

Que es un espacio vectorial

Un espacio vectorial es un conjunto no vacío V de objetos, llamados vectores, en el que se han definido dos operaciones: la suma y el producto por un escalar (número real) sujetas a los diez axiomas que se dan a continuación. Los axiomas deben ser válidos para todos los vectores u , v y w en V y todos los escalares α y β **reales**. Llamamos $u + v$ a la suma de vectores en V , y $\alpha * v$ al producto de un número real α por un vector $v \in V$.

Axiomas espacios vectoriales

1. $u + v \in V$
2. $u + v = v + u$
3. $(u+v)+w=u+(v+w)$
4. Existe un vector nulo $0_v \in V$ tal que $v+0_v=v$
5. Para cada v en V , existe un opuesto $(-v) \in V$ tal que $v+(-v)=0_v$
6. $\alpha v \in V$
7. $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$
8. $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$
9. $\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v$
10. $1v=v$

Ejercicios

Consideren los siguientes vectores:

```
In [3]: u = vector([12,31])
        v = vector([13,31])
        w = vector([6,71])
```

Calculen la sumas siguientes:

1. $u+w$
2. $v+w$
3. $(u+v)+w$
4. $(w+v)+u$
5. $(u+w)+(v+w)$

Ejercicio 1:

$u+w$

$$u_x = 12$$

$$u_y = 31$$

$$w_x = 6$$

$$w_y = 71$$

$$(u+w)_x = w_x + u_x = u_x + w_x = 18$$

y

$$(u+w)_y = w_y + u_y = u_y + w_y = 102$$

$$\Rightarrow u+w = (18,102)$$

Ejercicio 2:

$$v+w$$

$$v+w$$

$$v_x = 13$$

$$v_y = 31$$

$$w_x = 6$$

$$w_y = 71$$

$$(v+w)_x = w_x + v_x = v_x + w_x = 19$$

y

$$(v+w)_y = w_y + v_y = v_y + w_y = 102$$

$$\Rightarrow v+w = (19,102)$$

Ejercicio 3:

$$(u+v)+w$$

- por el tercer axioma **de propiedad conmutativa** sabemos que $(u+v)+w = (u + w) + v$

y sabemos que

$$u+w = (18,102)$$

por lo tanto

$$(u+v)+w = (18,102)+(6,71)$$

$$v+w (u+w)_x = 18$$

$$(u+w)_y = 102$$

$$v_x = 12$$

$$v_y = 31$$

$$((u+w)+v)_x = v_x + (u+w)_x = (u+w)_x + v_x = 31$$

y

$$((u+w)+v)_y = v_y + (u+w)_y = (u+w)_y + v_y = 133$$

$$\Rightarrow (u+v)+w = (31,133)$$

Ejercicio 4:

$$(w+v)+u$$

- por el tercer axioma **de propiedad conmutativa** sabemos que $(u+v)+w = (u + w) + v$

por lo tanto y por el ejercicio anterior

$$(w+v)+u = (31,133)$$

Ejercicio 5:

$$(u+w)+(v+w)$$

- por el tercer axioma **de propiedad conmutativa** sabemos que $(u+w)+(v+w) = ((u + w) + w) + v$

$$\Rightarrow (u+w)+(v+w) = ((u (w + w)) + v$$

\Rightarrow

$$(u+w)+(v+w) = ((u + v) +(2w))$$

\Rightarrow

$$(u+w)+(v+w) = (((2*(6,71)) + ((12,31)+(13,31))))$$

\Rightarrow

$$(u+w)+(v+w) = (12,142)+(25,62)$$

\Rightarrow

$$(u+w)+(v+w) = (37,204)$$

Usando Sage comprueben los ejercicios

In [4]: $u+w$

Out[4]: (18, 102)

In [5]: $v+w$

Out[5]: (19, 102)

In [6]: $(u+v)+w$

Out[6]: (31, 133)

In [7]: $(w+v)+u$

Out[7]: (31, 133)

In [8]: $(u+w)+(v+w)$

Out[8]: (37, 204)