

# Epreuve de Mathématiques

Camp Licence

November 14, 2024

Durée : 3 Heures

## Exercice 1 : Un problème d'investissement

Considérons le problème d'investissement suivant :

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3% par an. Chaque année suivante, il dépose 300 € de plus. On note  $(u_n)$  la somme épargnée à l'année  $n$ . La suite  $(u_n)$  est définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 1.03u_n + 300$$

avec  $u_0 = 5000$ .

1. Calculez la somme totale épargnée à la 30ème année.
2. Prouvez que la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier  $n$  par

$$v_n = u_n + 10000$$

est géométrique. Trouvez sa raison et son premier terme.

3. Exprimez  $v_n$  en fonction de  $n$ . En déduisez  $u_n$  en fonction de  $n$ , puis retrouvez le résultat de la question 1 par calcul.
4. Étude des variations de  $(u_n)$
5. Calcul de la limite de  $(u_n)$

## Exercice 2 : Jouets de Noël

Une entreprise désire fabriquer de nouveaux jouets pour Noël : une poupée  $B$  et une poupée  $K$ . Elle désire commander les matières premières nécessaires pour la fabrication de ces jouets. On dispose des informations suivantes :

- La fabrication d'une poupée  $B$  nécessite 0,094 kg de coton biologique, 0,2 kg de plastique végétal et 0,4 kg de pièces métalliques.
- La fabrication d'une poupée  $K$  nécessite 0,08 kg de coton biologique, 0,3 kg de plastique végétal et 0,1 kg de pièces métalliques.

Par ailleurs, l'entreprise a réalisé les prévisions de ventes suivantes :

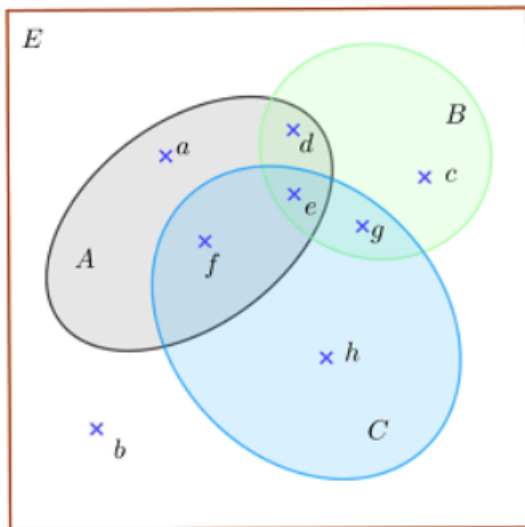
- elle pense vendre 323 poupées  $B$  et 391 poupées  $K$  en novembre;
- elle pense vendre 2500 poupées  $B$  et 1200 poupées  $K$  en décembre.

1. Disposer les informations obtenues sous la forme de deux tableaux.
2. En effectuant un produit matriciel, déterminer la quantité de coton biologique à commander pour le mois de décembre et la quantité de plastique végétal pour le mois de novembre.
3. À quels **prix unitaires** (en milliers de dollars) l'entreprise doit-elle vendre respectivement la poupée  $B$  et la poupée  $K$ , sachant qu'elle prévoit une recette totale de 612 milliers de dollars pour le mois de novembre et qu'elle prévoit de vendre 323 unités de poupée  $B$  et 391 unités de poupée  $K$ ?

*Indice : Résoudre l'équation  $323x + 391y = 612$  pour déterminer les prix unitaires possibles.*

### Exercice 3 : Diagramme de Venn

On considère le diagramme de Venn suivant, avec  $A, B, C$  trois parties d'un ensemble  $E$ , et  $a, b, c, d, e, f, g, h$  des éléments de  $E$ .



Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1.  $g \in A \cap \overline{B}$

2.  $g \in \overline{A} \cap \overline{B}$
3.  $g \in \overline{A} \cup \overline{B}$
4.  $f \in C \setminus A$
5.  $e \in \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
6.  $\{h, b\} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
7.  $\{a, f\} \subset A \cup C$

## Exercice 4: Probabilités

Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires, indiscernables au toucher. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure dans le tirage ?
2. Sachant qu'au moins une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

## Exercice Bonus

Soit la fonction  $f : x \mapsto -x^2$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

Déterminer les valeurs maximales et minimales de  $f(x)$ , si elles existent, en justifiant votre réponse par l'étude des dérivées successives de  $f(x)$ .

*Cet exercice est facultatif. Vous pouvez gagner jusqu'à 5 points supplémentaires en répondant correctement.*

**Du Courage !**