneholder ikke informasjon i denne forbindelse), men retningskosinmatrisedelen har bare 3 og ikke 9 uavhengige elementer. Dvs  $T_6^0$  inneholder bare 6 uavhengige likninger

## D MATEMATISKE MODELLER FOR ROBOTER

som kan brukes til å finne 6 ukjente leddvariablene for en manipulator med 6 frihetsgrader. Likningene vil være transendentale (og dermed ulineære).

Siden likningene vi skal løse er ulineære må vi ta stilling til følgende problem

1. Eksisterer det løsninger?
2. Finns det multiple løsninger?
3. Hvilken løsningsmetode bør vi bruke?

### Eksistens av løsninger

Spørsmålet om det eksisterer en løsning på det inverse kinematiske problem er avhengig av manipulatorens arbeidsområde. Vi har følgende definisjoner :

#### Definisjon D.5 *Arbeidsområde*

*Med en manipulators arbeidsområde mener vi det område av rommet vi kan nå med verktøyet.*

Det kan ofte være nyttig å dele denne definisjonen opp i to og gjøre den mer stringent.

#### Definisjon D.6 *Dextrous arbeidsområde*

*Den delen av rommet (3 dimensjoner) som link  $N$  kan nå med en vilkårlig orientering.*

#### Definisjon D.7 *Nåbart arbeidsområde*

*Den delen av rommet som link  $N$  kan nå med minst en orientering.*

#### Eksempel D.2 Se figur 4.1

Dextrous arbeidsområde: ledd 1 dersom  $l_1 = l_2$ .

Nåbart arbeidsområde: mellom sirklene med radius  $|l_1 + l_2|$  og  $|l_1 - l_2|$ .

Arbeidsområdet avhenger av verktøyramma, men en transformerer vanligvis problemet over til  $\{N\} = \{w\}$  ramma.

Dersom en robot har færre enn 6 frihetsgrader kan verktøyet ikke innta en vilkårlig orientering på alle steder i 3-D, men vi kan likevel få en løsning dersom målramma kan nås.

### Multiple løsninger

**Eksempel D.3** : Figur 4.2 viser en 3 leddet planar manipulator med to mulige løsninger på et inverst kinematisk problem.

**Eksempel D.4** Figur 4.3 viser at hindringer kan redusere antall tillatte løsninger.

**Eksempel D.5** Figur 4.4 viser 4 mulige løsninger med Puma 560.



**Kommentar D.1** Jo flere leddparametre som er  $\neq 0$  jo flere løsninger eksisterer. Se figur 4.5 som eksempel på en 6 ledds robot.

### Løsningsmetoder

Som vi har sett har vi ulineære likninger og noen generell løsningsmetode finnes ikke. Vi definere løsbarehet på følgende måte :

**Definisjon D.8** En manipulator er **løsbare** dersom leddvariablene kan bestemmes vha en algoritme som gir all løsningene assosiert med en gitt posisjon og orientering.

Legg merke til at alle løsningen skal finnes i denne definisjonen.

Vi kan sette opp følgende klassifisering av løsningsmetoder :

- Numeriske løsningsmetoder (blir ikke diskutert i boka til Craig).
- Analytiske løsningsmetoder : Finner formler for leddvariablene.
  - Algebraisk : løser  $T_N^0(\underline{\theta}) = T_N^0$  mhp  $\underline{\theta}$ .
  - Geometrisk : setter opp likningene vha f.eks plangeometri eller romgeometri.

**Teorem D.1** Alle roboter med 6 frihetsgrader bestående av revolute og prismatiske ledd i en enkel kjede er løsbare numerisk.

**Teorem D.2** En tilstrekkelig betingelse for at en robot med 6 revolute ledd er løsbare analytisk (slutta form) er at tre naboledakser skjærer hverandre i et punkt (se f.eks Puma 560).

Roboter blir vanligvis laget slik at det finns en analytisk løsning på det invers kinematiske problem.

### D.4.3 Manipulator underrom for $n < 6$

**Definisjon D.9** Underrommet for en manipulator med  $n$  frihetsgrader kan defineres ved å uttrykke  $\{w\}$  eller  $\{t\}$  vha  $n$  leddvariable og se på disse variablene som uavhengige variable (akser i et  $n$ -dimensjonalt kartesisk k.s.).

**Eksempel D.6** Underrommet for manipulatoren i figur 4.1 er planet, mens arbeidsområdet er mellom sirklene definert av  $|l_1 + l_2|$  og  $|l_1 - l_2|$ .

**Eksempel D.7** Beskrivelse av underrommet for manipulatoren i figur 3.6.

$$T_w^b = \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 & x \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Underrommet genereres av  $\varphi, x, y$  og er lik  $R^3 = R \times R \times R$  (kartesiske produkt). Alle rammer som ikke har denne strukturen ligger ikke i underrommet.

Link og ledd begrensninger gjør at arbeidsområdet for roboter blir en undermengde av underrommet.

#### D.4.4 Algebraisk vs. geometrisk framgangsmåte

Se Craig avsnitt 4.4

#### D.4.5 Algebraisk løsning ved reduksjon til polynom

Transendentale likninger kan være vanskelig å løse selv når bare en variabel inngår, f.eks.  $\theta$ , fordi både  $\sin \theta$  og  $\cos \theta$  vanligvis inngår. Ved å foreta følgende substitusjon får vi uttrykk i den enkle variabelen  $u$ :

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{tg}(\theta/2) \\ \cos \theta &= \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \\ \sin \theta &= \frac{2u}{1 + u^2} \end{aligned}$$

F.eks. gir substitusjonene ovenfor for likninga:

$$a \cos \theta + b \sin \theta = c$$

polynomlikninga

$$(a + c)u^2 - 2bu + (c - a) = 0$$

Dersom polynomlikningene er av grad  $\leq 4$  kan vi finne en analytisk løsning.

#### D.4.6 Piepers løsning når 3 akser skjærer hverandre

Antar her at origo for rammene  $\{4\}$ ,  $\{5\}$  og  $\{6\}$  faller sammen. Likningene for en slik robot kan løses analytisk.

#### D.4.7 Eksempel på invers manipulatorekinematikk

Ser på 2 industriroboter: Puma 560 og Motoman (se boka).

#### D.4.8 Standarddrammene

I et generelt robotsystem brukes rammene på følgende måte (se *figurne 4.11* og *4.12*):

1. Brukeren definerer stasjonsramma  $\{s\}$  relativt  $\{b\}$ .
2. Brukeren definerer verktøyramma  $\{t\}$  relativt  $\{w\}$ . Det defineres nye verktøyrammer for nye verktøy eller ny fatning av verktøyet.
3. Brukeren definerer målramma  $\{g\}$  relativt  $\{s\}$ .
4. Roboten beregner en sekvens av leddvariable som bringer  $\{t\}$  til  $\{g\}$ , dvs  $\{t\} = \{g\}$ .

#### D.4.9 SOLVE-ing en manipulator

På datamaskin kan en programmere rutiner som gitt standarddrammene i avsnittet ovenfor, generere en sekvens av leddvariable  $\{\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2, \dots, \underline{\theta}_m\}$  som bringer verktøyramma til å falle sammen med målramma.

#### D.4.10 Repeterbarhet og nøyaktighet

Dersom roboten *læres* et punkt i arbeidsområdet ved fysisk å lede manipulatorens dit, vil det være interessant å vite med hvilken nøyaktighet roboten selv kan komme tilbake til dette punktet. Dette

kalles *repetierbarhet*. Vi har her ikke det inverse kinematiske problem.

Dersom vi spesifiserer matematisk et punkt med kartesiske koordinater, er spørsmålet hvor nøyaktig roboten klarer å stille seg inn på dette punktet. Dette vil avhenge av numeriske beregninger, usikkerheten i de angitte leddparametrene og nøyaktigheten på resolverne.

#### D.4.11 Beregningsaspekter

Det er ofte nødvendig å løse de inverse kinematiske likningene med mer enn 30 Hz. Numeriske metoder blir ikke diskutert i boka.

### D.5 Jacobimatriza: Hastigheter og statiske krefter

#### D.5.1 Innledning

Vi ser i dette kapitlet på hastighet og vinkelhastighet for stive legemer (linkene i manipulatoren) og de statiske krefter og momenter som virker i ledda. Det viser seg at Jacobimatriza for manipulatoren inngår i begge disse tilfellen.

#### D.5.2 Notasjon for tidsvarierende posisjon og orientering

Sammenhengen mellom vår notasjon og notasjonen i Craig er vist i neste tabell :

Craigs	Vår	Forklaring
$\{B\}$	$\{b\}$	Ramme
	$O_b$	Origo i $\{b\}$
${}^B V_Q = {}^B ({}^B V_Q) = \frac{d}{dt} {}^B V_Q$	$\underline{v}_Q^b = \underline{v}_Q^{bb}$	Hastigheten for Q sett fra og representert i $\{b\}$
${}^A ({}^B V_Q) = {}^A {}^B R {}^B V_Q$	$\underline{v}_Q^{ba} = R_b^a \underline{v}_Q^b$	Hastigheten for Q sett fra $\{b\}$ og representert i $\{a\}$
$v_C = {}^U V_{CORG}$	$\underline{v}_{O_c}^u = \underline{v}_c^u$	Hastigheten av origo i $\{c\}$ sett fra og representert i det universell $\{u\}$ (vanligvis treghetssystem)
${}^A v_C = {}^A ({}^U V_{CORG})$	$\underline{v}_c^{ua}$	Hastigheten for origo i $\{c\}$ sett fra $\{u\}$ og representert i $\{a\}$
${}^A \Omega_B$	$\underline{\omega}_b^a = \underline{\omega}_b^{aa}$	Vinkelh. for $\{b\}$ relativt $\{a\}$ representert i $\{a\}$
${}^C ({}^A \Omega_B)$	$\underline{\omega}_b^{ac}$	Vinkelh. for $\{b\}$ relativt $\{a\}$ representert i $\{c\}$
$\omega_C = {}^U \Omega_C$	$\underline{\omega}_c^u$	Vinkelh. for $\{c\}$ relativt $\{u\}$ representert i $\{u\}$
${}^A \omega_C = {}^A ({}^U \Omega_C)$	$\underline{\omega}_c^{ua}$	Vinkelh. for $\{c\}$ relativt $\{u\}$ representert i $\{a\}$

NB: Hastigheten beskriver attributet til et punkt, mens vinkelhastigheten beskriver attributet til et stivt legeme

#### D.5.3 Hastighet og vinkelhastighet for stive legemer

Vi fant i del A at dersom  $Q$  er et punkt som beveger seg med en hastighet  $\underline{v}_Q^b$  sett fra  $b$ -ramma og  $b$ -ramma roterer med en vinkelhastighet  $\underline{\omega}_{ab}^a$  relativt  $a$ -ramma, så blir hastigheten til punktet sett fra  $a$ -ramma :

$$\underline{v}_Q^a = \underline{v}_{O_b}^a + R_b^a \underline{v}_Q^b + \underline{\omega}_{ab}^a \times R_b^a Q^b \quad (\text{D- 159})$$

hvor  $\underline{v}_{O_b}^a$  er hastigheten til origo i  $b$ -ramma sett fra  $a$ -ramma.

#### D.5.4 Mer om vinkelhastighet

Dette stoffet står nå i A.4.2

### D.5.5 Bevegelsen til robotens linker

I et hvert øyeblikk vil origo i  $\{i\}$  ha en lineær hastighet,  $\underline{v}_i^0$ , sett fra og representert i 0-ramma som er den universelle ramma. Vinkelhastigheten for link  $i$  relativt og representert i 0-ramma skriver vi  $\underline{\omega}_i^0$ . Se figur 5.6.

### D.5.6 Hastighetsforplantning fra link til link.

**Problem D.6** Beregn hastighet og vinkelhastighet for link  $i+1$  relativt 0-ramma og representert i ramme  $i+1$  når de tilsvarende hastigheter og vinkelhastigheter er gitt for ramme  $i$ .

Dette problemet ble også behandlet i avsnitt A.4.2. Fra figur 5.7 ser vi direkte for revolulte ledd når  $\underline{p}_{i+1}^i$  betegner avstanden mellom origo i de to rammene:

$$\underline{\omega}_{i+1}^{0,i+1} = R_i^{i+1} \underline{\omega}_i^{0i} + \dot{\theta}_{i+1} \hat{z}_{i+1}^{i+1} \quad (5.45)$$

$$\underline{v}_{i+1}^{0,i+1} = R_i^{i+1} (\underline{v}_i^{0,i} + \underline{\omega}_i^{0i} \times \underline{p}_{i+1}^i) \quad (5.47)$$

For prismatiske ledd får vi:

$$\underline{\omega}_{i+1}^{0,i+1} = R_i^{i+1} \underline{\omega}_i^{0i} \quad (5.48a)$$

$$\underline{v}_{i+1}^{0,i+1} = R_i^{i+1} (\underline{v}_i^{0i} + \underline{\omega}_i^{0i} \times \underline{p}_{i+1}^i) + \dot{d}_{i+1} \hat{z}_{i+1}^{i+1} \quad (5.48b)$$

Ved å bruke formlene ovenfor rekursivt kan vi beregne  $\underline{\omega}_N^{0N}$  og  $\underline{v}_N^{0N}$ . Dersom vi bruker  $R_N^0$  får vi:

$$\begin{aligned} \underline{v}_N^0 &= R_N^0 \underline{v}_N^{0N} \\ \underline{\omega}_N^0 &= R_N^0 \underline{\omega}_N^{0N} \end{aligned}$$

Likningene (5.45), (5.47) og (5.48) kan brukes til å:

1. utlede analytiske uttrykk.
2. implementere subrutiner for simulering.

### D.5.7 Jacobimatrisa

Dersom vi har en vektorfunksjon

$$\underline{y}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$$

kan vi bruke kjerneregelen (se Notat 2) for å beregne sammenhengen mellom hastighetsvektorene  $\dot{\underline{y}}$  og  $\dot{\underline{x}}$ :

$$\dot{\underline{y}} = \frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}^T} \dot{\underline{x}} = J(\underline{x}) \dot{\underline{x}}$$

hvor  $J(\underline{x})$  kalles *Jacobimatrisa* til  $\underline{f}(\underline{x})$ . Den gir en lineær sammenheng mellom hastighetene  $\dot{\underline{y}}$  og  $\dot{\underline{x}}$ .

I robotsammenheng er Jacobimatrisa den matrisa som gir sammenhengen mellom leddhastigheter og kartesiske hastigheter ved den siste linken (eller verktøyet):

$$\underline{\gamma}^0 = J^0(\theta) \dot{\theta} \quad (5.64)$$

$$\underline{\gamma}^0 = \begin{bmatrix} \underline{v}_N^0 \\ \underline{\omega}_N^0 \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Likning (5.64) kan utledes fra (5.45), (5.47) og (5.48). Antall linjer i  $J(\theta)$  er lik antall frihetsgrader i det Kartesiske rom og antall kolonner er lik antall leddvariable.

Legg merke til at det alltid er en lineær sammenheng mellom leddhastigheter og kartesiske hastigheter,

men at  $J$  er avhengig av  $\underline{\theta}$  (konfigurasjonen). Leddvektoren  $\underline{\theta}$  består både av vinkler (revolute ledd) og linkforskyvninger (prismatiske ledd).

Vi kan lett skifte rammer for Jacobimatrisa:

$$\underline{\gamma}^a = J^a(\underline{\theta}) = \begin{bmatrix} R_0^a & 0 \\ 0 & R_0^a \end{bmatrix} J^0(\underline{\theta}) \dot{\underline{\theta}} \quad (\text{D- 160})$$

### D.5.8 Singulariteter

Dersom  $J(\underline{\theta})$  er kvadratisk og ikke-singulær kan vi beregne  $\dot{\underline{\theta}}$  fra  $\underline{\gamma}^0$ :

$$\dot{\underline{\theta}} = (J^0(\underline{\theta}))^{-1} \underline{\gamma}^0 \quad (\text{D- 161})$$

Dette er en nyttig sammenheng. F.eks når vi ønsker konstant hastighet i det kartesiske rom.

**Problem D.7** Når er  $J(\underline{\theta})$  singulær?

De verdier av  $\underline{\theta}$  som gjør  $J(\underline{\theta})$  singulær kalles *singulære verdier*. Singularitetene klassifiseres ofte i to grupper:

1. Grensesingulariteter er den en får på grensen av arbeidsrommet. Dvs når manipulatorens hånd blir utsatt for kraft+moment og manipulatorens hånd blir utsatt for kraft+moment.
2. Indre singulariteter er de en får i det indre av arbeidsrommet og skyldes generelt at to eller flere akser faller sammen.

Når en manipulator er i en singulær konfigurasjon har den en eller flere singulariteter sett fra det kartesiske rom.

### D.5.9 Statiske krefter i manipulatorer

**Problem D.8** Bestem de leddmomenta vi har når manipulatorens hånd blir utsatt for kraft+moment og manipulatorens hånd blir utsatt for kraft+moment. Se bort fra tyngdekrefter.

Vi bruker følgende notasjon

$$\begin{aligned} \underline{f}_i &: \text{kraften på link } i \text{ fra link } i-1 \\ \underline{n}_i &: \text{momentet på link } i \text{ fra link } i-1 \end{aligned}$$

Vi antar at ledda er låst i det følgende.

Fra mekanikken har vi :

#### **Teorem D.3 Statisk likevekt**

For at et legeme skal være i statisk likevekt må summen av de krefter og momenter som legemet utsettes for være lik 0.

Fra figur 5.11 får vi for link  $i$  :

$$\underline{f}_i^i - \underline{f}_{i+1}^i = \underline{0} \quad (5.76)$$

$$\underline{n}_i^i - \underline{n}_{i+1}^i - \underline{p}_{i+1}^i \times \underline{f}_{i+1}^i = \underline{0} \quad (5.77)$$

Vi ønsker å skrive likningene slik at krefter og momenter bare er representert i sine egne rammer og slik at vi kan beregne  $i$  fra  $i + 1$  (innover iterasjon):

$$\underline{f}_i^i = R_{i+1}^i \underline{f}_{i+1}^{i+1} \quad (5.80)$$

$$\underline{n}_i^i = R_{i+1}^i \underline{n}_{i+1}^{i+1} + \underline{p}_{i+1}^i \times \underline{f}_i^i \quad (5.81)$$

Alle komponentene av krefter og momenter blir tatt opp av strukturen bortsett fra momenter om leddaksene (revolute ledd) og kreftene langs leddaksene (prismatiske ledd). Vi ønsker derfor å finne komponenten av krefter og momenter langs  $\hat{\underline{z}}_i$ -aksen :

$$\tau_i = (\underline{n}_i^i)^T \hat{\underline{z}}_i^i \quad (\text{revolute ledd}) \quad (5.82)$$

$$\tau_i = (\underline{f}_i^i)^T \hat{\underline{z}}_i^i \quad (\text{prismatiske ledd}) \quad (5.83)$$

### D.5.10 Jacobimatriza for krefter

**Problem D.9** Finn sammenhengen mellom de krefter-momenter som virker på hånda og leddmomenta.

I mekanikken kan de vises generelt at det virtuelle arbeidet som utføres er uavhengig av koordinatene som brukes, dvs:

$$(\underline{F}^0)^T \delta \underline{x}^0 = \underline{\tau}^T \delta \underline{\theta} \quad (\text{D- 162})$$

hvor:

$\underline{F}^0$  :  $6 \times 1$  vektor for de kartesiske krefter og momenter som påvirker hånda,

$$\underline{F}^0 = \begin{bmatrix} \underline{F}^0 \\ \underline{N}^0 \end{bmatrix}$$

$\delta \underline{x}^0$  :  $6 \times 1$  infinitesimal kartesisk forskyvningsvektor for hånda

$\underline{\tau}$  :  $6 \times 1$  leddmomentvektor

$\delta \underline{\theta}$  :  $6 \times 1$  infinitesimal leddendringsvektor

Dersom vi multipliserer (5.64) med  $dt$  :

$$\underline{\gamma}^0 dt = \delta \underline{x}^0 = J^0(\underline{\theta}) \dot{\underline{\theta}} dt = J^0(\underline{\theta}) \delta \underline{\theta}$$

Setter  $\delta \underline{x}^0$  fra siste likning inn i (5.92):

$$(\underline{F}^0)^T J^0(\underline{\theta}) \delta \underline{\theta} = \underline{\tau}^T \delta \underline{\theta} \quad (\text{D- 163})$$

Denne likninga skal gjelde for alle  $\delta \underline{\theta}$  :

$$\underline{\tau} = (J^0(\underline{\theta}))^T \underline{F}^0 \quad (\text{D- 164})$$

Dvs den transponerte av Jacobimatriza gir sammenhengen mellom krefter og momenter som virker på hånda og krefter og momenter i ledda.

Når Jacobimatriza blir singulær er det visse retninger i rommet hånda ikke kan gi den ønska kraft.

### D.5.11 Kartesiske transformasjoner av hastigheter og statiske krefter

**Problem D.10** Hva er sammenhengen mellom den kartesiske hastighetsvektor  $\underline{\gamma}$  i de to rammene  $\{a\}$  og  $\{b\}$  nå rammene er stivt forbundet? Hva blir sammenhengen for den kartesiske kraftvektor  $\underline{F}$ ?

## D.6 Manipulator dynamikk

Definisjonene for den kartesiske hastighetvektoren i ramme  $a$ :

$$\underline{\gamma}^a = \begin{bmatrix} \underline{v}_a^{ua} \\ \underline{\omega}_a^{ua} \end{bmatrix}$$

Første komponenten for kartesisk hastighet er hastigheten til et punkt og andre komponenten er en vinkelhastighet. Sammenhengen når de to rammene ligger fast i det samme legemet:

$$\underline{\gamma}^b = \begin{bmatrix} R_a^b & -R_a^b \underline{p}_{ab}^\times \\ 0 & R_a^b \end{bmatrix} \underline{\gamma}^a = T_a^b(v) \underline{\gamma}^a \quad (\text{D- 165})$$

Dersom vi ønsker  $\underline{\gamma}^a$  uttrykt ved  $\underline{\gamma}^b$ :

$$\underline{\gamma}^a = \begin{bmatrix} R_b^a & \underline{p}_{ab}^\times R_b^a \\ 0 & R_b^a \end{bmatrix} \underline{\gamma}^b = T_b^a(v) \underline{\gamma}^b \quad (\text{D- 166})$$

Definisjonene for den kartesiske kraftvektoren i ramme  $b$ :

$$\underline{F}^b = \begin{bmatrix} \underline{F}^b \\ \underline{N}^b \end{bmatrix}$$

Første komponenten er en kraft som er en fri vektor mens andre komponenten er et moment som er avhengig av hvilket punkt det defineres om:

$$\underline{F}^a = \begin{bmatrix} R_b^a & 0 \\ \underline{p}_{ab}^\times R_b^a & R_b^a \end{bmatrix} \underline{F}^b = T_b^a(f) \underline{F}^b \quad (\text{D- 167})$$

Sammenlikning av  $T_a^b(v)$  og  $T_a^b(f)$  viser følgende sammenheng:

$$T_a^b(v) = (T_b^a(f))^T \quad (\text{D- 168})$$

Dvs vi har samme sammenhengen som vi hadde for Jacobimatrissene for hhv kartesiske hastigheter og kartesiske krefter.

## D.6 Manipulator dynamikk

### D.6.1 Innledning

Craig behandler i dette kapittelet to hovedproblemer :

1. Gitt en trajektor uttrykt ved  $\underline{\theta}, \dot{\underline{\theta}}$  og  $\ddot{\underline{\theta}}$ , finn så de leddmomentene,  $\underline{\tau}$ , vi må sette på for å få den gitte trajektor. Dette er det sentrale problem ved *styring av roboter*.
2. Gitt leddmomenta,  $\underline{\tau}$ , beregn den resulterende trajektor uttrykt ved  $\underline{\theta}, \dot{\underline{\theta}}$  og  $\ddot{\underline{\theta}}$ . Dette er det sentrale problem ved *simulering av roboter*.

### D.6.2 Akselerasjon av et stivt legeme

Vi utledet i A.5.3 de generell sammenhenger for hastighet og akselerasjon for et punkt sett fra forskjellige k.s. (rammer). Sammenhengen mellom akselerasjonen for punkt sett fra rammene  $\{q\}$  og  $\{p\}$ :

$$\left. \begin{aligned} \underline{r}^q &= \underline{r}_{qp}^q + R_p^q \underline{\rho}^p \\ \underline{v}^q &= \dot{\underline{r}}_{qp}^q + R_p^q (\underline{v}^p + \underline{\omega}_p^{qp} \times \underline{\rho}^p) \\ &= \dot{\underline{r}}_{qp}^q + R_p^q \underline{v}^p + \underline{\omega}_p^q \times R_p^q \underline{\rho}^p \\ \underline{a}^q &= \ddot{\underline{r}}_{qp}^q + R_p^q \underline{a}^p + \dot{\underline{\omega}}_p^q \times R_p^q \underline{\rho}^p + \underline{\omega}_p^q \times (\underline{\omega}_p^q \times R_p^q \underline{\rho}^p) + 2\underline{\omega}_p^q \times R_p^q \underline{v}^p \\ &= \ddot{\underline{r}}_{qp}^q + R_p^q (\underline{a}^p + \dot{\underline{\omega}}_p^{qp} \times \underline{\rho}^p + \underline{\omega}_p^{qp} \times (\underline{\omega}_p^{qp} \times \underline{\rho}^p) + 2\underline{\omega}_p^{qp} \times \underline{v}^p) \end{aligned} \right\} \quad (\text{D- 169})$$

Vi har her brukt følgende notasjon: Posisjonsvektoren (for punktet vi betrakter) fra origo i  $q$ -systemet betegnes  $\underline{r}^q$ , posisjonsvektoren fra origo i  $p$ -systemet betegnes  $\underline{\rho}^p$  og posisjonsvektoren fra

## D MATEMATISKE MODELLER FOR ROBOTER

origo i q- til origo i p-systemet, representert i q-systemet ,med  $\underline{r}_{qp}^q$ . Det finnes som vi ser, mange måter å skrive formlene på. Ved utrekning av kryssprodukt bruker vi matriserepresentasjonen  $S(\underline{\omega}_p^q)$  i q-systemet og  $S(\underline{\omega}_p^{qp})$  i p-systemet.

Likning (6.10) brukes ved beregning av hastighet og akselerasjon av linker med prismatiske ledd (vi antar da at  $\{q\} = \{u\}$ ,  $\{p\} = \{i\}$  og punktet vi betrakter er origo i  $\{i+1\}$ ), mens for revolute ledd er  $\underline{\rho}^p$  konstant slik at  $\underline{v}^p = \underline{0}$  og  $\underline{a}^p = \underline{0}$ . Likning (6.10) kan da forenkles til:

$$\underline{a}^q = \ddot{\underline{r}}_{qp}^q + R_p^q(\underline{\dot{\omega}}_p^{qp} \times \underline{\rho}^p + \underline{\omega}_p^{qp} \times (\underline{\omega}_p^{qp} \times \underline{\rho}^p)) \quad (\text{D- 170})$$

For vinkelhastigheter har vi før funnet at dersom  $\{b\}$  roterer relativt  $\{a\}$  med vinkelhastighet  $\underline{\omega}_b^a$  og  $\{c\}$  roterer relativt  $\{b\}$  med vinkelhastighet  $\underline{\omega}_c^b$  blir  $\underline{\omega}_c^a$

$$\underline{\omega}_c^a = \underline{\omega}_b^a + R_b^a \underline{\omega}_c^b \quad (\text{D- 171})$$

Derivasjon av (6.13) gir

$$\underline{\dot{\omega}}_c^a = \underline{\dot{\omega}}_b^a + R_b^a \underline{\dot{\omega}}_c^b + \underline{\omega}_b^a \times R_b^a \underline{\omega}_c^b \quad (\text{D- 172})$$

Denne likninga brukes ved utledning av vinkelakselerasjon av linker.

Dersom derivasjonen er sett fra en universell ramme  $\{u\}$  vil jeg indikere det i notasjonen mens Craig i boka har en spesialnotasjon. Hastigheten for origo i  $\{a\}$  sett fra  $\{u\}$  skriver jeg  $\underline{\dot{v}}_a^u$  mens Craig skriver  $\dot{v}_A$ . Tilsvarende for vinkelakselerasjonen for  $\{a\}$  sett fra  $\{u\}$  har jeg notasjonen  $\underline{\dot{\omega}}_a^u$  mens Craig bruker  $\dot{\omega}_A$ .

### D.6.3 Massefordeling

Craig definerer treghetsmatrisa på samme måte som vi har gjort, men med en litt annen notasjon, i vår notasjon

$$J_C^b = \begin{bmatrix} J_{xx}^b & -J_{xy}^b & -J_{xz}^b \\ -J_{yx}^b & J_{yy}^b & -J_{yz}^b \\ -J_{zx}^b & -J_{zy}^b & J_{zz}^b \end{bmatrix} \quad (\text{D- 173})$$

Treghetsmoment og produkt blir beregnet ifølge likning (B-151) dvs i ei rame som ligger fast i legemet. Vi har her valgt å kalle origo i b-ramma for  $C$ . Se også *figur 6.1*. Ved beregning av treghetsmatrisa,  $J_C^b$ , kan en ofte ha nytte av følgende parallellakse formler:

**Teorem D.4** *La  $\{c\}$  være en ramme med origo i massesenteret og  $\{a\}$  en ramme som er translert i forhold til  $\{c\}$ .  $\underline{p}_c^a$  gir origo til  $\{c\}$  relativt til  $\{a\}$*

$$\underline{p}_c^a = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Da har vi:

$$\begin{aligned} J_{ii}^a &= J_{ii}^c + m(x_j^2 + x_k^2); \quad i, j, k = 1, 2, 3; \quad j \neq i, k \neq i, j \neq k \\ J_{ij}^a &= J_{ij}^c - mx_i m_j; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad j \neq i \end{aligned} \quad (6.25)$$

eller på matriseform

$$J^a = J^c + m \left[ \left( \underline{p}_c^a \right)^T \underline{p}_c^a I - \underline{p}_c^a \left( \underline{p}_c^a \right)^T \right] \quad (\text{D- 174})$$

hvor  $m$  er totalmassen og  $I$  en  $3 \times 3$  identitetsmatrise.

Nedenfor summerer jeg opp noen av egenskapene til treghetsmatrisa:

1. Dersom to akser i  $\{a\}$  danner et symmetriplan vil treghetsprodukta som inneholder indeksen for den tredje aksen være null.



2.  $J_{ii}^a > 0$  mens  $J_{ij}^a \leq 0$ .
3.  $J_{11}^a + J_{22}^a + J_{33}^a$  er invariant overfor en ren rotasjon av  $\{a\}$ .
4. Egenverdiene til  $J^a$  er kalles hovedtreghetsmomenta og egenvektorene kalles hovedaksene.

#### D.6.4 Newton's og Euler's likninger

Vi ser på hver link som et stivt legeme. I del B utledet vi Newtons 2. lov og Eulerlikningene som beskriver bevegelsen av et stivt legeme utsatt for ytre krefter og momenter. Dersom  $\{b\}$  har sitt origo i massesenteret  $C$  og ligger fast i legemet og treghetsramma er  $\{0\}$  har vi:

$$\underline{F}^b = m \underline{a}_C^{\mathbf{0}b} \quad (6.29)$$

$$\underline{N}_C^b = J_C^b \dot{\underline{\omega}}^{\mathbf{0}bb} + \underline{\omega}_b^{\mathbf{0}b} \times \left( J_C^b \underline{\omega}_b^{\mathbf{0}b} \right) \quad (6.30)$$

Legg merke til at Craig kaller den generelle likninga (6.30) for Eulerlikninga mens det er vanlige å kreve at aksene for  $\{b\}$  også skal falle sammen med hovedaksene når en kaller det eulerlikningene.  $J_C^b$  er derfor ikke ei diagonalmatrise her.

Se figurene 6.3 og 6.4.

#### D.6.5 Iterativ Newton-Euler dynamisk formulering

Vi skal her presentere likningene som løser følgende problem:

**Problem D.11** Gitt banen uttrykt ved  $\underline{\theta}$ ,  $\dot{\underline{\theta}}$  og  $\ddot{\underline{\theta}}$ . Hvilke leddmomenter,  $\underline{\tau}$ , krever denne banen?

Løsningen av dette problem foregår i to trinn:

1. Beregn hastighet og akselerasjon for massesenteret i hver link. Start med link nr  $i$  og gå utover.
2. Beregn kraft og moment som skal til i hvert ledd for å gi den ønska bevegelse. Start med link  $N$  og gå innover.

Siden 0-ramma oppfattes som en treghetsramme vil vi bruke fet font på denne, dvs **0**-ramma.

#### Utover-iterasjonen for å beregne hastigheter og aksellerasjoner

For å kunne beregne treghetskreftene som påvirker linkene må vi kjenne vinkelhastigheter, vinkelakselerasjoner og akselerasjoner for massesenteret i hver link.

Forplantninga av vinkelhastighet fra  $\{i\}$  til  $\{j\} = \{i + 1\}$  ble funnet i avsnitt C.5, mens (6.15) gir oss tilsvarende formler for vinkelakselerasjonen

For revolute ledd:

$$\underline{\omega}_j^{\mathbf{0}j} = R_i^j \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} + \hat{z}_j^j \dot{\theta}_j \quad (\text{D- 175})$$

$$\dot{\underline{\omega}}_j^{\mathbf{0}j} = R_i^j \dot{\underline{\omega}}_i^{\mathbf{0}ii} + R_i^j \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} \times \hat{z}_j^j \dot{\theta}_j + \hat{z}_j^j \ddot{\theta}_j \quad (\text{D- 176})$$

For prismatiske ledd:

$$\begin{aligned} \underline{\omega}_j^{\mathbf{0}j} &= R_i^j \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} \\ \dot{\underline{\omega}}_j^{\mathbf{0}j} &= R_i^j \dot{\underline{\omega}}_i^{\mathbf{0}i} \end{aligned}$$

Akselerasjonen av origo i  $\{j\} = \{i + 1\}$  for revolute ledd finnes vha likningene (6.12), avstanden mellom origoene i  $\{i\}$  og  $\{i + 1\}$  kalles  $\underline{p}_{i+1}^i$ .

For revolute ledd:

$$\underline{a}_j^{\mathbf{0}j} = R_i^j \left( \underline{a}_i^{\mathbf{0}0i} + \dot{\underline{\omega}}_i^{\mathbf{0}ii} \times \underline{p}_j^i + \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} \times \left( \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} \times \underline{p}_j^i \right) \right) \quad (\text{D- 177})$$

For prismatiske ledd:

$$\underline{a}_j^{\mathbf{00}j} = R_i^j \left( \underline{a}_i^{\mathbf{00}i} + \underline{\dot{\omega}}_i^{\mathbf{0}ii} \times \underline{p}_j^i + \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} \times \left( \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} \times \underline{p}_j^i \right) \right) + 2\underline{\omega}_j^{\mathbf{0}j} \times \underline{\dot{z}}_j^j \dot{d}_j + \ddot{d}_{i+1} \underline{\dot{z}}_j^j \quad (\text{D- 178})$$

Akselerasjonen for massesenteret  $C_i$  (  $\{c_i\}$  har akser parallelt med aksene i  $\{i\}$  ), blir:

$$\underline{a}_{C_i}^{\mathbf{00}i} = \underline{a}_i^{\mathbf{00}i} + \underline{\dot{\omega}}_i^{\mathbf{0}ii} \times \underline{p}_{C_i}^i + \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} \times \left( \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} \times \underline{p}_{C_i}^i \right) \quad (\text{D- 179})$$

### Innover-iterasjon : Beregning av krefter og momenter

Siden vi nå kjenner akselerasjonen og vinkelakselerasjonen til massesenteret for link  $i$ , kan vi beregne de tilhørende krefter og momenter i massesenteret vha likningene (6.29) og (6.30):

$$\underline{F}_i^i = m_i \underline{a}_{C_i}^{\mathbf{00}i} \quad (6.37a)$$

$$\underline{N}_i^i = J_{C_i}^{c_i} \underline{\dot{\omega}}_i^{\mathbf{0}ii} + \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} \times J_{C_i}^{c_i} \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} \quad (6.37b)$$

Denne kraften og momentet blir overført gjennom leddene  $i$  og  $j = i + 1$ , se *figur 6.5*. Kreftene er definert ved:

$\underline{f}_i^i$  : Kraften som blir overført fra link  $i - 1$  til link  $i$ .

$\underline{n}_i^i$  : Momentet som blir overført fra link  $i - 1$  til link  $i$ .

Vi kan derfor sette opp følgende kraft og momentbalanse (om origo i  $\{c_i\}$  ) for link  $i$ :

$$\underline{f}_i^i = R_{i+1}^i \underline{f}_{i+1}^{i+1} + \underline{F}_i^i \quad (\text{D- 180})$$

$$\underline{n}_i^i = \underline{N}_i^i + R_{i+1}^i \underline{n}_{i+1}^{i+1} + \underline{p}_{C_i}^i \times \underline{F}_i^i + \underline{p}_{i+1}^i \times R_{i+1}^i \underline{f}_{i+1}^{i+1} \quad (\text{D- 181})$$

Denne iterasjonen starter med gitte krefter  $\underline{f}_{N+1}^{N+1}$  og  $\underline{n}_{N+1}^{N+1}$  på link  $N$  (kontakt krefter).

Som i det statiske tilfellet bestemmes leddmomentet ved å finne  $\underline{\dot{z}}_i^i$ -komponenten av momentet  $\underline{n}_i^i$  som link  $i - 1$  utsetter link  $i$  for:

$$\tau_i = \left( \underline{n}_i^i \right)^T \underline{\dot{z}}_i^i; \quad \text{revolut ledd} \quad (6.43)$$

$$\tau_i = \left( \underline{f}_i^i \right)^T \underline{\dot{z}}_i^i; \quad \text{prismatisk ledd} \quad (6.44)$$

### Oppsummering

Jeg har nedenfor samlet likningene for revolutive ledd:

Utover-iterasjonen:

$$j = i + 1 \quad (6.45)$$

$$\underline{\omega}_j^{\mathbf{0}j} = R_i^j \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} + \underline{\dot{z}}_j^j \dot{\theta}_j \quad \text{IV: } \underline{\omega}_0^0 = \underline{0} \quad (\text{D- 182})$$

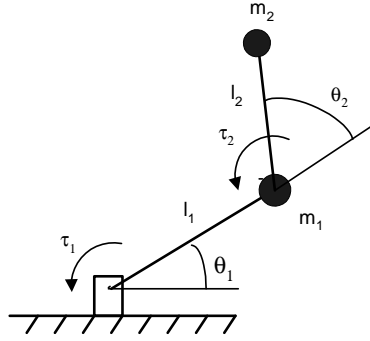
$$\underline{\dot{\omega}}_j^{\mathbf{0}j} = R_i^j \underline{\dot{\omega}}_i^{\mathbf{0}ii} + R_i^j \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} \times \underline{\dot{z}}_j^j \dot{\theta}_j + \underline{\dot{z}}_j^j \ddot{\theta}_j \quad \text{IV: } \underline{\dot{\omega}}_0^0 = \underline{0} \quad (6.46)$$

$$\underline{a}_j^{\mathbf{00}j} = R_i^j \left( \underline{a}_i^{\mathbf{00}i} + \underline{\dot{\omega}}_i^{\mathbf{0}ii} \times \underline{p}_j^i + \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} \times \left( \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} \times \underline{p}_j^i \right) \right) \quad \text{IV: } \underline{a}_0^0 = \underline{g}^0 \quad (6.47)$$

$$\underline{a}_{C_i}^{\mathbf{00}i} = \underline{a}_i^{\mathbf{00}i} + \underline{\dot{\omega}}_i^{\mathbf{0}ii} \times \underline{p}_{C_i}^i + \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} \times \left( \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} \times \underline{p}_{C_i}^i \right) \quad (6.48)$$

$$\underline{F}_i^i = m_i \underline{a}_{C_i}^{\mathbf{00}i} \quad (6.49)$$

$$\underline{N}_i^i = J_{C_i}^{c_i} \underline{\dot{\omega}}_i^{\mathbf{0}ii} + \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} \times J_{C_i}^{c_i} \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} \quad (6.50)$$



Figur C-6.6

Innover-iterasjonen:

$$j = i + 1 \quad (6.51)$$

$$\underline{f}_i^i = R_j^i \underline{f}_j^j + \underline{F}_i^i \quad \text{IV: } \underline{f}_{N+1}^{N+1} = \text{ytte kontaktkraft} \quad (\text{D- 183})$$

$$\underline{n}_i^i = \underline{N}_i^i + R_j^i \underline{n}_j^j + \underline{p}_{c_i}^i \times \underline{F}_i^i + \underline{p}_j^i \times R_j^i \underline{f}_j^j \quad \text{IV: } \underline{n}_{N+1}^{N+1} = \text{ytte kontaktmoment} \quad (6.52)$$

$$\tau_i = (\underline{n}_i^i)^T \underline{\hat{z}}_i^i \quad (6.53)$$

### Innkludering av gravitasjonskrafta

Tyngdekraftene på linkene er innkluderes enkelt ved å sette:

$$\underline{a}_0^0 = \underline{g}^0$$

Dersom vi også skal beregne hastigheter og posisjoner må vi kompensere for denne aksellerasjonen. Et alternativ er å addere  $m_i \underline{g}^i$  til kraftbalanselikningene.

### D.6.6 Iterativ kontra sluttaform

På samme måte som de iterative formlene i avsnitt C.5 kunne brukes til å beregne Jacobimatrissa numerisk eller analytisk, kan likningene (6.45) til (6.53) brukes:

1. Numerisk løsning er enkelt når treghetsmatrisene,  $J^{c_i}$ , massene,  $m_i$ , retningskosinmatrisene  $R_i^{i+1}$ , vektorene  $\underline{p}_{c_i}^i$  og  $\underline{p}_{i+1}^i$  er gitt for manipulatoren.
2. Analytisk løsning gir likevel større innsikt i f.eks virkningen av tyngdekraftsledda kontra treghetssleda. Vi kan utlede en slutta form vha Newton-Eulerlikningene på samme måte som vi beregna Jacobimatrissa tidligere.

### D.6.7 Eksempel på en dynamisk likning på sluttaform

Gitt roboten i figur 6.6, hvor massene antas å være punktmasser i enden av linkene. Vi antar at det ikke er noen ytre krefter på h anda, men vi tar med tyngdekraftene.

Løsningen av de iterative likningene gjøres over tre sider i boka, og gir:

$$\tau_1 = m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 - 2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_2 l_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2) + (m_1 + m_2) l_1 g \cos \theta_1 \quad (6.58a)$$

$$\tau_2 = m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + m_2 l_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \quad (6.58b)$$

Legg merke til hvor komplisert uttrykket for leddmomenta blir selv for den enkle manipulatoren her.

### D.6.8 Strukturen på manipulatorens dynamiske likninger

Ved symbolsk evaluering av Newton-Eulerlikningene skriver en ofte likningene enten som en *tilstandsromlikning* (se (6.59)) eller en *konfigurasjonslikning* (se (6.63)):

$$\underline{\tau} = M(\underline{\theta})\ddot{\underline{\theta}} + \underline{V}(\underline{\theta}, \dot{\underline{\theta}}) + \underline{G}(\underline{\theta}) \quad (\text{D- 184})$$

$$\underline{\tau} = M(\underline{\theta})\ddot{\underline{\theta}} + B(\underline{\theta}) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + C(\underline{\theta}) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \underline{G}(\underline{\theta}) \quad (\text{D- 185})$$

hvor

$M(\underline{\theta})$  : Massematrisa

$\underline{V}(\underline{\theta}, \dot{\underline{\theta}})$  : Hastighet og posisjonsavhengig vektor (Corioli og sentrifugalledd)

$\underline{G}(\underline{\theta})$  : Tyngdekraftavhengig vektor

$B(\underline{\theta})$  : Matrise med Corioli koeffisienter, bare posisjonsavhengig

$C(\underline{\theta})$  : Matrise med sentrifugal koeffisienter, bare posisjonsavhengig

$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3, \dots, \dot{\theta}_{n-1} \dot{\theta}_n \end{bmatrix}^T$  : vektor av vinkelhastighetsprodukter

$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2, \dot{\theta}_2^2, \dots, \dot{\theta}_n^2 \end{bmatrix}^T$  : Vektor av kvadrerte vinkelhastigheter

Likning (6.63) kalles en konfigurasjonslikning fordi matrisene som inngår bare er avhengige av konfigurasjonen (dvs  $\underline{\theta}$ ). Denne likninga brukes vanligvis ved regulering forde en kan oppdatere med en frekvens som bare er avhengig av hvor fort manipulatoren endrer konfigurasjon (beveger seg).

For manipulatoren i avsnitt 6.7 får vi:

$$M(\underline{\theta}) = \begin{bmatrix} m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 + (m_1 + m_2) l_1^2 & m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \\ m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D- 186})$$

Generelt har vi:

$$M(\underline{\theta}) = (M(\underline{\theta}))^T > 0$$

$$\underline{V}(\underline{\theta}, \dot{\underline{\theta}}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 - 2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{D- 187})$$

$$\underline{G}(\underline{\theta}) = \begin{bmatrix} m_2 l_2 (\theta_1 + \theta_2) + (m_1 + m_2) l_1 \cos \theta_1 \\ m_2 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} g \quad (\text{D- 188})$$

$$B(\underline{\theta}) = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \quad (\text{D- 189})$$

$$C(\underline{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \\ m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D- 190})$$

### D.6.9 Lagrange formulering for manipulatorens dynamikk

Newton-Euler formuleringa bygde på likningene

$$\underline{F}^b = m \dot{\underline{v}}_C^{\text{ub}} \quad (\text{6.29})$$

$$\underline{N}_C^b = J_C^b \dot{\underline{\omega}}_b^{\text{ub}} + \underline{\omega}_b^{\text{ub}} \times (J_C^b \underline{\omega}_b^{\text{ub}}) \quad (\text{6.30})$$

og en analyse av hvordan krefter og momenter blir overført mellom linker.

Mens Newton-Euler formuleringa setter opp kraftbalanser, bygger Langrange formuleringa på uttrykk for potensiell og kinetisk energi.

## D.6 Manipulator dynamikk

Den kinetiske energien for link  $i$  er gitt ved

$$k_i(\underline{\theta}, \underline{\dot{\theta}}) = \frac{1}{2} m_i (\underline{v}_{C_i}^{\mathbf{0}i})^T \underline{v}_{C_i}^{\mathbf{0}i} + \frac{1}{2} (\underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i})^T J_{C_i}^{c_i} \underline{\omega}_i^{\mathbf{0}i} \quad (\text{D- 191})$$

Den totale kinetiske energien blir

$$k(\underline{\theta}, \underline{\dot{\theta}}) = \sum_1^N k_i \quad (\text{D- 192})$$

Det kan vises at den totale kinetiske energien kan uttrykkes vha manipulatorens massematrise  $M(\underline{\theta})$  :

$$k(\underline{\theta}, \underline{\dot{\theta}}) = \frac{1}{2} \underline{\dot{\theta}}^T M(\underline{\theta}) \underline{\dot{\theta}} \quad (\text{D- 193})$$

Den potensielle energien for link  $i$  :

$$u_i = -m_i (\underline{g}^0)^T \underline{p}_{0c_i}^0 + u_{iref} \quad (\text{D- 194})$$

hvor  $\underline{g}^0$  er tyngdeakselerasjonen,  $\underline{p}_{0c_i}^0$  er posisjonen til massesenteret i link  $i$  og  $u_{iref}$  er en konstant valgt slik at minimumsverdien av den potensielle energien blir 0. Den totale potensielle energien blir

$$u(\underline{\theta}) = \sum_1^N u_i \quad (\text{D- 195})$$

Ved bruk av Lagrange formuleringa definerevi først Lagrangefunksjonen:

$$L(\underline{\theta}, \underline{\dot{\theta}}) = k(\underline{\theta}, \underline{\dot{\theta}}) - u(\underline{\theta}) \quad (\text{D- 196})$$

Bevegelseslikninga finnes ved å beregne

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{\theta}}} - \frac{\partial L}{\partial \underline{\theta}} = \underline{\tau} \quad (\text{D- 197})$$

hvor  $\underline{\tau}$  er leddmomenta.

Likning (6.76) gir naturligvis de samme bevegelseslikningene som Newton-Euler formuleringa, men ofte skrevet på en annen måte fordi sinus-kosinus uttrykk inngår.

### D.6.10 Formulering av manipulatorens dynamikk i det kartesiske rom

Vi har tidligere funnet den dynamiske likninga for manipulatoren uttrykt vha leddvariablene  $\underline{\theta}$  :

$$\underline{\tau} = M(\underline{\theta}) \underline{\ddot{\theta}} + \underline{V}(\underline{\theta}, \underline{\dot{\theta}}) + \underline{G}(\underline{\theta}) \quad (\text{D- 198})$$

Ved å bruke sammenhengen vi utledet i avsnitt B.5 mellom krefter på hånda ( $\underline{F}$ ) og leddmomenta ( $\underline{\tau}$ )

$$\underline{\tau} = J^T(\underline{\theta}) \underline{F} \quad (\text{D- 199})$$

og de kartesiske hastigheter for hånda ( $\underline{\dot{x}}$ ) og leddhastigheter ( $\underline{\dot{\theta}}$ )

$$\underline{\dot{x}} = J(\underline{\theta}) \underline{\dot{\theta}}$$

kan vi utlede likninga

$$\underline{F} = M_x(\underline{\theta}) \underline{\ddot{x}} + \underline{V}_x(\underline{\theta}, \underline{\dot{\theta}}) + \underline{G}_x(\underline{\theta}) \quad (\text{D- 200})$$

hvor

$M_x(\underline{\theta})$  : kartesisk massematrise

$\underline{V}_x(\underline{\theta}, \underline{\dot{\theta}})$  : kartesisk vektor bestående av hastighetsledd

$\underline{G}_x(\underline{\theta})$  : kartesisk vektor bestående av gravitasjonsavhengige ledd

Uledninga viser at

$$\begin{aligned} M_x(\underline{\theta}) &= J^{-T}(\underline{\theta})M(\underline{\theta})J^{-1}(\underline{\theta}) \\ \underline{V}_x(\underline{\theta}, \dot{\underline{\theta}}) &= J^{-T}(\underline{\theta}) \left( \underline{V}(\underline{\theta}, \dot{\underline{\theta}}) - M(\underline{\theta})J^{-1}(\underline{\theta})\dot{J}(\underline{\theta})\dot{\underline{\theta}} \right) \\ \underline{G}_x(\underline{\theta}) &= J^{-T}(\underline{\theta})\underline{G}(\underline{\theta}) \end{aligned} \quad (6.99)$$

$\underline{F}$ ,  $\underline{x}$  og  $J$  må representeres i samme ramme.

Ved å kombinere (6.91) og 6.92) kan vi finne sammenhengen mellom leddmoment og kartesisk posisjon:

$$\underline{\tau} = J^T(\underline{\theta})M_x(\underline{\theta})\ddot{\underline{x}} + B_x(\underline{\theta}) \left[ \dot{\underline{\theta}}\dot{\underline{\theta}} \right] + C_x(\underline{\theta}) \left[ \dot{\underline{\theta}}^2 \right] + \underline{G}(\underline{\theta}) \quad (\text{D- 201})$$

### D.6.11 Friksjon

Vi har til nå ikke tatt hensyn til friksjon i ledda. Friksjonen gir, for mange manipulatorer, ekstra moment som tilsvarer opptil 25% av det moment som skal til for å bevege manipulatorene. Vi tar her med noen av friksjonsmodellene som blir brukt:

$$\tau_v = \nu\dot{\theta}; \quad \text{viskøs dempning} \quad (6.10)$$

$$\tau_c = c \operatorname{sgn}(\dot{\theta}); \quad \text{columb friksjon} \quad (6.11)$$

$$\tau_p = \tau(\theta); \quad \text{posisjonsavhengig friksjon}$$

Totalt for et ledd får vi et friksjonsmoment av formen:

$$\tau_{\text{friksjon}} = f(\theta, \dot{\theta}) \quad (\text{D- 202})$$

Innsatt i den dynamiske likninga :

$$\underline{\tau} = M(\underline{\theta})\ddot{\underline{\theta}} + B(\underline{\theta}) \left[ \dot{\underline{\theta}}\dot{\underline{\theta}} \right] + C(\underline{\theta}) \left[ \dot{\underline{\theta}}^2 \right] + \underline{G}(\underline{\theta}) + \underline{F}(\underline{\theta}, \dot{\underline{\theta}}) \quad (\text{D- 203})$$

I tillegg til friksjon har vi andre umodellerte effekter slik som elastisitet. Denne fører til vibrasjon og kan være vanskelig å modellere.

### D.6.12 Dynamiske simuleringer

Ved simulering ønsker vi å beregne bevegelsen av manipulatorene gitt leddmomenta,  $\underline{\tau}$ . Gitt manipulatorlikninga på lukka form, kan vi integrere følgende likning numerisk:

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{\theta}} &= M^{-1}(\underline{\theta}) \left( \underline{\tau} - B(\underline{\theta}) \left[ \dot{\underline{\theta}}\dot{\underline{\theta}} \right] - C(\underline{\theta}) \left[ \dot{\underline{\theta}}^2 \right] - \underline{G}(\underline{\theta}) - \underline{F}(\underline{\theta}, \dot{\underline{\theta}}) \right) \\ \underline{\theta}(0) \text{ og } \dot{\underline{\theta}}(0) &\text{ gitt} \end{aligned} \quad (6.115)$$

#### Tips: D.1

Jeg bør her forklare uttrykkene  $\left[ \dot{\underline{\theta}}\dot{\underline{\theta}} \right]$  og  $\left[ \dot{\underline{\theta}}^2 \right]$ . Jeg bør vel også skrive det på en form som viser Coriolis og sentripetalaksellerasjonen. Se artikkelen til Linge, Steinsland og meg. Nevn også programpakka til Horn og Linge

### D.6.13 Beregningskrav

I dette avsnittet diskuteres de krav løsningen av de dynamiske likninger i leddrommet setter til beregningskapasiteten.

Dersom vi teller opp antall multiplikasjoner og addisjoner vi har ved løsning av de iterative Newton-Eulerlikningene (6.45 til 6.53) får vi:

## D.6 Manipulator dynamikk

$126N - 99$  multiplikasjoner

$106N - 92$  addisjoner

Dette er en dramatisk reduksjon fra hva en får ved en rett fram utledning vha Lagrange:

$32N^4 + 86N^3 + 171N^2 + 53N - 128$  multiplikasjoner

$25N^4 + 66N^3 + 129N^2 + 42N - 96$  addisjoner

Dvs en faktor 100 i forskjell dersom  $N = 6$

Dette viser at effektiviteten er svært avhengig av formen på likningene (også Lagrange kan gi effektive rekneskjema).

Vanligvis vil en slutta form på likningene gi mindre reknearbeide enn en iterativ form. F.eks for 2-leddsmekanismen i avsnitt C.6.7 krever de iterative dynamiske formlene

153 multiplikasjoner og 120 addisjoner

mens den slutta formen krever

30 multiplikasjoner og 13 addisjoner

Dette eksempelet viser at manipulatorer som lages enkle fra kinematisk og dynamisk synsvinkel også gir enkle dynamiske likninger.

En manipulator er *kinematisk enkel* dersom mange linkvridninger er  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  eller  $-90^\circ$ , og med mange linkforskyvninger og armlengder som er 0.

En manipulator er *dynamisk enkel* dersom treghetsmatrisa er diagonal i  $\{c_i\}$ .