# 2022 年 度 / 2022 School Year

## 大 学 院 入 学 試 験 問 題
## Graduate School
## Entrance Examination Problem Booklet

# 数　　学　1 / Mathematics 1

**試験時間 / Examination Time:　　13:00–13:50**

**注　意　事　項 / Instructions**

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
   Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
   If you find missing, misplaced, and/or unclearly printed pages in the problem booklet, ask the examiner.
3. 本冊子には第 1 問があり，日本文は 1 頁目，英文は 2 頁目である．日本語ないし英語で解答すること．
   This booklet contains Problem 1 on page 1 in Japanese and page 2 in English. Answer the problem in Japanese or English.
4. 解答用紙 1 枚が渡される．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
   You are given one answer sheet. You may use the back of the sheet if necessary.
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．
   Fill the designated blanks at the top of each answer sheet with your examinee's number and the problem number you are to answer.
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
   Do not separate the draft papers from this problem booklet.
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
   Any answer sheet including marks, symbols and/or words unrelated to your answer will be invalid.
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
   Do not take either the answer sheets or the problem booklet out of the examination room.

| | |
|---|---|
| 受験番号 / Examinee's number | No. |

上欄に受験番号を記入すること．Fill this box with your examinee's number.

(草稿用紙 / Draft)

# 第１問

以下の $x, y, z \in \mathbb{R}$ に関する複数の条件を考える.

$$\begin{cases} 0 < z - xy < 1 \\ 0 < z - (x+y)^2 < -xy \end{cases}$$

$\Omega$ を上記の条件を満たす $z$ が一つでも存在するような点 $(x, y)$ の集合とする. $\Omega$ は三次元デカルト座標系において上記の条件を満たすような点 $(x, y, z)$ の集合を $xy$ 平面上に正射影した図形とも解釈できる. 以下の問いに答えよ.

(1) $\Omega$ を $x$ と $y$ に関する不等式で表現せよ.

(2) 集合 $\Omega$ を $xy$ 平面上に図示せよ. 図形の境界が $x$ 軸, $y$ 軸と交わる場合は, その交点の座標も明記せよ.

(3) 集合 $\Omega$ の境界の湾曲した区間は, 単位円の複数の円弧をある線形変換行列 $\mathbf{X}$ で変換した図形になっている. このような $\mathbf{X}$ を一つ求めよ. ただし, 単位円上の点 $(1, 0)$ は, 湾曲した区間の最も曲率の高い点に変換されなければならない.

(4) (3) で求めた $\mathbf{X}$ の行列式を求めよ.

(5) 集合 $\Omega$ の面積を求めよ. ただし, 図形を線形変換した場合の面積変化率は, その線形変換行列の行列式の絶対値に等しいことを用いてもよい.

## Problem 1

Consider the following multiple conditions on $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 0 < z - xy < 1 \\ 0 < z - (x+y)^2 < -xy \end{cases}$$

Let $\Omega$ be the set of points $(x, y)$ for which at least one $z$ exists satisfying the above conditions. Note that the set $\Omega$ can be seen in the three-dimensional Cartesian coordinate system as the orthogonal projection of points $(x, y, z)$ satisfying the above conditions onto the $xy$-plane. Answer the following questions.

(1) Find the inequalities on $x$ and $y$ representing $\Omega$.

(2) Draw a figure of $\Omega$ in the $xy$-plane. If the boundary of $\Omega$ intersects with the $x$-axis or the $y$-axis, write down the coordinates at each intersection.

(3) The curved segments of the boundary of $\Omega$ correspond to the linear transformation of arcs of the unit circle with a matrix $\mathbf{X}$. Find one such $\mathbf{X}$. Note that the point $(1, 0)$ on the unit circle must be transformed to a point where the curvature is maximized in the curved segments.

(4) Calculate the determinant of $\mathbf{X}$ found in (3).

(5) Calculate the area of the set $\Omega$. Note that the absolute value of the determinant of a matrix is the area scale factor of the transformation with that matrix.

(草稿用紙 / Draft)

(草稿用紙 / Draft)

# 2022 年 度 / 2022 School Year

# 大 学 院 入 学 試 験 問 題
## Graduate School
## Entrance Examination Problem Booklet

# 数　学　2 / Mathematics 2

試験時間 / Examination Time:　14:25–15:15

### 注 意 事 項 / Instructions

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
   Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
   If you find missing, misplaced, and/or unclearly printed pages in the problem booklet, ask the examiner.
3. 本冊子には第 2 問があり，日本文は 1 頁目，英文は 2 頁目である．日本語ないし英語で解答すること．
   This booklet contains Problem 2 on page 1 in Japanese and page 2 in English. Answer the problem in Japanese or English.
4. 解答用紙 1 枚が渡される．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
   You are given one answer sheet. You may use the back of the sheet if necessary.
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．
   Fill the designated blanks at the top of each answer sheet with your examinee's number and the problem number you are to answer.
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
   Do not separate the draft papers from this problem booklet.
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
   Any answer sheet including marks, symbols and/or words unrelated to your answer will be invalid.
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
   Do not take either the answer sheets or the problem booklet out of the examination room.

| | |
|---|---|
| 受験番号 / Examinee's number | No. |

上欄に受験番号を記入すること．Fill this box with your examinee's number.

(草稿用紙 / Draft)

## 第2問

$\alpha \geq 1$ と $n > 0$ に対し以下の積分 $I_n(\alpha)$ を考える．

$$I_n(\alpha) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{f(\alpha x) - f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

ただし，実数値関数 $f(x)$ は $x \geq 0$ において連続かつ微分可能で，導関数が連続であり，$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ が成り立つと仮定する．以下の問いに答えよ．

(1) $J_n(\alpha) = \dfrac{\mathrm{d}I_n(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}$ とおく．$J_n(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}\left(f(\alpha n) - f\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)\right)$ であることを示せ．

ここでは，積分と微分が交換可能であることを用いてよい．

(2) $I(\alpha) = \lim_{n \to \infty} I_n(\alpha)$ とおく．任意の $\beta \in [1, \alpha]$ に対して $\lim_{n \to \infty} J_n(\beta)$ が存在し，かつ，これが $[1, \alpha]$ 上一様収束することを示し，

$$I(\alpha) = \int_1^{\alpha} \left(\lim_{n \to \infty} J_n(\beta)\right) \mathrm{d}\beta$$

であることを示せ．

(3) $I(\alpha)$ を求めよ．

(4) 以下の積分を求めよ．ただし，$p > q > 0$ とする．

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-px}\cos(px) - e^{-qx}\cos(qx)}{x}\,\mathrm{d}x$$

## Problem 2

Consider the following integral $I_n(\alpha)$ for $\alpha \geq 1$ and $n > 0$.

$$I_n(\alpha) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{f(\alpha x) - f(x)}{x} \, \mathrm{d}x$$

Assume that a real-valued function $f(x)$ is continuous and differentiable on $x \geq 0$, its derivative is continuous, and $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Answer the following questions.

(1) Define $J_n(\alpha) = \frac{\mathrm{d}I_n(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}$. Show that $J_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\left(f(\alpha n) - f\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right)$.

You can use the fact that the integration and the differentiation commute in this context.

(2) Define $I(\alpha) = \lim_{n \to \infty} I_n(\alpha)$. Show that $\lim_{n \to \infty} J_n(\beta)$ exists for any $\beta \in [1, \alpha]$ and it uniformly converges on $[1, \alpha]$, and show that

$$I(\alpha) = \int_1^{\alpha} \left(\lim_{n \to \infty} J_n(\beta)\right) \mathrm{d}\beta.$$

(3) Obtain $I(\alpha)$.

(4) Calculate the following integral. Note that $p > q > 0$.

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-px} \cos(px) - e^{-qx} \cos(qx)}{x} \, \mathrm{d}x$$

(草稿用紙 / Draft)

(草稿用紙 / Draft)

# 2022 年 度 / 2022 School Year

# 大 学 院 入 学 試 験 問 題

## Graduate School
## Entrance Examination Problem Booklet

# 数　　学　3 / Mathematics 3

試験時間 / Examination Time:　　15:50–16:40

注 意 事 項 / Instructions

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
If you find missing, misplaced, and/or unclearly printed pages in the problem booklet, ask the examiner.

3. 本冊子には第 3 問があり，日本文は 1 頁目，英文は 2 頁目である．日本語ないし英語で解答すること．
This booklet contains Problem 3 on page 1 in Japanese and page 2 in English. Answer the problem in Japanese or English.

4. 解答用紙 1 枚が渡される．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
You are given one answer sheet. You may use the back of the sheet if necessary.

5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．
Fill the designated blanks at the top of each answer sheet with your examinee's number and the problem number you are to answer.

6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
Do not separate the draft papers from this problem booklet.

7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
Any answer sheet including marks, symbols and/or words unrelated to your answer will be invalid.

8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
Do not take either the answer sheets or the problem booklet out of the examination room.

| | |
|---|---|
| 受験番号 / Examinee's number | No. |

上欄に受験番号を記入すること． Fill this box with your examinee's number.

(草稿用紙 / Draft)

## 第3問

$xy$ 平面上に，$0 < x < 1$ かつ $0 < y < 1$ で定義される領域 $R$ を考える．$R$ 上にランダムに1点を選び，それを点Aとする．ただし，点Aは $R$ 上に一様に分布するとする．図に表すように，点Aから $y$ 軸への垂線をAB, 点Aから $x$ 軸への垂線をACとする．原点をOとしたとき，長方形OCABを「点Aの長方形」と呼ぶ．また，点Aの長方形の面積を表す確率変数を $S$ とする．以下の問いに答えよ．

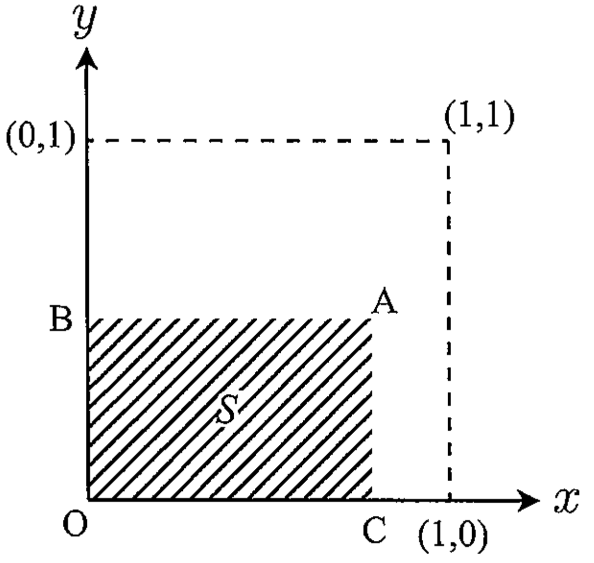
(1) $S$ の期待値を求めよ．

(2) $S \leq r$ となる確率を求めよ．ただし $0 < r < 1$ とする．

(3) $S$ の確率密度関数を求めよ．

再び，領域 $R$ を考える．$n$ を正の整数とする．$R$ 上にランダムに $n$ 点を選び，それらを点 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ とする．ただし，各点は $R$ 上に一様に分布し，$i \neq j$ である $\mathrm{A}_i$ と $\mathrm{A}_j$ は独立に選ばれるとする．次の問いに答えよ．

(4) 点 $\mathrm{A}_i$ の長方形の面積を表す確率変数を $S_i$ とする．$Z$ を $S_1, S_2, \ldots, S_n$ の最小値を表す確率変数とする．この時，$Z$ の確率密度関数を求めよ．



## Problem 3

Consider a region $R$ defined by $0 < x < 1$ and $0 < y < 1$ in the $xy$-plane. We randomly select a point on $R$ and refer to the selected point as A. We assume that A is uniformly distributed on $R$. Let AB be a perpendicular line from A to the $y$-axis and AC be a perpendicular line from A to the $x$-axis as shown in the figure. We call rectangle OCAB as "the rectangle of A", where O denotes the origin. Let $S$ be a random variable representing the area of the rectangle of A. Answer the following questions.

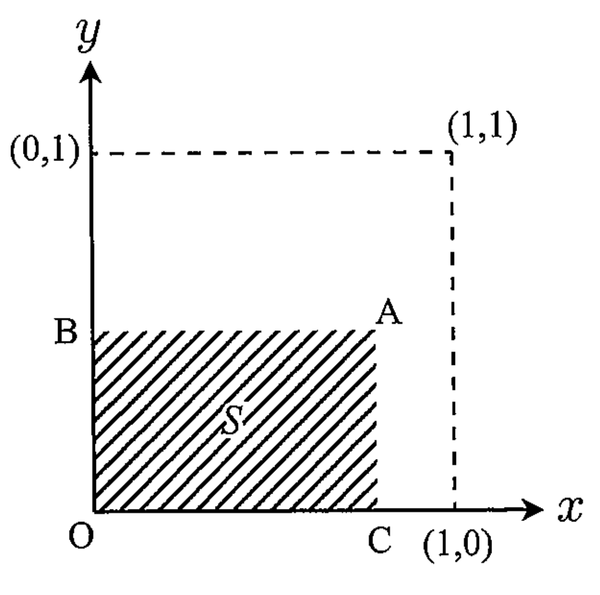
(1) Calculate the expectation value of $S$.

(2) Calculate the probability that $S \leq r$ holds, where $0 < r < 1$.

(3) Calculate the probability density function of $S$.

Again consider the region $R$. Let $n$ be a positive integer. We select $n$ points on $R$ and refer to the selected points as $A_1, A_2, \ldots, A_n$. We assume that each of the points is uniformly distributed on $R$, and $A_i$ and $A_j$ for $i \neq j$ are selected independently. Answer the following question.

(4) Let $S_i$ be a random variable representing the area of the rectangle of $A_i$. Let $Z$ be a random variable which is the minimum of $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Calculate the probability density function of $Z$.



(草稿用紙 / Draft)

(草稿用紙 / Draft)