

# Apprentissage Automatique

## Introduction

**Stéphane Herbin**

[stephane.herbin@onera.fr](mailto:stephane.herbin@onera.fr)

# « Machine Learning »

- Un domaine scientifique hybride:
  - Statistique
  - Intelligence artificielle
  - « Computer science »
  - Traitement du signal
- Utilisant des techniques généralistes:
  - Optimisation numérique
  - Hardware
  - Gestion de base de données

# Pourquoi le « Machine Learning »?

- Thème à la mode: Intelligence Artificielle, « deep learning », « big data »...
- Raison épistémologique
  - On ne sait pas modéliser les problèmes complexes
  - ... mais on dispose d'exemples en grand nombre représentant la variété des situations
  - « Data driven » vs. « Model Based »
- Raison scientifique
  - L'apprentissage est une faculté essentielle du vivant
- Raison économique
  - La récolte de données est plus facile que le développement d'expertise

# Domaines techniques utilisant du ML

- ML comme outil de conception pour certains fonctions
  - Vision & Reconnaissance des formes
  - Traitement du langage
  - Traitement de la parole
  - Robotique
  - « Data Mining »
  - Recherche dans BDD
  - Recommandations
  - Marketing...
- ML comme outil explicatif
  - Neuroscience
  - Psychologie
  - Sciences cognitives

# Définition(s) de l'IA

<b>Thinking Humanly</b> <p>“The exciting new effort to make computers think . . . <i>machines with minds</i>, in the full and literal sense.” (Haugeland, 1985)</p> <p>“[The automation of] activities that we associate with human thinking, activities such as decision-making, problem solving, learning . . .” (Bellman, 1978)</p>	<b>Thinking Rationally</b> <p>“The study of mental faculties through the use of computational models.” (Charniak and McDermott, 1985)</p> <p>“The study of the computations that make it possible to perceive, reason, and act.” (Winston, 1992)</p>
<b>Acting Humanly</b> <p>“The art of creating machines that perform functions that require intelligence when performed by people.” (Kurzweil, 1990)</p> <p>“The study of how to make computers do things at which, at the moment, people are better.” (Rich and Knight, 1991)</p>	<b>Acting Rationally</b> <p>“Computational Intelligence is the study of the design of intelligent agents.” (Poole <i>et al.</i>, 1998)</p> <p>“AI . . . is concerned with intelligent behavior in artifacts.” (Nilsson, 1998)</p>
<b>Figure 1.1</b> Some definitions of artificial intelligence, organized into four categories.	

RUSSELL & NORVIG, Artificial Intelligence: A Modern Approach, 3rd ed., 2010

# Artificial Intelligence: A Modern Approach, 4th Global ed.

by Stuart Russell and Peter Norvig

The authoritative, most-used AI textbook, adopted by over 1500 schools.

Table of Contents for the Global Edition (or see the US Edition)

[Preface \(pdf\)](#); [Contents with subsections \(pdf\)](#)

## I Artificial Intelligence

- 1 Introduction
- 2 Intelligent Agents

## II Problem-solving

- 3 Solving Problems by Searching
- 4 Search in Complex Environments
- 5 Constraint Satisfaction Problems
- 6 Adversarial Search and Games

## III Knowledge, reasoning, and planning

- 7 Logical Agents
- 8 First-Order Logic
- 9 Inference in First-Order Logic
- 10 Knowledge Representation
- 11 Automated Planning

## IV Uncertain knowledge and reasoning

- 12 Quantifying Uncertainty
- 13 Probabilistic Reasoning
- 14 Probabilistic Reasoning over Time
- 15 Making Simple Decisions
- 16 Making Complex Decisions
- 17 Multiagent Decision Making
- 18 Probabilistic Programming

## V Machine Learning

- 19 Learning from Examples
- 20 Knowledge in Learning
- 21 Learning Probabilistic Models
- 22 Deep Learning
- 23 Reinforcement Learning

## VI Communicating, perceiving, and acting

- 24 Natural Language Processing
- 25 Deep Learning for Natural Language Processing
- 26 Robotics
- 27 Computer Vision

## VII Conclusions

- 28 Philosophy, Ethics, and Safety of AI
- 29 The Future of AI
- Appendix A: Mathematical Background
- Appendix B: Notes on Languages and Algorithms
- Bibliography ([pdf](#) and [LaTeX .bib file](#) and [bib data](#))
- Index ([pdf](#))

[Exercises \(website\)](#)

[Figures \(pdf\)](#)

[Code \(website\)](#); [Pseudocode \(pdf\)](#)

Covers: [US](#), [Global](#)

## New to this edition

This edition reflects the changes in AI since the last edition in 2010:

- We focus more on machine learning rather than hand-crafted knowledge engineering, due to the increased availability of data, computing resources, and new algorithms.
- Deep learning, probabilistic programming, and multiagent systems receive expanded coverage, each with their own chapter.
- The coverage of natural language understanding, robotics, and computer vision has been revised to reflect the impact of deep learning.
- The robotics chapter now includes robots that interact with humans and the application of reinforcement learning to robotics.
- Previously we defined the goal of AI as creating systems that try to maximize expected utility, where the specific utility information—the objective—is supplied by the human designers of the system. Now we no longer assume that the objective is fixed and known by the AI system; instead, the system may be uncertain about the true objectives of the humans on whose behalf it operates. It must learn what to maximize and must function appropriately even while uncertain about the objective.
- We increase coverage of the impact of AI on society, including the vital issues of ethics, fairness, trust, and safety.
- We have moved the exercises from the end of each chapter to an online site. This allows us to continuously add to, update, and improve the exercises, to meet the needs of instructors and to reflect advances in the field and in AI-related software tools.
- Overall, about 25% of the material in the book is brand new. The remaining 75% has been largely rewritten to present a more unified picture of the field. 22% of the citations in this edition are to works published after 2010.

# AI Index 2023

## Top Ten Takeaways

### 1 Industry races ahead of academia.

Until 2014, most significant machine learning models were released by academia. Since then, industry has taken over. In 2022, there were 32 significant industry-produced machine learning models compared to just three produced by academia. Building state-of-the-art AI systems increasingly requires large amounts of data, computer power, and money—resources that industry actors inherently possess in greater amounts compared to nonprofits and academia.

### 2 Performance saturation on traditional benchmarks.

AI continued to post state-of-the-art results, but year-over-year improvement on many benchmarks continues to be marginal. Moreover, the speed at which benchmark saturation is being reached is increasing. However, new, more comprehensive benchmarking suites such as BIG-bench and HELM are being released.

### 3 AI is both helping and harming the environment.

New research suggests that AI systems can have serious environmental impacts. According to Lucchini et al., 2022, BLOOM's training run emitted 25 times more carbon than a single air traveler on a one-way trip from New York to San Francisco. Still, new reinforcement learning models like BCOOLER show that AI systems can be used to optimize energy usage.

### 4 The world's best new scientist ... AI?

AI models are starting to rapidly accelerate scientific progress and in 2022 were used to aid hydrogen fusion, improve the efficiency of matrix manipulation, and generate new antibodies.

### 5 The number of incidents concerning the misuse of AI is rapidly rising.

According to the AIAAIC database, which tracks incidents related to the ethical misuse of AI, the number of AI incidents and controversies has increased 26 times since 2012. Some notable incidents in 2022 included a deepfake video of Ukrainian President Volodymyr Zelenskyy surrendering and U.S. prisons using call-monitoring technology on their inmates. This growth is evidence of both greater use of AI technologies and awareness of misuse possibilities.

### 6 The demand for AI-related professional skills is increasing across virtually every American industrial sector.

Across every sector in the United States for which there is data (with the exception of agriculture, forestry, fishing, and hunting), the number of AI-related job postings has increased on average from 1.7% in 2021 to 1.9% in 2022. Employers in the United States are increasingly looking for workers with AI-related skills.

### 7 For the first time in the last decade, year-over-year private investment in AI decreased.

Global AI private investment was \$91.9 billion in 2022, which represented a 26.7% decrease since 2021. The total number of AI-related funding events as well as the number of newly funded AI companies likewise decreased. Still, during the last decade as a whole, AI investment has significantly increased. In 2022 the amount of private investment in AI was 18 times greater than it was in 2013.

### 8 While the proportion of companies adopting AI has plateaued, the companies that have adopted AI continue to pull ahead.

The proportion of companies adopting AI in 2022 has more than doubled since 2017, though it has plateaued in recent years between 50% and 60%, according to the results of McKinsey's annual research survey. Organizations that have adopted AI report realizing meaningful cost decreases and revenue increases.

### 9 Policymaker interest in AI is on the rise.

An AI Index analysis of the legislative records of 127 countries shows that the number of bills containing "artificial intelligence" that were passed into law grew from just 1 in 2016 to 37 in 2022. An analysis of the parliamentary records on AI in 81 countries likewise shows that mentions of AI in global legislative proceedings have increased nearly 6.5 times since 2016.

## Top Ten Takeaways (cont'd)

### 10 Chinese citizens are among those who feel the most positively about AI products and services. Americans ... not so much.

In a 2022 IPSOS survey, 78% of Chinese respondents (the highest proportion of surveyed countries) agreed with the statement that products and services using AI have more benefits than drawbacks. After Chinese respondents, those from Saudi Arabia (76%) and India (71%) felt the most positive about AI products. Only 35% of sampled Americans (among the lowest of surveyed countries) agreed that products and services using AI had more benefits than drawbacks.

# Apprentissage automatique : applications

Anti-Spam (*Classifieur Bayesien*)



1997 : DeepBlue bat Kasparov (pas de ML)

2017: Alpha GO bat Ke Jie

2019: AlphaStar champion de StarCraft

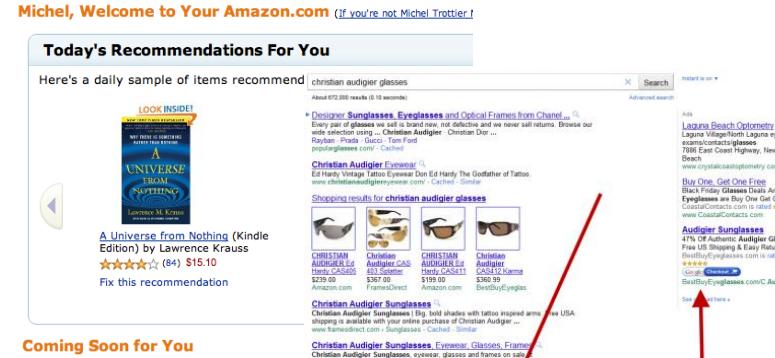


Tri postal automatique (déttection de chiffres manuscrits par réseaux de neurones)



# Apprentissage automatique : applications

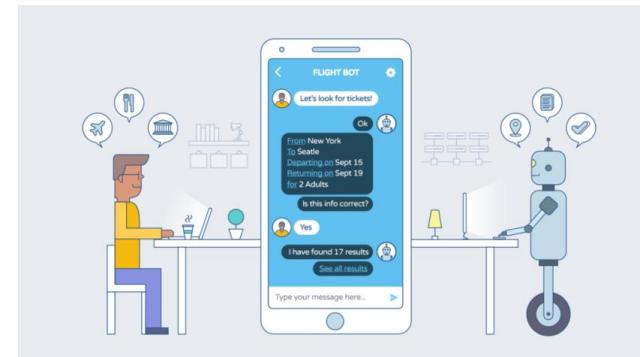
Recommandation ciblée  
(régression logistique)



Appareil photo avec détection de visages (boosting)

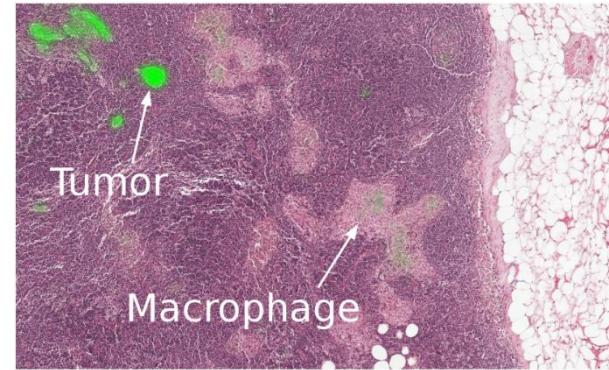


Chat Bots  
(Réseaux de neurones)



# Apprentissage automatique : applications

Diagnostic médical  
(Réseaux de neurones)



Traduction multi-lingue  
(Réseaux de neurones)

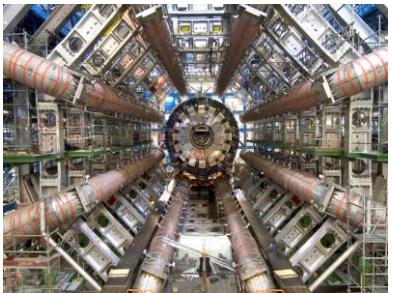


Biochimie (prédition de la structure 3D  
des protéines)  
(Réseaux de neurones + modèles  
biologiques)

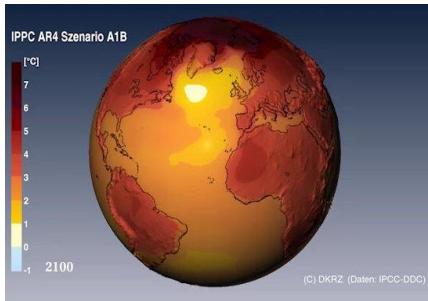


# Données = carburant du ML

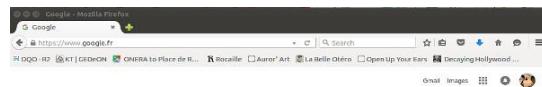
CERN /  
Large Hadron Collider  
~70 Po/an



DKRZ (Climat)  
500 Po



Google :  
24 PetaOctets/jour



Copernicus :  
> 1Po/an

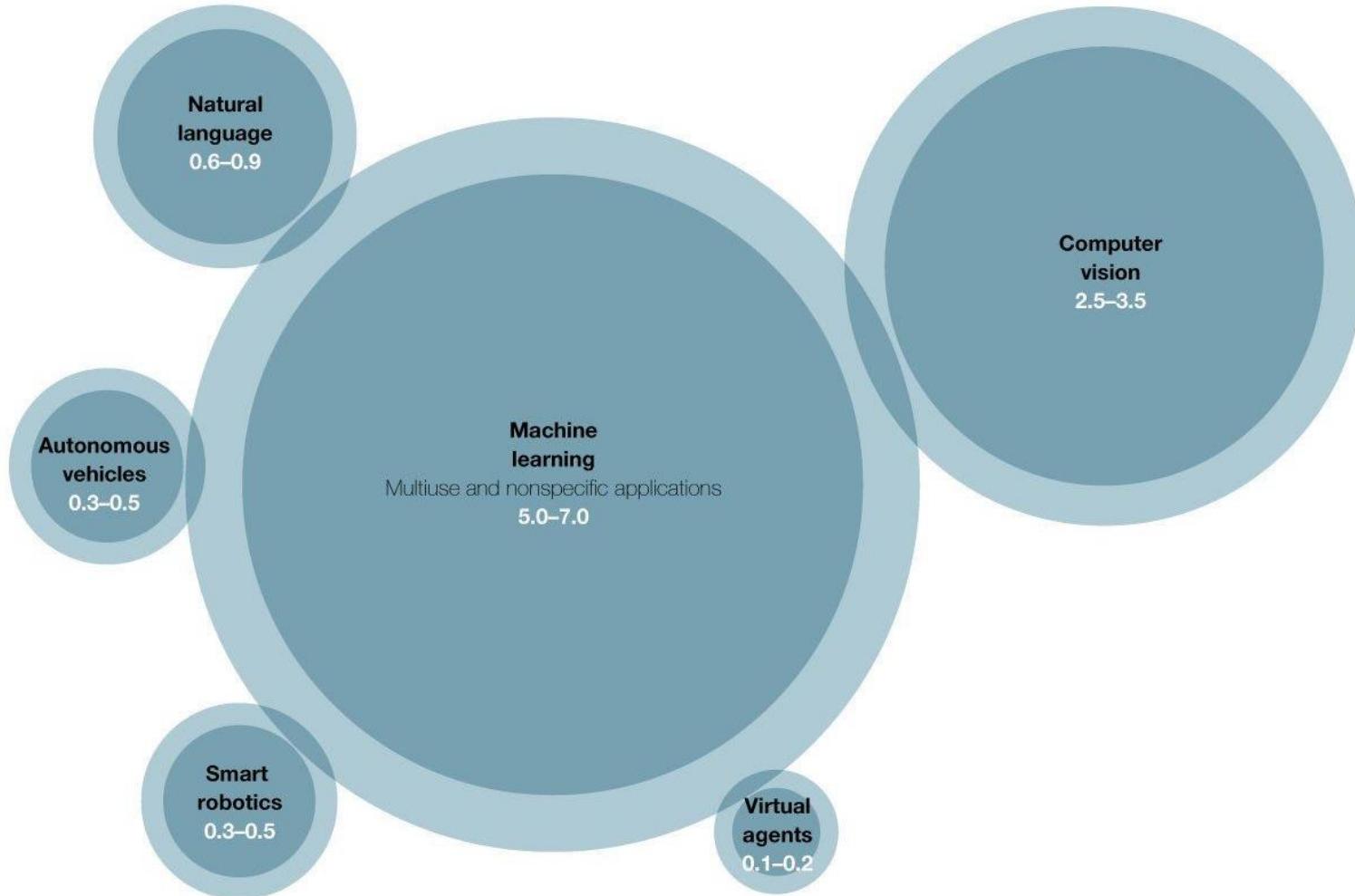


Square Kilometer Array  
1376 Po/an (en 2024)



BIG DATA

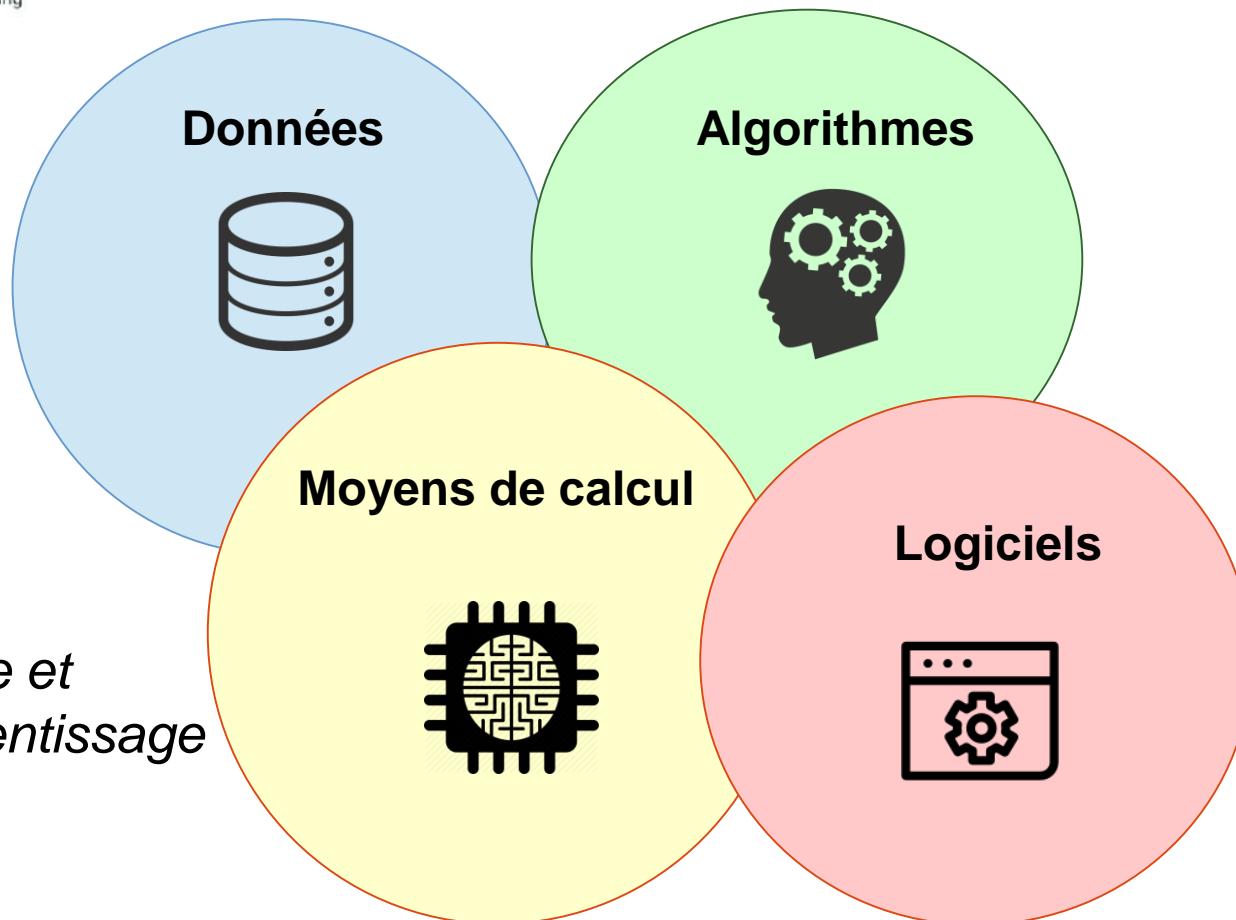
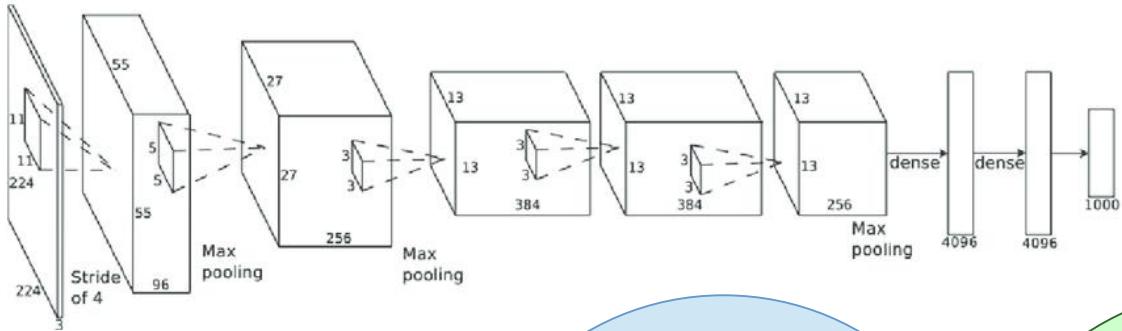
External investment in AI-focused companies by technology category, 2016<sup>1</sup>  
\$ billion



<sup>1</sup> Estimates consist of annual VC investment in AI-focused companies, PE investment in AI-related companies, and M&A by corporations. Includes only disclosed data available in databases, and assumes that all registered deals were completed within the year of transaction.

McKinsey&Company | Source: Capital IQ; Pitchbook; Dealogic; McKinsey Global Institute analysis

# « Deep Learning » : le mot clé inévitable



*Une rupture scientifique et technologique en apprentissage*

# Deux pratiques du ML

- ML fournit la solution
  - Prédicteur à partir des données brutes
  - Démarche « end-to-end »
  - Modèles de fondation
- ML est une aide
  - Modèles de substitution (« surrogate »)
  - IA hybride
  - « Physically Informed Neural Networks » (PINNs)

# MACHINE LEARNING

Problématique générale

# Dans ce cours

L'apprentissage automatique est:

- une démarche de **conception** d'un **prédicteur**
- par une modélisation ou programmation **non explicite** à partir **d'exemples** (signaux, images, texte, mesures...)

# Formalisation

- Donnée à interpréter ( $x$ )
  - Mesures, texte, image, enregistrement, vidéo ou caractéristiques extraites de ...
- Prédiction ( $y$ )
  - Décision, choix, action, réponse, préférence, groupe, commande, valeur...
- Echantillons ( $\mathcal{L} = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ )
  - Exemples de données et de (bonnes) prédictions
  - « Base d'apprentissage »:  $\mathcal{L}$
- Hypothèses fortes:
  - Les échantillons contiennent toute l'information exploitable et utile
  - Le futur = le passé: les données à prédire suivent la distribution d'apprentissage

# Formalisation

Prédicteur = Fonction paramétrique de paramètres  $\mathbf{W}$

$$y = F(\mathbf{x}; \mathbf{W})$$

Apprentissage = trouver le  $\mathbf{W}$  qui optimise un critère  $C$

$$\mathbf{W} = \arg \min_{\mathbf{W}'} C(\mathcal{L}, \mathbf{W}')$$

A partir de la base d'apprentissage  $\mathcal{L} = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^N$

Le critère  $C$  est « empirique » = il dépend de données

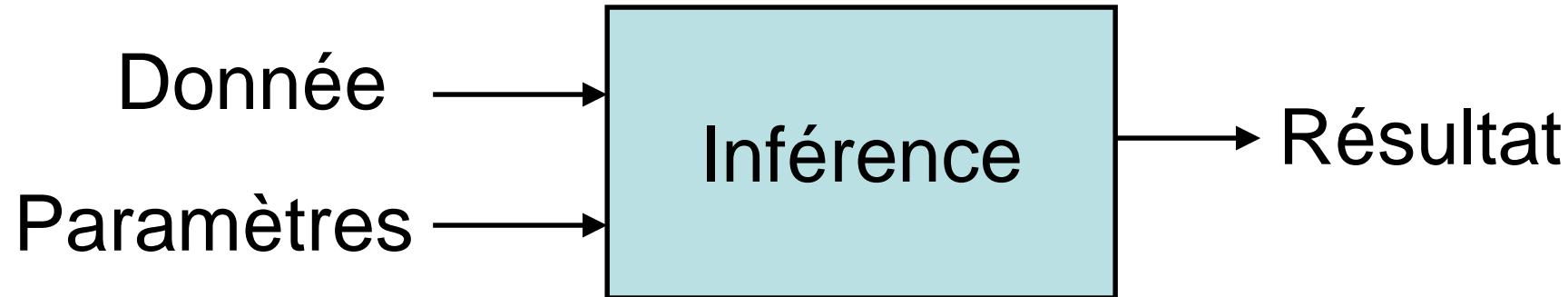
$$\text{ex. } C(\mathcal{L}, \mathbf{W}) = \sum_i \|y_i - F(\mathbf{x}_i; \mathbf{W})\|^2$$

# Deux phases

## Apprentissage (train)



## Prédiction (inférence et test)



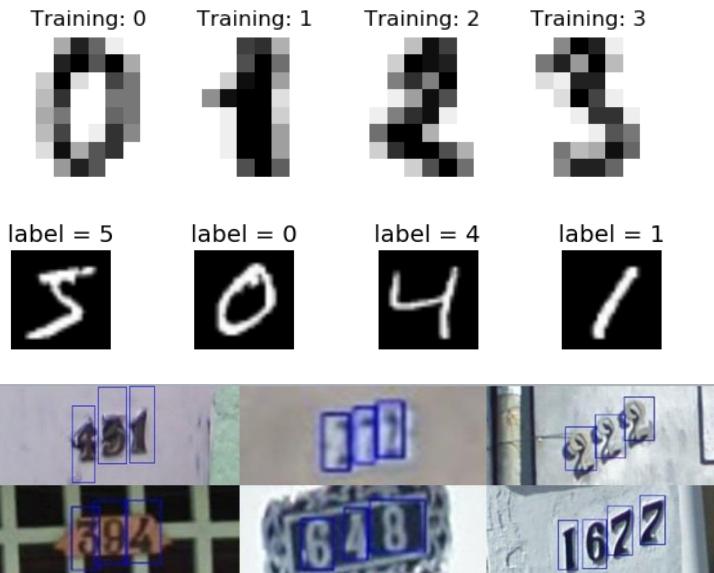
## Exemple: Reconnaissance de chiffres manuscrits



- Comment définir les éléments ?  
 $F, W, x, y$
- Les fonctions d'apprentissage et de prédiction?  
 $\mathcal{L} \mapsto W$   
 $W, x \mapsto y$

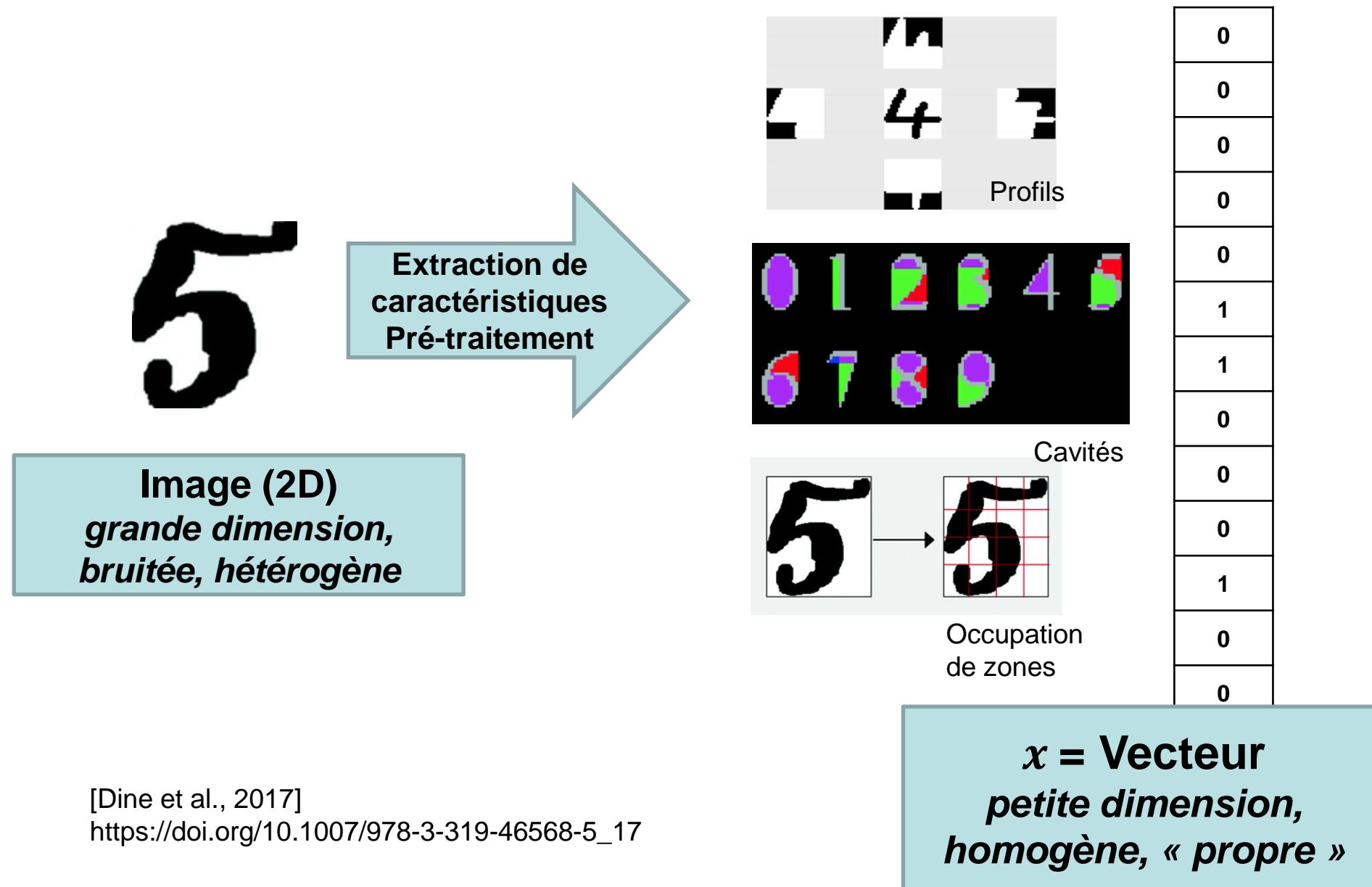
# Etape 1: choix de la base de données

- Elle existe:
  - Scikit-learn:
  - MNIST:
  - SVHN:



- Il faut la construire:
  - Recueil de données existantes
  - Expérimentations (photos, mesures...)

# Etape 2: mise en forme des données



[Dine et al., 2017]

[https://doi.org/10.1007/978-3-319-46568-5\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-319-46568-5_17)

# Etape 3: choix de l'approche

- Quelle fonction?
  - Classification
- Quel type d'apprentissage?
  - Apprentissage supervisé (On connaît les classes cibles)
- Nature des données?
  - Vecteurs de taille fixe mais de grandes dimensions ( $>10$ )
- Taille de la base de données?
  - Moyenne/Grande ( $> 10000$  exemples)
- Modèle de prédicteur?
  - Arbres de décision, SVM, Réseaux de neurones...

# Types de prédition

- **Classification**
  - Binaire: spam / non spam
  - Identification: « tata Monique »
- **Régression**
  - Prédiction de température, de cours de bourse
  - Localisation d'objet dans image
  - Commande
- **Structure**
  - Graphe des articulations d'une personne
- **Regroupement**
  - Photos dans base de données personnelle
- **Texte**
  - « C'est un chat qui saute sur une table. »

# Types d'apprentissage

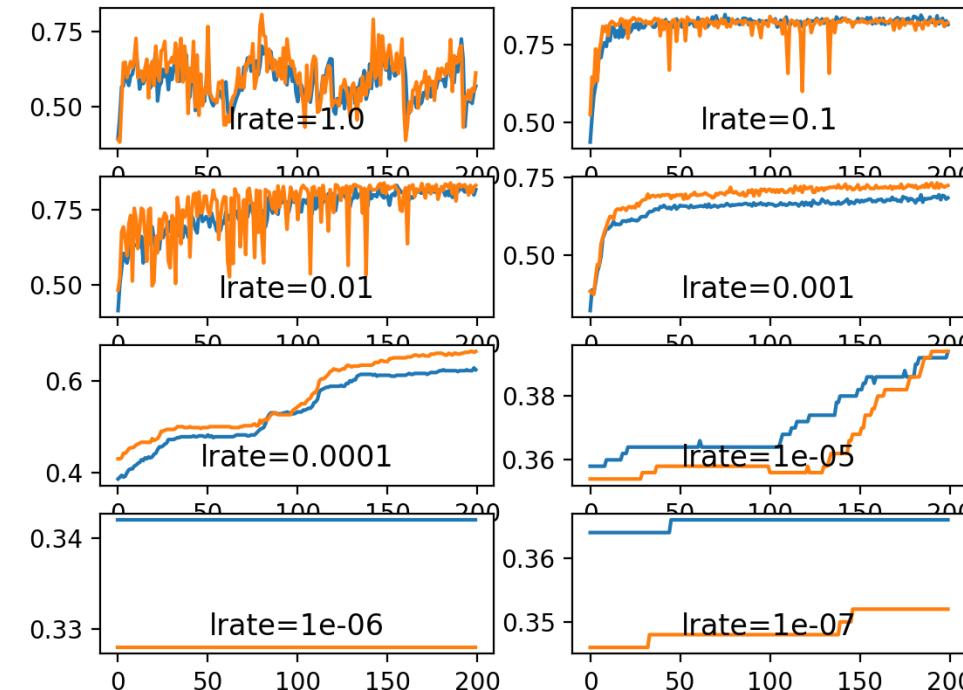
- **Apprentissage supervisé**
  - Les données d'apprentissage contiennent les objectifs de prédiction (annotations)
- **Apprentissage non supervisé**
  - Les données d'apprentissage sont brutes
- **Apprentissage par renforcement**
  - Les prédictions sont issues d'une séquence d'actions et sont caractérisées par une mesure de qualité (« reward »)
- **Apprentissage semi-supervisé**
  - Les données d'apprentissage sont partiellement annotées
- **Apprentissage par transfert**
  - Les données d'apprentissage sont proches du problème visé

# Modèle de prédicteur

- Dépend de la forme des données (vecteurs, listes, réels/discret) et du type de prédiction
- Exemples
  - Plus proches voisins
  - Machines à vecteurs de supports (SVM)
  - Arbre de décision
  - Ensembles de classifieurs (forêts aléatoires, « boosting »...)
  - Réseaux de neurones
  - Modèles probabilistes (Réseaux bayésiens, Chaînes ou champs de Markov...)
  - Règles/Programmation logique
  - Etc.

# Etape 4: apprentissage

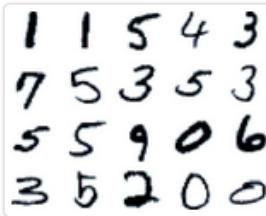
- Définir un espace fonctionnel et un critère paramétrique (coût, énergie...)
- Appliquer un **optimiseur** et régler ses paramètres
- Vérifier que l'apprentissage se passe bien
  - Valeur du critère
  - Convergence
  - Paramètres du prédicteur
  - ...



# Optimisation

- **Optimisation convexe**
  - Ex. Minimisation séquentielle de problème quadratique
- **Optimisation stochastique**
  - Ex. Descente de gradient stochastique, Algorithmes génétiques
- **Optimisation sous contraintes**
  - Ex. Programmation linéaire
- **Optimisation combinatoire**
  - Ex. Algorithmes gloutons

# Etape 5: évaluation



**MNIST** 50 results collected

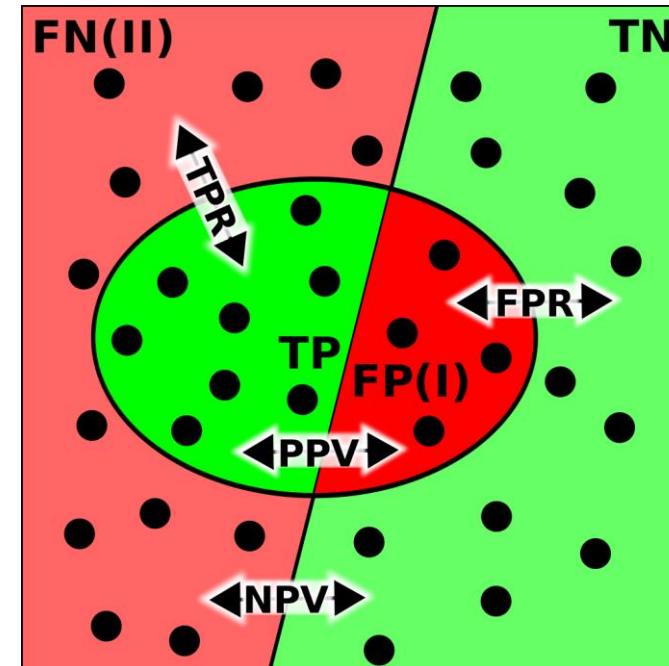
Units: error %

Classify handwritten digits. Some additional results are available on the [original dataset page](#).

Result	Method	Venue	Details
0.21%	<a href="#">Regularization of Neural Networks using DropConnect</a>	ICML 2013	
0.23%	<a href="#">Multi-column Deep Neural Networks for Image Classification</a>	CVPR 2012	
0.23%	<a href="#">APAC: Augmented PAttern Classification with Neural Networks</a>	arXiv 2015	
0.24%	<a href="#">Batch-normalized Maxout Network in Network</a>	arXiv 2015	<a href="#">Details</a>
0.29%	<a href="#">Generalizing Pooling Functions in Convolutional Neural Networks: Mixed, Gated, and Tree</a>	AISTATS 2016	<a href="#">Details</a>
0.31%	<a href="#">Recurrent Convolutional Neural Network for Object Recognition</a>	CVPR 2015	
0.31%	<a href="#">On the Importance of Normalisation Layers in Deep Learning with Piecewise Linear Activation Units</a>	arXiv 2015	

# Métriques d'évaluation

- Dépend du type de prédiction
- Classification
  - Taux d'erreur moyen
  - Matrice de confusion
  - Précision/rappel
  - Courbe ROC
- Régression
  - Erreur quadratique
- Détection
  - Taux de recouvrement moyen



[https://scikit-learn.org/stable/modules/model\\_evaluation.html](https://scikit-learn.org/stable/modules/model_evaluation.html)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Evaluation\\_of\\_binary\\_classifiers](https://en.wikipedia.org/wiki/Evaluation_of_binary_classifiers)

# Train et Test

- Apprentissage (« train »)
  - Exploité pour calculer le prédicteur
  - C'est un moyen de modélisation
- Evaluation (« test »)
  - Utilisé pour estimer l'erreur de prédiction une fois l'apprentissage achevé
  - C'est la situation réelle (ou censée l'être), l'inférence
  - Données pour lesquelles on veut une bonne prédiction
  - NE PAS UTILISER POUR L'APPRENTISSAGE
- Validation
  - Utilisé pour simuler/estimer l'erreur de test pendant l'apprentissage

# Résumé des étapes de conception

1. Constituer des bases de données
2. Préparer les données: Analyser, visualiser, prétraiter, transformer, extraire, constituer les ensembles train/test
3. Concevoir le modèle (type de prédicteur, principe d'apprentissage)
4. Définir un critère et Optimiser (l'apprentissage proprement dit)
5. Evaluer

# ML = Travailler avec des données

Différentes activités/métiers

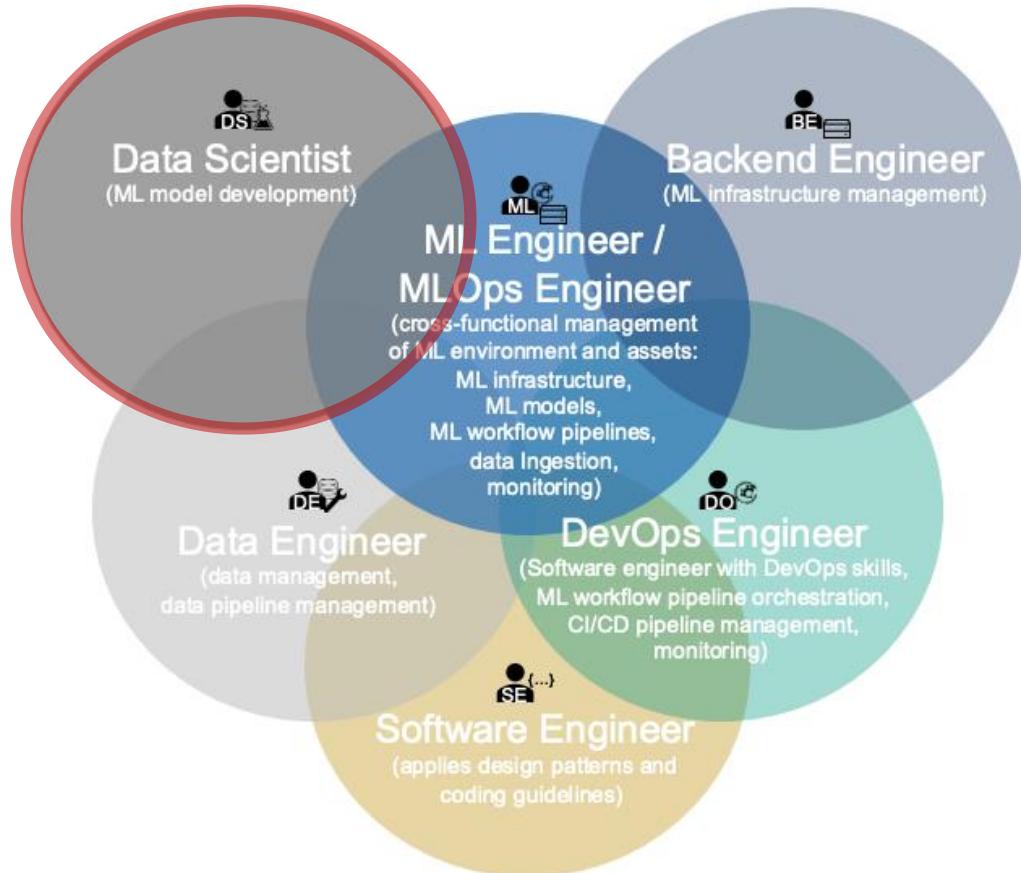
## Préparer les données

- Etape coûteuse mais indispensable
- Objectif: rendre possible l'apprentissage avec des données
  - Propres, homogènes, recalées, calibrées, organisées, facilement accessibles, renseignées...
- « Data engineering » (un nouveau métier!)

## Transformer les données

- Objectif: Extraire l'information des données, leurs caractéristiques (« features »), calculer leur « forme »
- « Data scientist »

# Les métiers du ML et des données



Kreuzberger, D., Kühl, N., & Hirschl, S. (2022). Machine Learning Operations (MLOps): Overview, Definition, and Architecture. *arXiv preprint arXiv:2205.02302*.

# Les "process" du ML

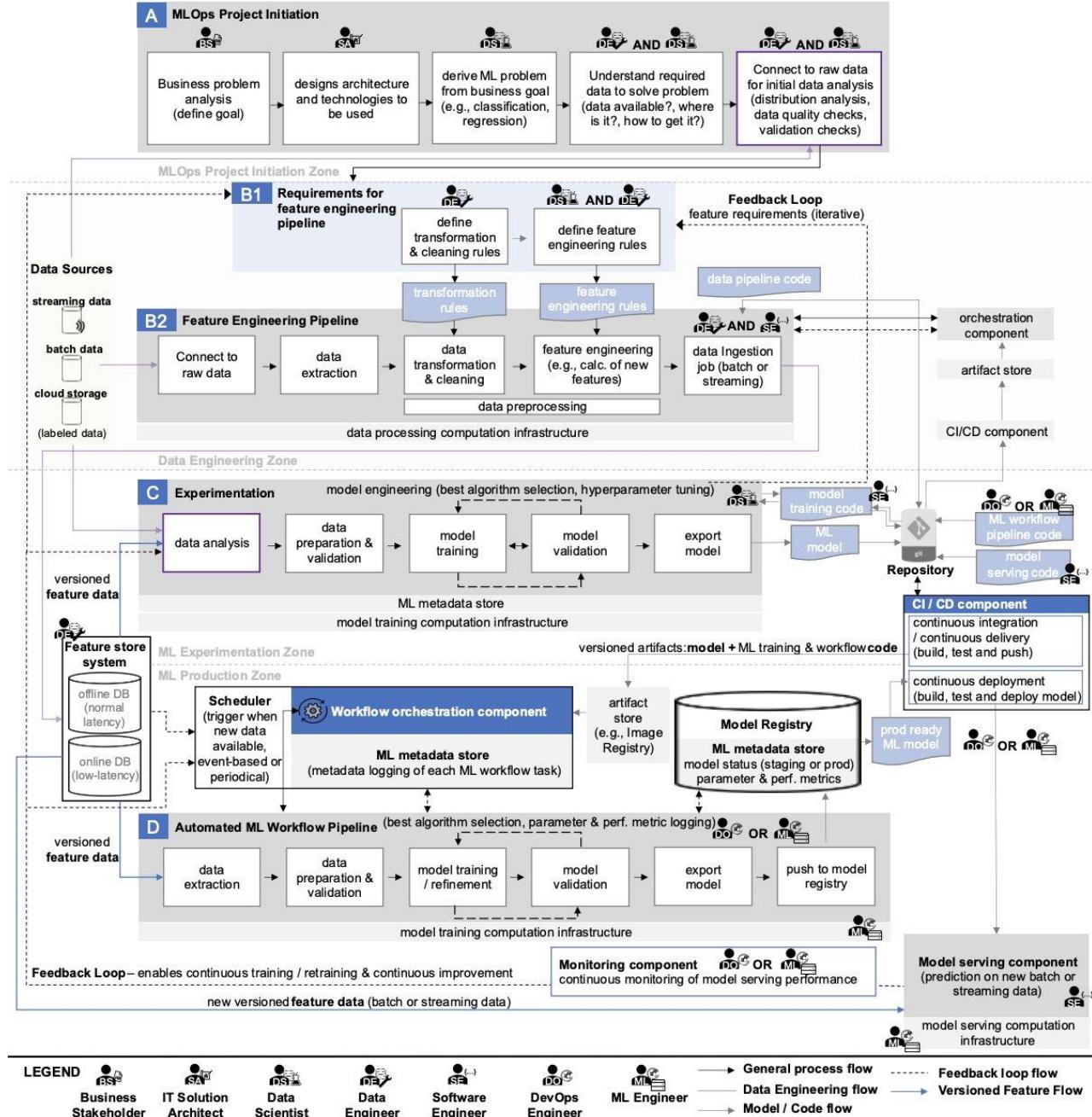


Figure 4. End-to-end MLOps architecture and workflow with functional components and roles

# ML POUR CLASSIFICATION

Modélisation probabiliste

# Formalisme (suite)

- Fonction de décision (ou de prédiction):  $y = F(\mathbf{x}; W)$
- On considère les données  $\mathbf{x}, y$  comme des **variables aléatoires**
- Plusieurs lois de probabilités:
  - $P(\mathbf{x}), P(y)$  : lois a priori (ou marginales)
  - $P(\mathbf{x}, y)$  : loi jointe
  - $P(\mathbf{x} | y)$  : vraisemblance conditionnelle
  - $P(y | \mathbf{x})$  : loi a posteriori
- Base d'apprentissage: échantillons  $\mathcal{L} = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^N$  de la loi  $P(\mathbf{x}, y)$
- Les échantillons sont Indépendants Identiquement Distribués (i.i.d.)

# Modéliser les données pour décider?

- Première approche
  1. Trouver une représentation des données (modèle paramétrique)
  2. Construire une « bonne » fonction de prédiction à partir de ce modèle
- Apprentissage = estimation du modèle à partir de données
- Une « bonne » fonction de prédiction dépend de la nature du modèle et de l'impact potentiel des erreurs
- Modèle probabiliste: on peut générer (échantillonner) des données  
➔ On parle d'approche « générative »
- On peut considérer le problème comme une estimation de la loi jointe  $P(x, y)$  ou des vraisemblances  $P(x|y)$  et loi a priori  $P(y)$ .

# Théorie Bayésienne de la décision

- Classification:  $y \in \{1, 2, \dots, N\}$  est une étiquette (classe)
- On cherche à prédire une unique étiquette  $y^*$  à partir de  $x$

$$F: x \mapsto y^*$$

- On définit une fonction de coût (risque):  $r(y, y^*)$
- On cherche à minimiser l'espérance du risque:

$$E_{x,y}[r(y, F(x))] = \sum_y P(y) \int_x r(y, F(x)) P(x|y)$$

- On peut montrer que la meilleure décision est:

$$F(x) = \arg \max_y P(y | x)$$

lorsque le risque est  $r(y, y') = 1 - 1_{y=y'}$  (risque 0/1)

# Théorie Bayésienne de la décision

- Deux questions:
  - Comment calculer  $P(y | x)$  = apprentissage
  - Comment trouver le max = prédiction
- « Astuce »: utiliser la loi de Bayes

$$P(y | x) = \frac{P(x | y) P(y)}{P(x)}$$

- On connaît en général la fréquence d'occurrence des classes  $y$
- On sait plus facilement calculer la **vraisemblance**:  $P(x | y)$ 
  - « Si je sais dans quelle classe je suis, je sais décrire le comportement/distribution de mes données »
- Le max sur  $y$  ne dépend que de  $P(x | y)$  et  $P(y)$

$$F(x) = \arg \max_y P(x | y)P(y)$$

# Vraisemblance : Modèle gaussien multivarié

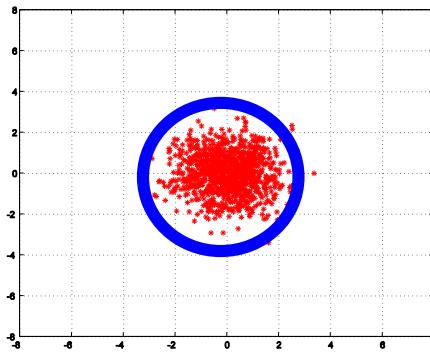
- Un exemple élémentaire (mais utile)

$$P(x; \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{|\Sigma|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (x - \mu)^t \Sigma^{-1} (x - \mu) \right]$$

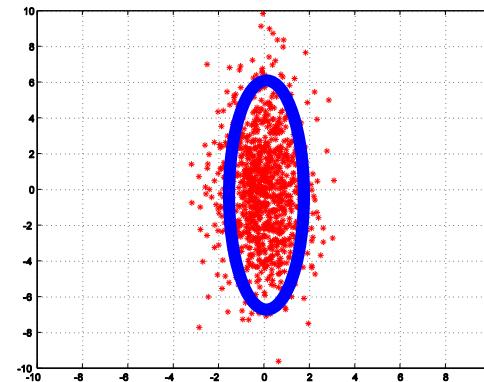
où  $x = [x_1, x_2 \dots x_d] \in \mathbb{R}^d$

- Permet de décrire les corrélations entre dimensions (moments d'ordre 2).

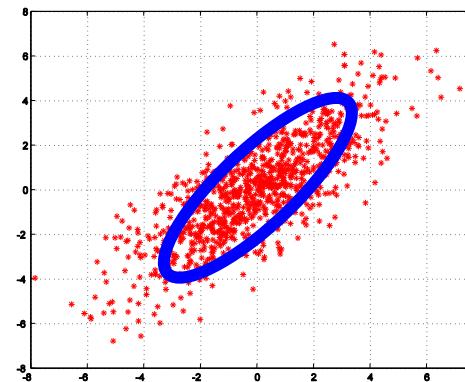
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$



$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R^{-1}$$



# « Apprentissage » du modèle gaussien

- Log-vraisemblance d'un échantillon  $X = \{x_1, x_2 \dots x_N\}$

$$\log P(X; \mu, \Sigma) = cste - \frac{N}{2} \log |\Sigma| - \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^t \Sigma^{-1} (x_i - \mu)$$

- L'estimateur du maximum de vraisemblance donne:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

et

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu})(x_i - \hat{\mu})^t$$

- Remarques:

1. L'estimateur de la covariance est biaisé. On normalise en général par  $\frac{1}{N-1}$ .
2. On peut définir des estimateurs plus robustes qui gèrent les données aberrantes

# Construction de la décision

- Problème à deux classes: décider consiste à calculer le signe du log-ratio!

$$\log \frac{P(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1) P(y_1)}{P(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2) P(y_2)} \geq 0$$

- En développant, on obtient une fonction de décision de la forme:

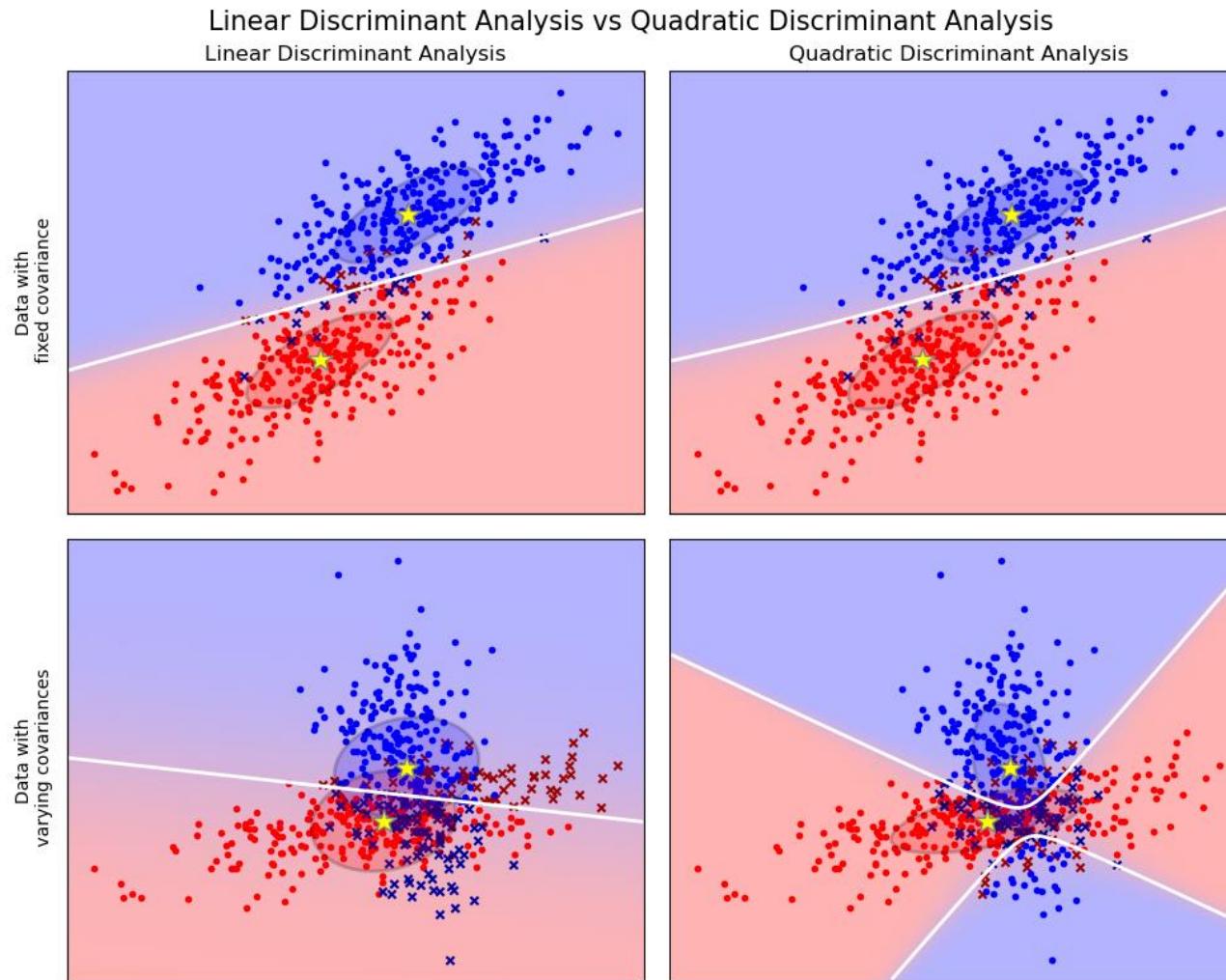
$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)' \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1) - (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)' \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2) + cste \geq 0$$

- Elle s'appuie sur une forme quadratique.
- Remarque: si l'on constraint les deux populations à avoir la même covariance  $\boldsymbol{\Sigma}$ , on obtient une forme linéaire:

$$\mathbf{x}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2) + cste \geq 0$$

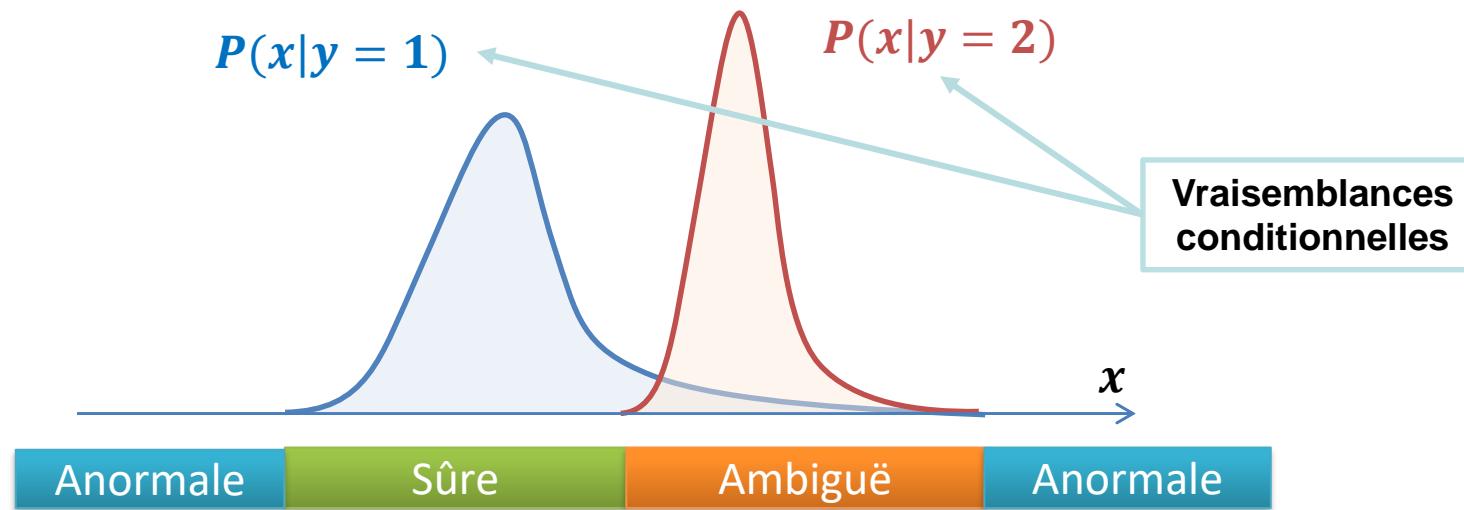
- On parle de « séparatrice »: la forme (quadratique ou linéaire) sépare l'espace en deux zones.

# Exemple en 2D



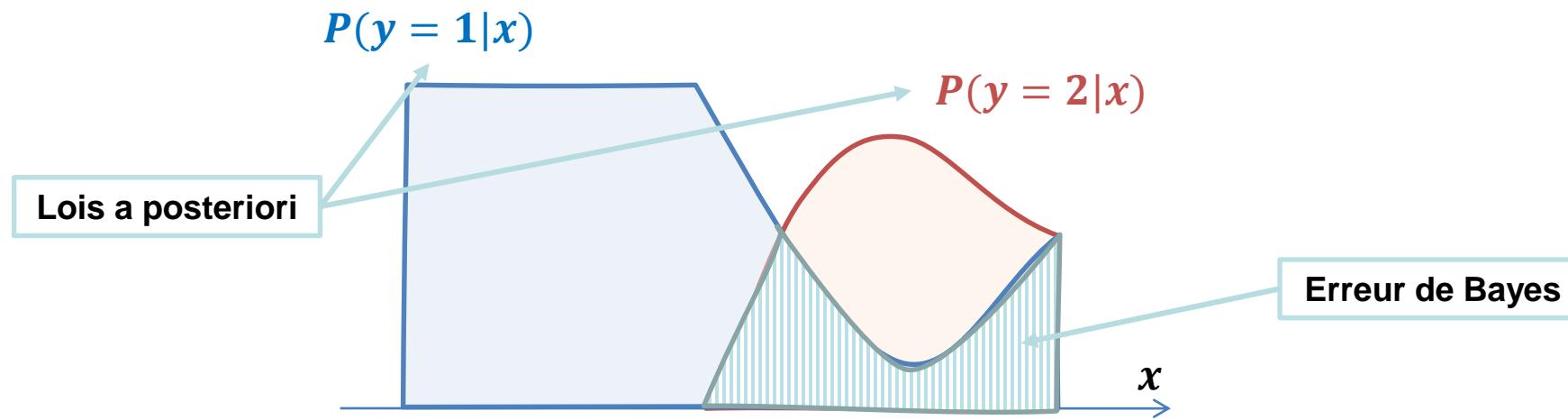
[https://scikit-learn.org/stable/modules/lda\\_qda.html](https://scikit-learn.org/stable/modules/lda_qda.html)

# Différents sources d'erreur



- Certaines données sont ambiguës: on ne peut prendre de décision sûre sur la classe.
- Certaines données sont « impossibles » et sont considérées comme anormales si elles surviennent: elles sont « hors support ».

# Une erreur incompressible

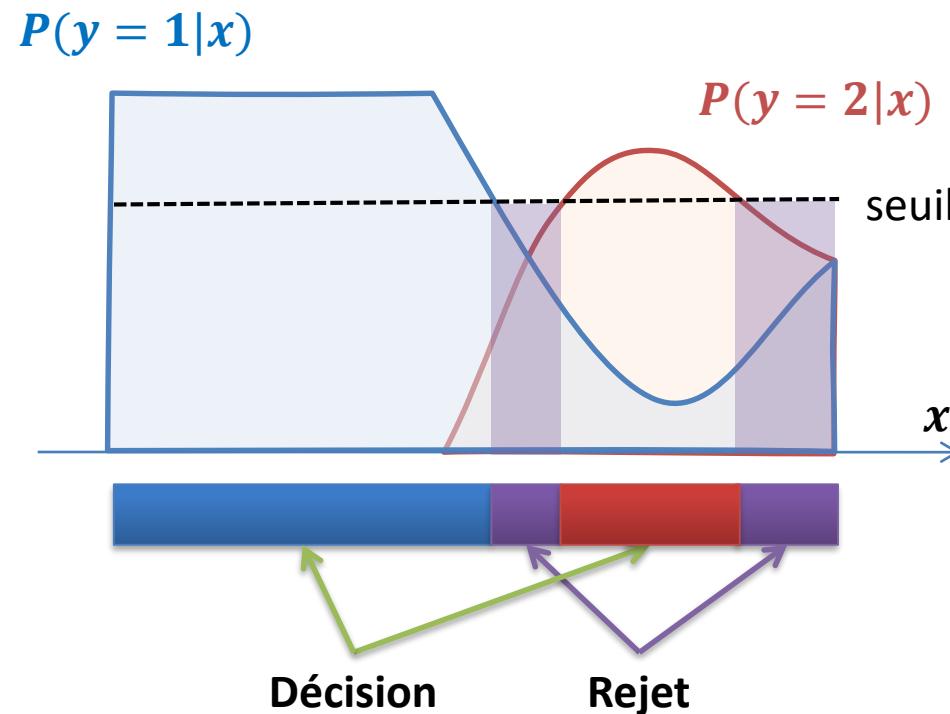


- Pour une décision bayésienne (argmax sur la loi a posteriori), l'erreur est alors

$$\text{error}_{\text{Bayes}} = E_x[1 - \max_k P(y = k|x)]$$

- C'est l'erreur minimale que peut réaliser un prédicteur.
- Rem: c'est un concept théorique, difficile à calculer en pratique

# Rejet sur loi a posteriori



- On peut contrôler le processus de décision en seuillant sur la loi a posteriori, et en décidant de ne pas décider si en dessous du seuil (« rejet »).
- Intérêt: on diminue le taux d'erreur mais on décide moins souvent.

# Remarques sur la modélisation bayésienne

1. On peut faire comme si la distribution était gaussienne même si ce n'est pas vrai: ce qui importe est de construire la fonction de décision
2. On verra comment construire directement une fonction de décision (LDA, LR et SVM)
3. Dans des espaces de grandes dimensions, il n'est pas possible d'estimer correctement la covariance.

# Approche Bayésienne Naïve

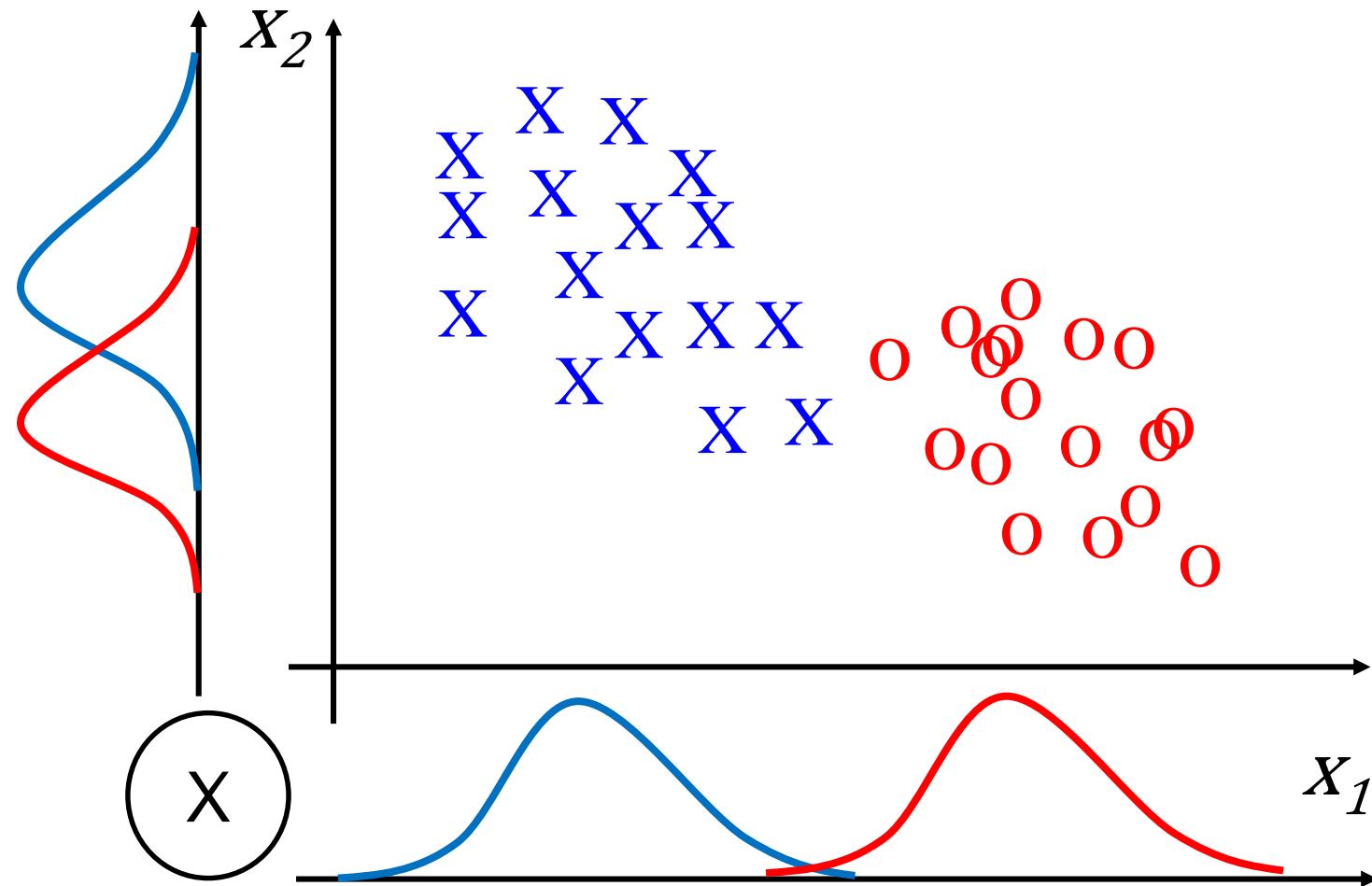
- Que faire pour des espaces à grande dimension?
- Calcul de la loi conditionnelle: hypothèse d'indépendance.

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2 \dots x_d | y) &= P(x_1 | x_2 \dots x_d, y)P(x_2 \dots x_d | y) \\ &= P(x_1 | y)P(x_2 \dots x_d | y) \\ &= P(x_1 | y)P(x_2 | y) \dots P(x_d | y) \end{aligned}$$

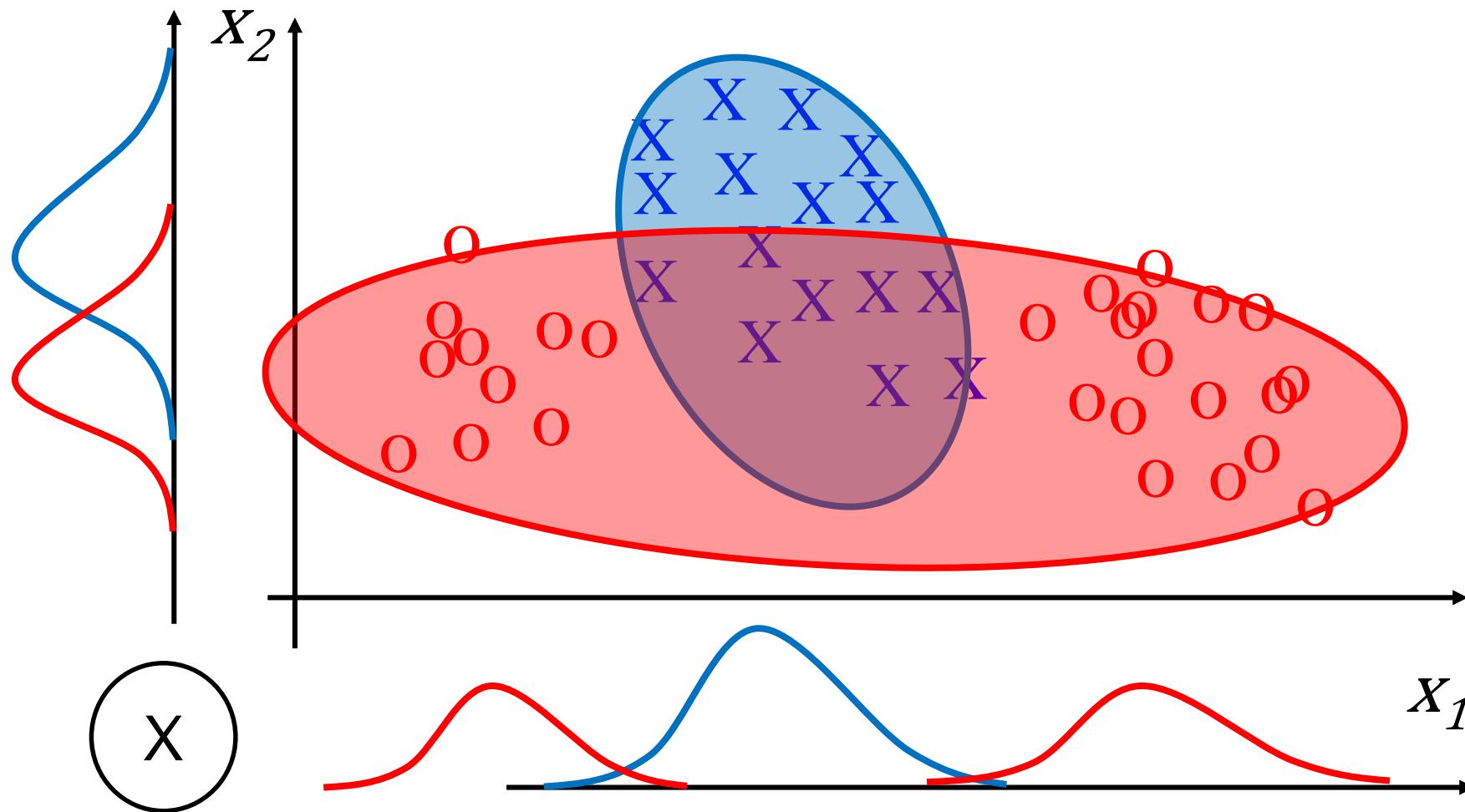
- On calcule la vraisemblance globale dimension par dimension
- ➔ Problème 1D, modèles plus faciles à estimer (gaussien, binomial, histogrammes, mélange de gaussiennes...)
- En pratique, on calcule plutôt la log-vraisemblance pour des questions de stabilité numérique

$$\begin{aligned} \log P(\mathbf{x}|y) &= \sum_i \log P(x_i|y) \\ y^* &= \arg \max_y \log P(\mathbf{x} | y) + \log P(y) \end{aligned}$$

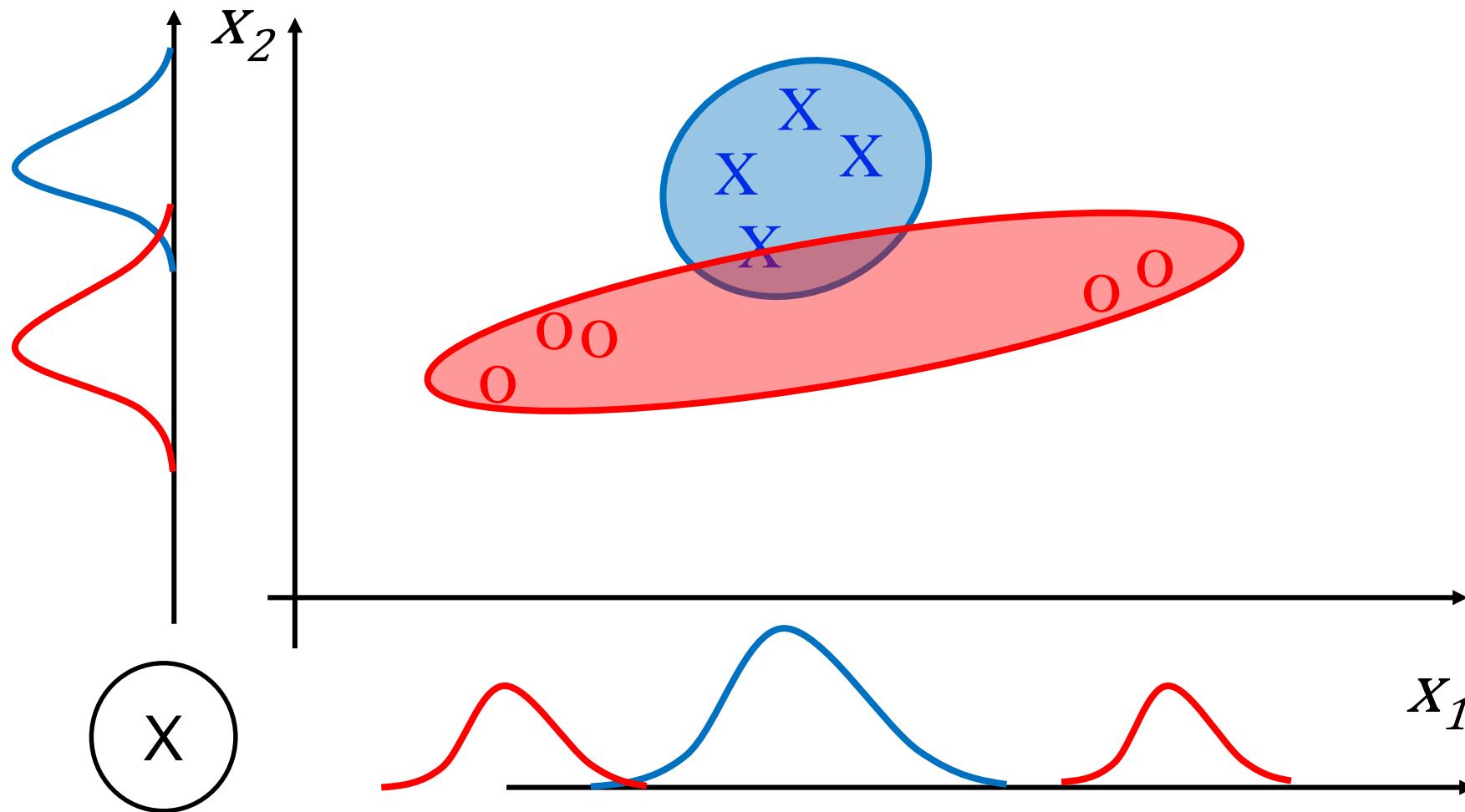
# Approche bayésienne naïve



# Approche bayésienne naïve vs. multivariée



# Approche bayésienne naïve vs. multivariée



# Approche bayésienne: résumé

- Théorie probabiliste de la décision → calcul de la loi a posteriori
- Expression de la loi a posteriori:
  - Hypothèse d'indépendance conditionnelle.
  - Modèle gaussien multivarié
- Apprentissage
  - Estimation de lois paramétriques simples
- Prédiction
  - Calcul de log-vraisemblance et max sur hypothèses
- Quand l'utiliser? (limitations)
  - Petits problèmes bien modélisés (gaussien multivarié)
  - Caractéristiques non corrélées (bayésien naïf, mais ça peut aussi marcher si c'est corrélé)

# Décider/prédire directement?

- Deuxième approche
  1. Construire une « bonne » fonction de prédiction à partir des données
- Apprentissage = estimation de la fonction de décision à partir des données
- Une « bonne » fonction de prédiction dépend de l'impact potentiel des erreurs
- Modèle statistique: on peut produire des incertitudes, mais pas échantillonner des données
- ➔ On parle d'approche « discriminante »
- On peut considérer le problème comme une estimation de la loi a posteriori  $P(y|x)$ .

# Discrimination linéaire (2 classes)

Un exemple simple d'approches discriminante

Principe

- On cherche à projeter linéairement sur une droite les données de telle sorte qu'elles soient séparées au mieux
- Formellement, on définit la décision par un vecteur  $w$  et un biais  $b$ :

$$F(\mathbf{x}) = (\mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x} + b) \begin{cases} 1 & \text{if } F(\mathbf{x}) \geq 0 \\ -1 & \text{if } F(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}$$

- Plusieurs moyens pour définir une bonne projection linéaire:
  - moindre carrés
  - régression logistique
  - discrimination de Fisher

# Moindres carrés

- Première idée: on cherche à prédire directement la classe et on minimise l'erreur quadratique (régression):

$$J(\mathbf{w}, b) = \frac{1}{N} \sum_i (\mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x}_i + b - y_i)^2$$

- Qui peut se récrire:

$$J(\mathbf{W}) = \|\mathbf{W} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{Y}\|^2$$

avec  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}, b]$  et  $\mathbf{X}_i = [\mathbf{x}_i, 1]$

- La solution analytique est celle des moindres carrés:

$$\mathbf{W}^* = (\mathbf{X}^t \cdot \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{Y}$$

- Conceptuellement simple mais:

- Demande d'inverser une matrice de corrélation: donc très coûteux (en pratique on ne calcule pas les poids comme ça)
- Très sensible aux données aberrantes (« outliers »)

# Régression logistique

- Principe: on modélise directement la loi a posteriori comme:

$$P(y | \mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{w}^t \mathbf{x} + b) \quad \text{où} \quad \sigma(a) = \frac{1}{1 + \exp(-a)}$$

- La fonction de coût (maximum de log-vraisemblance) est:

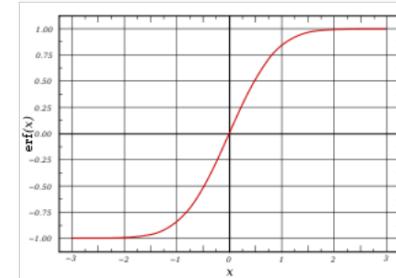
$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}, b) &= -\sum_{n=1}^N \ln p(y_n | z_n) \\ &= -\sum_{n=1}^N y_n \ln z_n + (1 - y_n) \ln (1 - z_n) \end{aligned}$$

avec

$$z_n = \sigma(\mathbf{w}^t \mathbf{x}_n + b)$$

si  $y = 1$

si  $y = 0$



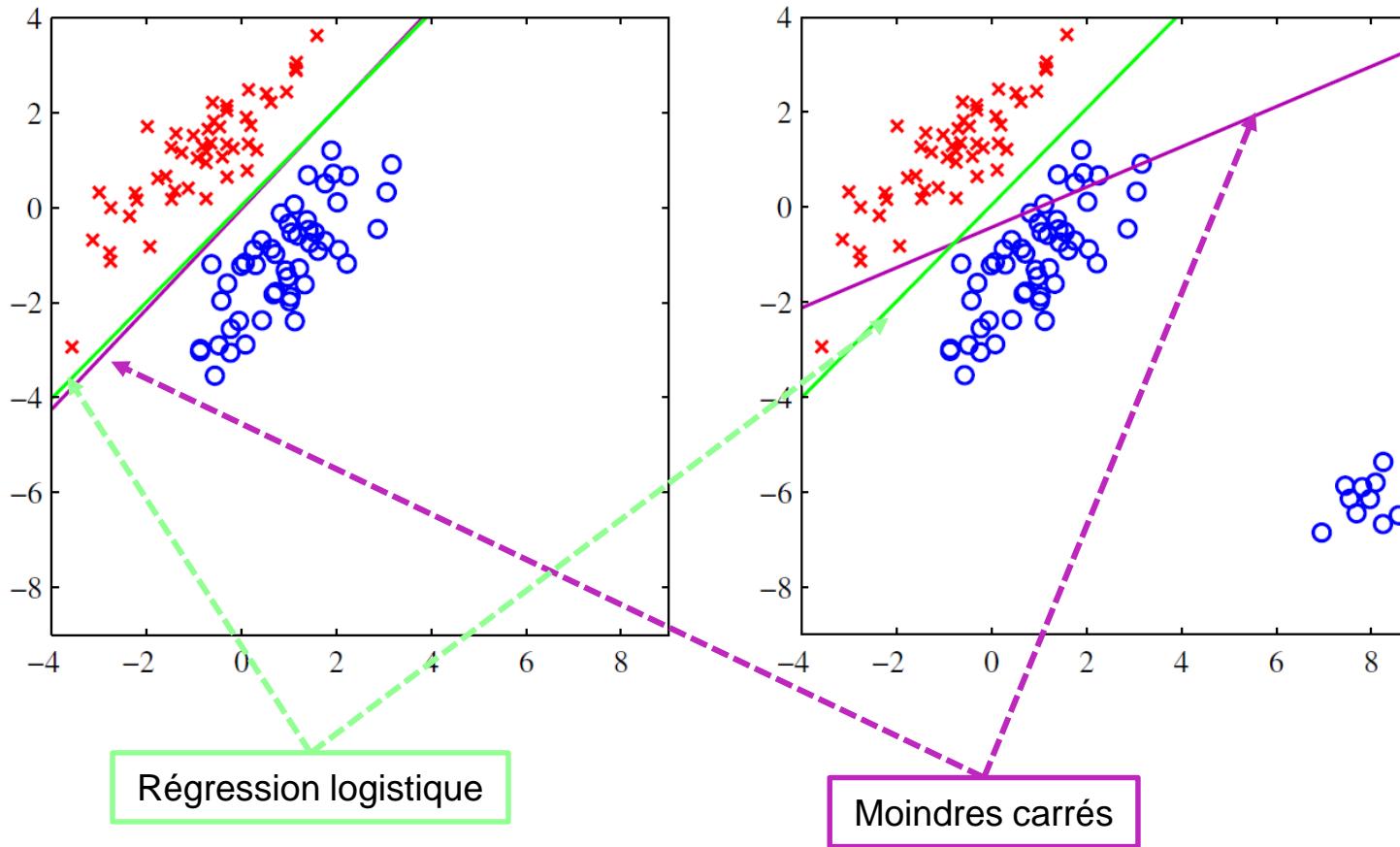
# Optimisation de la régression logistique

- La minimisation du critère n'admet pas formulation analytique
- Astuce: Le gradient du critère se calcule facilement

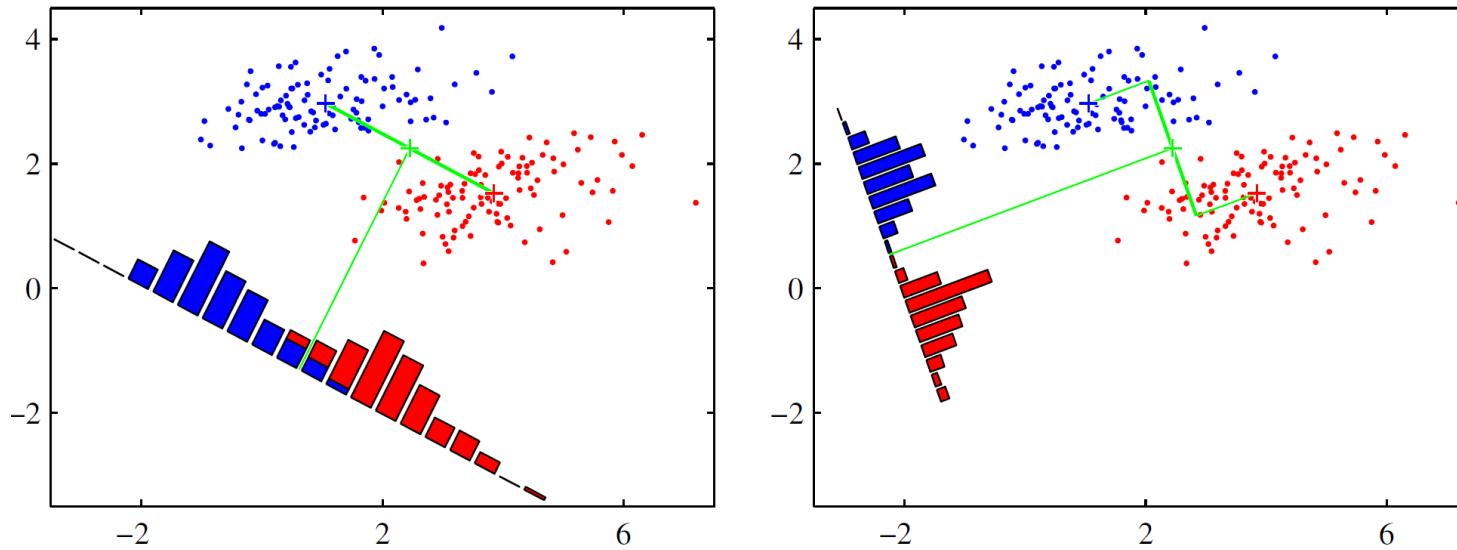
$$\frac{\partial J_n}{\partial \mathbf{w}} = (z_n - y_n) \mathbf{x}_n$$

- On utilise une descente de gradient pour minimiser.
- Il existe une version au second ordre (Newton) conduisant à un algorithme des moindres carrés pondérés.
- La direction de prédiction est moins sensible aux données aberrantes.

# Sensibilité aux « outliers »



# Analyse discriminante linéaire (Fisher)



- Principe: maximiser le contraste entre deux populations projetées selon le critère de Rayleigh

$$J = \frac{(m_1 - m_2)^2}{s_1^2 + s_2^2}$$

Où  $m_k$  et  $s_k$  sont les moyennes et variances 1-D des deux populations à contraster.

# Analyse discriminante linéaire (Fisher)

- Lorsque l'on projette selon  $\mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x} + b$ , le critère s'exprime selon:

$$J(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^t \mathbf{S}_B \mathbf{w}}{\mathbf{w}^t \mathbf{S}_I \mathbf{w}}$$

où

$$\mathbf{S}_B = (\boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\mu}_1)^t \cdot (\boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\mu}_1)$$

est la matrice de covariance inter-classe et

$$\mathbf{S}_I = \sum_{i \in C_1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_1)(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_1)^t + \sum_{i \in C_2} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_2)(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_2)^t$$

est la matrice de covariance intra-classe.

- On peut montrer que la direction qui maximise le contraste est colinéaire à:

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{S}_I^{-1}(\boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\mu}_1)$$

C'est aussi le vecteur propre de la plus grande valeur propre de  $\mathbf{S}_I^{-1} \cdot \mathbf{S}_B$ .

# Discrimination linéaire: résumé

- Décision réduite à rechercher une direction de projection
- Plusieurs algorithmes pour apprendre directement la direction:
  - Moindres carrés
  - Régression logistique
  - Discrimination de Fisher
- Quand l'utiliser? (limitations)
  - Petites dimensions
  - Distributions monomodales
- Remarques:
  - On peut retrouver une surface quadratique en augmentant l'espace de représentation par des combinaisons polynomiales (cf. TD)
  - On peut définir des versions « multi-classe »
  - On verra comment mieux contrôler le calcul et la forme d'une surface séparatrice (SVM demain)

# A retenir

- « Programmer à partir des données »
  - Deux phases: apprentissage et prédition
  - Plusieurs variétés de prédicteurs et d'apprentissage
- Démarche générique:
  - Constitution d'une base d'apprentissage
  - Analyse préliminaire des données + préparation
  - Conception du modèle
  - Optimisation
  - Evaluation
- Deux approches élémentaires:
  - Modélisation bayésienne: approche « générative »
  - Analyse discriminante linéaire: approche « discriminante »

# Références

- R.O. Duda and P.E. Hart, Pattern classification and scene analysis, John Wiley & Sons, New York, 1973.
- P.A. Devijver and J. Kittler, Pattern Recognition, a Statistical Approach, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1982)
- K. Fukunaga, Introduction to Statistical Pattern Recognition (Second Edition), Academic Press, New York, 1990.
- L. Breiman, J.H. Friedman, R.A. Olshen, and C.J. Stone, Classification and regression trees, Wadsworth, 1984.
- S. Haykin, Neural Networks, a Comprehensive Foundation. (Macmillan, New York, NY., 1994)
- L. Devroye, L. Györfi and G. Lugosi, A Probabilistic Theory of Pattern Recognition, (Springer-Verlag 1996)
- V. N. Vapnik, The nature of statistical learning theory (Springer-Verlag, 1995)
- C. Bishop, Pattern Recognition and Machine Learning, (<https://www.microsoft.com/en-us/research/uploads/prod/2006/01/Bishop-Pattern-Recognition-and-Machine-Learning-2006.pdf>).
- Jerome H. Friedman, Robert Tibshirani et Trevor Hastie, The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction (<https://web.stanford.edu/~hastie/ElemStatLearn/>).
- G. James, D. Witten, T. Hastie & R.Tibshirani, An Introduction to statistical learning, Springer Texts in Statistics (<https://www.statlearning.com/>)
- Ian Goodfellow and Yoshua Bengio and Aaron Courville, Deep Learning, An MIT Press book (<http://www.deeplearningbook.org>)
- B. Scholkopf, A. Smola, Learning with kernels, (MIT Press, 2001)
- Kevin Murphy, Machine Learning: a Probabilistic Perspective, (MIT Press, 2013)
- Hal Daumé III, A Course in Machine Learning (<http://ciml.info/>)

# Bases de données

- UCI Repository: <http://www.ics.uci.edu/~mlearn/MLRepository.html>
- UCI KDD Archive: <http://kdd.ics.uci.edu/summary.data.application.html>
- Statlib: <http://lib.stat.cmu.edu/>
- Delve: <http://www.cs.utoronto.ca/~delve/>
- Kaggle: <https://www.kaggle.com/>
- Benchmarks (Vision):
  - ImageNet: <http://image-net.org/>
  - MS COCO: <http://cocodataset.org/>
  - MNIST et plus: [http://rodrigob.github.io/are\\_we\\_there\\_yet/build/classification\\_datasets\\_results.html](http://rodrigob.github.io/are_we_there_yet/build/classification_datasets_results.html)
  - CV on line: <https://computervisiononline.com/datasets>
  - Kitti: <http://www.cvlibs.net/datasets/kitti/>
  - Waymo: <https://waymo.com/open>

# Journaux

- Journal of Machine Learning Research [www.jmlr.org](http://www.jmlr.org)
- Machine Learning
- Neural Computation
- Neural Networks
- IEEE Transactions on Neural Networks
- IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence
- Annals of Statistics
- Journal of the American Statistical Association
- ...

# Conférences

- International Conference on Machine Learning (ICML)
- European Conference on Machine Learning (ECML)
- Neural Information Processing Systems (NIPS)
- International Conference on Learning Representations (ICLR)
- Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI)
- International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)
- International Conference on Neural Networks (ICNN)
- Conference of the American Association for Artificial Intelligence (AAAI)
- IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)
- European Conference on Computer Vision (ECCV)
- International Conference on Computer Vision (ICCV)
- IEEE International Conference on Data Mining (ICDM)
- ...

# Cours & tutoriaux

- Des MOOC (Français et Anglais)
- Des tutoriaux associés aux conférences (orientés recherche)
- Des cours en français:
  - <https://gricad-gitlab.univ-grenoble-alpes.fr/talks/fidle>
  - [https://www.college-de-france.fr/site/stephane-mallat/\\_course.htm](https://www.college-de-france.fr/site/stephane-mallat/_course.htm)
- Des « cheat sheets »
  - <https://stanford.edu/~shervine/teaching/>

# Logiciels

- Environnement génériques: Matlab, ScikitLearn
- Environnements Deep Learning: Tensor Flow, Pytorch, mxnet...
- Beaucoup de codes sur GitHub





# Le TD1

- Partie 1: Les approches élémentaires sur une première base
  - Programmation Python
  - Application de la démarche
- Partie 2: Utilisation de la bibliothèque scikit-learn
  - Les approches sur une autre base

# Utilisation de Colab

- Environnement de développement Python (Notebook « .ipynb »)
  - Ressources de calcul distantes (GPU)
  - C'est proposé par Google
- 
- <https://colab.research.google.com/>

## Etapes

- Se créer un gmail (ou utiliser le votre)
- Se connecter à Colab
- Ouvrir le Notebook du TD (td\_gaussien\_bayesien.ipynb )
- Modifiez directement le notebook.

# Utilisation des « Notebook Python »

The diagram illustrates the Jupyter Notebook interface with three main components:

- Text**: A light blue box containing the text "après chaque fonction de visualisation."
- Code**: A light blue box containing the code snippets from the notebook cells.
- Exécution des cellules**: A light blue box containing the text "plt.show()" with an arrow pointing to the execution toolbar, and arrows pointing to the "Text" and "Code" boxes.

The Jupyter Notebook window shows the following content:

- Toolbar**: Includes File, Edit, View, Insert, Cell, Kernel, Widgets, Help, Not Trusted, and Python 3.
- Text Cell**: Contains the text "après chaque fonction de visualisation." and the instruction "plt.show()".
- Text Cell**: Contains the activity description for "Activité 1.1 : Mon premier classifieur." which involves identifying useful parameters for a linear classifier and comparing predicted vs actual values.
- Code Cell**: Contains the following code:

```
[1]: # Librairies utiles standard
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Pour visualiser et récupérer les données
import iogs_td_util as td

# L'algorithme SVM dans la bibliothèque scikit-learn
from sklearn import svm

import random
```
- Code Cell**: Contains the following code:

```
In [2]: # Classifieur
svc = svm.SVC(kernel='linear', max_iter=-1)

# Premier jeu de données
trainX, trainY, testX, testY=td.generate_data(0)
```

# Pour se mettre à jour sur Python & Numpy

- Intro à Numpy et Matplotlib
  - <https://sebastianraschka.com/blog/2020/numpy-intro.html>
  - <https://cs231n.github.io/python-numpy-tutorial/>
- « Cheat sheets »
  - <https://www.datacamp.com/community/data-science-cheatsheets>