## Apprentissage Automatique k-NN. Arbres de décision & méthodes ensemblistes

#### S. Herbin

stephane.herbin@onera.fr

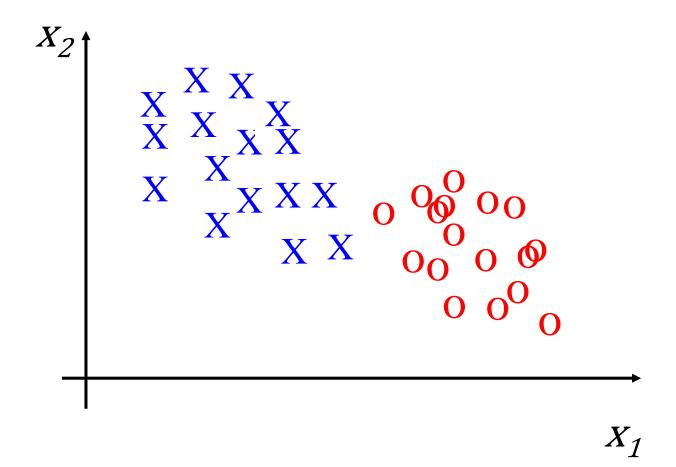
#### Rappel du dernier cours

- Principes généraux d'apprentissage : données apprentissage/validation/test, optimisation, évaluation
- Deux familles d'algorithmes élémentaires de classification supervisée : classifieur Bayésien et discrimination linéaire.

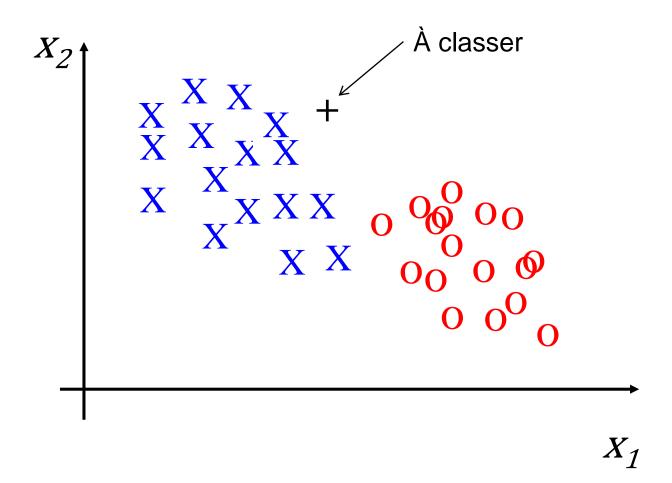
#### Objectifs de ce cours

- Deux nouveaux algorithmes : plus proches voisins et arbre de décision
- ► Un principe de conception : les approches ensemblistes Intuition : « un groupe prend plus souvent de meilleures décisions qu'un individu »

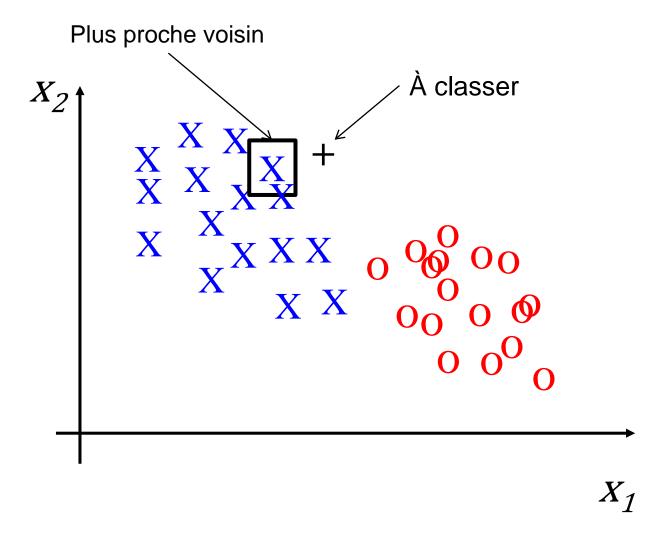
#### Plus proches voisins



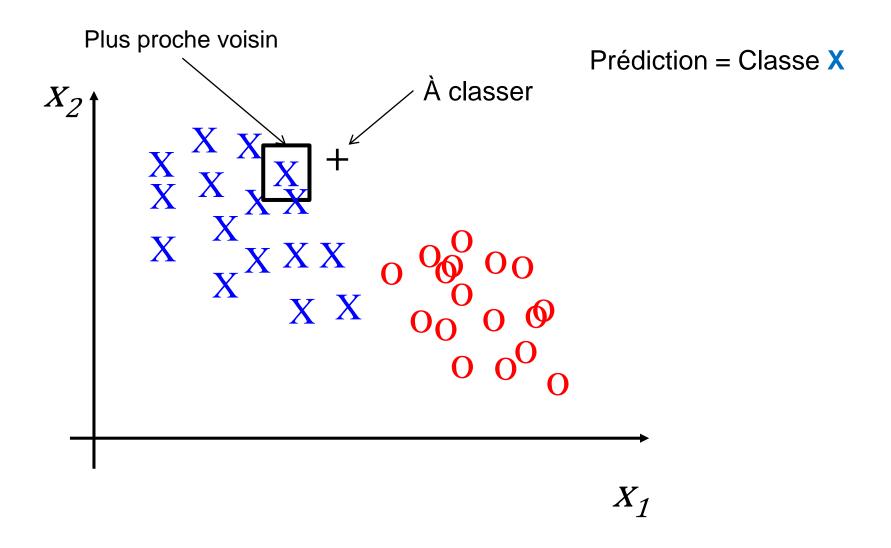




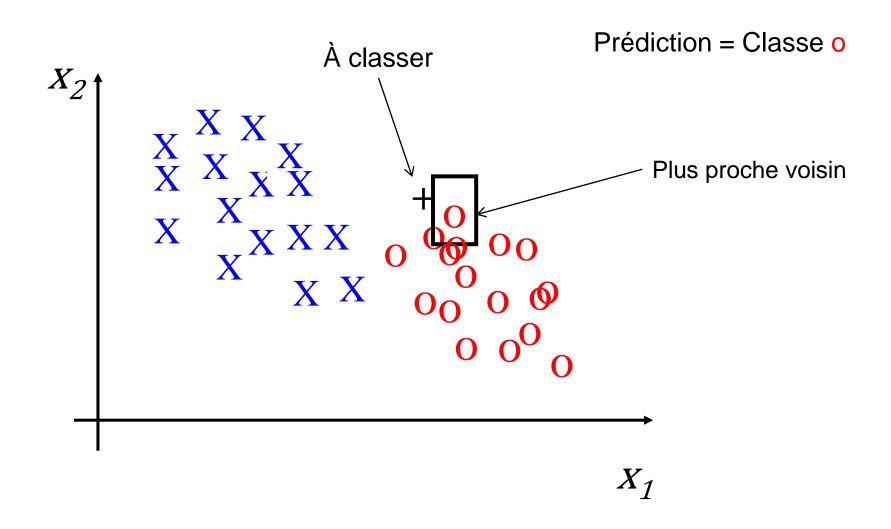












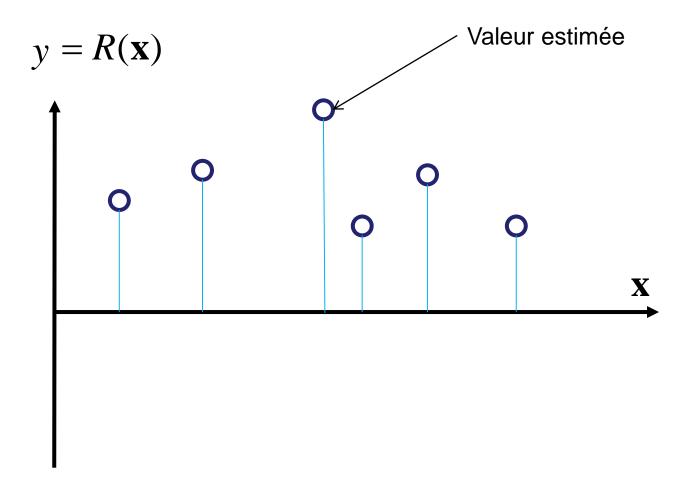


## Plus proche(s) voisin(s)

#### Principe:

- Deux échantillons proches dans l'espace de représentation ont les mêmes prédictions
- Pour prédire, il suffit de trouver l'exemple annoté le plus proche, et d'associer son annotation (étiquette, valeur...)
- Que veut dire « proche »?
  - Nécessite la définition d'une métrique ou mesure de similarité d(x, x')
  - Plusieurs métriques possibles: distance euclidienne (L2), city-block (L1), Minkowski, Mahalanobis...
  - On peut aussi « apprendre » la métrique ou mesure de similarité
- Que veut dire « le plus proche »?
  - Base d'échantillons annotés  $\mathcal{L} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ... (x_N, y_N)\}$
  - Recherche de l'échantillon le plus proche:  $i^* = \arg\min_i d(x, x_i)$
  - Attribue comme prédiction l'annotation du plus proche:  $y^* = y_{i^*}$

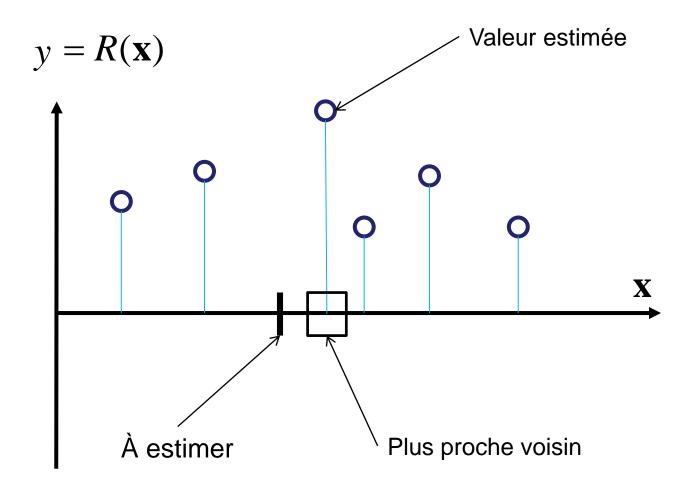




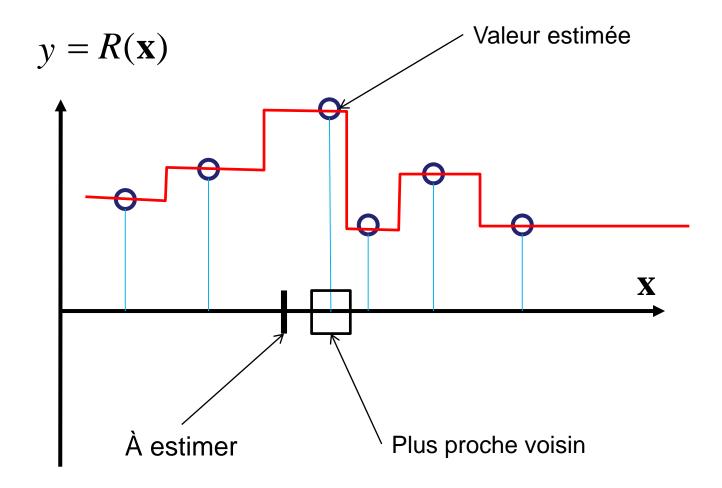


$$y = R(\mathbf{x})$$



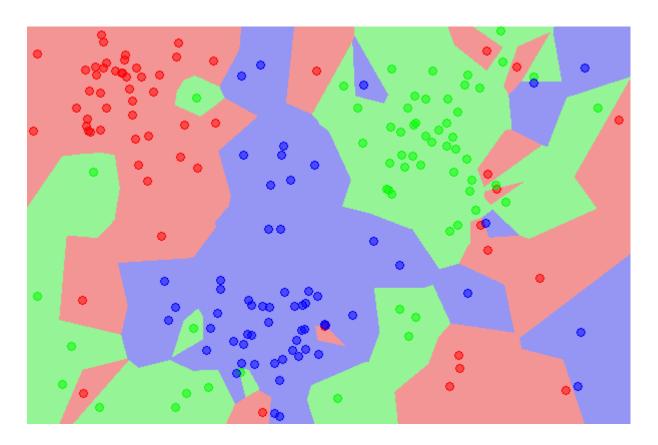








### Fonction de classification

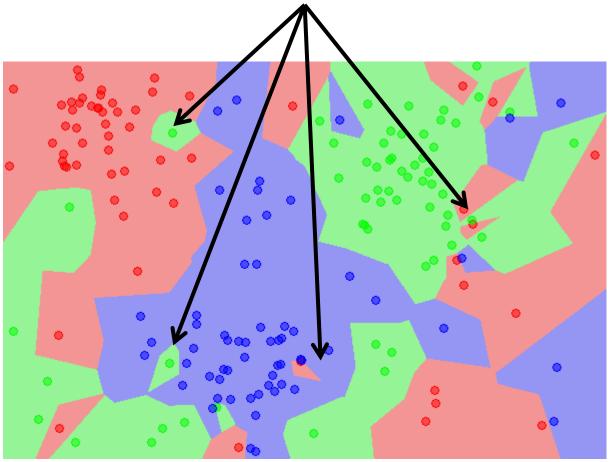


Chaque échantillon définit une région homogène de l'espace de représentation



### Fonction de classification

Données bruitées → Régions isolées → mauvaise régularité des prédictions



Chaque échantillon définit une région homogène de l'espace de représentation



### k-plus proches voisins (« k-NN »)

- Principe: décision à partir de plusieurs exemples de la base de données d'apprentissage
- On ordonne les échantillons d'apprentissage en fonction de leur distance à la donnée à classer:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{(1)}) \le d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{(2)}) \le \dots \le d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{(N)})$$

- On choisit les k plus proches
- On prédit en choisissant la classe recueillant le plus de votes

$$y^* = \arg\max_{y} \sum_{i=1}^{k} \delta(y, y_{(i)})$$

Où  $\delta$  est la fonction de Kronecker (elle vaut 1 si égal, 0 sinon)

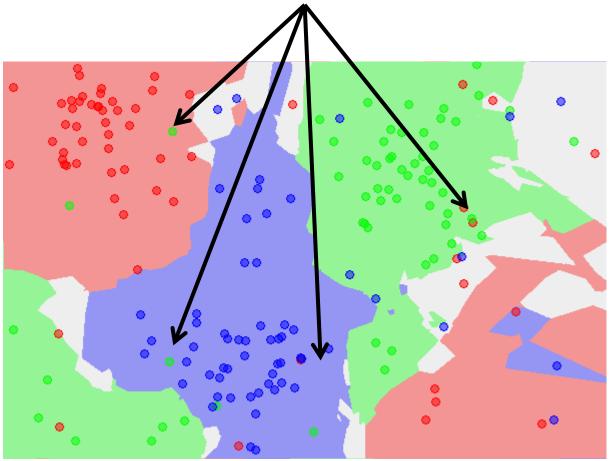
- Si pas de max (ambiguïté sur la prédiction) on ne décide pas!
- On peut aussi pondérer les votes:

$$y^* = \arg\max_{y} \sum_{i=1}^{\kappa} K(x, x_{(i)}) \delta(y, y_{(i)})$$



# Fonction de classification 5 ppv

Données bruitées → Régions isolées → mauvaise régularité des prédictions



Chaque échantillon définit une région homogène de l'espace de représentation



### Propriétés statistiques

Bornes statistiques asymptotiques  $(N \to \infty)$ 

$$E \le E_{kNN} \le E \left( 2 - \frac{LE}{L - 1} \right)$$

Où E est l'erreur théorique optimale (Bayes), L est le nombre de classes et  $E_{kNN}$  est l'erreur des k-ppv.

« L'erreur du k-NN est au plus deux fois moins bonne que l'erreur minimale théorique. »



### Coût de la prédiction du k-ppv

 Calcul de la prédiction dépend pour chaque exemple x d'un calcul + tri par rapport aux N exemples de la base:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{(1)}) \le d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{(2)}) \le \cdots \le d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{(N)})$$

- Pour N et d grands, coût important de la recherche exhaustive O(Nd). Il existe:
  - Des algorithmes efficaces de recherche pour problèmes de tailles moyennes (KDtree)
    - J. Friedman, J. L. Bentley, and R. A. Finkel, "An algorithm for finding best matches in logarithmic expected time," *ACM Transaction on Mathematical Software*, vol. 3, no. 3, pp. 209–226, 1977.
  - Des algorithmes d'approximation pour les grandes bases (>10<sup>6</sup>).
    - Jegou, H., Douze, M., & Schmid, C. (2011). Product quantization for nearest neighbor search. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 33(1), 117-128.
- Autre manière: pré-calculer les surfaces de séparation entre classes. La complexité de prédiction est alors liée à la complexité de la surface et/ou de son approximation. On verra comment d'autres approches permettent de l'estimer directement.



### La malédiction des grandes dimensions

- Lorsque la dimension *d* de l'espace de représentation augmente, les points sont tous aussi proches ou aussi loin.
- On peut montrer, pour une distribution quelconque de N points tirés de manière indépendante dans  $[0,1]^d$ , que:

$$\lim_{d \to \infty} E\left[\frac{dmax - dmin}{dmin}\right] = 0$$

- Ce n'est plus vrai si les distributions ont une structure...heureusement!
- On peut interpréter les techniques de Machine Learning comme des moyens de repérer les bonnes corrélations entre données.
- Conséquence pour les approches « plus proches voisins »:
  - Ca ne marche que pour les faibles dimensions
  - Ou il faut réduire les dimensions de représentation avant de calculer les distances → apprentissage non supervisé



### Comportement des PPV

- Avantages
  - Schéma flexible, facile à mettre en œuvre, dépendant de la définition d'une similarité entre données.
  - Bonnes propriétés statistiques (N → ∞)
- Mais...
  - Temps de calcul prohibitif pour grandes bases
    - Algorithmes efficaces de recherche optimaux ou sous-optimaux
  - · Régularité dépend des données, pas de l'apprentissage
    - Le k-PPV (« kNN ») pour lisser et réduire le bruit
  - Malédiction des grandes dimensions (« Curse of dimensionality »)
    - Réduire la dimension de représentation



### « Plus proches voisins »: résumé

- Hypothèse de régularité = Si observations proches, même comportement
- Deux questions:
  - Que veut dire « proche »?
  - Comment trouver les plus proches?
- Apprentissage
  - Aucun
- Prédiction
  - Tri des distances aux échantillons + vote
- Quand l'utiliser? (limitations)
  - Efficace sur petits problèmes (dimensions & nombre d'exemples)
  - Pb du « curse of dimensionality » + temps de calcul
  - Disposer d'une mesure de similarité adaptée aux données



#### Arbres de décision

#### Explicabilité I

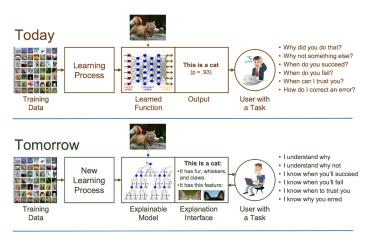


Figure 1 - Programm XAI de la Darpa https://www.darpa.mil/program/explainable-artificial-intelligence

#### Explicabilité II

- Beaucoup de fonctions de prédiction sont opaques (réseaux de neurones) : il est souvent difficile de comprendre la logique de leur calcul.
- Explicabilité: Fournir des éléments de compréhension du fonctionnement des prédicteurs est un des éléments pour construire une Intelligence Artificielle de confiance.

On va décrire un prédicteur plus facilement interprétable : l'arbre de décision.

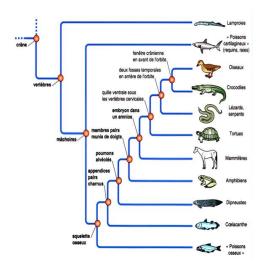
#### Jeux de déduction



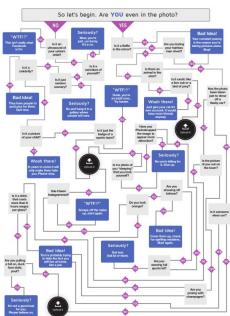
→ Quelle meilleure question poser? (Comment fait https://fr.akinator.com/?)



#### Classification hiérarchique



#### Choisir ma photo de profil



#### Analyse préliminaire

#### Qu'y a-t-il de commun à ces exemples?

- Décompose une prédiction globale en une séquence de décisions (questions+réponses) locales pour
- sélectionner une prédiction pré-estimée.

Les séquences de décisions peuvent être représentées globalement par un arbre de décision.

La question du jour : comment construire les séquences de décision (l'arbre) pour une bonne prédiction?

#### Arbres de décision [3, 9]

#### Principe

- Prédiction en posant une séquence de questions fermées (= nombre fini de réponses possibles)
- Questions organisées sous forme d'arbre : la question suivante dépend de la réponse à la question précédente

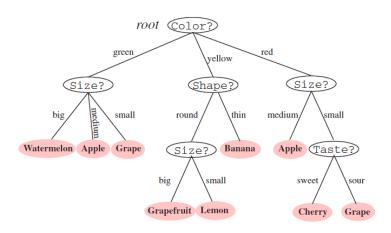
#### Types de questions

- Sur la valeur d'un attribut caractéristique : « x est rouge? »
- Sur la véracité d'une clause logique : rouge(x) ∧ rond(x) = True?
- lacktriangle Sur l'appartenance à un intervalle ou un sous-ensemble :  $1_{x>0.5}$

#### Prédiction

Estimation de la valeur prédite à partir des données pour lesquelles la séquence de questions est vraie

#### Exemple d'arbre



#### Arbres de décision : structure

- ▶ Données codées comme ensemble d'attributs (ex : attributs d'un fruit = couleur, taille forme, goût...)
- Noeud de décision associé à un test ou une question sur un des attributs
- Branches qui représentent les valeurs possibles de l'attribut testé ou des réponses aux questions
- ► Noeud terminal ou feuille définissant la prédiction

#### Arbres de décision et partition

- Les questions découpent (partitionnent) l'espace des données à chaque étape
- Le noeud terminal code un élément de la partition
- ► Toutes les données codées par le noeud terminal ont la même prédiction

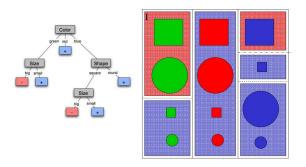


Figure 2 – Partition sur des données symboliques. Les questions portent sur la valeur d'un attribut discret.

#### Arbres de décision et partition

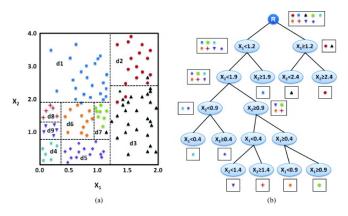
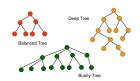


Figure 3 – Prédiction multi-classe. Les questions sont des tests comparant la valeur d'une dimension à un seuil.

#### Arbres de décision

#### Quelles questions se poser pour construire un arbre?



#### Questions globales:

- ▶ Quelle structure choisir? (profond, équilibré,...)?
- Combien de découpages par noeud? (binaire, plus)
- Quand s'arrêter de découper?

#### Questions locales:

- Quel attribut choisir, et quel test lui appliquer?
- Si l'arbre est trop grand, comment l'élaguer?
- Si une feuille n'est pas pure, quelle classe attribuer?

#### Arbres de décision : apprentissage

Soit  $D = \{(x_j, y_j)\}_{j \leq N}$  un ensemble d'apprentissage où chaque donnée est caractérisée par ensemble d'attributs  $x_j = \{a_i^j\}_{1 \leq j \leq M}$ , avec  $a_i^j$  à valeurs numériques ou symboliques.

Principes pour construire l'arbre de décision compatible avec D:

- « Rasoir d'Occam » : trouver l'hypothèse explicative la plus simple possible (principe local)
- « Minimum Description Length » : trouver l'ensemble des hypothèses qui produit le plus petit nombre d'opérations (principe global)

Recherche optimale impossible (problème NP-complet) [10]

Heuristique assurant un arbre cohérent avec les données d'apprentissage.



# Arbres de décision : algorithme élémentaire

#### Principe général

Construction incrémentale d'un arbre.

#### Trois étapes

- 1. Décider si un noeud est terminal
- 2. Si un noeud n'est pas terminal, choisir un attribut, un test et des **branches** possibles
- 3. Si un noeud est terminal, lui associer une **prédiction** (une classe, une valeur, etc.)

#### Remarques

- ▶ il est courant de n'utiliser que des tests *binaires* (vrai/faux).
- le il existe des formulations non récursives plus globales [8].



#### Arbres de décision : Formulation récursive

## Fonction Construire\_arbre(D)

Si les données de *D* ont des valeurs *homogènes* (critère d'arrêt)

 créer une feuille et une prédiction estimée avec la valeur des données

#### Sinon

- ▶ choisir un attribut a<sub>i</sub> et un test T ayant J réponses possibles pour créer un nouveau noeud et une question associée
- ▶ la question partitionne D en J sous-ensembles  $\{D_j\}_{j=1...J}$  associés à chaque branche j
- ightharpoonup répéter Construire\_arbre $(D_j)$  pour chaque branche j



# Arbres de décision : comment choisir la bonne question ?

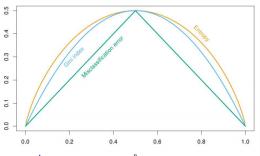
- ➤ A chaque noeud non homogène, on associe une question = attribut + test sur J valeurs.
- ▶ On dispose d'un critère d'hétérogénéité I(D) caractérisant une population de données D.
- À chaque noeud, on choisit de T\* maximisant le gain en homogénéité :

$$T^* = \underset{T}{\operatorname{arg max}} \operatorname{Gain}(D, T)$$

où  $Gain(D,T) = I(D) - \sum_{j} p(D_{j}|D,T)I(D_{j})$  et  $p(D_{j}|D,T) = |D_{j}|/|D|$  est la proportion de données dans D sélectionnées par la branche j

Remarque : En pratique, le nombre de tests à évaluer peut être très grand. La recherche du arg max peut faire intervenir des heuristiques sous-optimales.

# Arbres de décision : critères d'homogénéité



#### Trois critère usuels

- ► Entropie :  $I(D) = -\sum_k p_k(D)log_2(p_k(D))$
- ▶ Indice de Gini :  $I(D) = \sum_k p_k(D)(1 p_k(D))$
- Indice d'erreur :  $I(D) = 1 \max_k(p_k(D))$

où  $p_k(D) = N_k(D)/|D|$  est la probabilité d'avoir une donnée de classe k dans l'ensemble D.

# Quand s'arrêter?

#### Critères structuraux

- Profondeur maximale
- Nombre de feuilles minimal

#### Critères statistiques

- Indice d'homogénéité minimal
- Nombre minimal de données en chaque noeud (avant ou après répartition)

# Que prédire?

On exploite la population de données associée à chaque feuille de l'arbre.

#### Classification

- Classe la plus probable
- Distribution de classes

### Régression

Moyenne, médiane de la population

# Exemple simulé

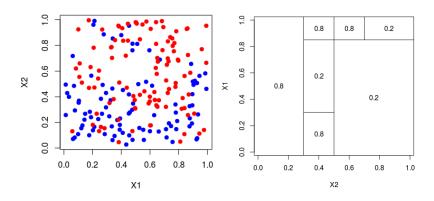


Figure 4 – Distribution simulée et arbre théorique optimal.

# Exemple simulé : Recherche du meilleur test

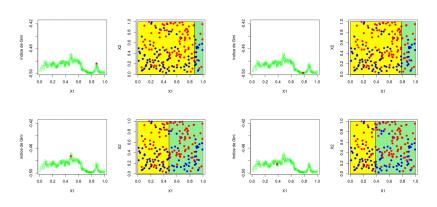


Figure 5 – Recherche sur premier axe avec indice de Gini.

# Exemple simulé : Recherche du meilleur test

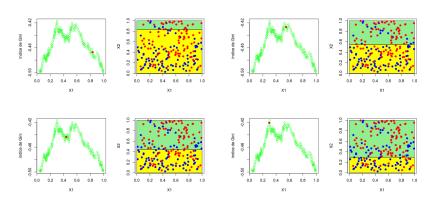


Figure 6 – Recherche sur deuxième axe avec indice de Gini.

# Exemple simulé : résultat (indice de Gini)

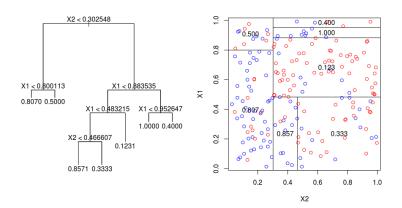
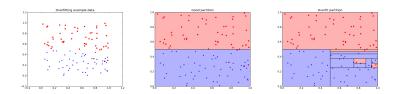


Figure 7 – Arbre et partition finale avec probabilité de classe bleue pour chaque région.

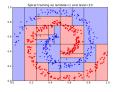
# Arbres de décision : comportement statistique

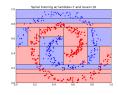


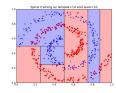
#### Sur-apprentissage

- Un arbre trop précis risque de mal généraliser (cf. k-NN)
- Les arbres peuvent être mal équilibrés
- ➤ On peut utiliser des techniques d'élagage (« pruning ») pour améliorer a posteriori la qualité des arbres

# Arbres de décision : comportement statistique







#### La complexité peut être contrôlée

- en limitant la profondeur
- en minorant le gain en homogénéité
- en ajoutant une pénalisation de complexité dans le coût
- en garantissant une bonne estimation des coûts (par ex. un nombre minimal d'échantillons par noeud)

#### Arbres de décision : Résumé

# Points clés des arbres de décision

- + Interprétabilité
- Apprentissage et classification rapides et efficaces, y compris en grande dimension.
  - Tendance au surapprentissage (mais moyen de contrôle de la complexité)
  - Sensibilité au bruit et aux points aberrants, instabilité

#### Utilisations

- + Classification ou régression...
- + Capable de traiter des données numériques, mais aussi symboliques

### Méthodes ensemblistes

#### Méthodes ensemblistes

#### **Définition**

- Méthodes agrégeant des ensembles de classifieurs;
- Produire une variété de classifieurs : en échantillonnant différemment les données, en modifiant les structures de classifieurs;
- Classe finale = fusion des prédictions.

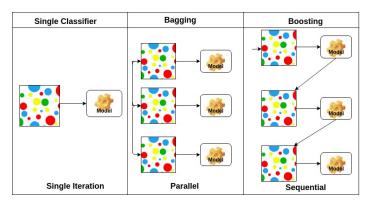
### Principe

- ► L'union fait la force : tirer parti de plusieurs classifieurs peu performants (« faibles ») pour construire un classifieur performant (« fort »)
  - Réduit la variance d'apprentissage et moyenne les erreurs



#### Méthodes ensemblistes

### Deux grandes approches : bagging et boosting



# Bagging [1]

#### Génération de jeux de données multiples

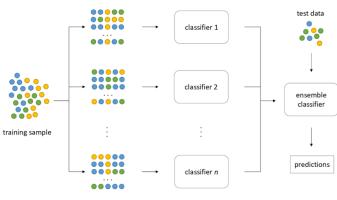
- ▶ Construction de  $\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_K$  par tirage avec remise sur X.
- $\tilde{X}_k$  similaires, mais pas trop (proba d'un exemple de ne pas être sélectionné  $p=(1-1/N)^N$ . Quand  $N\to\infty$ ,  $p\to0.3679$ .)
- ▶ Entraı̂ner K fois le même algorithme  $f_k$  (arbre, réseau de neurones, SVM..) sur chaque  $\tilde{X}_k$  et agréger par vote majoritaire ou moyenne  $f(x) = \frac{1}{K} \sum f_k(x)$

#### Conséquence

- lacktriangle Chaque classifieur commet des erreurs différentes, liées à  $ilde{X}_k$ 
  - → l'agrégat a une plus faible variance d'apprentissage
- ► Méthode pour *régulariser* le processus de prédiction.



# Bagging



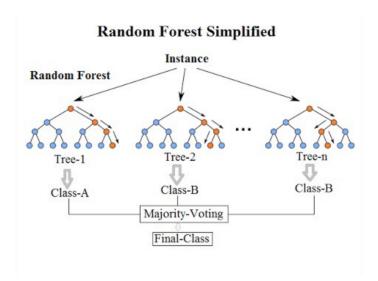
bootstrap samples

# Random Forests [2]

#### Forêts aléatoires ou Random forests

- Combiner hasard et bagging pour construire un ensemble d'arbres de décision encore plus varié (=forêt)
  - ► La partie calculatoire des arbres de décision est la construction incrémentale de leur structure (meilleure paire attribut & test)
  - Structure = paramètre de contrôle des arbres (profondeur max, critère de pureté des noeuds, nombre d'échantillons par noeud...) + aléatoire sur attributs/données/tests

#### Random Forests



#### Random Forests

#### Forêts aléatoires ou Random forests

#### Algorithme:

#### POUR $k = 1 \dots K$ :

- ightharpoonup Bagging : tirage de  $ilde{X}_k$  de même taille que X
- ightharpoonup Tirage (avec remise) de q attributs  $A_i$  parmi les M possibles
- ightharpoonup Construction de l'arbre  $G_k$  avec des seuils aléatoires
- ▶ Construction de  $f_k$  la fonction de décision de  $G_k$  dont les feuilles sont remplies avec  $\tilde{X}_k$

#### Agrégation :

- ▶  $f(x) = \frac{1}{K} \sum f_k(x)$  (régression)
- ▶ f(x) = Vote majoritaire( $f_1(x), ..., f_K(x)$ )

## Intérêt des approches ensemblistes

On introduit une source d'aléatoire supplémentaire : choix des splits, du sous ensemble de variables, etc.

Lorsque les prédicteurs individuels sont sans biais (c'est le cas avec les arbres), la variance du prédicteur ensembliste est :

$$\operatorname{var}\left(\hat{f}_D(\mathsf{x})\right) = \rho\sigma^2 + \frac{1-\rho}{K}\sigma^2$$

 $\sigma$  variance d'un prédicteur individuel et  $\rho$  corrélation entre deux prédicteurs.

On voit que l'on a intérêt à construire des prédicteurs individuels indépendants ( $\rho \approx 0$ ), et en grand nombre (K grand).



#### Random Forests: Résumé

# Points clés des forêts aléatoires

- + Bonnes performances
- + Arbres plus décorrélés que par simple bagging
- + Grandes dimensions
- + Robustesse
  - Temps d'entraînement (mais aisément parallélisable).

#### Utilisation

- Choix d'une faible profondeur (2 à 5), autres hyper-paramètres à estimer par validation croisée
- Classification et régression
- Données numériques et symboliques

# Boosting [5]

#### Principe

- ►  $X = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$  un ensemble de données où  $y_i \in \{-1, 1\}$
- ▶ H un ensemble ou une famille de classifieurs  $f \mapsto -1, 1$ , pas forcément performants → appelés weak learners

#### Objectif du boosting :

- ► Construire un classifieur performant  $F(x) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k f_k(x)$  → appelé *strong learner*
- Moyenne pondérée des weak learners
- Comment trouver les poids?

#### AdaBoost

- ► Adaboost = « Adaptive boosting algorithm », algorithme minimisant l'erreur globale de F de manière itérative
- ▶ Principe : à chaque itération k, modifier F<sup>k</sup> de manière à donner plus de poids aux données difficiles (mal-classées) qui permettent de corriger les erreurs commises par F<sup>k-1</sup>

#### AdaBoost : algorithme

Initialiser les poids liés aux données :

$$d^0 \leftarrow (\frac{1}{K}, \frac{1}{K}, \dots, \frac{1}{K})$$
  
POUR  $t = 1 \dots K$ :

- ► Entraı̂ner  $f_k$  sur les données X pondérées par  $d^{k-1}$   $(f_k = \arg\min_f \sum_i d_i^{k-1} [y_i \neq f(x_i)])$
- ▶ Prédire  $\hat{y} = y^i \leftarrow f_k(x_i), \forall i$
- ► Calculer l'erreur pondérée  $\epsilon^k \leftarrow \sum_i d_i^{k-1} [y_i \neq \hat{y}_i]$
- lacksquare Calculer les paramètres adaptatifs  $lpha^k \leftarrow rac{1}{2} \log \left( rac{1 \epsilon^k}{\epsilon^k} 
  ight)$
- ► Re-pondérer les données  $d^k = d_i^k \leftarrow d_i^{k-1} \exp(-\alpha^k y_i \hat{y}_i)$

Classifieur (pondéré) final : 
$$F(x) = \operatorname{sgn}\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k f_k(x)\right)$$

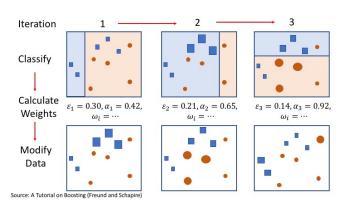
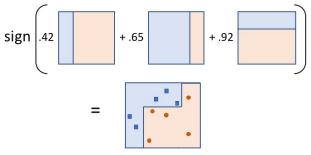


Figure 8 – Apprentissage séquentiel des classifieurs et des pondérations.



Source: A Tutorial on Boosting (Freund and Schapire)

Figure 9 – Classifieur final.

# Gradient Boosting [6, 7]

#### **Gradient Boosting**

Variante : version additive pas-à-pas

- $X = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$  un ensemble de données où  $y_i \in \{-1, 1\}$
- ▶ H un ensemble de classifieurs  $f \mapsto -1, 1$ , pas forcément performants → appelés *weak learners*

#### Objectif du gradient boosting :

- Construire itérativement un classifieur performant  $F_T(x) = \sum_{t=1}^T \alpha_t f_t(x) = F_{T-1}(x) + \alpha_T f_T(x)$  où  $f_t$  est l'un des weak learners h.
- ▶ Il s'agit à chaque étape de minimiser le risque empirique :  $\mathcal{L}(F_T) = \sum_{n=1}^{N} I(y_n, F_T(x_n))$  où I est un coût (loss)



# Gradient Boosting

#### Coûts

- Adaboost  $\rightarrow$  gradient boost avec fonction de coût  $I(y, f(x)) = \exp(-y.f(x))$
- Adaboost peut être vu comme la construction itérative d'un classifieur optimal par minimisation du risque empirique à chaque pas.
- Cadre plus général : d'autres pénalités sont possibles :
  - ► LogitBoost :  $I(y, f(x)) = \log_2 (1 + \exp[-2y.f(x)])$
  - ►  $L_2$  Boost :  $I(y, f(x)) = (y f(x))^2/2$
  - ▶ DoomII :  $I(y, f(x)) = 1 \tanh(y.f(x))$
  - ► Savage :  $I(y, f(x)) = \frac{1}{(1 + \exp(2y.f(x)))^2}$
- DoomII et Savage sont non-convexes → plus robustes aux données bruitées

# Gradient Boosting

#### Pourquoi *Gradient* Boosting?

- ► Chaque étape minimise le risque empirique :  $\mathcal{L}(F_T) = \sum_{n=1}^{N} I(y_n, F_T(x_n))$  où I est un coût (loss)
- Lors de la variante additive d'adaboost, α<sub>T</sub>f<sub>T</sub>(x) peut donc être vu comme le weak learner qui approxime le mieux le pas d'une descente de gradient dans l'espaces des fonctions de classification
- Une version exacte de la descente de gradient donne les Gradient Boosting Models :

$$F_T(x) = F_{T-1}(x) + \alpha_T \sum_{i=1}^{N} \nabla_{F_{T-1}} I(y_i, f_{T-1}(x_i))$$

### Boosting : Résumé

#### Points clés du boosting

- Agrégation adaptative de classifieurs moyens
- + Résultats théoriques sur la convergence et l'optimalité du classifieur final
- + Très efficace (améliore n'importe quel ensemble de classifieurs)
- Assez facile à mettre en oeuvre (moins vrai pour Gradient Boosting)
  - Sensibilité aux données aberrantes,

#### **Utilisations**

- Choix du weak learner : ne doit pas être trop bon, sinon surapprentissage
- Choix de la pénalité en fonction du bruit des données
- Variantes pour la classification et la régression

### Cours n°2 : Arbres de décision et méthodes ensemblistes

#### Notions phares du jour

- Arbres de décision (vote, homogénéité)
- Aggrégation de classifieurs
- Bagging, Random Forests
- Boosting, GradientBoost

#### Concepts généraux

- Classification / régression
- Bagging et randomisation (Forêts aléatoires)
- Construction adaptative à partir de weak learners et optimisation dans l'espace des classifieurs (Boosting)

#### Références L

[1] Leo Breiman.

Bagging predictors.

Machine learning, 24(2):123-140, 1996.

[2] Leo Breiman.

Random forests.

Machine learning, 45(1):5-32, 2001.

[3] Leo Breiman, Jerome H Friedman, Richard A Olshen, and Charles J Stone. Classification and regression trees.

Routledge, 2017.

[4] Tiangi Chen and Carlos Guestrin.

Xgboost : A scalable tree boosting system.

In Proceedings of the 22nd acm sigkdd international conference on knowledge discovery and data mining, pages 785–794, 2016.

[5] Yoav Freund and Robert E Schapire.

A decision-theoretic generalization of on-line learning and an application to boosting.

Journal of computer and system sciences, 55(1):119-139, 1997.

[6] Jerome H Friedman.

Greedy function approximation: a gradient boosting machine.

Annals of statistics, pages 1189-1232, 2001.

[7] Jerome H Friedman.

Stochastic gradient boosting.

Computational statistics & data analysis, 38(4):367-378, 2002.

[8] Donald Geman and Bruno Jedynak.

Model-based classification trees.

IEEE Transactions on Information Theory, 47(3):1075-1082, 2001.

#### Références II

- Trevor Hastie, Robert Tibshirani, and Jerome Friedman. The elements of statistical learning.
   Springer, 2009.
- [10] Hyafil Laurent and Ronald L Rivest. Constructing optimal binary decision trees is np-complete. Information processing letters, 5(1):15-17, 1976.