Research in computer science
$\forall n$ puzzle's game
metrics, heuristic and A*
Summary

С. Высоцкий

Центральный университет, 2024

1 О матричных нормах

(Трушин, ФКН ВШЭ 2023)

1.1 Матричные нормы

Здесь нас ждет пример первого абстрактного определения. Любое такое определение устроено одинаково, оно состоит из двух частей: первая часть содержит данные, а вторая аксиомы на них.

Нормы Будем через $\mathbb{R}_+$ обозначать множество неотрицательных вещественных чисел, т.е. $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geqslant 0\}$.

Пусть задано отображение

$$mn \to \mathbb{R}_+$$

т.е. это правило, которое по матрице A выдает некоторое неотрицательное вещественное число, которое будет обозначаться $|A| \in \mathbb{R}_+$. Такое отображение называется нормой, если выполнены следующие аксиомы

1. Positive definiteness/Point-separating: для любой матрицы $A \in mn$, $|A| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$.
2. Absolute homogeneity: для любой матрицы $A \in mn$ и любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $|\lambda A| = |\lambda| \cdot |A|$.[1]
3. Subadditivity/Triangle inequality: для любых двух матриц $A, B \in mn$ выполнено $|A + B| \leqslant |A| + |B|$.

Стоит отметить, что $\mathbb{R}^n$ можно отождествить с матрицами $n1$. Потому определение выше дает понятие нормы на векторах из $\mathbb{R}^n$.

Субмультипликативность Пусть на квадратных матрицах n задана некоторая норма. Тогда она называется субмультипликативной, если выполнено следующее свойство: для любых матриц $A, B \in n$ выполнено $|AB| \leqslant |A| \cdot |B|$.

Простые примеры

1. 1-норма на n:
$$|A|_1 = \sum_{ij} |a_{ij}|, \quad A \in n$$
2. ∞-норма на n:
$$|A|_\infty = \max_{ij} |a_{ij}|, \quad A \in n$$

[1] Здесь $|\lambda|$ означает модуль числа, а $|A|$ – норма от матрицы.

3. Норма Фробениуса или 2-норма на n:

$$|A|_F = |A|_2 = \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2}, \quad A \in n$$

4. p-норма на n:

$$|A|_p = \sqrt[p]{\sum_{ij} |a_{ij}|^p}$$

Выясните в качестве упражнения, какие из этих норм являются субмультипликативными.

Индуцированная (согласованная) норма Пусть $|-|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ – некоторая фиксированная норма. Определим индуцированную ей норму $\|-\|$ на n следующим образом:[2]

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{|Ax|}{|x|}, \quad A \in n$$

Методом пристального взгляда мы замечаем, что отображение $\|-\|\colon n \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет первым трем аксиомам нормы, а значит действительно является матричной нормой. Более того, верно следующее.

Для любой нормы $|-|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ индуцированная ей норма $\|-\|\colon n \to \mathbb{R}_+$ является субмультипликативной.

Доказательство. Из определения индуцированной нормы следует, что $|Ax|/|x| \leqslant \|A\|$ для любого ненулевого $x \in \mathbb{R}^n$. Ясно, что тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n$, верно $|Ax| \leqslant \|A\| \cdot |x|$.

Пусть теперь $A, B \in n$ и нам надо показать, что $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$. Рассмотрим произвольный $x \in \mathbb{R}^n$, тогда

$$|ABx| = |A(Bx)| \leqslant \|A\| \cdot |Bx| \leqslant \|A\| \cdot \|B\| \cdot |x|$$

Значит

$$\frac{|ABx|}{|x|} \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$$

для любого ненулевого $x \in \mathbb{R}^n$. А значит, можно перейти к супремуму по таким x, и следовательно

$$\|AB\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{|ABx|}{|x|} \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$$

$\square$

Примеры индуцированных норм Индуцированные нормы хороши тем, что они субмультипликативны. Однако, обычно для них не существует явных формул для вычисления. Ниже мы приведем несколько случаев, когда такие формулы все же возможны. Все примеры будут даны без доказательств.

1. Пусть на $\mathbb{R}^n$ дана 1-норма $|x| = \sum_i |x_i|$. Тогда индуцированная норма $\|-\|_1$ на матрицах n будет задаваться по формуле

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

2. Пусть теперь на $\mathbb{R}^n$ дана ∞-норма $|x| = \max_i |x_i|$. Тогда индуцированная норма $\|-\|_\infty$ на матрицах n будет задаваться по формуле

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

[2] Можно определить норму на прямоугольных матрицах, но тогда на до иметь две нормы одну на $\mathbb{R}^n$, а другую на $\mathbb{R}^m$. В этом случае индуцированная норма зависит от двух норм, одна фигурирует в знаменателе, другая в числителе.

3. И наконец, пусть на $\mathbb{R}^n$ дана 2-норма $|x| = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}$. Тогда индуцированная норма $\|-\|_2$ на матрицах n уже считается более хитрым способом. Пусть $A \in n$. Если взять матрицу $A^t A$, то окажется, что ее спектр состоит целиком из неотрицательных вещественных чисел. Пусть σ_1 – максимальное такое число, тогда $\|A\|_2 = \sqrt{\sigma_1}$.[3]

1.2 Обзор применения матричных норм

Для простоты изложения, я буду рассматривать лишь квадратные матрицы ниже. Хотя какие-то вопросы и можно формулировать и для прямоугольных матриц, это не сделает материал более интересным.

Сходимость Основная задача нормы – дать понятие о близости матриц друг к другу. А именно, если есть норма $|-|\colon n \to \mathbb{R}_+$, то можно определить расстояние между матрицами $A, B \in n$ следующим образом $\rho(A, B) = |A - B|$. А как только у нас есть понятие расстояния между объектами, мы можем ввести понятие предела и сходимости, а именно: пусть задана последовательность матриц $A_n \in n$, тогда скажем, что она сходится к матрице $A \in n$ и будем писать $A_n \to A$, $n \to \infty$ (или $\lim_n A_n = A$), если $\rho(A_n, A) \to 0$ как последовательность чисел при условии $n \to \infty$.

Эквивалентность норм Тут встает законный вопрос: у нас есть много различных норм на матрицах, а потому много расстояний, а значит получается огромное количество разных сходимостей (по одной на каждый вид нормы). Оказывается, что все возможные нормы на матрицах дают расстояния приводящие к одинаковому определению предела. Ключом к пониманию этого явления является определение эквивалентности норм. Пусть $|-|$ и $|-|'$ – две разные нормы на n. Будем говорить, что они эквивалентны, если существуют две положительные константы $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ такие, что $c_1|A| \leqslant |A|' \leqslant c_2|A|$ для всех матриц $A \in n$. Если две нормы эквивалентны, то несложно углядеть, что расстояние $\rho(A_n, A)$ в смысле нормы $|-|$ стремится к нулю тогда и только тогда, когда расстояние $\rho'(A_n, A)$ в смысле нормы $|-|'$ стремится к нулю. А значит эквивалентные нормы дают одну и ту же сходимость. Второй ключевой факт – все матричные нормы между собой эквивалентны. Это не очень сложный результат и по сути связан с тем, что единичный куб в $\mathbb{R}^n$ является компактным множеством.

Анализ для матриц Как только у нас есть понятие предела для матриц, мы можем с помощью него развивать анализ аналогичный анализу для обычных чисел. Например, можно определить хорошо известные гладкие функции от матриц. Скажем, пусть $A \in n$, тогда можно сказать, что значит e^A, $\ln A$, $\sin A$ или $\cos A$. Конечно, $\ln A$ будет существовать не для всех матриц A, так же как и обычный логарифм существует только для положительных чисел. Знакомые тождества вроде $e^{\ln A} = A$ и $\ln e^A = A$ будут оставаться справедливыми. Свойства $e^{A+B} = e^A e^B$ будет верным, в случае если A и B коммутируют.

Одним из простейших подходов к определению таких функций – использование степенных рядов. Например, $e^x = \sum_{k \geqslant 0} x^k/k!$. Тогда можно определить $e^A = \sum_{k \geqslant 0} A^k/k!$. Доказательство свойств экспоненты тогда сводится к игре в раскрытие скобок со степенными рядами. И в этой игре нам важно, чтобы символы были перестановочны между собой, потому какие-то свойства могут нарушиться, если исходные матрицы не коммутируют.

Еще стоит отметить такой момент. Так как для любой матрицы A существует минимальный многочлен ее зануляющий f_{min}, то, оказывается, что любую гладкую функцию от A можно приблизить многочленом. А именно, если φ – некоторая гладкая функция, то для любой матрицы A найдется такой многочлен f (зависящий от A) степени меньше, чем $\deg f_{min}$, что $\varphi(A) = f(A)$. Более того, существует общая алгоритмическая процедура по нахождению такого многочлена f. Эта процедура является эффективным способом вычисления гладких функций от матриц.

1.3 Расстояния и углы

Пусть V – евклидово пространство и $u, v \in V$ – произвольные векторы. Тогда определим расстояние между векторами по формуле $\rho(u, v) = |u - v|$.

Расстояние ρ на евклидовом пространстве V удовлетворяет следующим свойствам:

[3]К этому явлению надо относиться так: есть спектр – объект из мира алгебры и есть норма – объект из мира анализа. Оказывается, что между анализом и алгеброй есть мостик через спектр и индуцированную 2-норму. Это позволяет задачи про спектр изучать аналитическими методами и наоборот задачи про сходимости изучать алгебраическими.

1. **Невырожденность** $\rho(v, u) \geqslant 0$ для любых $u, v \in V$ причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $v = u$.
2. **Симметричность** $\rho(u, v) = \rho(v, u)$ для любых $u, v \in V$.
3. **Неравенство треугольника** $\rho(u, v) \leqslant \rho(u, w) + \rho(w, v)$ для любых $u, v, w \in V$.

Доказательство. (1) По определению $\rho(v, u) = |v - u| \geqslant 0$ причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $v - u = 0$.

(2) По определению $\rho(v, u) = |v - u| = |u - v| = \rho(u, v)$.

(3) Нам надо доказать $\rho(u, v) \leqslant \rho(u, w) + \rho(w, v)$, то есть $|u - v| \leqslant |u - w| + |w - v|$. Положим $x = u - w$ и $y = w - v$. Тогда нам надо доказать $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. Так как левая и правая части этого неравенства неотрицательные, то оно равносильно неравенству $|x + y|^2 \leqslant (|x| + |y|)^2$. Проверяем:

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = |x|^2 + 2(x, y) + |y|^2$$

По неравенству Коши-Буняковского $(x, y) \leqslant |x||y|$. Значит

$$|x|^2 + 2(x, y) + |y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

□

Замечание Если на множестве X задана функция $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ со свойствами из предыдущего утверждения, то пара (X, ρ) называется метрическим пространством. Самое главное, что известно про метрические пространства – принцип сжимающих отображений. Это один из способов доказывать существование объектов с нужными свойствами. Есть два важных примера:

- Теорема о неявной функции. Ее доказательство через принцип сжимающих отображений в разы проще и доступнее, чем копание в координатах.
- Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение обычно заменяется на интегральное, после чего можно пользоваться метрическими пространствами и принципом сжимающих отображений.

В нашем случае метрика на евклидовом пространстве скорее является случайным гостем, заглянувшем на огонек, нежели чем-то фундаментальным и сверх полезным. Самым полезным является понимание роли метрических пространств.

Пусть $X, Y \subseteq V$ – произвольные подмножества евклидова пространства, тогда расстояние между ними определяется следующим образом:

$$\rho(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \rho(x, y)$$

Обратите внимание, что это расстояние не удовлетворяет аксиоме не вырожденности, то есть расстояние между разными множествами может быть нулевым. Например, для этого достаточно, чтобы X и Y имели непустое пересечение. Но, даже если $X \cap Y = \varnothing$, расстояние может быть нулем. Например, если $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ и $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $Y = -X = \{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

2 Эвристики, консистентные и допустимые

Эвристика Эвристика (heuristic): функция h(X), которая для любой вершины X дает оценку длины оптимального пути из X в целевую вершину F.

Консистентность Пусть c(X, Y) обозначает длину кратчайшего пути между вершинами X и Y . Тогда эвристика h называется консистентной, если для любых двух вершин X и Y выполняется:

$$h(X) \leqslant c(X, Y) + h(Y)$$

Th о сходимости консистентного A* Алгоритм A* search с консистентной эвристикой гарантированно находит кратчайший путь от S до F.

Требования к консистентности эвристики можно ослабить, немного изменив алгоритм. Рассмотрим класс допустимых эвристик.

Допустимость Эвристика h называется допустимой, если для любой вершины X выполняется:

$$h(X) \leqslant c(X, F),$$

т.е. эвристика никогда не переоценивает настоящую длину пути из X до цели F.

Th о сходимости допустимого A* tree Алгоритм A* tree search с допустимой эвристикой гарантированно находит кратчайший путь от S до F.

3 Пятнашки: строим эвристики

Мы рассмотрели игру пятнашки и две эвристики для решения этой задачи с помощью алгоритма A* search.

Классические пятнашки Вариант игры пятнашки состоит из доски 3×3 с 8-ю костяшками и одной пустой клеткой (Рисунок 1). Костяшки могут перемещаться по горизонтали или вертикали в соседнюю пустую клетку. Цель игры — начать с заданного расположения костяшек и перемещать костяшки для достижения целевого расположения.

Обобщение Теперь рассмотрим обобщение игры для доски размером n × n с n 2 1 костяшками и 1 пустой клеткой. Правила для обобщенной головоломки точно такие же, как и для игры с 8-ю костяшками. Все вопросы в этом задании необходимо рассматривать для обобщенной версии игры.

Эвристики Рассмотрим несколько эвристик, которые алгоритм поиска A* search может использовать для нахождения оптимального решения пятнашек.

1. Эвристика h1(·) возвращает количество костяшек, которые находятся не на своих местах.
2. Эвристика h2(·) возвращает сумму манхэттенских расстояний между каждой костяшкой и ее целевой позицией.
3. Эвристика h3(·) возвращает минимальное количество ходов, необходимых для достижения целевого расположения, если на каждом шаге можно переместить любую костяшку в пустой слот.

Утв. Эвристики h1, h2 и h3 консистентны.

Доказательство. (1) h1 допустимость очевидна и доказывалась на семинаре; консистентность h1: рассмотрим переход состояний S → S' (будем рассматривать возможные перестановки пятнашек через состояния пятнашек после каждой смены пятнашек). Пусть S и S' связаны одним ребром. Двигая пятнашку: с точки зрения эвристики (!) мы либо ничего не меняем, либо добавляем число правильных/неправильных позиций +-1(+0) мы двигаем одну пятнашку и у нас только одна пятнашка может встать на правильное/неправильное место(то есть +1/-1/0). Тогда эвристику соседних состояний можно оценить h(S) ≤ 1 + h(S') (оценка сверху) консистентный случай (пусть c(S, S') и будет расстоянием)

Аналогично, распространяется на случай не соседних состояний: так, c(S, S') будеть просто лежать в интервале числа шагов от одного состояния до другого (то есть можно брать путь того самого слагаемого оценки пути). Как минимум, оценка пути учтет состояния, так как само количество зачаствю шагов в разы больше, чем число самих неверно раставленных пятнашек (допустимость).

(2) h2 допустимость очевидна и доказывалась на семинаре;

Шаг между двумя состояними у манх. метрики (L1 далее)|d2-d1| ≤ 1 (мы двигаем пятнашку за ход и приближаемся вероятно к истинному ответу, а возможно нет: поэтому +-); отсюда это неравенство дает нам консистентную оценку для соседних состояний; аналогичные рассуждения первому доказательству и здесь, число шагов будет в точности расстояния.

(3) h3 допустимость очевидна и доказывалась на семинаре; эта эвристика несет максимальный вес среди всех, так как почти точно аппроксимирует перемещение пятнашек(с точностью до перестановки всех пятнашек). Рассмотрим два соседних состояния. Пусть эвристика равна k(шагов до goal состояния): тогда разница между его эвристикой и эвристикой соседнего состояния может измениться на +-1 (и правда, переставляя в свободную ячейку мы можем либо все испортить, либо наоборот исправить; пустая ячейка не считается за пятнашку и в эвристике не считается - что не суть важно). Тогда верно h(S) $\leq$ 1 h(S'), что в точности повторяет предыдущие пункты; отсюда эта эвристика является консистентной для соседних состояний.

В общем случае, между двумя любыми состоянимиа достаточно взять оценку предыдущего состояния как меньше или равно эвристики в следующем и число шагов для него(а именно, чтобы покрыть этот разброс до финального состояния +-k шагов).

Во всех трех доказательствах я пользовался интуицией, что связи между пятнашками равны 1. И в правду, этого предположения достаточно для консистентности. ☐

Утв. Доминирование h3 доминирует h1 (h2).

Доказательство. Каждое перемещение в новое состояние в эвристике h1: чтобы достичь финального состояния необходимо как минимум сделать k шагов, где k- число неправильно раставленных пятнашек(то есть мысленно все пятнашки неверные мы поднимаем и переставляем); допустимость очевидна. h3 требует для каждого неверной пятнашки в состоянии как минимум одноэу перестановку(в пустую ячейку); важно, что h3 как бы содержит в себе эвристику: так, когда h1 оценивает число ребер, которые необходимо пройти чтобы просто за одну перестановку для каждой пятнашки ее переставить. Это самый короткий из возможных случаев оценить путь числом неверных пятнашек: что касается h3, то оно учитывает дополнительные перестановки в виде (к примеру рокировку неверных двух состояний, когда пустая ячейка далеко от них двух). Отсюда h3 (S) $\geq$ h1(S). Пример, приведенный выше подходит под состояние h3(S) > 1(S). (Пример дополнительно приведен в файле картинкой). Отсюда чтд, что эвристика h3 доминирует над h1. h2 > h3 - контрпример. ☐

Утв. Максимум двух консистентных эвристик - консистентная эвристика.

Доказательство. Доказательство исходит из монотонной сходимости консистентной эвристики. Консистентная или монотонная эвристика обладает как раз таким свойством. Идея вот в чем: выбирать максимум это в точности выбирать максимальные значения у двух графиках по оценки steps (смотри график на графике ссылки по вики консистентной эвристики); выбирая на каждом шагу оценки стоимости максимум из двух консистентных эвристик (монотонных) мы очевидно получим монотонную эвристику (как с функциями), отсюда максимум двух эвристик является консистентным. ☐

Алгоритм Важным свойством любой эвристики является возможность ее эффективного вычисления. Алгоритм вычисления h3 для заданного состояния, время работы которого полиномиально зависит от числа костяшек. Идея в том, что если у нас пустая костяшка стоит на месте какой-то другой, то мы можем ее переставить. Иначе, если пустая костяшка находится на своей позиции, то поставим любую костяшку не на своем месте на ее место

Имплементация Google Colaboratory Notebook

Ссылки 15 puzzle, консистентная эвристика, эвристика, cmu paper about heuritics , A*