

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

ALORYTMY METAHEURYSTYCZNE

PROJEKT

„Wpływ sposobu zdefiniowania punktu środkowego populacji na działanie algorytmów CMA-ES”

Autorzy:

Jakub Kuczmarski

Nr indeksu: 297300

Jakub Stępnik

Nr indeksu: 297389

Prowadzący:

Mgr inż. Eryk Warchulski

1. Temat projektu

Kontrola przystosowania punktu środkowego populacji jest sposobem na poprawienie jakości działania algorytmów ewolucyjnych. Na wybranym przez siebie algorytmie ewolucyjnym zbadaj wpływ sposobu zdefiniowania punktu środkowego na działanie tego algorytmu.

Poza statystykami jak średnia arytmetyczna lub mediana zbadaj różne warianty średniej ważonej oraz statystyki odporne. Wykorzystaj wybrane funkcje testowe.

2. Wstęp teoretyczny

2.1 Punkt środkowy populacji

Punkt środkowy populacji jest używany w algorytmach ewolucyjnych, aby reprezentować aktualny stan populacji (średnią wartość cech (genotypów) osobników w danej populacji) i kierować ewolucję w stronę przestrzeni rozwiązań, która wykazuje obiecujące cechy genetyczne.

Sposoby wyznaczania punktów środkowych:

2.1.1. Średnia Arytmetyczna

Standardowa metoda uśredniania wartości populacji. Jest to prosta, intuicyjna metoda, ale może być wrażliwa na skrajne wartości (wartości odstające), które mogą znacząco wpływać na wynik. Sposób ten wyraża się następującym wzorem:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

, gdzie

x_i - i-ty osobnik w populacji,

$\sum_{i=1}^N x_i$ - suma wszystkich osobników w populacji

2.1.2 Mediana

Jest to metoda uśredniania, bardziej odporna na ekstremalne wartości. Wartość mediany można obliczyć na różne sposoby, ale zwykle polega to na uporządkowaniu danych i wybraniu wartości środkowej. Jeśli liczba obserwacji n jest nieparzysta, mediana to wartość w środku. Jeśli n jest parzysta, mediana to średnia arytmetyczna dwóch wartości środkowych.

2.1.3. Średnia ważona

Rodzaj średniej, w której każda z wartości ma przypisaną wagę. Wagi mogą być ustalane dynamicznie w zależności od kontekstu lub statycznie na podstawie pewnych kryteriów.

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

, gdzie

x_i - wartości w populacji

w_i - wagi odpowiadające danym wartościom

2.1.4. Losowa średnia ważona

Jest to odmiana średniej ważonej, gdzie wagi nie są stałe ani deterministyczne, ale losowo generowane, co może pomóc w eksploracji przestrzeni rozwiązań w algorytmach optymalizacyjnych.

2.1.5. Statystyki odporne

Statystyki odporne są to metody statystyczne, które charakteryzują się większą odpornością na wartości odstających (ang. outliers) lub zaburzeń w danych. W przeciwieństwie do metod tradycyjnych, które mogą być znacznie zakłócone przez pojedyncze, skrajne obserwacje, statystyki odporne są projektowane tak, aby dawać bardziej stabilne i wiarygodne oszacowania parametrów populacji w obecności wartości odstających.

Do statystyk odpornych zaliczamy:

- Średnia obcięta (ang. trimmed mean)

Statystyka ta eliminuje skrajne wartości z obliczeń średniej arytmetycznej. Określa się odcięcie pewnego procentowego fragmentu danych z obu końców rozkładu, a następnie obliczenie średniej arytmetycznej dla pozostałych danych.

$$\bar{x}_p = \frac{1}{n(1-2p)} \sum_{i=p+1}^{n-p} x_i$$

, gdzie

p - procent odcięcia danych,

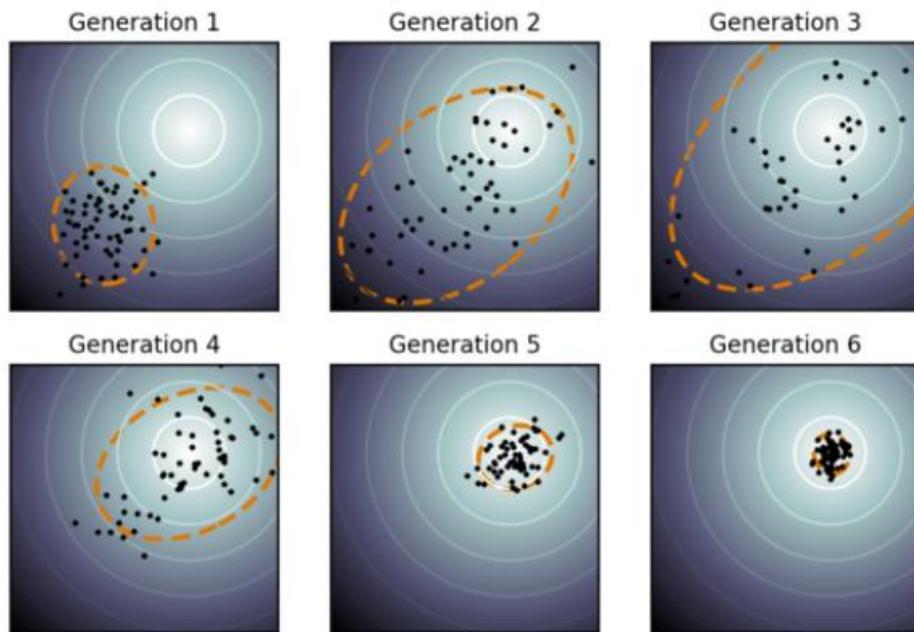
x_1, x_2, \dots, x_n - uporządkowany ciąg danych, gdzie x_i to i -ta wartość ciągu

- Mediana odcięta (ang. trimmed median)

Analogiczna do średniej odciętej, z tą różnicą, że zamiast średniej wybiera się medianę z pozostałych danych po odcięciu skrajnych wartości.

2.2 Algorytm ewolucyjny wykorzystujący punkt środkowy populacji

Wyznaczenie punktu środkowego populacji ma zastosowanie głównie w strategiach ewolucyjnych, takich jak algorytm CMA-ES (Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy), gdzie służy do adaptacji macierzy kowariancji, co umożliwia algorytmowi skuteczne przeszukiwanie przestrzeni w poszukiwaniu optymalnych rozwiązań.



Rys. 1 Ilustracja działania algorytmu CMA-ES dla prostego problemu dwuwymiarowego. Źródło: <https://en.wikipedia.org/wiki/CMA-ES#Principles>

2.3 Eksploracja, a eksploatacja

Eksploracja jest to poszukiwanie nowych obszarów przestrzeni rozwiązań, zaś eksploatacja to udoskonalanie istniejących rozwiązań.

3. Rozwiązanie

Zaproponowane przez nas rozwiązanie projektowe polegać będzie na modyfikacji sposobu określania punktu środkowego populacji, poprzez wykorzystanie różnorodnych metod statystycznych. Celem takiej zmiany jest ocena wpływu na kluczowe aspekty działania algorytmu, takie jak zdolność do osiągania optimum globalnego, szybkość zbieżności, stabilność w różnych warunkach początkowych, a także skalowalność. Warto zauważyć, że wybór metody określania punktu środkowego musi być dopasowany do specyfiki wybranego algorytmu ewolucyjnego, który wykorzystuje tę koncepcję w swoim działaniu.

Wybranym do zbadania algorytmem, który jest znany z efektywnego wykorzystania punktu środkowego w swoich procedurach jest CMA-ES (Strategia ewolucji z adaptacją macierzy kowariancji).

Algorytm ten został wybrany nie tylko ze względu na jego popularność, efektywność i dostępność implementacji, ale również z uwagi na częste zastosowanie w praktycznych problemach optymalizacyjnych.

4. Plan eksperymentów

1. Implementacja klasycznych algorytmów CMA-ES.
 2. Wybór kilku funkcji testowych z różnymi charakterystykami (np. sferyczne, niemonotoniczne, funkcje z wieloma minimami lokalnymi) w celu sprawdzenia działania algorytmów.
 3. Dobór i implementacja odpowiednich metryk takich jak:
 - a. skuteczność zbieżności do optimum globalnego
 - b. szybkość zbieżności
 - c. stabilność zbieżności (sprawdzenie jak duży wpływ mają wartości inicjalizacyjne)
 - d. skalowalność
 - e. adaptacyjność (zdolność do skutecznego działania w bardzo różnych środowiskach)
- Przeprowadzenie eksperymentów dla wybranych środowisk (funkcji) w zależności od sposobu definicji punktu środkowego populacji i innych parametrów wpływających na wyniki tj. wielkość populacji, liczba generacji, wielkość kroku (σ) i w przypadku statystyk odpornych - procent odcięcia danych. Planowane modyfikacje to wyznaczenie punktu środkowego:
- jako średnia ważona z wagami ustalonymi w sposób statyczny lub dynamiczny,
 - jako mediana,
 - jako statystyki odporne, tj. średnia lub mediana odcięta
 - poprzez wprowadzenie elementu losowości (by zwiększyć wagę eksploracji)
4. Analiza uzyskanych uśrednionych wyników oraz przedstawienie ich na wykresach obrazujących sprawdzane przez nas metryki.
 5. Wnioski końcowe na bazie uzyskanych wyników.

5. Technologie

- **Python 3.10 >** - język programowania zapewniający wsparcie do wielu bibliotek do obliczeń numerycznych, uczenia maszynowego oraz wizualizacji
- **DEAP (Distributed Evolutionary Algorithms in Python)** - framework zapewniający środowiska do ewaluacji, gotowe implementacje różnych algorytmów ewolucyjnych oraz metryki i benchmarki
- **Jupyter Notebook/Google Coolab** - środowisko, na którym będziemy przeprowadzać eksperymenty
- **Github** – repozytorium, na którym będziemy trzymać kod

6. Eksperymenty

Eksperymenty polegały na sprawdzeniu różnej kombinacji parametrów w odniesieniu do algorytmu CMA-ES. W tym celu zbadano wpływ na działanie algorytmu następujących parametrów:

- **central_point_function_name** – sposób wyznaczania punktu środkowego populacji
Badane opcje to 'mean' (średnia arytmetyczna), 'weight_mean' (średnia ważona), 'median' (mediana), 'trimmed_mean' (średnia odcięta), 'trimmed_median' (mediana odcięta), 'randomized_weighted_mean' (losowa średnia ważona)

Każda z metod została zaimplementowana jako oddzielna funkcja (rys. 2).

```
def weight_mean_point(selected, weights):
    return np.dot(weights, selected)

def mean_point(selected, weights):
    return np.mean(selected, axis=0)

def median(selected, weights):
    return np.median(selected, axis=0)

def trimmed_mean(selected, weights):
    return stats.trim_mean(selected, proportion_to_cut, axis=0)

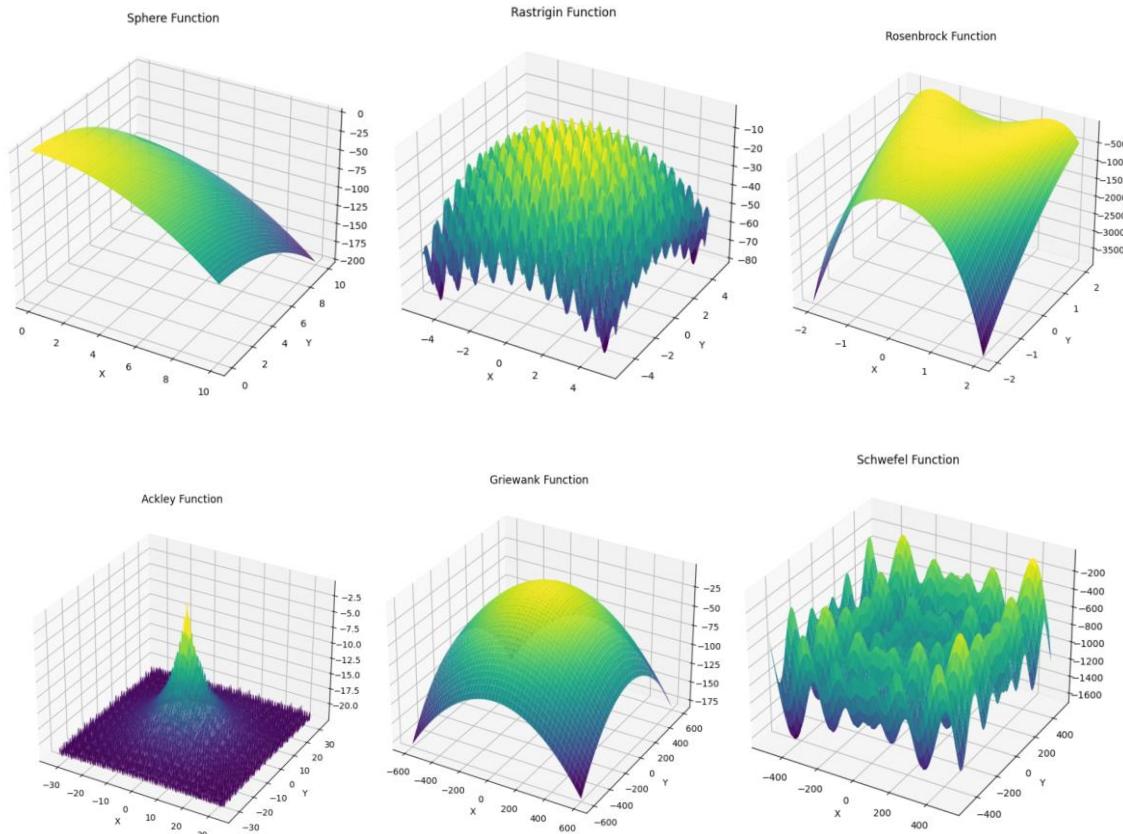
def trimmed_median(selected, weights):
    sorted_selected = np.sort(selected, axis=0)
    cut_off = int(proportion_to_cut * len(sorted_selected))
    trimmed = sorted_selected[cut_off:-cut_off]
    return np.median(trimmed, axis=0)

def randomized_weighted_mean(selected, weights):
    random_weights = np.random.rand(len(selected))
    random_weights /= sum(random_weights)
    return np.average(selected, axis=0, weights=random_weights)
```

Rys. 2 Implementacja w Pythonie różnego sposobu wyznaczania punktów środkowych populacji.

- **obj_func** – badane funkcje optymalizowane przez algorytm

Badane funkcje celu to:



Rys. 3 Badane w projekcie funkcje

Funkcje są minimalizowane w procesie optymalizacji, dlatego też algorytm będzie działał w celu minimalizacji tych funkcji.

Funkcje t zostały zdefiniowane w następujących zakresach przedstawionych na rysunku 4

```
def get_obj_function_and_bounds(name, dimension=2):
    """Returns the function and its associated bounds based on the given name."""
    functions = {
        "sphere": (lambda x: -benchmarks.sphere(x)[0], [0, 10]),
        "rastrigin": (lambda x: -benchmarks.rastrigin(x)[0], [-5.12, 5.12]),
        "rosenbrock": (lambda x: -benchmarks.rosenbrock(x)[0], [-2.048, 2.048]),
        "ackley": (lambda x: -benchmarks.ackley(x)[0], [-32.768, 32.768]),
        "griewank": (lambda x: -benchmarks.griewank(x)[0], [-600, 600]),
        "schwefel": (lambda x: -benchmarks.schwefel(x)[0], [-500, 500]),
        "himmelblau": (lambda x: -benchmarks.himmelblau(x)[0], [-6, 6])
    }
```

Rys. 4 Definicja zakresu danych funkcji.

- **population_size** – wielkość populacji, czyli liczba osobników w każdej generacji
- **num_generations** – liczba generacji, przez które algorytm będzie się wykonywał
- **sigma** - współczynnik skalowania, kontrolujący wielkość kroków, jakie algorytm podejmuje podczas poszukiwania rozwiązań. Znajduje się w zakresie [0,1]
- **proportion_to_cut** - proporcja populacji, która zostanie odcięta przy użyciu metod takich jak średnia obcięta lub mediana obcięta. Określa, jaka część skrajnych wartości zostanie usunięta przed obliczeniem punktu środkowego. Znajduje się w zakresie [0, 1].

Wartości parametrów, dla których przeprowadzono eksperymenty:

- **Funkcja celu:** 'sphere', 'rastrigin', 'rosenbrock', 'ackley', 'griewank', 'schwefel'
- **Metoda punktu środkowego:** 'mean', 'weighted_mean', 'median', 'trimmed_mean', 'trimmed_median', 'randomized_weighted_mean'
- **Wielkość populacji:** 100 , 500, 1000
- **Sigma:** 0.1 , 0.3 , 0.7
- **Proporcja do obcięcia:** 0.05, 0.2, 0.4 (jeśli metoda punktu środkowego to 'trimmed_mean' lub 'trimmed_median')

6.1 Uzyskane wyniki

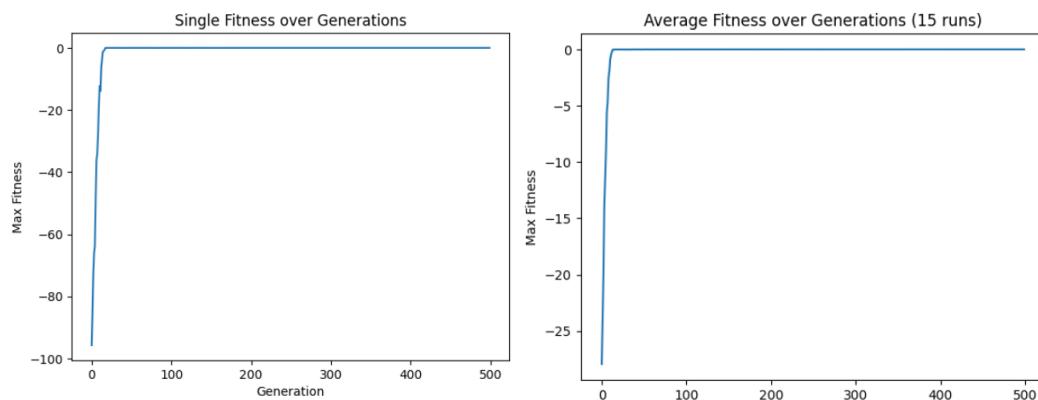
6.1.1. Sprawdzenie wpływu sposobu wyznaczenia środka populacji na poszczególne funkcje celu

W tej części zmianie będą ulegać jednanie sposoby wyznaczania środka populacji w zależności od wybranej funkcji do optymalizacji, reszta parametrów pozostaje niezmienna równa:

- central_point_function_name = ['mean', 'weight_mean', 'median', 'trimmed_mean', 'trimmed_median', 'randomized_weighted_mean']
- obj_func = ['sphere', 'rastrigin', 'rosenbrock', 'ackley', 'griewank', 'schwefel']
- dim = 2
- population_size=100
- sigma = 0.7
- proportion_to_cut = 0.1

SPHERE

Metoda punktu środkowego: **mean**

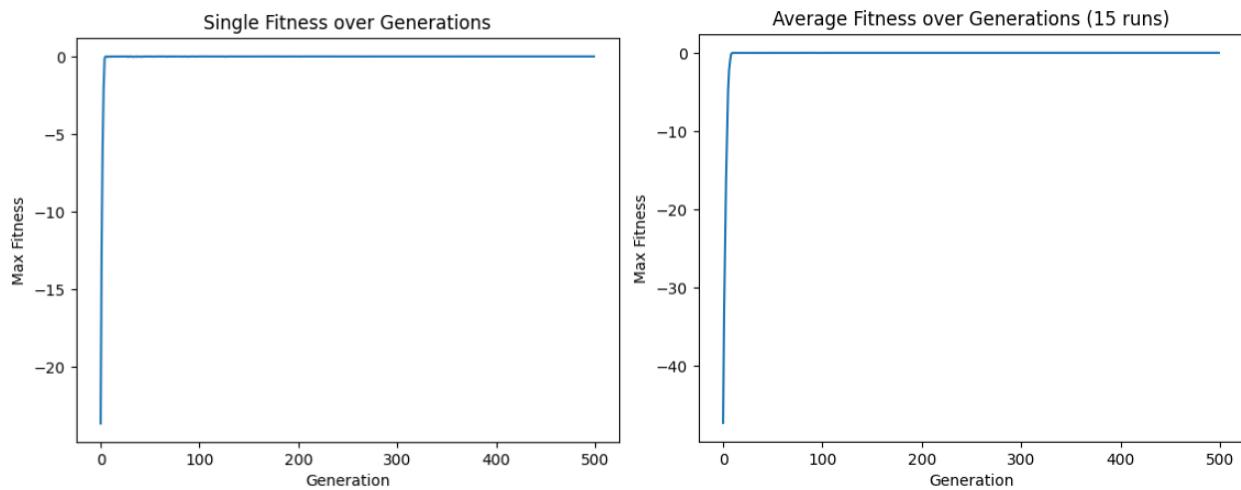


Rys. 5 Metoda wyznaczania środka – *mean* – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Uśrednione wyniki z 15 powtórzeń:

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-27.9194
10	-0.8879
50	-0.0063
100	-0.0064
200	-0.0015
300	-0.0009
400	-0.0003
500	-9.9691e-05

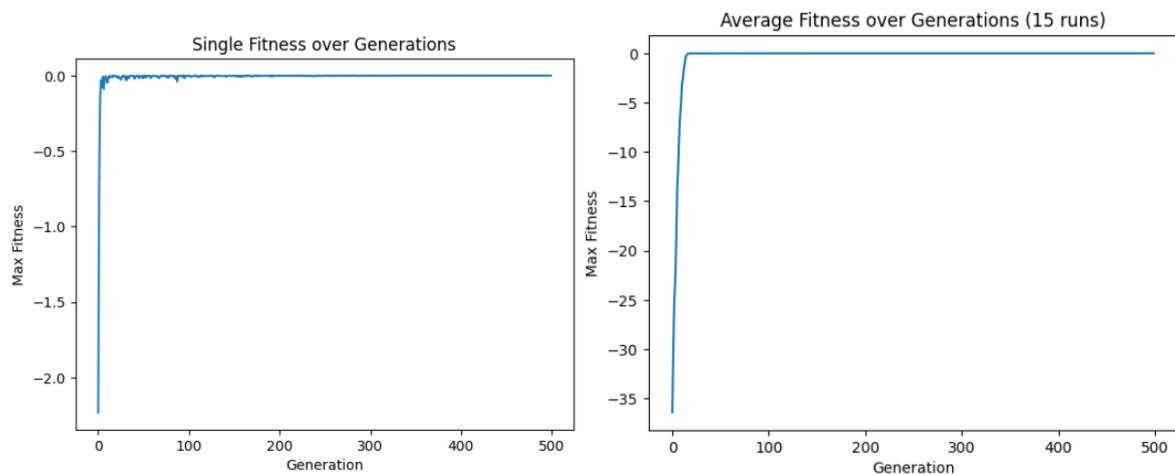
Metoda punktu środkowego: **weighted_mean**



Rys. 6 Metoda wyznaczania środka – **weighted_mean** - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-47.2518
10	-0.0103
50	-0.0057
100	-0.0054
200	-0.0015
300	-0.0004
400	-0.0002
500	-0.0001

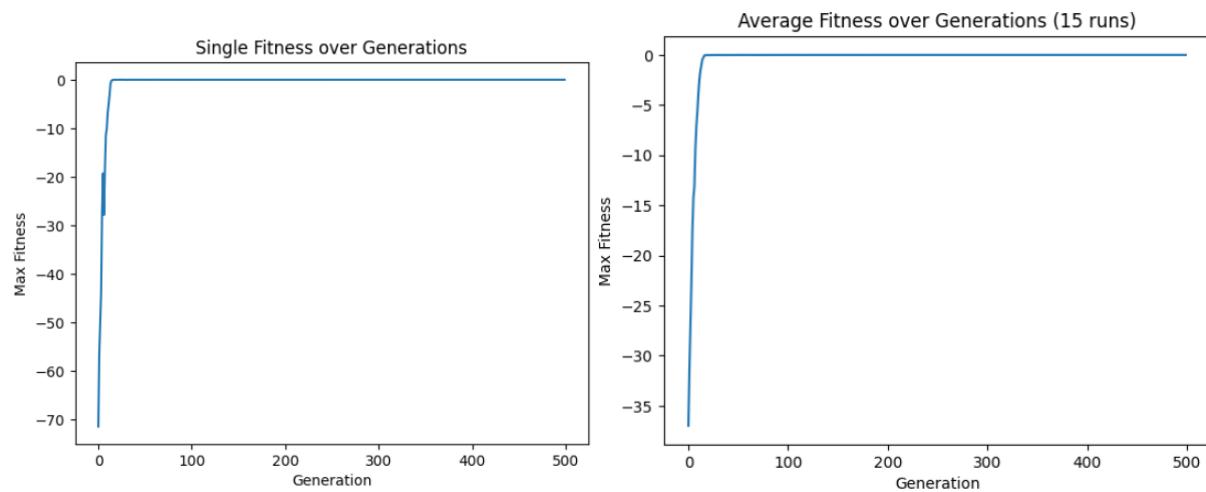
Metoda punktu środkowego: **median**



Rys.7 Metoda wyznaczania środka – **median** – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-36.3817
10	-3.0583
50	-0.0065
100	-0.0035
200	-0.0022
300	-0.0005
400	-0.0002
500	-0.0001

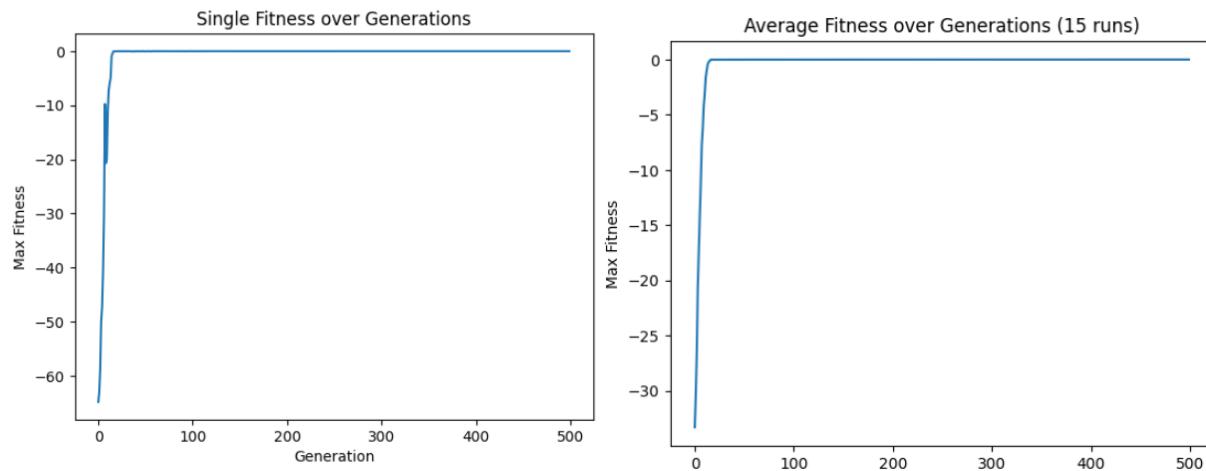
Metoda punktu środkowego: **trimmed_mean**



Rys. 8 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_mean' – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-36.9836
10	-3.8765
50	-0.0049
100	-0.0036
200	-0.0019
300	-0.0010
400	-0.0004
500	-0.0002

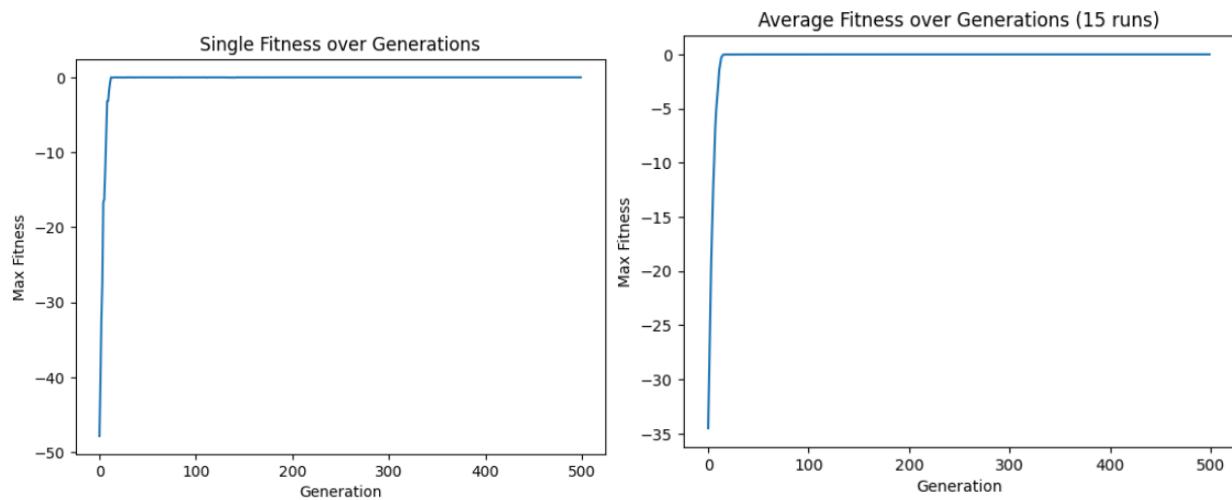
Metoda punktu środkowego: **trimmed_median**



Rys. 9 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_median'- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-33.3055
10	-3.0583
50	-0.0091
100	-0.0027
200	-0.0022
300	-0.0011
400	-0.0002
500	-8.7850e-05

Metoda punktu środkowego: **randomized_weighted_mean**

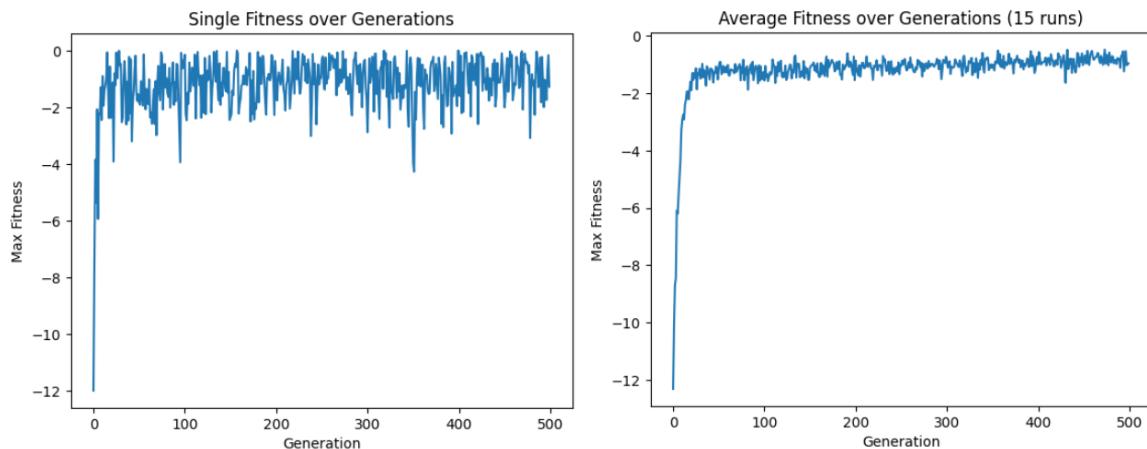


Rys. 10 Metoda wyznaczania środka – "randomized_weighted_mean"- pojedyńczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-34.4976
10	-2.7871
50	-0.0118
100	-0.0066
200	-0.0016
300	-0.0008
400	-0.0002
500	-0.0001

RASTRIGIN

Metoda punktu środkowego: **mean**

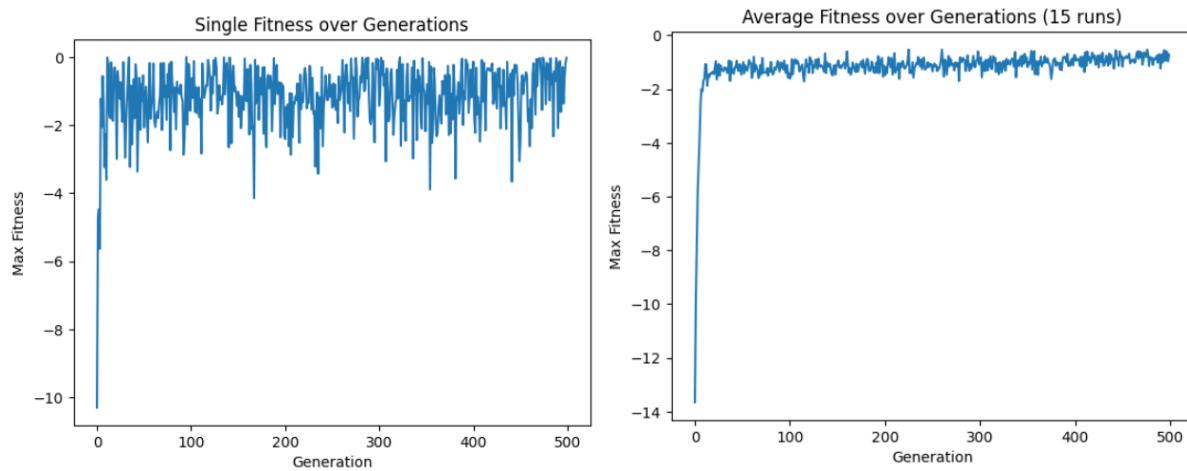


Rys. 11 Metoda wyznaczania środka – mean – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Uśrednione wyniki z 15 powtórzeń:

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-12.3201
10	-2.9314
50	-1.0981
100	-1.5521
200	-0.8589
300	-0.8508
400	-0.9898
500	-0.9502

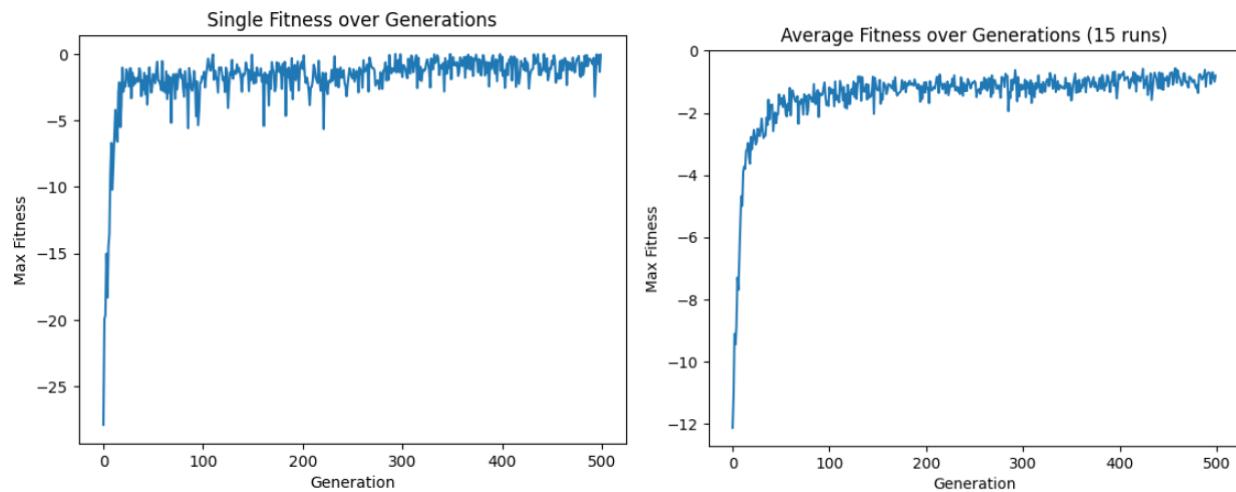
Metoda punktu środkowego: **weighted_mean**



Rys. 12 Metoda wyznaczania środka – **weighted_mean** - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-13.6509
10	-1.6249
50	-1.1253
100	-1.6085
200	-1.4821
300	-0.9438
400	-0.7304
500	-0.7146

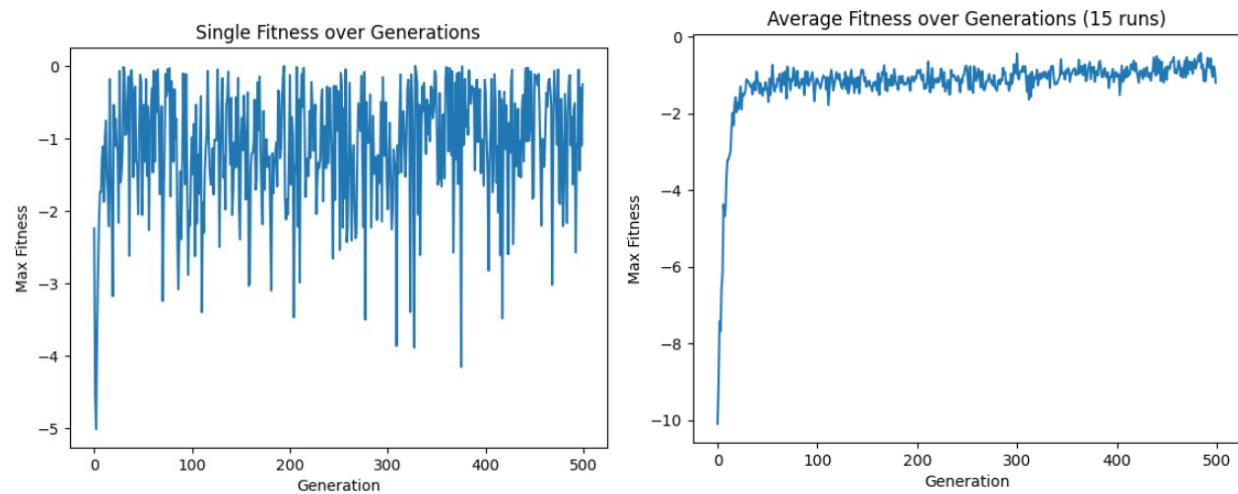
Metoda punktu środkowego: **median**



Rys. 13 Metoda wyznaczania środka – **median** – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-12.1325
10	-4.9915
50	-1.5629
100	-1.1775
200	-1.0110
300	-1.1267
400	-0.9022
500	-0.7989

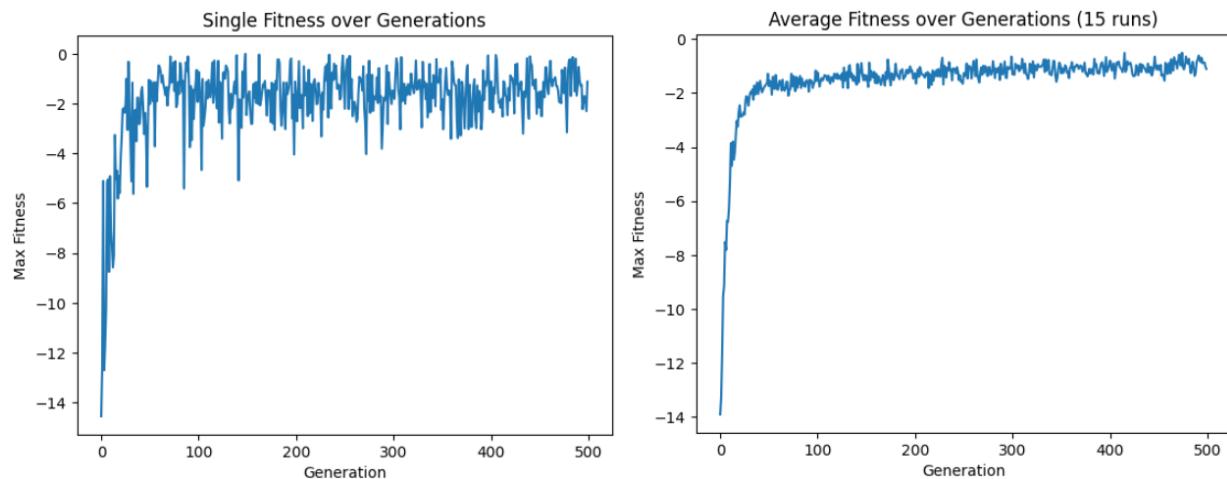
Metoda punktu środkowego: **trimmed_mean**



Rys. 14 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_mean' - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-10.0935
10	-3.2088
50	-1.4259
100	-1.1021
200	-0.8734
300	-0.4410
400	-1.0433
500	-1.1963

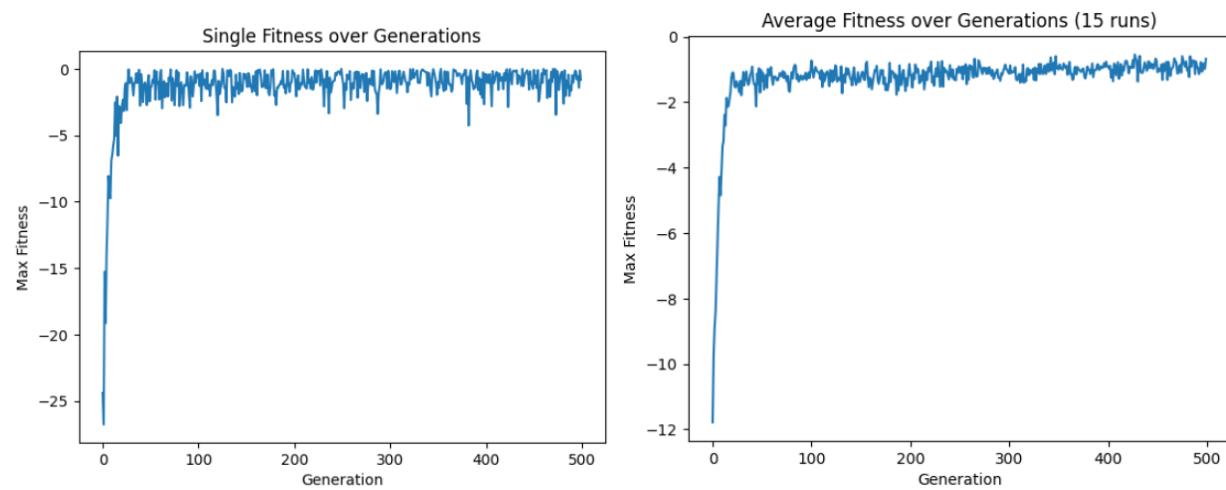
Metoda punktu środkowego: **trimmed_median**



Rys. 15 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_median'- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-13.8985
10	-5.2618
50	-1.7463
100	-1.2349
200	-1.2638
300	-1.3112
400	-0.7998
500	-1.1063

Metoda punktu środkowego: **randomized_weighted_mean**

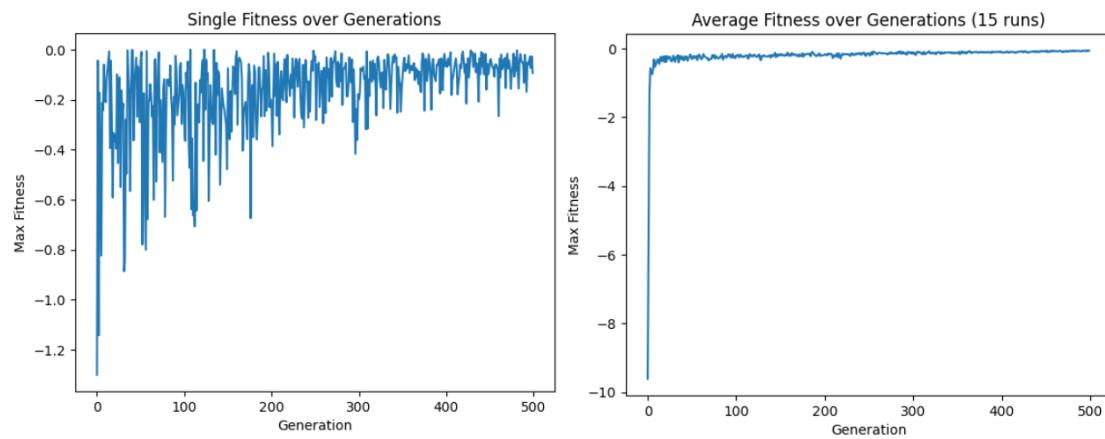


Rys. 16 Metoda wyznaczania środka – "randomized_weighted_mean"- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-11.7803
10	-3.3374
50	-1.3429
100	-0.7282
200	-1.1571
300	-1.1245
400	-0.9055
500	-0.6740

ROSEN BROCK

Metoda punktu środkowego: **mean**

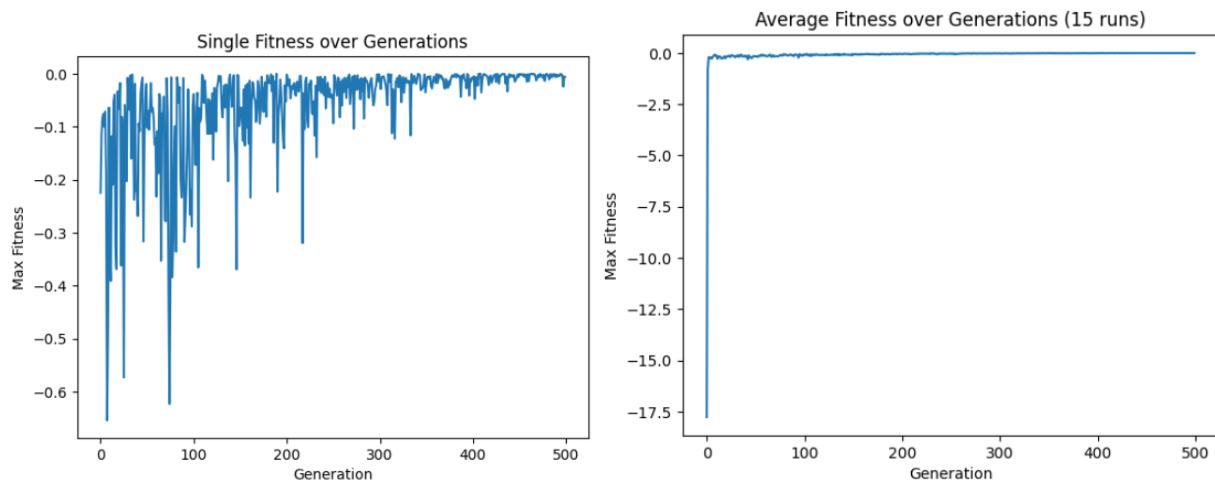


Rys. 17 Metoda wyznaczania środka – *mean* – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Uśrednione wyniki z 15 powtórzeń:

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-9.6111
10	-0.4081
50	-0.3129
100	-0.2072
200	-0.1750
300	-0.1154
400	-0.1207
500	-0.0642

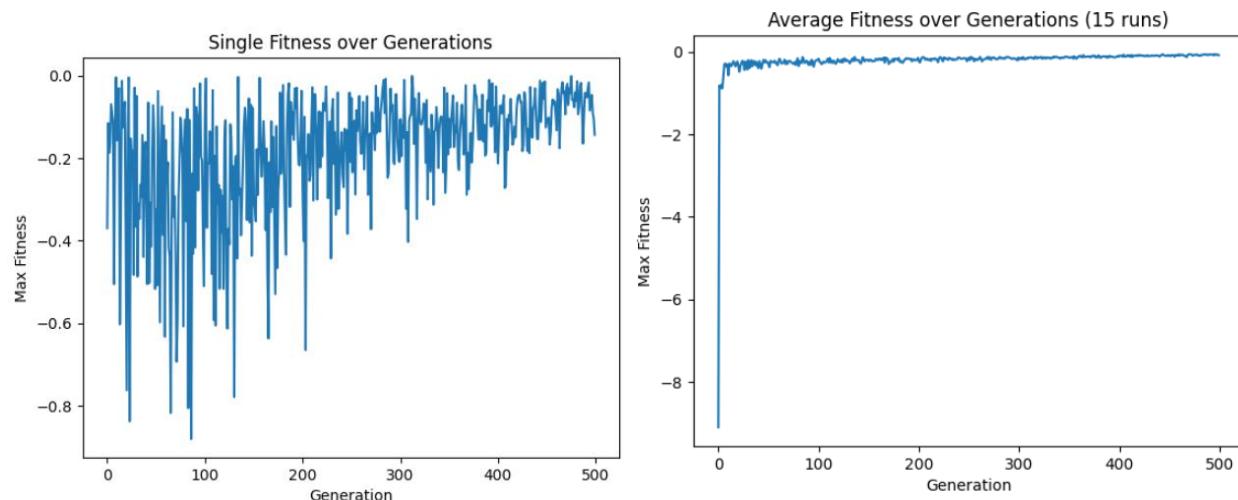
Metoda punktu środkowego: **weighted_mean**



Rys. 18 Metoda wyznaczania środka – **weighted_mean** - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-17.7666
10	-0.12780
50	-0.1633
100	-0.0927
200	-0.0475
300	-0.0183
400	-0.0110
500	-0.0060

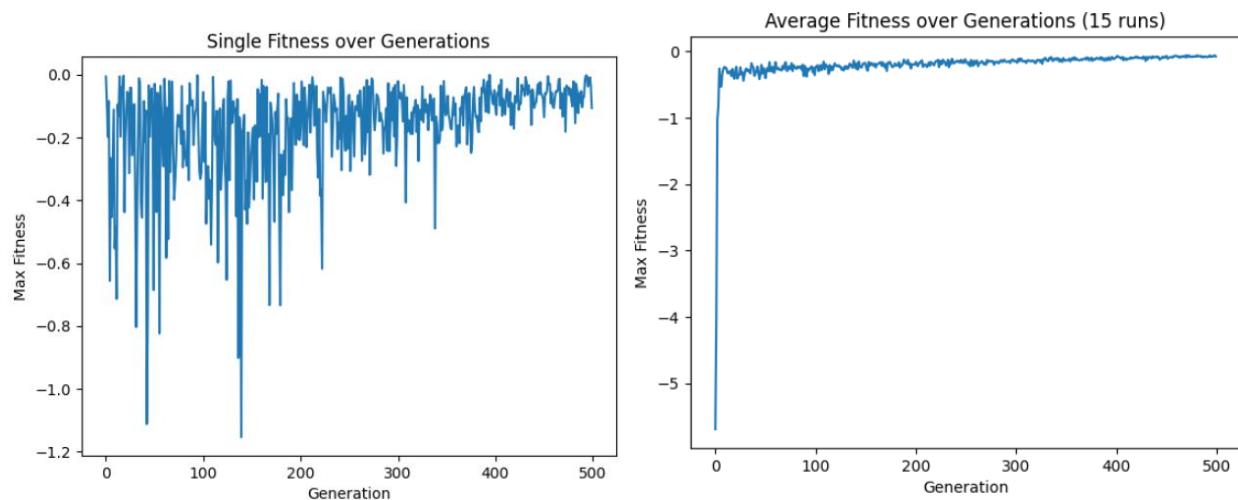
Metoda punktu środkowego: **median**



Rys. 19 Metoda wyznaczania środka – **median** - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-9.1026
10	-0.5712
50	-0.3063
100	-0.1712
200	-0.2350
300	-0.1904
400	-0.0969
500	-0.0833

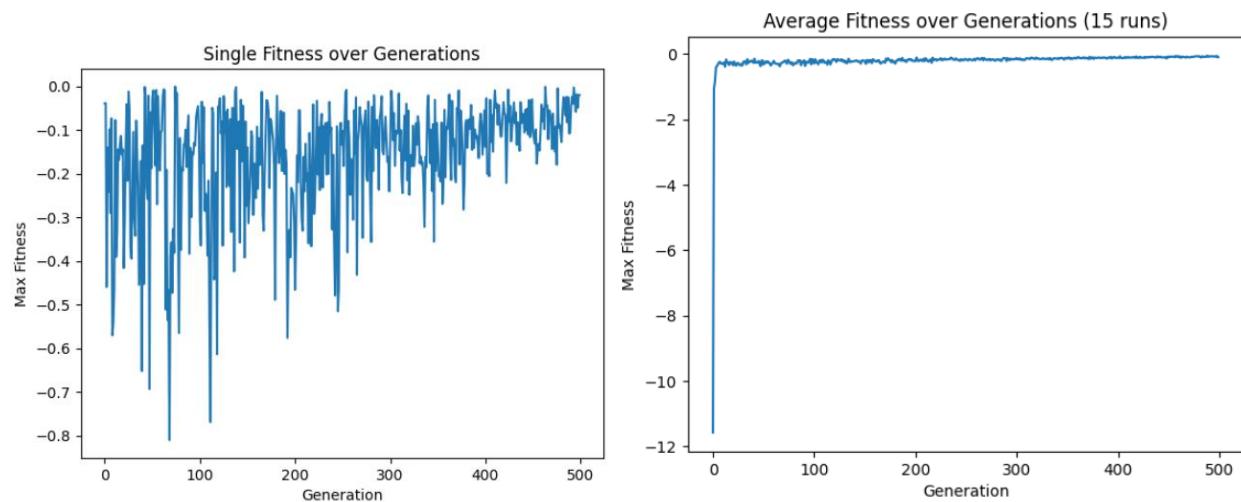
Metoda punktu środkowego: **trimmed_mean**



Rys. 20 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_mean' - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-5.692
10	-0.2515
50	-0.4046
100	-0.2343
200	-0.1609
300	-0.1461
400	-0.0702
500	-0.0785

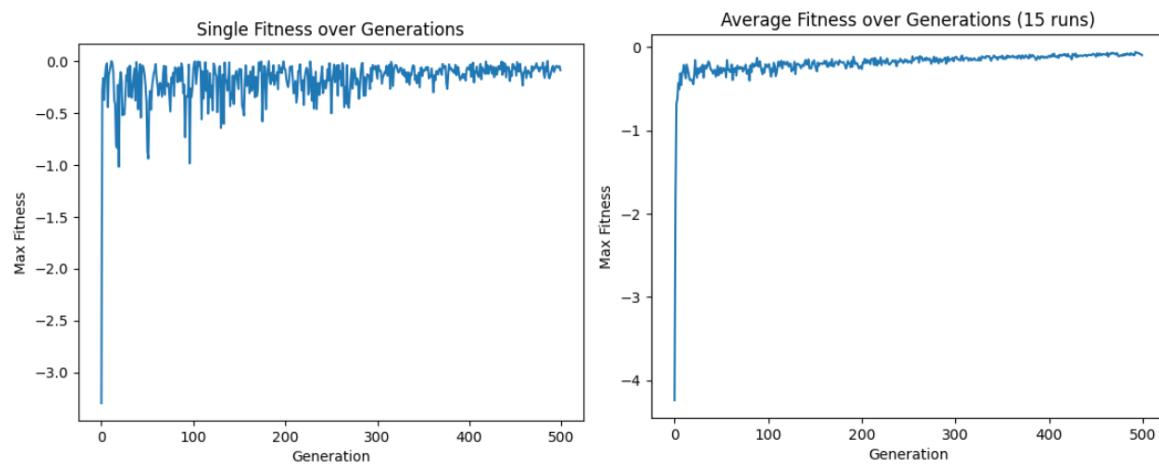
Metoda punktu środkowego: **trimmed_median**



Rys. 21 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_median'- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-11.5784
10	-0.3075
50	-0.3224
100	-0.2880
200	-0.2216
300	-0.1247
400	-0.1145
500	-0.0950

Metoda punktu środkowego: **randomized_weighted_mean**

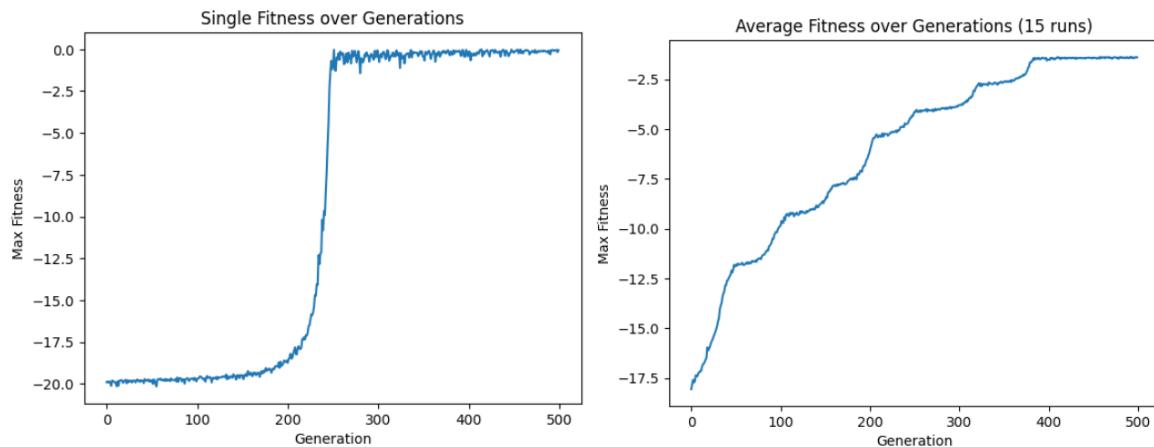


Rys. 22 Metoda wyznaczania środka – "randomized_weighted_mean"- pojedyńczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-4.2402
10	-0.2119
50	-0.3110
100	-0.2073
200	-0.2608
300	-0.1157
400	-0.0996
500	-0.0947

ACKLEY

Metoda punktu środkowego: **mean**

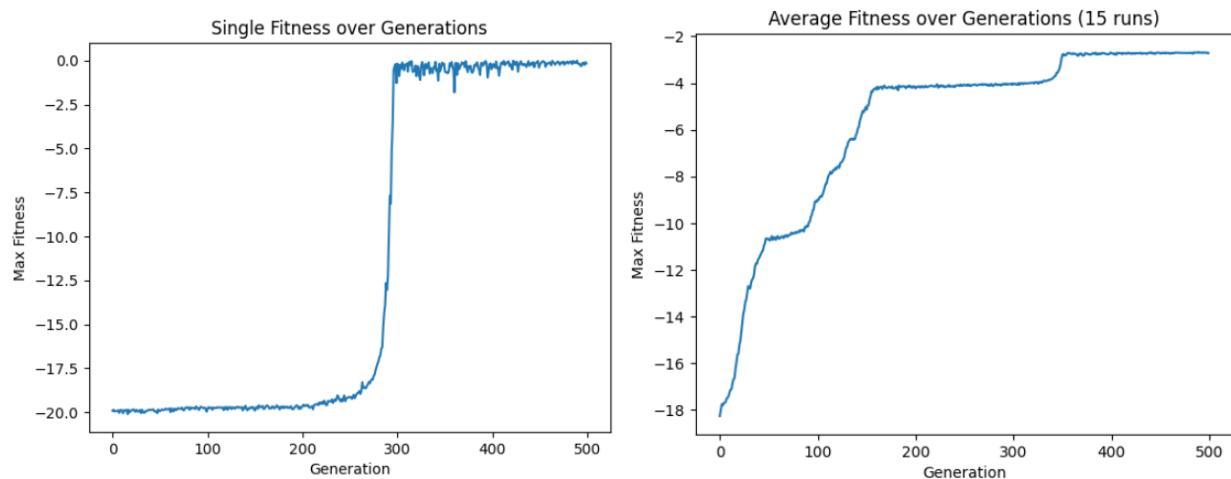


Rys. 23 Metoda wyznaczania środka – mean – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Uśrednione wyniki z 15 powtórzeń:

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-18.0666
10	-17.1628
50	-11.8241
100	-9.8524
200	-6.0621
300	-3.7921
400	-1.5135
500	-1.3981

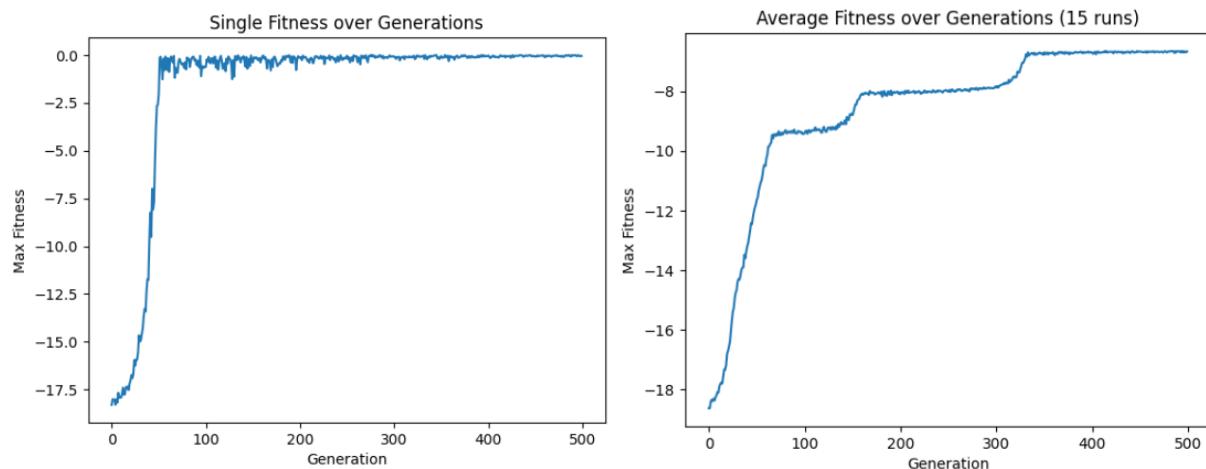
Metoda punktu środkowego: **weighted_mean**



Rys. 24 Metoda wyznaczania środka – **weighted_mean** - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-18.2606
10	-17.2375
50	-10.6873
100	-8.9931
200	-4.2253
300	-4.0277
400	-2.7195
500	-2.7239

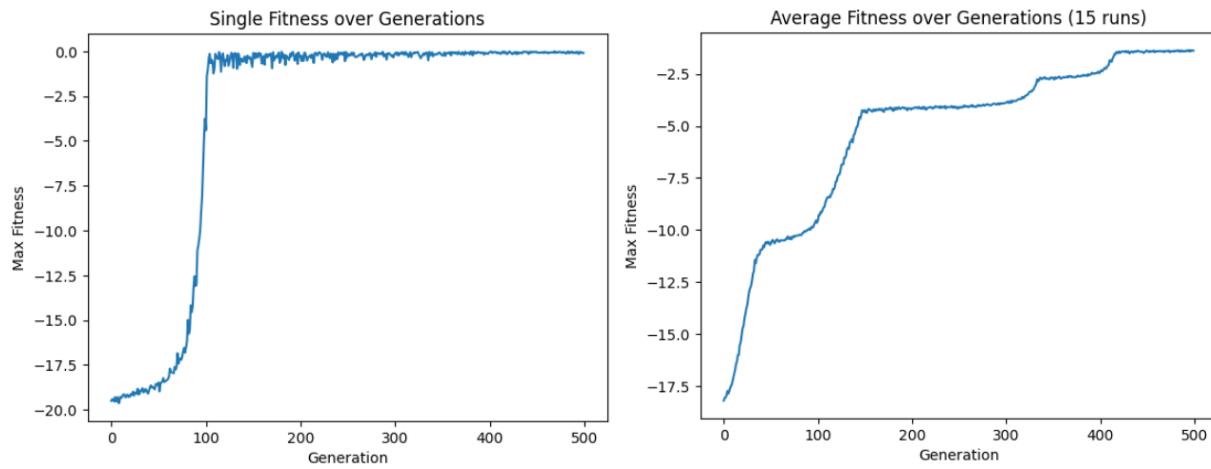
Metoda punktu środkowego: **median**



Rys. 25 Metoda wyznaczania środka – **median** – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-18.6380
10	-18.1139
50	-11.6419
100	-9.4149
200	-8.0969
300	-7.8766
400	-6.7115
500	-6.6665

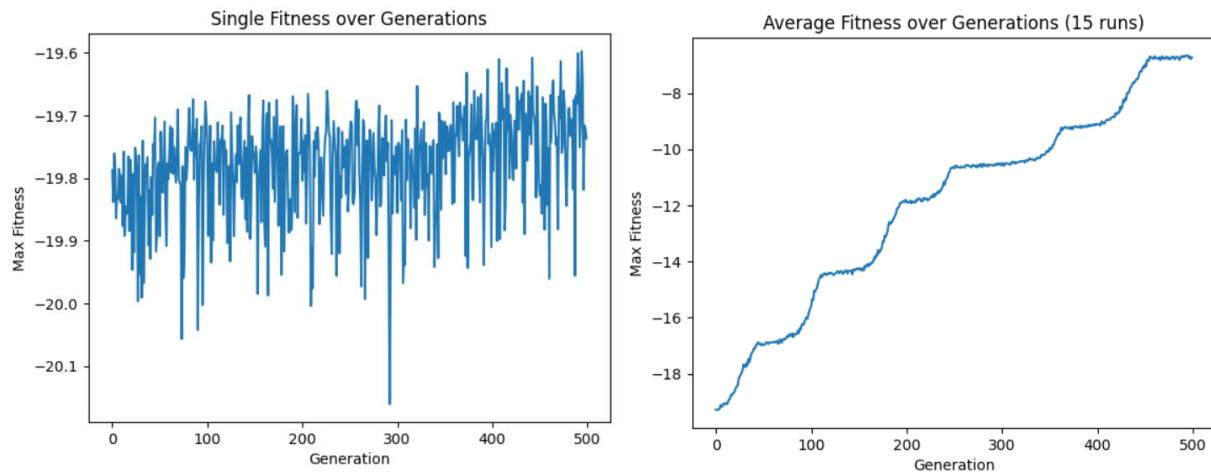
Metoda punktu środkowego: **trimmed_mean**



Rys. 26 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_mean' - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-18.1938
10	-17.1258
50	-10.6644
100	-9.5403
200	-4.1497
300	-3.8690
400	-2.3846
500	-1.3816

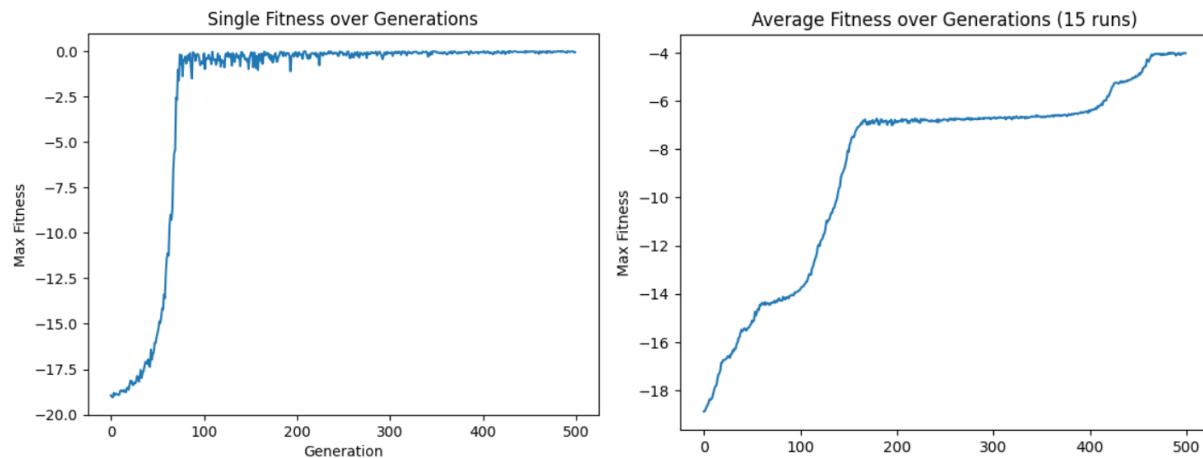
Metoda punktu środkowego: **trimmed_median**



Rys. 27 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_median'- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-19.2795
10	-19.0855
50	-16.9821
100	-15.5712
200	-11.8733
300	-10.5667
400	-9.1022
500	-6.7249

Metoda punktu środkowego: **randomized_weighted_mean**

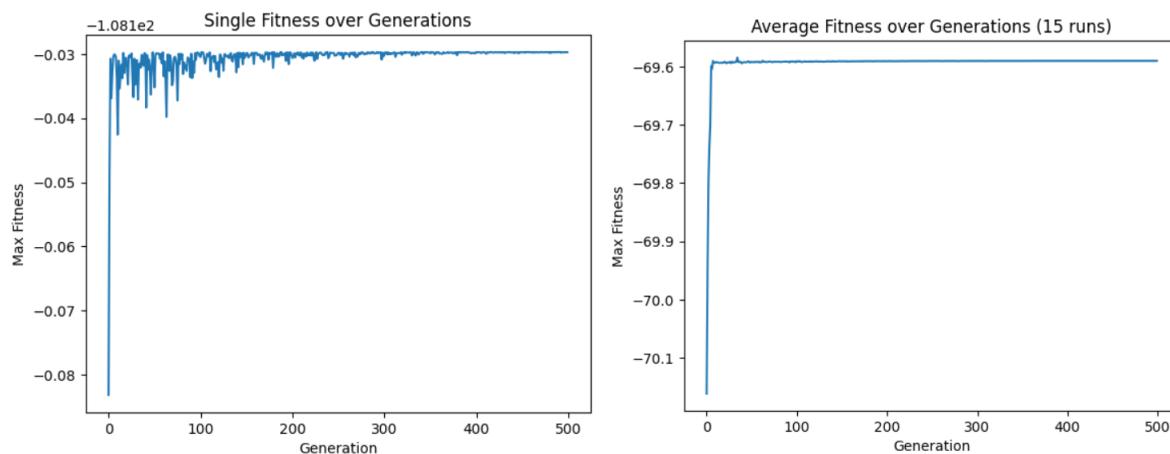


Rys. 27 Metoda wyznaczania środka – "randomized_weighted_mean" – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-18.8767
10	-18.1017
50	-15.1049
100	-13.8034
200	-6.8578
300	-6.7085
400	-6.4472
500	-4.0276

GRIEWANK

Metoda punktu środkowego: **mean**

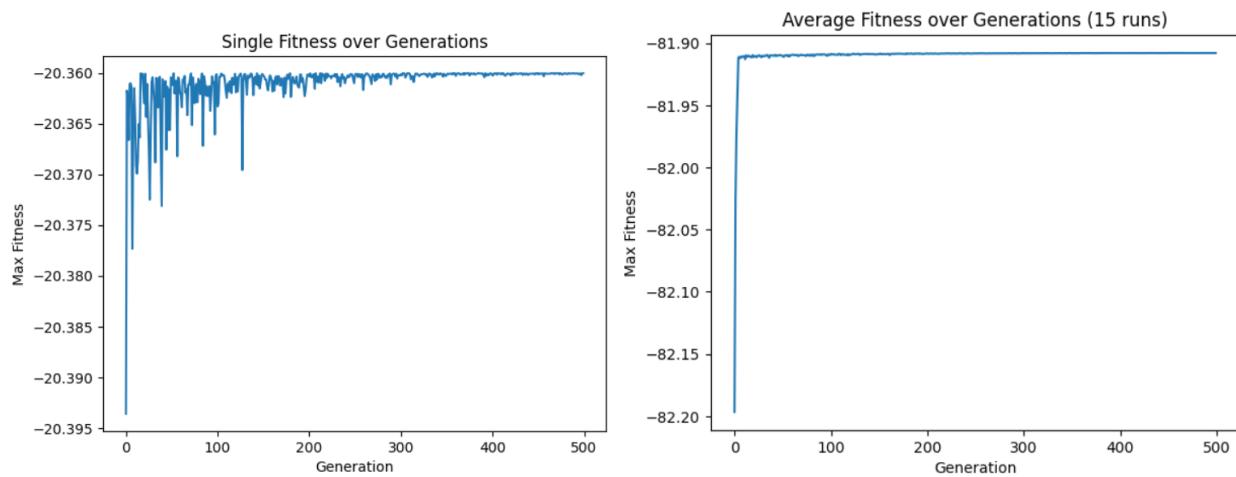


Rys. 28 Metoda wyznaczania środka – *mean* – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Uśrednione wyniki z 15 powtórzeń:

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-70.1611
10	-69.5923
50	-69.5926
100	-69.5911
200	-69.5909
300	-69.5905
400	-69.5904
500	-69.5904

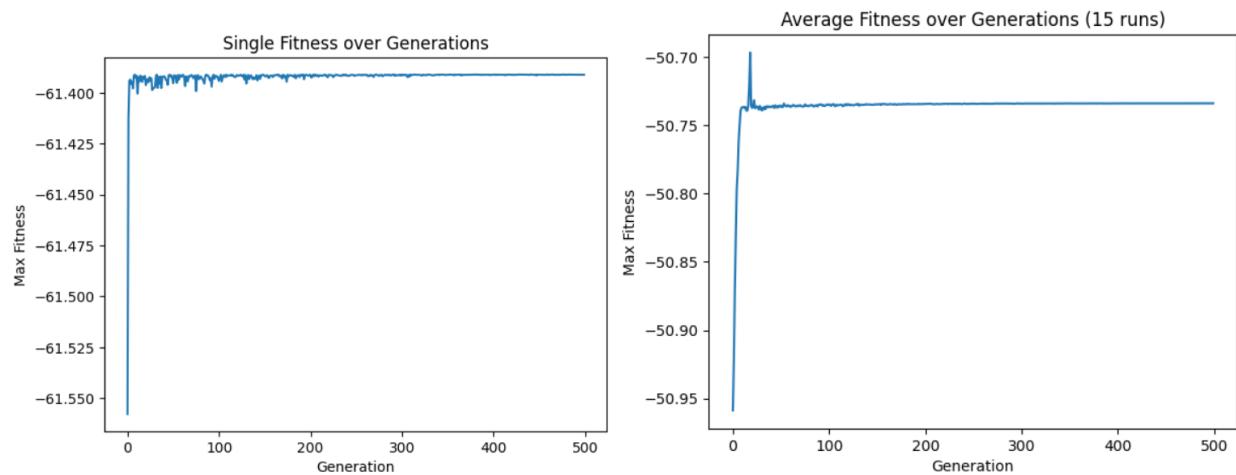
Metoda punktu środkowego: **weighted_mean**



Rys. 29 Metoda wyznaczania środka – **weighted_mean** - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-82.1966
10	-81.9104
50	-81.9102
100	-81.9087
200	-81.9084
300	-81.9081
400	-81.9080
500	-81.9080

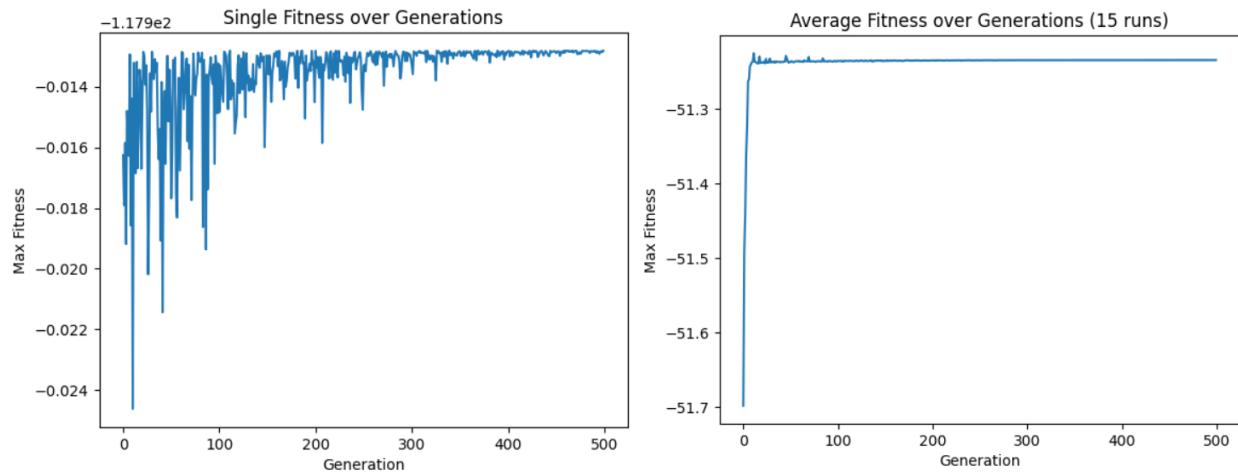
Metoda punktu środkowego: **median**



Rys. 30 Metoda wyznaczania środka – **median** – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-50.9587
10	-50.7369
50	-50.7358
100	-50.7347
200	-50.7344
300	-50.7341
400	-50.7340
500	-50.7339

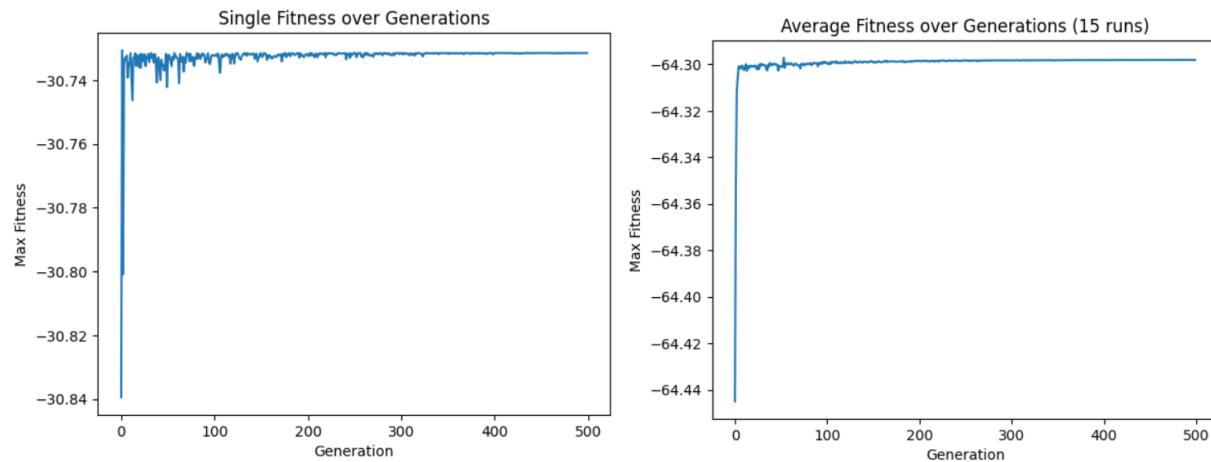
Metoda punktu środkowego: **trimmed_mean**



Rys. 31 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_mean' - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-51.6981
10	-51.2364
50	-51.2371
100	-51.2355
200	-51.2349
300	-51.2347
400	-51.2345
500	-51.2344

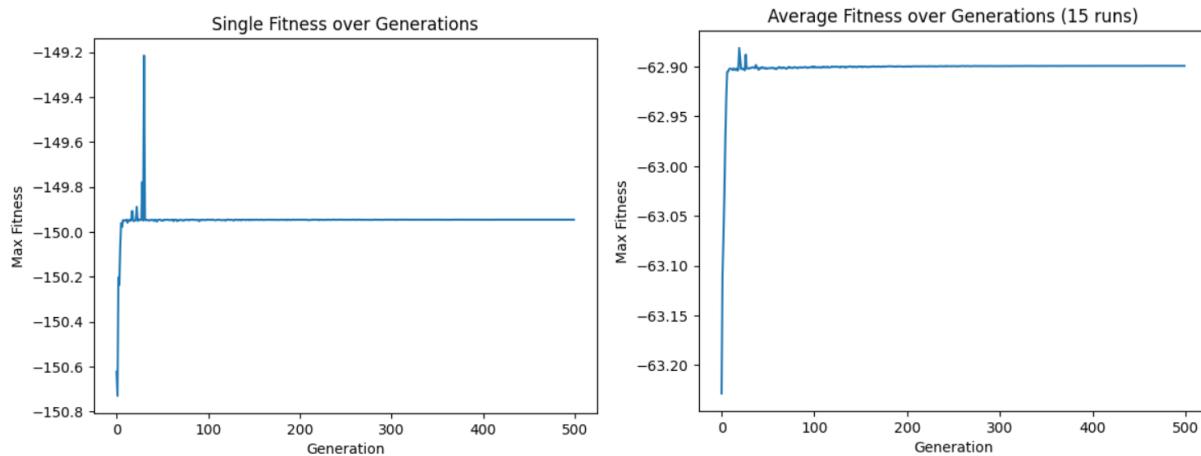
Metoda punktu środkowego: **trimmed_median**



Rys. 32 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_median'- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-64.4449
10	-64.3024
50	-64.3010
100	-64.2993
200	-64.2986
300	-64.2982
400	-64.2981
500	-64.2981

Metoda punktu środkowego: **randomized_weighted_mean**

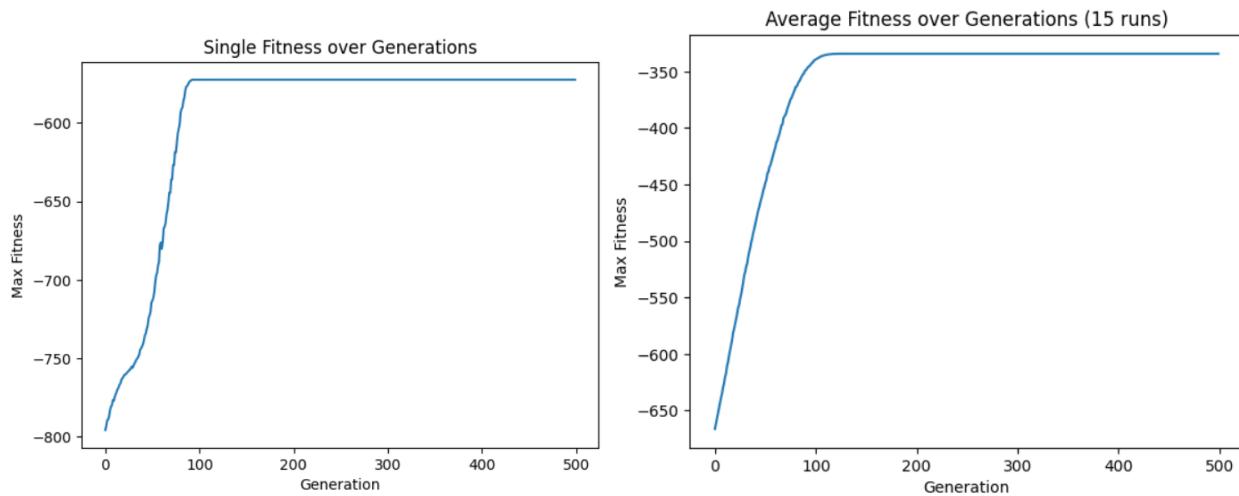


Rys. 33 Metoda wyznaczania środka – "randomized_weighted_mean"- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-63.2283
10	-62.9021
50	-62.9018
100	-62.9008
200	-62.8999
300	-62.8993
400	-62.8992
500	-62.8991

SCHWEFEL

Metoda punktu środkowego: **mean**

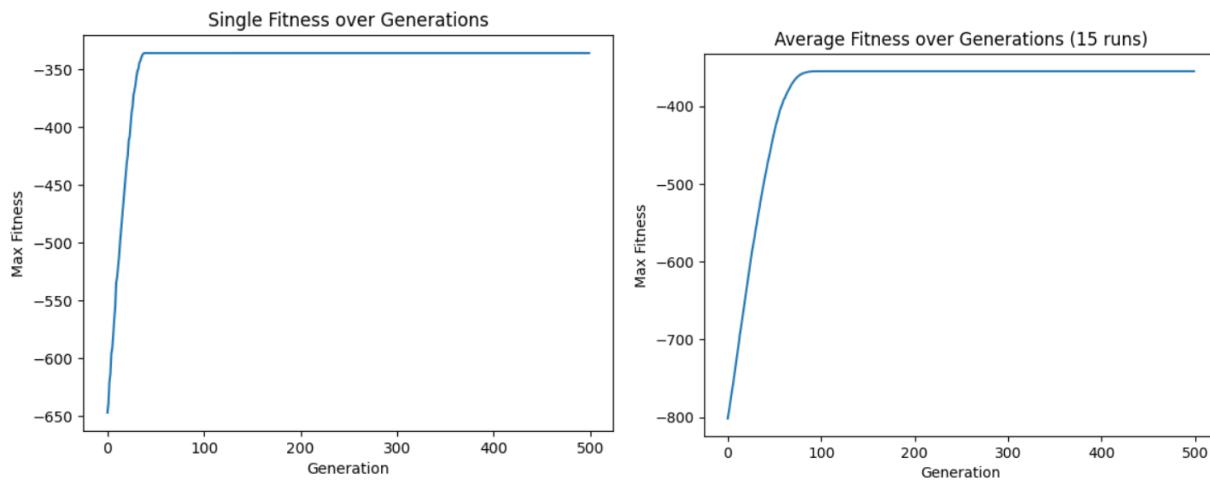


Rys. 34 Metoda wyznaczania środka – **mean** – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Uśrednione wyniki z 15 powtórzeń:

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-666.3277
10	-620.4675
50	-448.5771
100	-339.3266
200	-334.2777
300	-334.2772
400	-334.2771
500	-334.2769

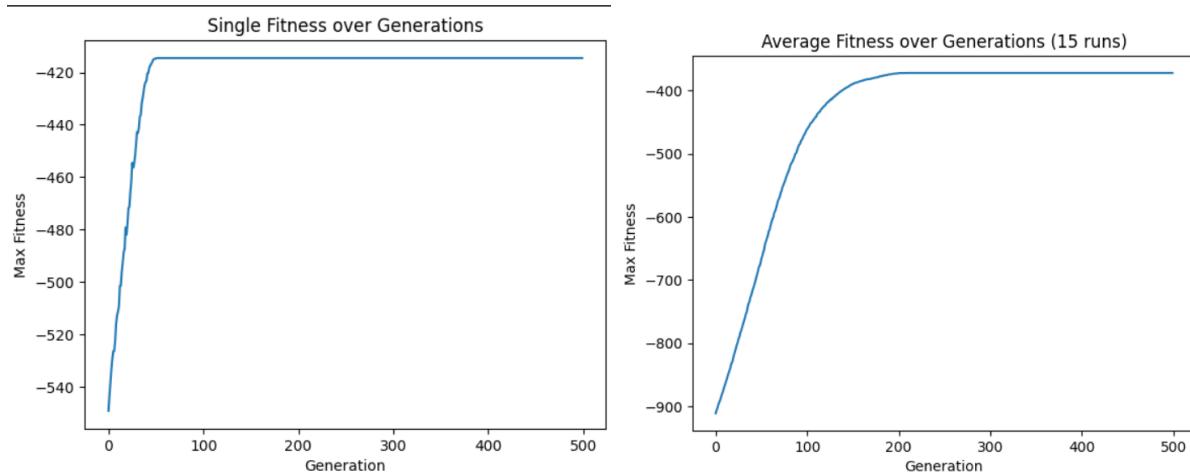
Metoda punktu środkowego: **weighted_mean**



Rys.35 Metoda wyznaczania środka – **weighted_mean** - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-801.7618
10	-720.2744
50	-432.7129
100	-355.3516
200	-355.3512
300	-355.3511
400	-355.3509
500	-355.3509

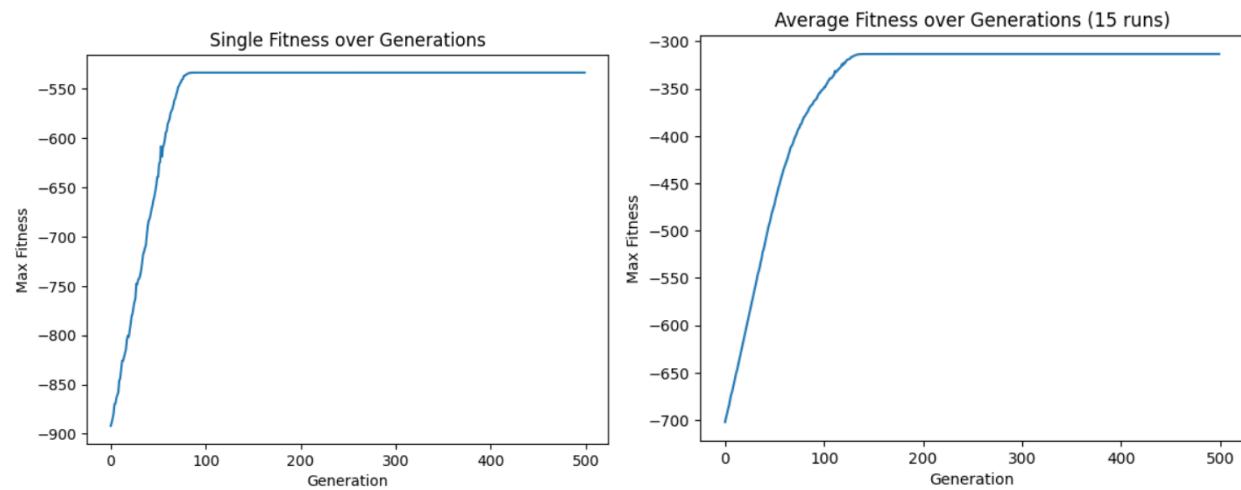
Metoda punktu środkowego: **median**



Rys. 36 Metoda wyznaczania środka – **median** – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-910.7719
10	-866.5593
50	-666.0649
100	-461.1926
200	-372.9198
300	-372.4905
400	-372.4897
500	-372.4896

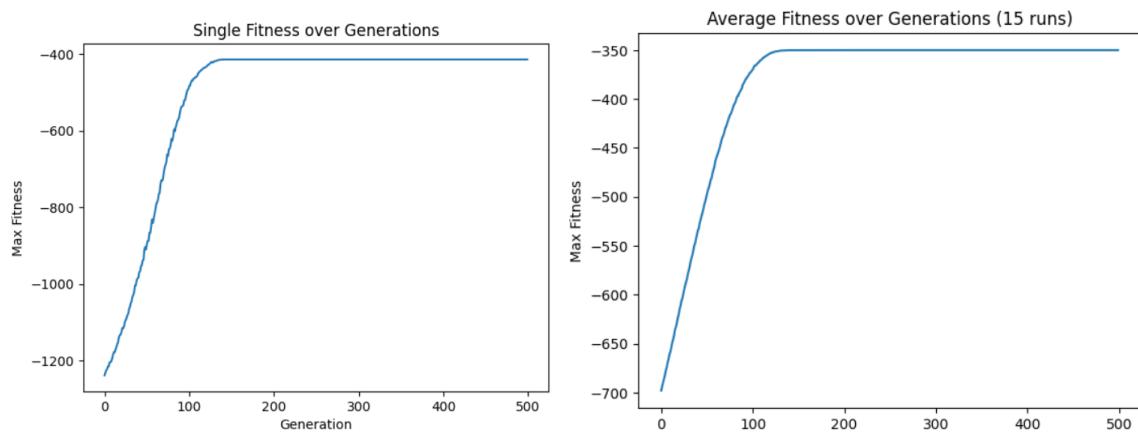
Metoda punktu środkowego: **trimmed_mean**



Rys. 37 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_mean' - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-702.1449
10	-656.4348
50	-471.8671
100	-348.6525
200	-313.3279
300	-313.3268
400	-313.3267
500	-313.3266

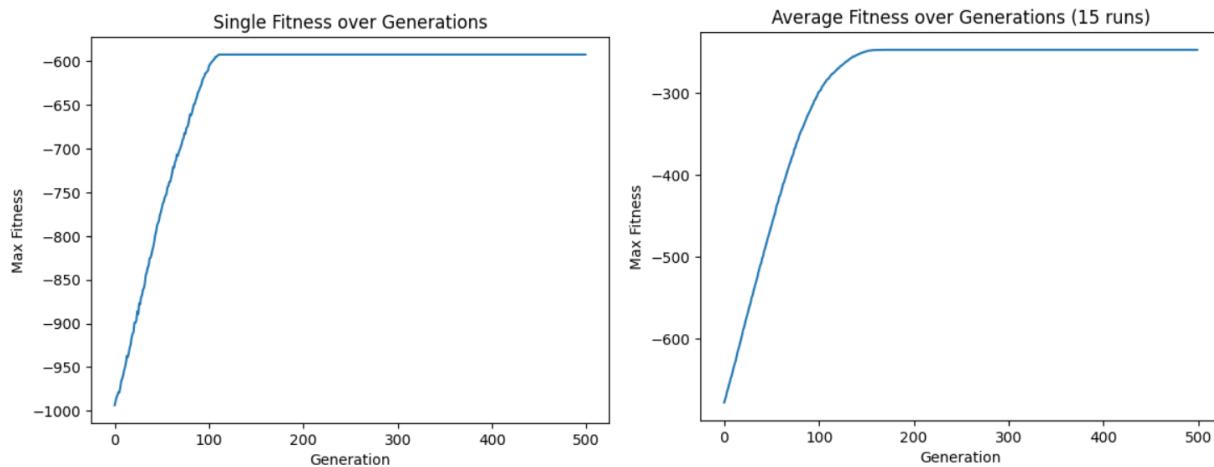
Metoda punktu środkowego: **trimmed_median**



Rys. 38 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_median'- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-697.9643
10	-658.2248
50	-496.7212
100	-370.0110
200	-350.1384
300	-350.1379
400	-350.1375
500	-350.1374

Metoda punktu środkowego: **randomized_weighted_mean**



Rys. 39 Metoda wyznaczania środka – "randomized_weighted_mean"- pojedyńczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)

Generacja	Wartość najlepszego dopasowania w danej populacji
0	-677.4203
10	-634.4683
50	-461.3697
100	-298.6924
200	-247.4541
300	-247.4535
400	-247.4530
500	-247.4529

Zestawienie wyników

Metoda wyznaczania średnia populacji	Sphere	Rastrigin	Rosenbrock	Ackley	Griewank	Schwefel	Średni czas [s]
mean	0.8463	0.7943	0.8174	0.9592	0.9409	0.7960	0.8363
weighted_mean	0.7561	0.7793	0.8349	0.8981	0.9076	0.7397	0.8026
median	0.8889	0.8603	0.8745	0.9564	1.0001	0.8551	0.8883
trimmed_mean	0.8165	0.8323	0.8513	0.9798	0.9653	0.8022	0.8562
trimmed_median	0.8295	0.8474	0.8763	0.9637	0.9749	0.8406	0.8723
randomized_weighted_mean	0.8223	0.8235	0.8840	0.9773	0.9888	0.8388	0.8738

Analizując powyższą tabelę widać, że algorytm CMA-Es najszybciej radzi sobie z optymalizacją funkcji Schwefela, najwolniej zaś z funkcją Griewank. Średni czas optymalizacji dla poszczególnych metod wyznaczania średnia populacji zawiera się w przedziale (0.8, 0.89) sekundy, co jest dość dobrym wynikiem, patrząc na złożoność niektórych funkcji, nawet mimo ich niepełnej zbieżności. Statystycznie najszybszą metodą jest średnia ważona (weighted_mean) z czasem 0.8026 sekundy, najwolniejszą zaś metoda medianowa – 0.8883 sekundy.

Patrząc na poszczególne metody wyznaczania średnia populacji można powiedzieć, że:

- średnia arytmetyczna (mean) – jest najprostsza do implementacji, ale może nie zawsze prowadzić do najlepszej zbieżności
- średnia ważona (weighted mean) - może zapewnić lepsze wyniki dzięki różnicowaniu wag w porównaniu z klasyczną średnią.
- Losowa średnia ważona (randomized weighted mean) - wprowadza element losowości, co może pomóc w uniknięciu lokalnych minimów, daje największą różnorodność wyników, co może być korzystne w niektórych zastosowaniach, ale generalnie jest też mniej przewidywalna.
- mediana (median) – jest bardziej odporna na skrajne wartości, co może poprawić stabilność, ale również wydłużyć czas optymalizacji
- średnia odcięta (trimmed mean) - jest w stanie poprawić wyniki poprzez wyeliminowanie skrajnych wartości, szczególnie gdy dane są zaszumione.
- Mediana odcięta (trimmed median) - podobnie jak w przypadku średniej odciętej, ale z potencjalnie większą stabilnością.

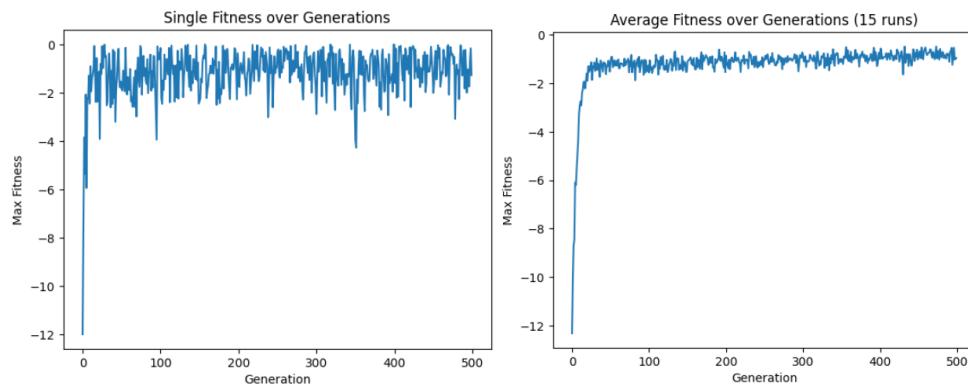
Do dalszych eksperymentów zmiany poszczególnych parametrów wybrano funkcję celu – Rastrigin.

6.1.2. Sprawdzenie wpływu wielkości populacji na wyniki w zależności od metody wyboru punktu środkowego dla funkcji Rastrigin

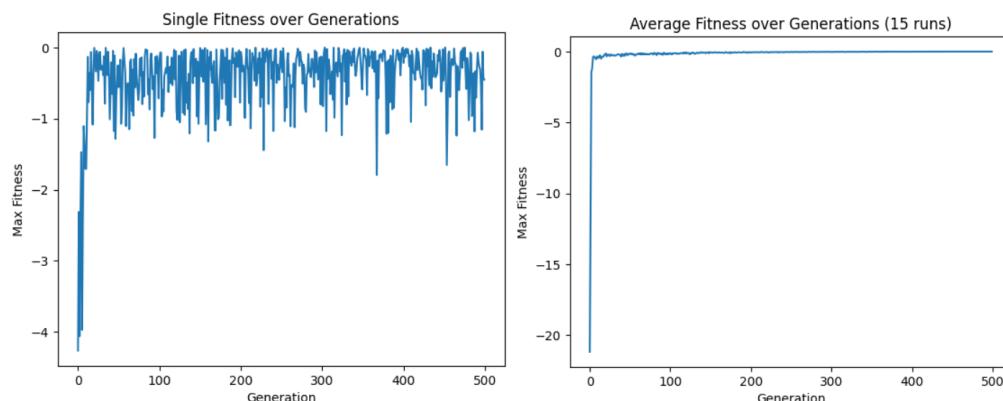
W tej części zmianie będzie ulegać jednajnie sposób wyznaczania środka populacji oraz wielkość tejże populacji, reszta parametrów pozostaje niezmienna równa:

- `central_point_function_name = ['mean', 'weight_mean', 'median', 'trimmed_mean', 'trimmed_median', 'randomized_weighted_mean']`
- `obj_func = 'rastrigin'`
- `population_size= [100, 500, 1000]`
- `sigma = 0.7`
- `proportion_to_cut = 0.1`

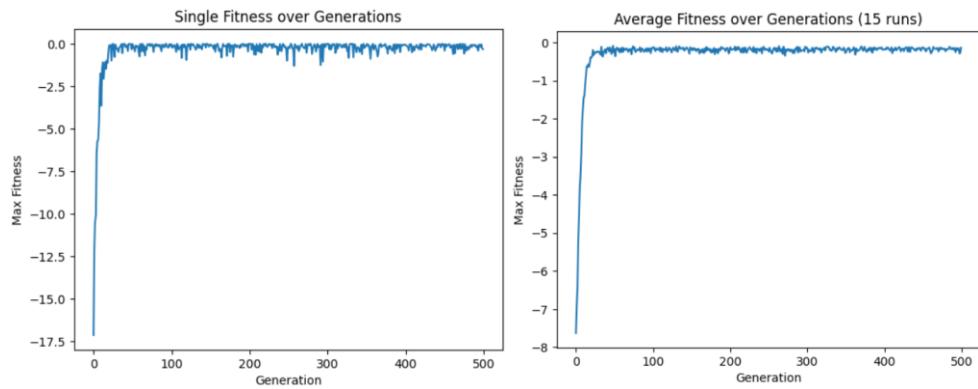
Metoda punktu środkowego: **mean**



Rys. 46 Metoda wyznaczania środka – mean – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)
dla populacji = 100

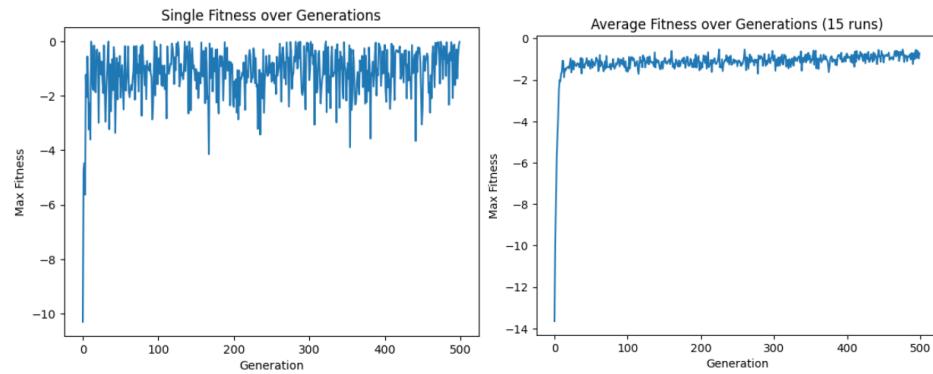


Rys. 47 Metoda wyznaczania środka – mean – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)
dla populacji = 500

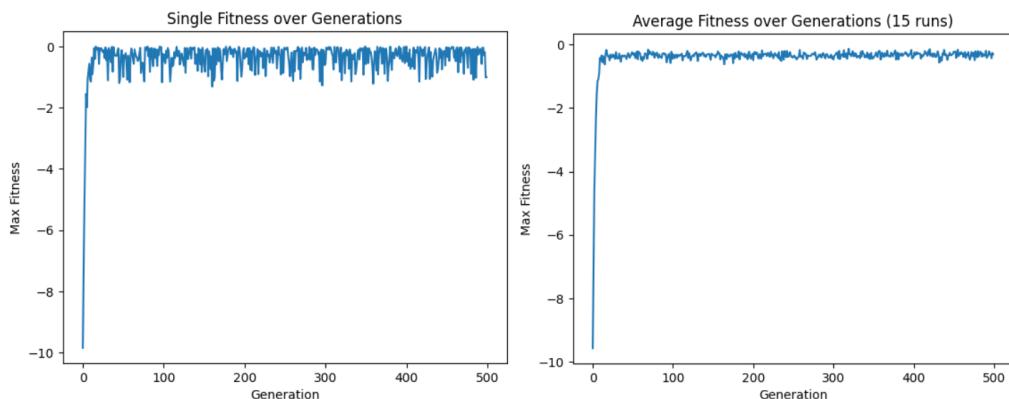


Rys. 48 Metoda wyznaczania średnia – mean – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)
dla populacji = 1000

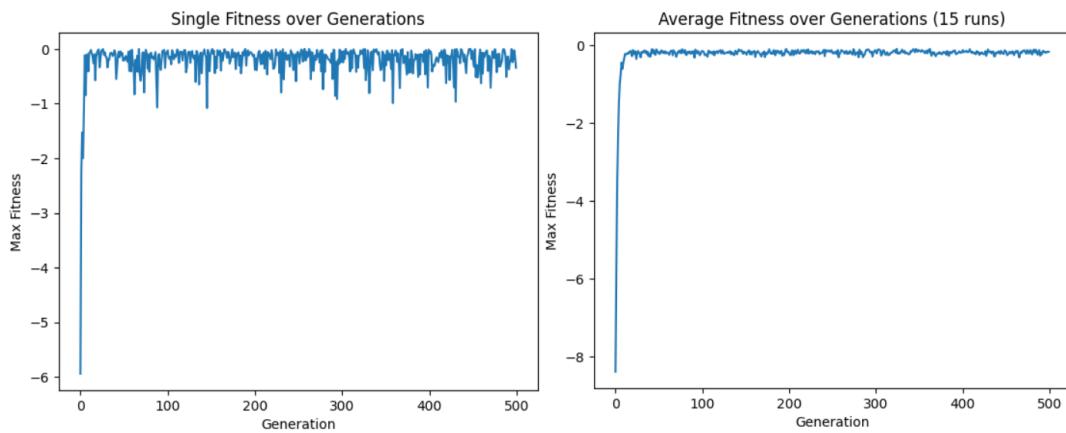
Metoda punktu środkowego: **weighted_mean**



Rys. 49 Metoda wyznaczania średnia – weighted_mean - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla populacji = 100

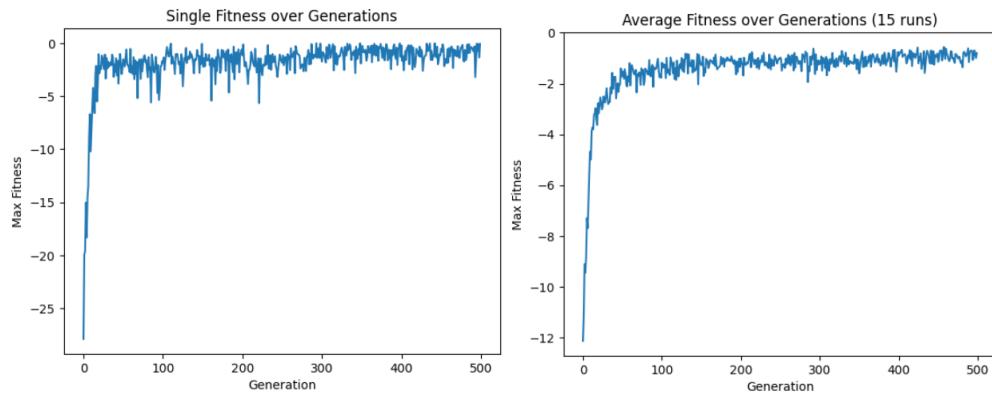


Rys. 50 Metoda wyznaczania średnia – weighted_mean - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla populacji = 500

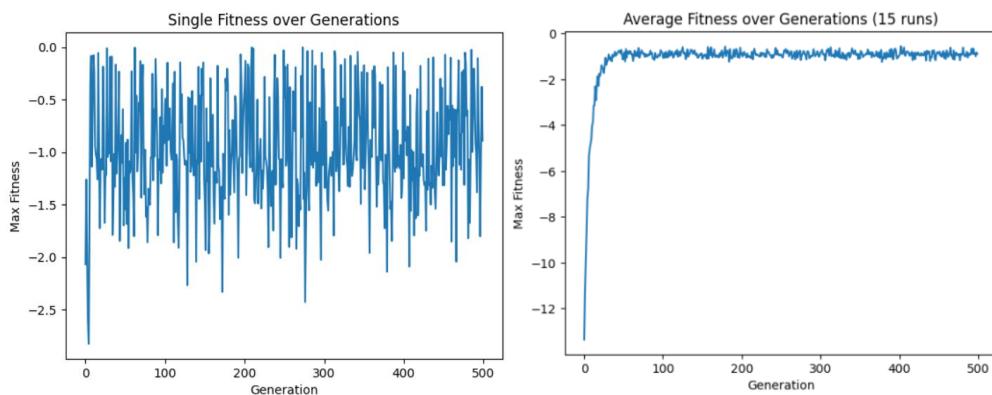


Rys. 51 Metoda wyznaczania średnia – *weighted_mean* - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla populacji = 1000

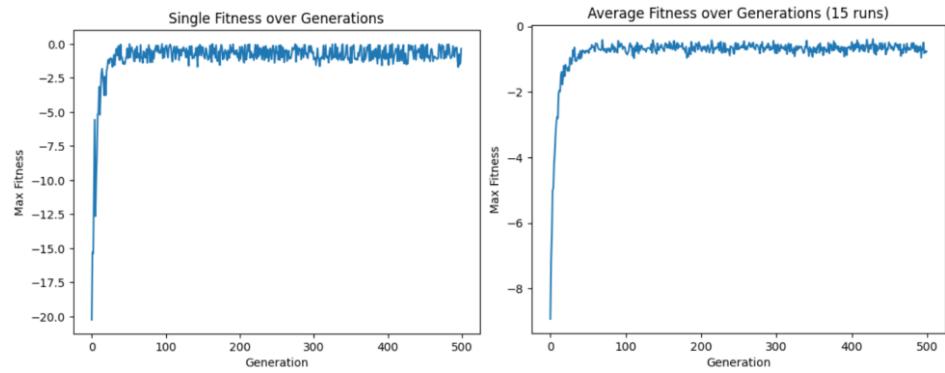
Metoda punktu środkowego: **median**



Rys. 52 Metoda wyznaczania średnia – *median* - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla populacji = 100

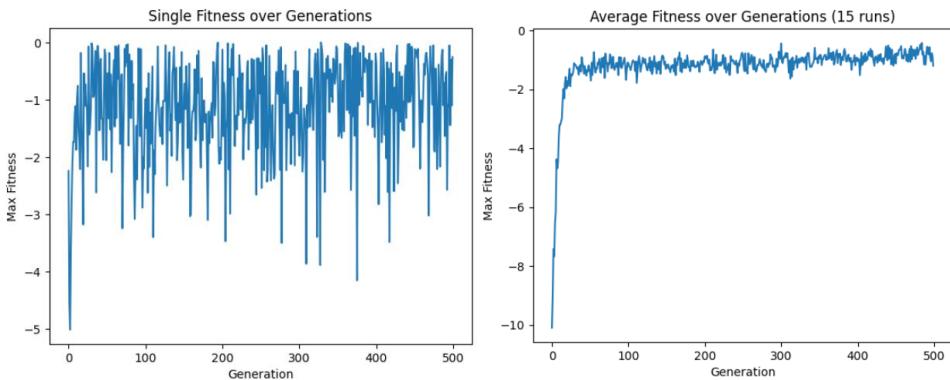


Rys. 53 Metoda wyznaczania średnia – *median* - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla populacji = 500

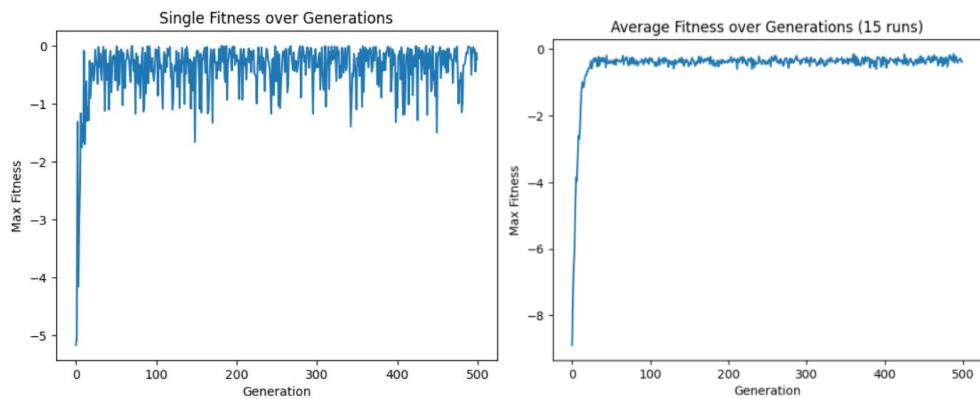


Rys. 54 Metoda wyznaczania środka – median - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)
dla populacji = 1000

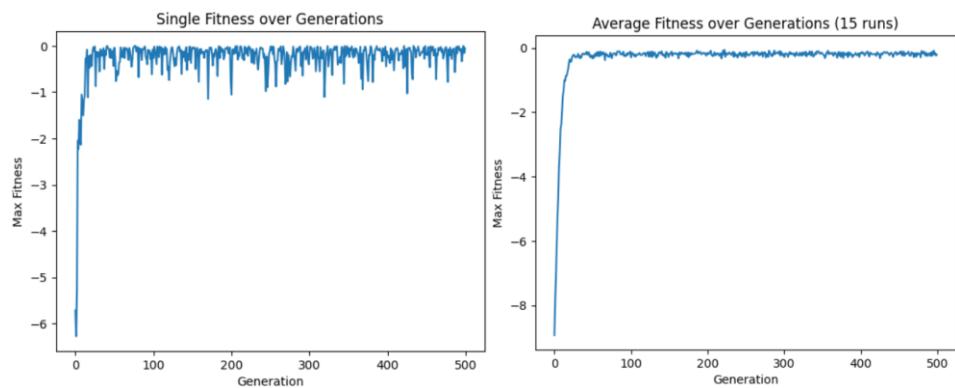
Metoda punktu środkowego: **trimmed_mean**



Rys. 55 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_mean' - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla populacji = 100

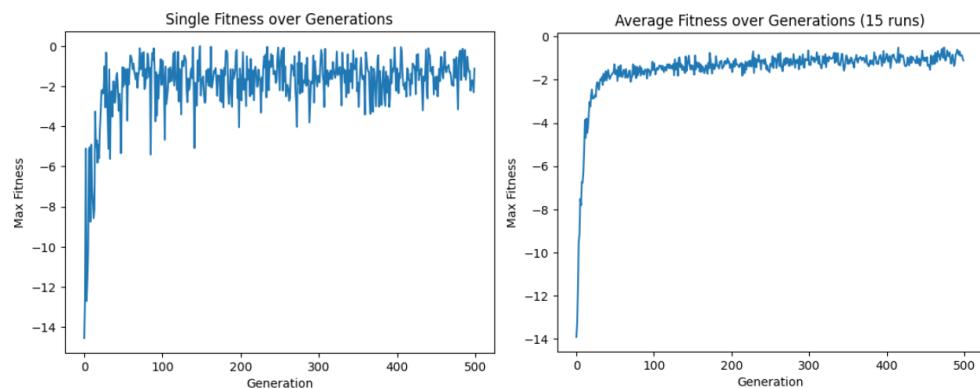


Rys. 56 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_mean' - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla populacji = 500

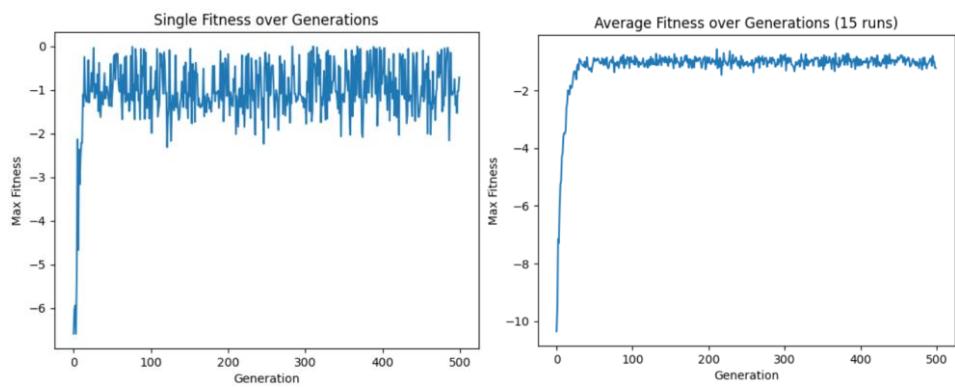


Rys. 57 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_mean' - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla populacji = 1000

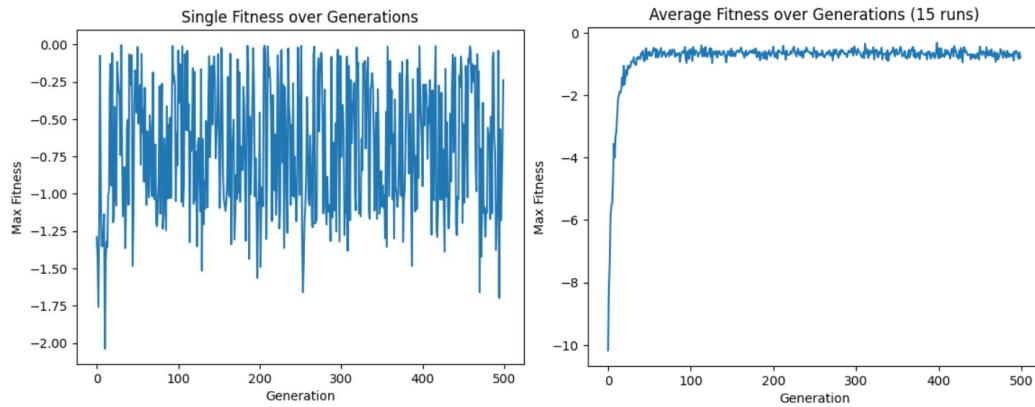
Metoda punktu środkowego: **trimmed_median**



Rys. 58 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_median'- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla populacji = 100

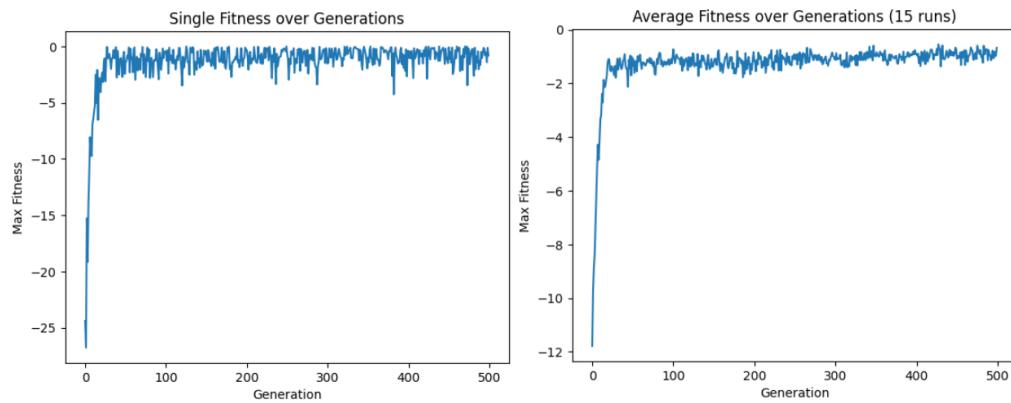


Rys. 59 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_median'- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla populacji = 500

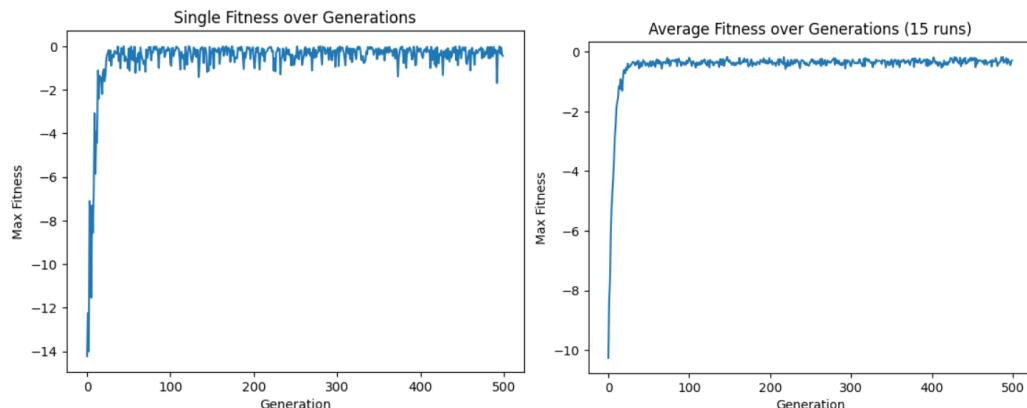


Rys. 60 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_median'- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla populacji = 1000

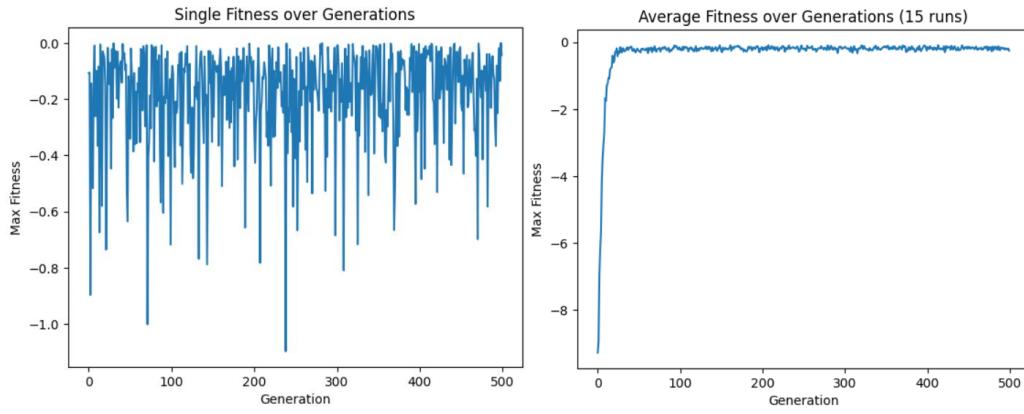
Metoda punktu środkowego: **randomized_weighted_mean**



Rys. 61 Metoda wyznaczania środka – "randomized_weighted_mean"- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla populacji = 100



Rys. 62 Metoda wyznaczania środka – "randomized_weighted_mean"- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla populacji = 500



Rys. 63 Metoda wyznaczania środka – "randomized_weighted_mean"- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla populacji = 1000

Zestawienie wyników

	Czas optymalizacji w zależności od wielkości populacji w generacji			
Metoda wyznaczania środka populacji	100	500	1000	
mean	0.7942	1.8221	5.9676	
weighted_mean	0.7793	2.0560	6.5600	
median	0.8603	1.9891	6.1969	
trimmed_mean	0.8323	1.9580	6.4425	
trimmed_median	0.8475	2.0441	6.3462	
randomized_weighted_mean	0.8235	2.0294	6.1325	
	0.82285	1.9831	6.2742	Średni czas [s]

Wnioski

Większa liczba osobników w populacji może prowadzić do lepszego przeszukiwania przestrzeni rozwiązań (eksploracji), dzięki czemu algorytm ma większe szanse na znalezienie globalnego minimum, zamiast zatrzymania się w lokalnym. Wiąże się to jednak z zwiększoną kosztem obliczeniowym, zarówno w kontekście czasu, jak i zasobów.

Zwiększenie wielkości populacji generalnie poprawia jakość wyników, niezależnie od metody wyboru punktu środkowego.

Większa liczba osobników może pozwolić na dokładniejsze badanie obszarów wokół potencjalnych minimów, co zwiększa precyzję poszukiwań. Może to być szczególnie korzystne, gdy algorytm zbliża się do optymalnego rozwiązania.

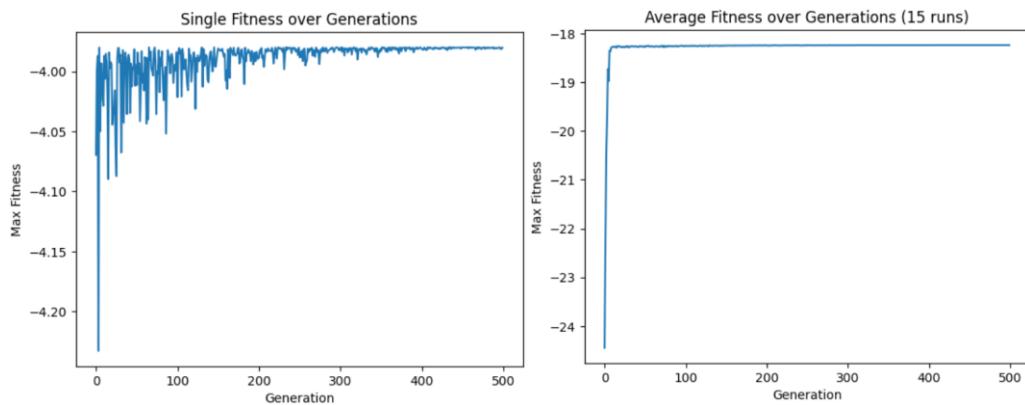
Zwiększenie populacji prowadzi do większej liczby ocen funkcji celu w każdej generacji. Może to zwiększyć dokładność estymacji gradientów oraz innych statystyk używanych przez algorytm do adaptacji macierzy kowariancji.

6.1.4. Sprawdzenie wpływu wielkości parametru kroku sigma wyniki w zależności od metody wyboru punktu środkowego dla funkcji Rastrigin

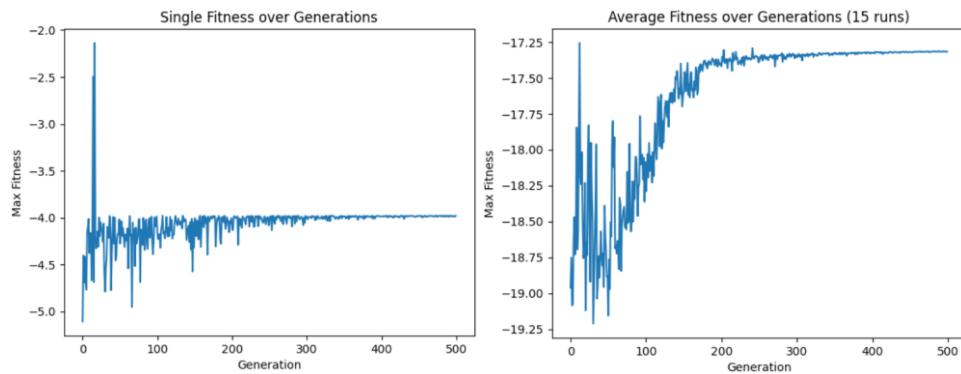
W tej części zmianie będzie ulegać jednane sposoby wyznaczania środka populacji oraz wartość parametru kroku sigma, reszta parametrów pozostaje niezmienna równa:

- central_point_function_name = ['mean', 'weight_mean', 'median', 'trimmed_mean', 'trimmed_median', 'randomized_weighted_mean']
- obj_func = 'rastrigin'
- population_size= 100
- sigma = [0.1 , 0.3 , 0.7]
- proportion_to_cut = 0.1

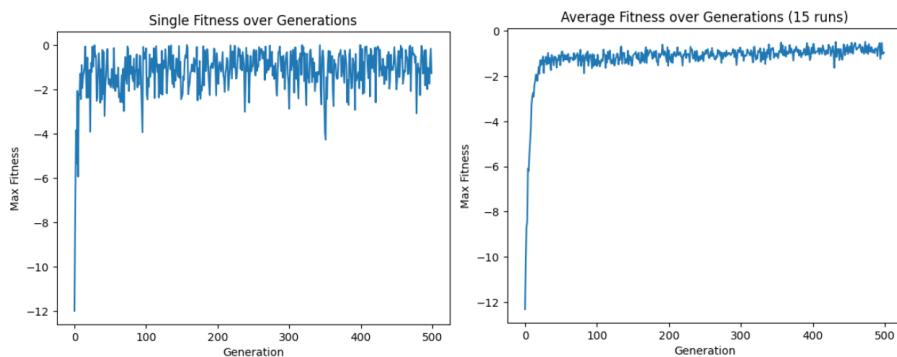
Metoda punktu środkowego: **mean**



Rys. 82 Metoda wyznaczania środka – **mean** – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla $\sigma = 0.1$

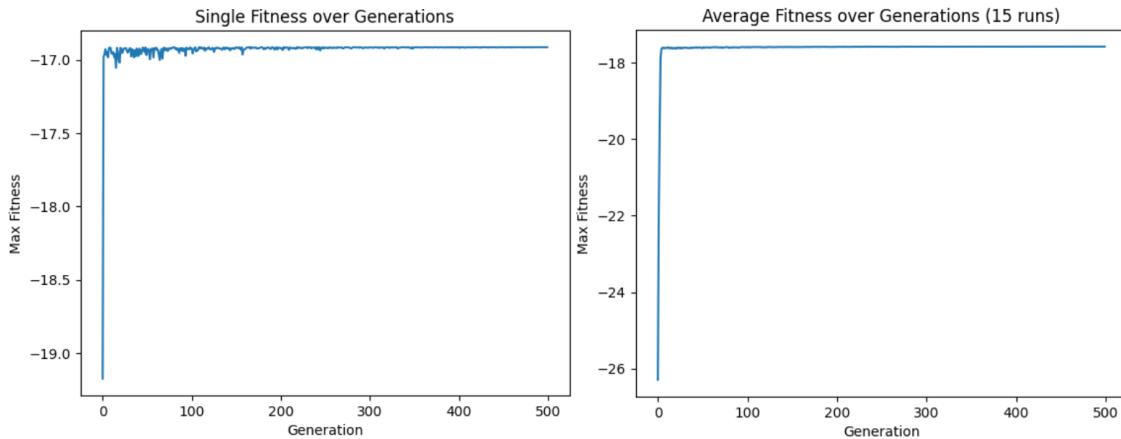


Rys. 83 Metoda wyznaczania środka – **mean** – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla $\sigma = 0.3$

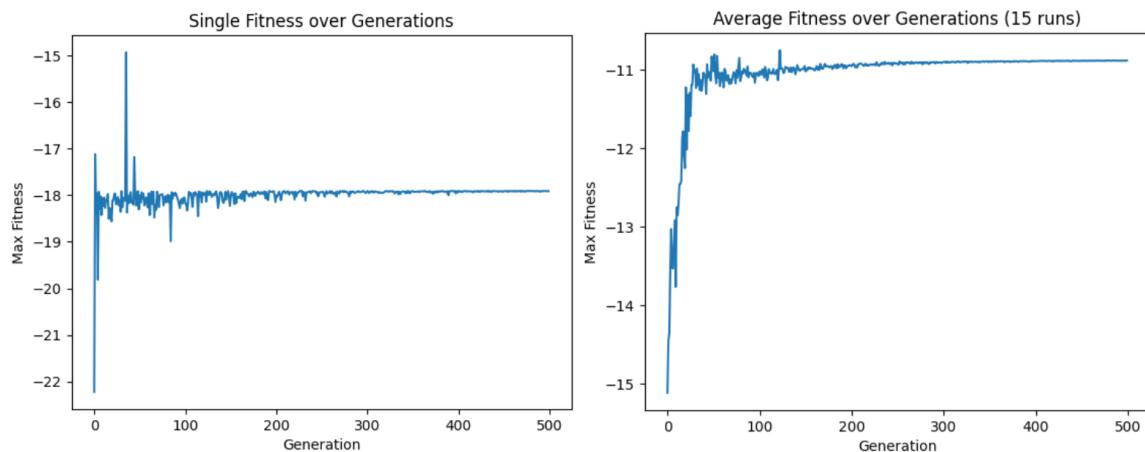


Rys. 84 Metoda wyznaczania środka – **mean** – pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla $\sigma = 0.7$

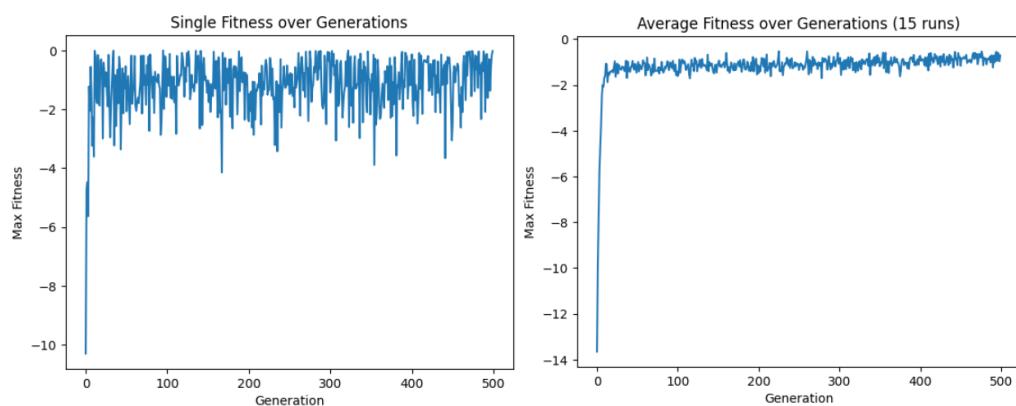
Metoda punktu środkowego: **weighted_mean**



Rys. 85 Metoda wyznaczania środka – **weighted_mean** - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla $\sigma = 0.1$

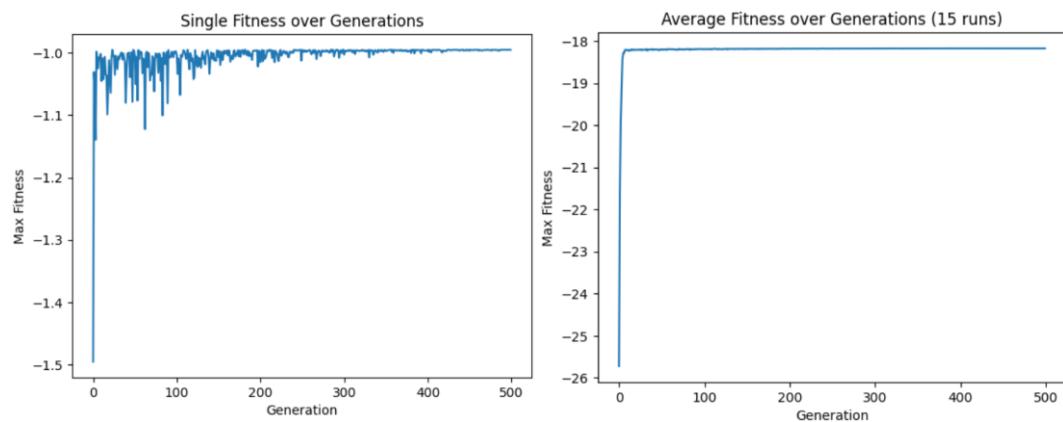


Rys. 86 Metoda wyznaczania środka – **weighted_mean** - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla $\sigma = 0.3$

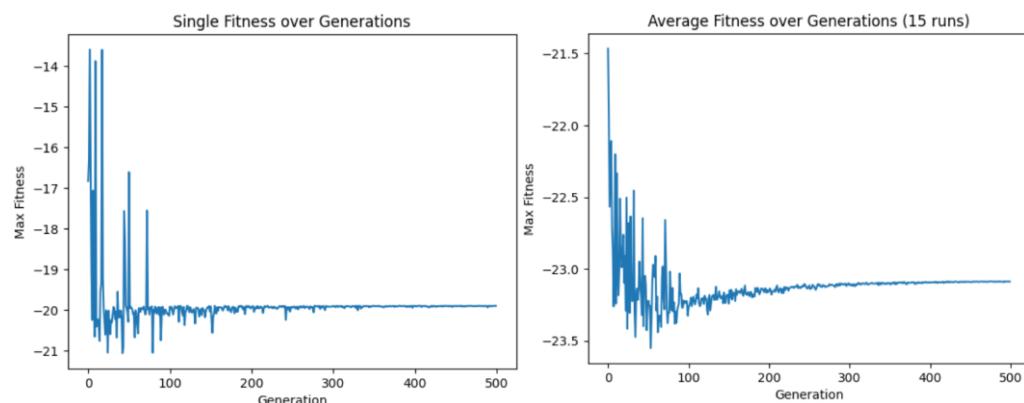


Rys. 87 Metoda wyznaczania średnia – *weighted_mean* - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla $\sigma = 0.7$

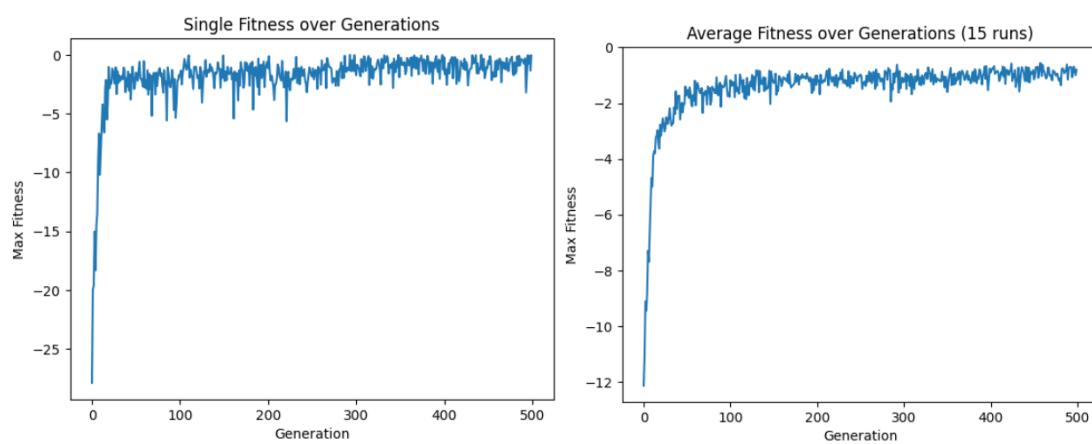
Metoda punktu środkowego: **median**



Rys. 88 Metoda wyznaczania średnia – *median* - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla $\sigma = 0.1$

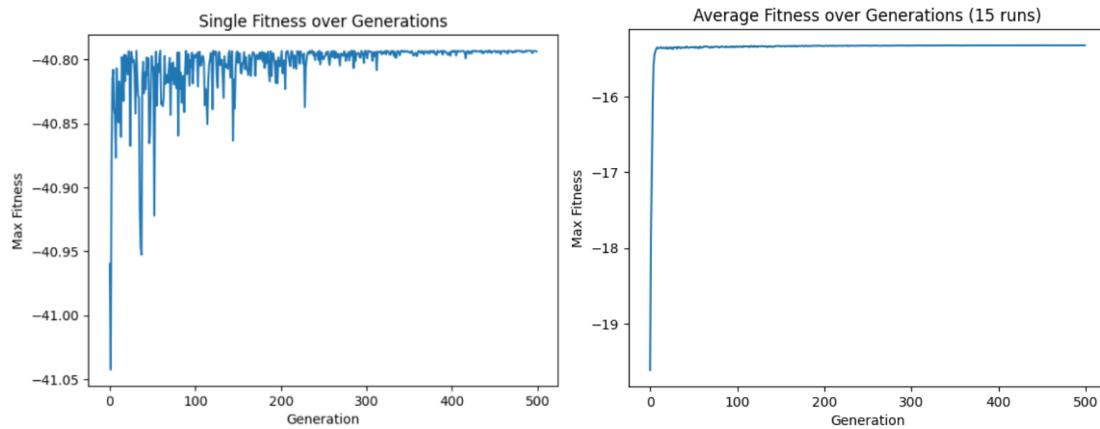


Rys. 89 Metoda wyznaczania średnia – *median* - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla $\sigma = 0.3$

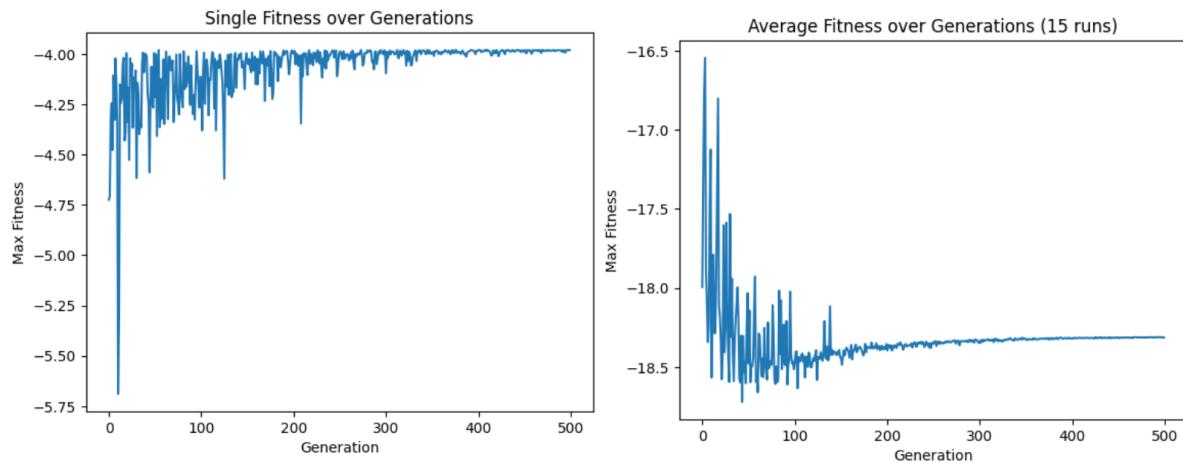


Rys. 90 Metoda wyznaczania środka – median - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej)
dla $\sigma = 0.7$

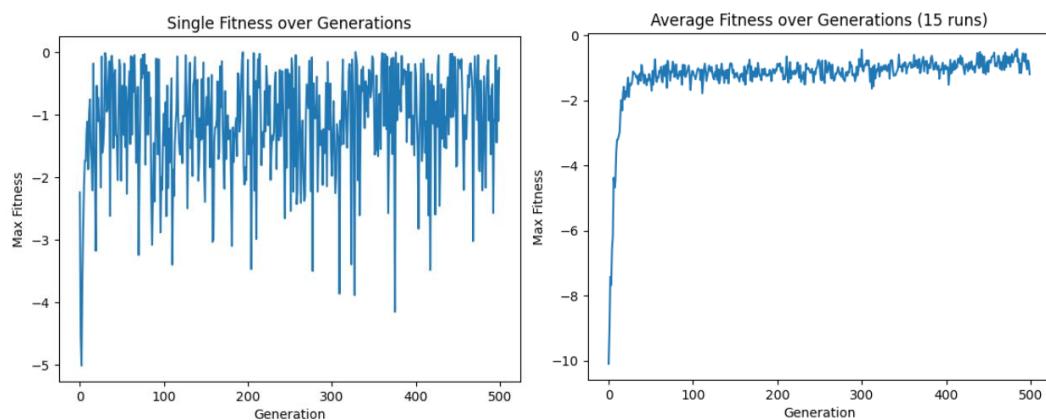
Metoda punktu środkowego: **trimmed_mean**



Rys. 91 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_mean' - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń
(po prawej) dla $\sigma = 0.1$

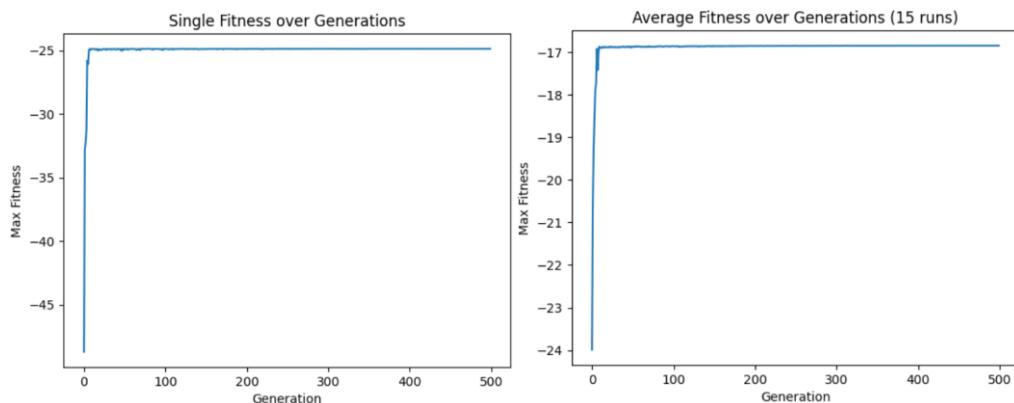


Rys. 92 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_mean' - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń
(po prawej) dla $\sigma = 0.3$

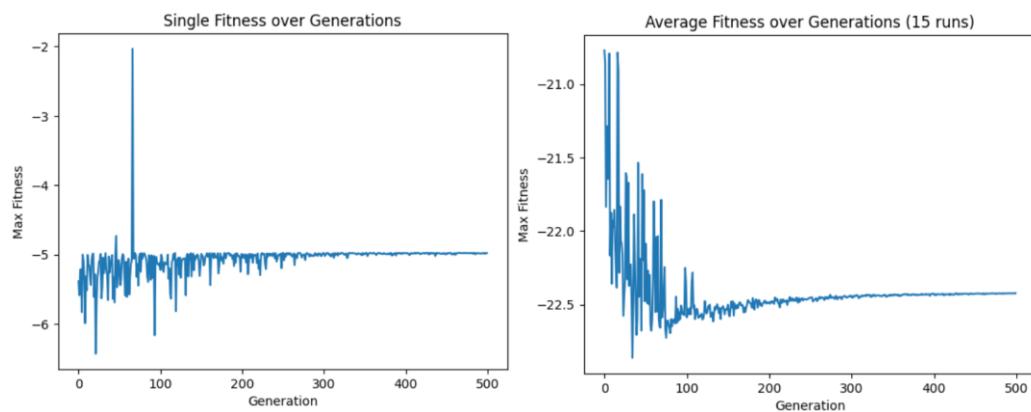


Rys. 93 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_mean' - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla $\sigma = 0.7$

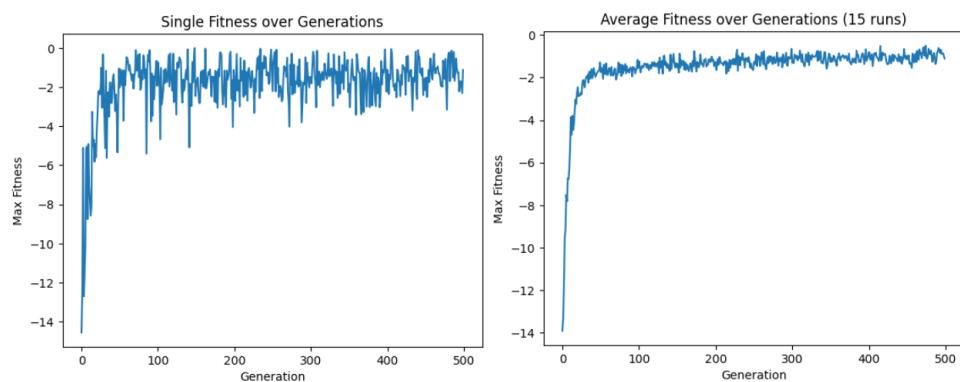
Metoda punktu środkowego: **trimmed_mean**



Rys. 94 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_median'- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla liczby $\sigma = 0.1$

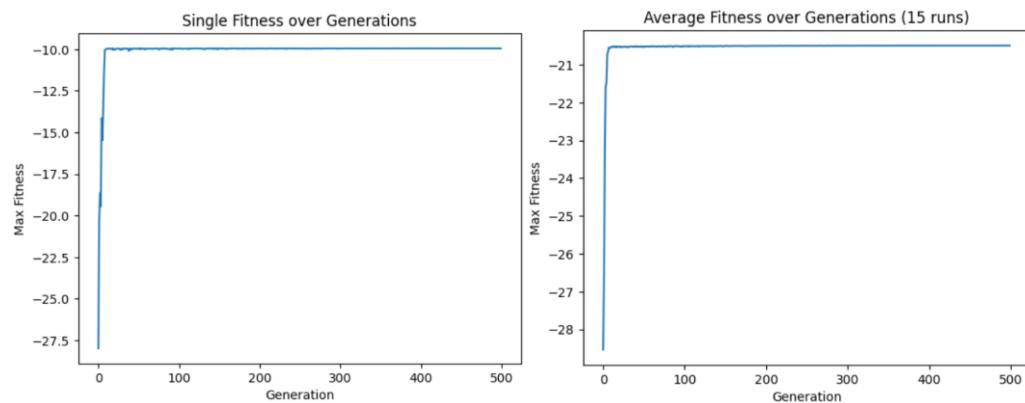


Rys. 95 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_median'- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla liczby $\sigma = 0.3$

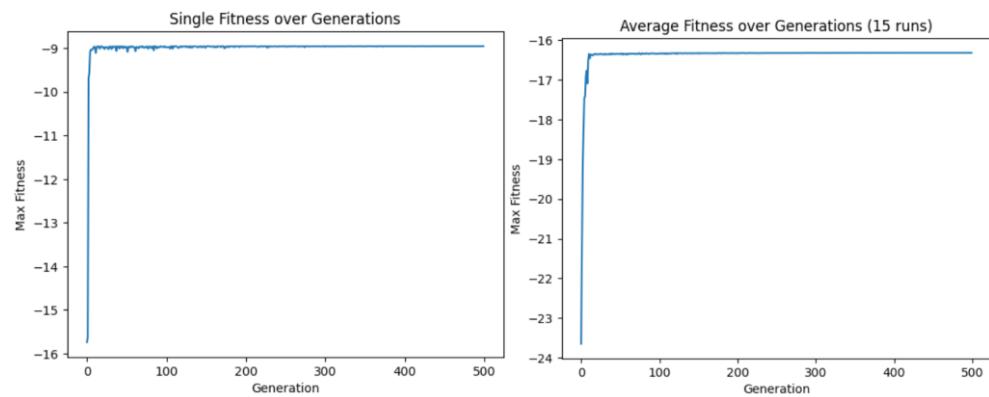


Rys. 96 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_median'- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla liczby sigma = 0.7

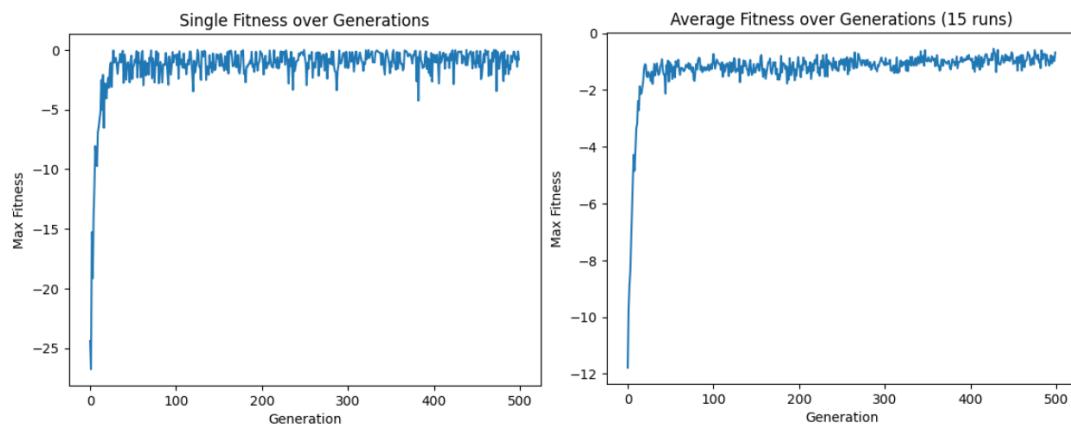
Metoda punktu środkowego: **randomized_weighted_mean**



Rys. 97 Metoda wyznaczania środka – "randomized_weighted_mean"- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla sigma = 0.1



Rys. 98 Metoda wyznaczania środka – "randomized_weighted_mean"- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla sigma = 0.3



Rys. 99 Metoda wyznaczania średka – "randomized_weighted_mean"- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla $\sigma = 0.7$

Zestawienie wyników

	Czas optymalizacji w zależności od wielkości kroku			
Metoda wyznaczania średka populacji	0.1	0.3	0.7	
mean	0.9366	0.8817	0.7943	
weighted_mean	0.9155	0.9045	0.7793	
median	1.0237	0.9918	0.8603	
trimmed_mean	0.9640	0.9327	0.8323	
trimmed_median	0.9607	0.8752	0.8475	
randomized_weighted_mean	1.5848	0.9871	0.8235	
	1,0642	0,9288	0,8229	Średni czas [s]

Wnioski

Mniejsze wartości sigma prowadzą do bardziej precyzyjnych poszukiwań, ale mogą utknąć w lokalnych minimach. Większe sigma pozwalają na eksplorację większej przestrzeni, ale mogą pozwolić na szybsze przeszukiwanie dużych przestrzeni rozwiązań.

Przy liczbowości populacji równej 100 osobników różnice czasowe pomiędzy kolejnymi wartościami wielkości kroku nie są znaczące, jednak przy większej licznie osobników mógłby wystąpić znaczne różnice czasów.

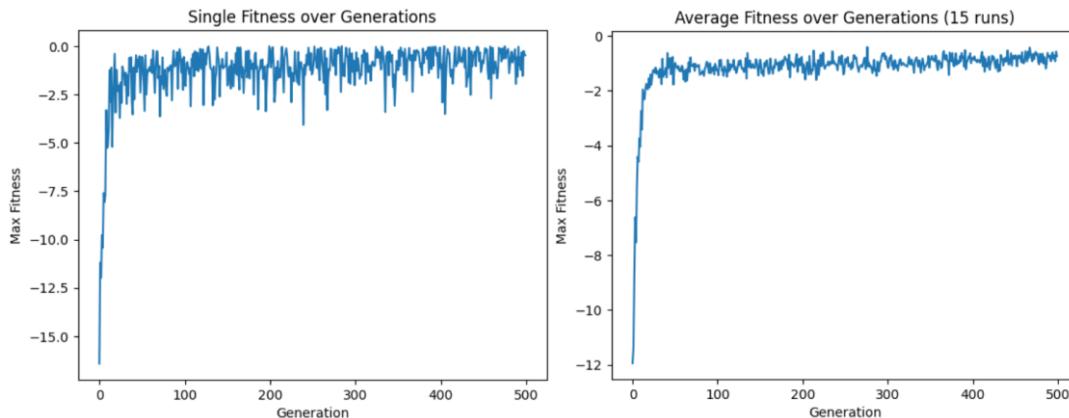
Najkrótszy czas optymalizacji mamy dla metody wyznaczania średka populacji jako średnia arytmetyczna, najdłuższy zaś dla metody medianowej.

6.1.5. Sprawdzenie wpływu wielkości procentu odcięcia osobników populacji w zależności od metody wyboru punktu środkowego dla funkcji Rastrigin

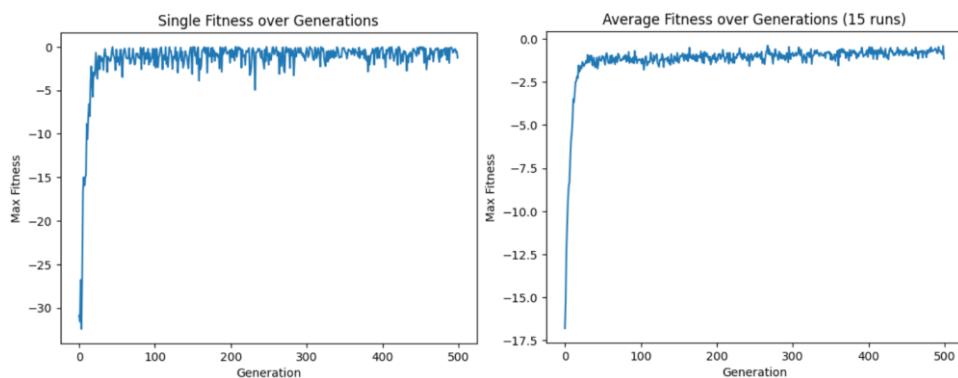
W tej części zmianie będzie ulegać jednane sposoby wyznaczania środka populacji oraz wartość parametru odcięcia, reszta parametrów pozostaje niezmienna równa:

- central_point_function_name = ['trimmed_mean', 'trimmed_median',]
- obj_func = 'rastrigin'
- population_size= 100
- sigma = 0.7
- proportion_to_cut = [0.05, 0.2, 0.4] (jeśli metoda punktu środkowego to 'trimmed_mean' lub 'trimmed_median')

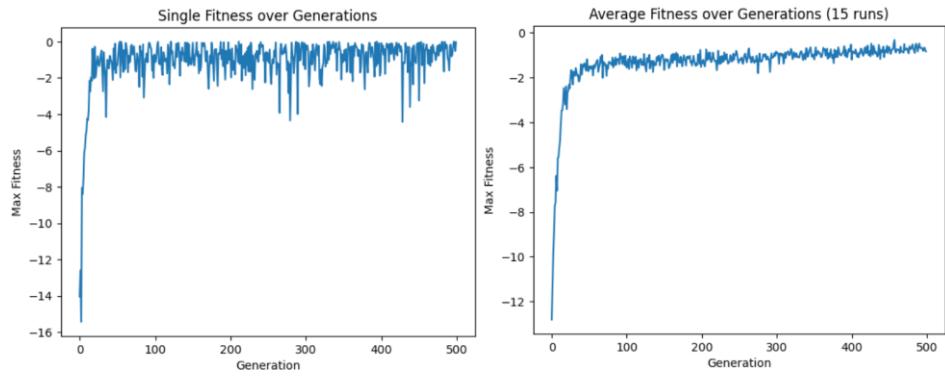
Metoda punktu środkowego: **trimmed_mean**



Rys. 100 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_mean' - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla współczynnika odcięcia = 0.05

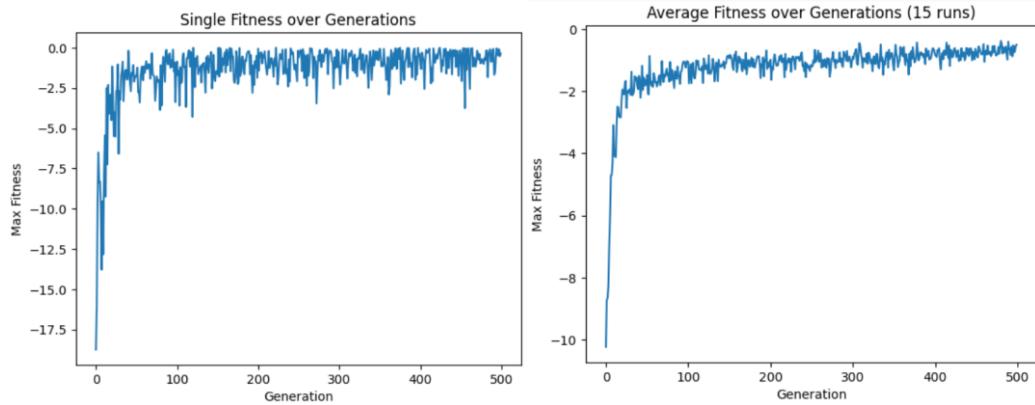


Rys. 101 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_mean' - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla współczynnika odcięcia = 0.2

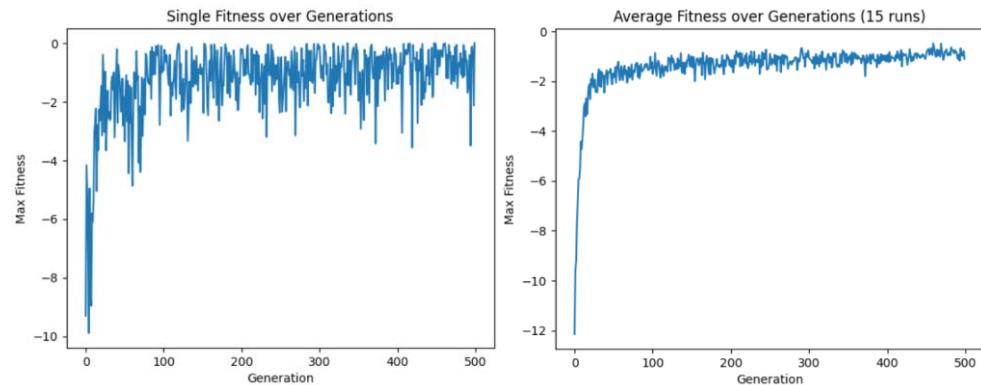


Rys. 102 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_mean' - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla współczynnika odcięcia = 0.4

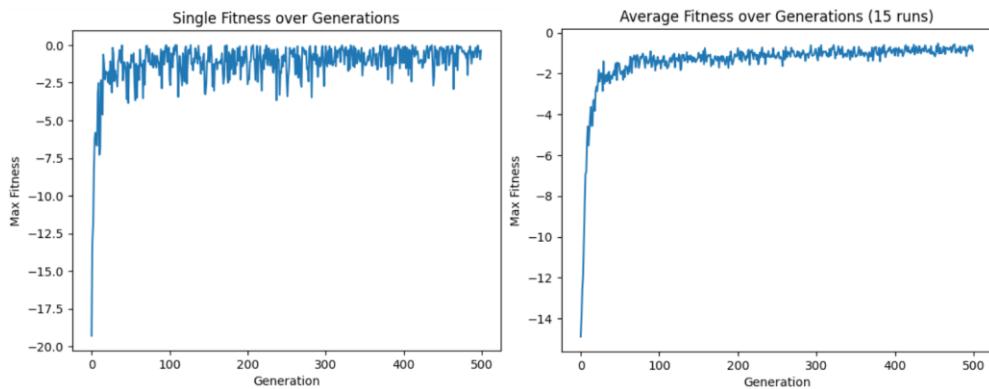
Metoda punktu środkowego: **trimmed_median**



Rys. 103 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_median' - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla współczynnika odcięcia = 0.05



Rys. 104 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_median' - pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla współczynnika odcięcia = 0.2



Rys. 105 Metoda wyznaczania środka – 'trimmed_mean'- pojedynczy przypadek (po lewej), uśredniony z 15 powtórzeń (po prawej) dla współczynnika odcięcia = 0.4

Czas ewaluacji

Metoda wyznaczania środka populacji	Współczynnik odcięcia	Czas [s]
'trimmed_mean'	0.05	1.0203
	0.2	0.9552
	0.4	0.9287
'trimmed_median'	0.05	1.0772
	0.2	0.9743
	0.4	0.9419

Wnioski

Im większy procent odcięcia, tym bardziej stabilne wyniki, jednak wiąże się to z utratą pewnej ilości informacji. Dla mniejszego odcięcia mamy szerszy zakres osobników, które mogą eksploatować większą przestrzeń, jednak tym samym w stosunku do szumów mogą powodować błędy w działaniu algorytmu.

7. Wnioski ogólne

Projekt pozwolił się dogłębiście zapoznać i zrozumieć działanie algorytmu optymalizacji CMA-ES szczególnie pod kątem wyznaczania punktów środkowych w różnej konfiguracji innych parametrów oraz różnych optymalizowanych funkcjach celu.

Sprawdzane funkcje charakteryzowały się różnym stopniem trudności. Dla funkcji takich jak Sphere, Rosenbroca udawało się uzyskać zbieżność w okolicach optimum globalnego dość szybko i dość stabilnie dla wszystkich rodzajów punktów środkowych. Dla funkcji Rastgin udało się uzyskać wynik dla wszystkich sposobów punktów środkowych, było to jednak zdecydowanie bardziej trudne zadanie dla badanych algorytmów. Wyniki dla funkcji Ackleya są niezwykle ciekawe. Pokazują sytuacje, gdzie algorytm często wpadał w optimum lokalne, gdzie w różnych generacjach różnie się z nich wydostawał. Co ciekawe dla sposobu wyznaczania średniej arytmetycznej zbiegał najwolniej patrząc na uśredniony wykres, jednak robił to najsukuteczniej (osiągał najwyższą wartość na koniec). Dużo gorzej pod kątem wartości optymalizowanej wypadały metody opierające się o medianę pomimo wydawałoby się większej stabilności i szybszej zbieżności. Można z tego wnioskować, że dla metod wyznaczania punktów środkowych opierających się o medianę algorytm częściej wpadał w optimum lokalne, gdzie przy liczbie 500 generacji nie był w stanie się z niego wydostać. Widać też zwiększyony czas optymalizacji dla wszystkich sposobów.

Funkcja Griewanka jest również wymagającą funkcją dla algorytmu CMA-ES, o czym świadczą wykresy kolejnych generacji dla poszczególnych metod wyboru środka populacji. Algorytm utyka w minimum lokalnym osiągając zbieżność w wartościach odbiegających w znacznym stopniu od optimum globalnego (równego 0). Może to świadczyć o zbyt małej liczbie generacji lub populacji albo niewystarczającej wartości parametru sigma (kroku). Co więcej czas działania algorytmu jest również większy w porównaniu z innymi funkcji (najbliższy funkcji Ackleya). Żaden ze sposobów generacji punktów środkowych nie radził sobie z wychodzeniem z tych optimów lokalnych, które były niezwykle silnie uzależnione od punktów inicjalizacyjnych. Funkcja Schwefela jest najtrudniejszą badaną funkcją dla algorytmu CMA-ES. Za każdym razem zbiega do jakiegoś optimum lokalnego stosunkowo szybko jednak, jest ono bardzo oddalone od optimum globalnego w zasadzie dla każdego sposobu wyznaczania punktów środkowych.

Bazując na powyższych wynikach, zbadaliśmy wpływ innych parametrów na wartości uzyskane dla różnych sposobów wyznaczania punktów środkowych i opisaliśmy wnioski z tych eksperymentów we wnioskach pod poszczególnymi podrozdziałami. Badania nad nimi przeprowadziliśmy przy użyciu funkcji Rastgina, która zbierała do optimum globalnego, ale nie było to tak proste zadanie jak w funkcjach Sphere i Rosenbrocka

Pod względem czasu działania dla 500 iteracji algorytmu najlepiej wypadł sposób ważonej średniej, a najgorzej mediany, jednak różnice czasowe były bardzo nieznaczne. Większy wpływ na czas miała sama optymalizowana funkcja niż sposób wyznaczenia punktów środkowych. Analiza szybkości bardziej została rozbudowana pod rozdziałem z eksperymentami do różnych funkcji celu.

Ze względu na i tak bardzo obszerna ilość badań zrezygnowaliśmy z eksperymentami również nad zaimplementowanym algorytmem EDA.