2023 年度 / AY2023

大学院入学試験問題
Graduate School
Entrance Examination Problem Booklet

数　学　1 / Mathematics 1

試験時間 / Examination Time:　13:00–13:50

注意事項 / Instructions

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
   Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
   If you find missing, misplaced, and/or unclearly printed pages in the problem booklet, ask the examiner.
3. 本冊子には第1問があり，和文は1頁目，英文は2頁目である．日本語ないし英語で解答すること．
   This booklet contains Problem 1 on page 1 in Japanese and page 2 in English. Answer the problem in Japanese or English.
4. 解答用紙1枚が渡される．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
   You are given one answer sheet. You may use the back of the sheet if necessary.
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を記入すること．
   Fill the designated blanks at the top of each answer sheet with your examinee's number and the problem number you are to answer.
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
   Do not separate the draft papers from this problem booklet.
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
   Any answer sheet including marks, symbols and/or words unrelated to your answer will be invalid.
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
   Do not take either the answer sheets or the problem booklet out of the examination room.

受験番号 / Examinee's number	No.

上欄に受験番号を記入すること．Fill the above box with your examinee's number.

(草稿用紙)

第１問

以下の問いに答えよ．

(1) 実変数 x, y の関数 $f(x,y)$ を以下のように定義する．

$$f(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$$

方程式 $f(x,y)=0$ の解の集合は，xy 平面上の２点 (x_1,y_1), (x_2,y_2) を通る直線となることを示せ．ただし，$x_1 \neq x_2$ とする．

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$ の値を因数分解した形で求めよ．

(3) xy 平面上の３点 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) を通る曲線 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ が唯一存在することを示せ．ただし，a_0, a_1, a_2 は定数，x_1, x_2, x_3 は互いに異なるとする．

(4) (3) の曲線は $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$ の形で表せる．ただし，c_1, c_2, c_3 は y_1, y_2, y_3 に依存しないものとする．c_1, c_2, c_3 を求めよ．

(5) xy 平面上の５点 $(x_1,y_1), \ldots, (x_5,y_5)$ を通る曲線 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ を $y = c_1 y_1 + \cdots + c_5 y_5$ の形で表す．ただし，$c_1, \ldots, c_5$ は $y_1, \ldots, y_5$ に依存せず，$x_1, \ldots, x_5$ は互いに異なるとする．c_1 を求めよ．

Problem 1

Answer the following questions.

(1) The function $f(x, y)$ with real variables x, y is defined as follows:

$$f(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}.$$

Show that the set of solutions of the equation $f(x, y) = 0$ is a line passing through two points (x_1, y_1), (x_2, y_2) on the xy plane, where $x_1 \neq x_2$.

(2) Find the value of the determinant $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$ in factored form.

(3) Show that there is a unique curve $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ passing through three points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) on the xy plane, where a_0, a_1, a_2 are constants and x_1, x_2, x_3 are all distinct.

(4) The curve in (3) can be represented in the form $y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$, where each of c_1, c_2, c_3 does not depend on y_1, y_2, y_3. Find c_1, c_2, c_3.

(5) Let us represent a curve $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ passing through five points $(x_1, y_1), \ldots, (x_5, y_5)$ on the xy plane in the form $y = c_1y_1 + \cdots + c_5y_5$, where each of $c_1, \ldots, c_5$ does not depend on $y_1, \ldots, y_5$, and $x_1, \ldots, x_5$ are all distinct. Find c_1.

(草稿用紙)

(草稿用紙)

2023 年 度 / AY2023

大 学 院 入 学 試 験 問 題
Graduate School
Entrance Examination Problem Booklet

数　　学　2 / Mathematics 2

試験時間 / **Examination Time:**　　**14:25–15:15**

注 意 事 項 / Instructions

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
   Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
   If you find missing, misplaced, and/or unclearly printed pages in the problem booklet, ask the examiner.
3. 本冊子には第２問があり，和文は１頁目，英文は２頁目である．日本語ないし英語で解答すること．
   This booklet contains Problem 2 on page 1 in Japanese and page 2 in English. Answer the problem in Japanese or English.
4. 解答用紙１枚が渡される．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
   You are given one answer sheet. You may use the back of the sheet if necessary.
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を記入すること．
   Fill the designated blanks at the top of each answer sheet with your examinee's number and the problem number you are to answer.
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
   Do not separate the draft papers from this problem booklet.
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
   Any answer sheet including marks, symbols and/or words unrelated to your answer will be invalid.
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
   Do not take either the answer sheets or the problem booklet out of the examination room.

受験番号 / Examinee's number	No.

上欄に受験番号を記入すること．Fill the above box with your examinee's number.

(草稿用紙)

第2問

t を実数の独立変数，$x(t)$ と $y(t)$ を実数値関数として，以下の問いに答えよ．

(1) 常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=\cos(t)$$

の $t\to-\infty$ で有界である解をすべて求めよ．

(2) 常微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x-y &= \cos(t)\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y-x &= 0\end{aligned}$$

の $t\to-\infty$ で有界である解 $x(t)$ と $y(t)$ をすべて求めよ．

(3) 適切な変数変換によって常微分方程式

$$e^{-t}x^2-2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0$$

を線形な常微分方程式に変換し，$x(0)=\frac{1}{2}$ となる解 $x(t)$ を求めよ．

Problem 2

Let t be a real independent variable, and let $x(t)$ and $y(t)$ be real-valued functions. Answer the following questions.

(1) Find all solutions of the following ordinary differential equation

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=\cos(t),$$

which are bounded when $t \to -\infty$.

(2) Find all solutions $x(t)$ and $y(t)$ of the following ordinary differential equations

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x-y &= \cos(t),\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y-x &= 0,\end{aligned}$$

which are bounded when $t \to -\infty$.

(3) By converting the following ordinary differential equation

$$e^{-t}x^2-2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0$$

to a linear ordinary differential equation with an appropriate change of variable, find the solution $x(t)$ that satisfies $x(0)=\frac{1}{2}$.

(草稿用紙)

(草稿用紙)

2023 年度 / AY2023

大学院入学試験問題
Graduate School
Entrance Examination Problem Booklet

数　学　3 / Mathematics 3

試験時間 / **Examination Time:**　　**15:50–16:40**

注意事項 / **Instructions**

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
   Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
   If you find missing, misplaced, and/or unclearly printed pages in the problem booklet, ask the examiner.
3. 本冊子には第3問があり，和文は1頁目，英文は2頁目である．日本語ないし英語で解答すること．
   This booklet contains Problem 3 on page 1 in Japanese and page 2 in English. Answer the problem in Japanese or English.
4. 解答用紙1枚が渡される．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
   You are given one answer sheet. You may use the back of the sheet if necessary.
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を記入すること．
   Fill the designated blanks at the top of each answer sheet with your examinee's number and the problem number you are to answer.
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
   Do not separate the draft papers from this problem booklet.
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
   Any answer sheet including marks, symbols and/or words unrelated to your answer will be invalid.
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
   Do not take either the answer sheets or the problem booklet out of the examination room.

受験番号 / Examinee's number	No.

上欄に受験番号を記入すること．Fill the above box with your examinee's number.

(草稿用紙)

第3問

丸石 ○ と四角い石 □ をランダムに左から右に一直線上に一つずつ並べる．$0 < q < 1$ として，丸石を確率 $1-q$，四角い石を確率 q で独立同一分布に従って並べていく．M を正の整数として，四角い石が M 個連続して並べられた直後に並べることを停止する．$M=4$ の場合の列の例を以下に示す．

列 1　○□□□□

列 2　□○□○○□□□□

停止後の石の数を表す確率変数を L とする．上に示した列の場合，列 1 と列 2 はそれぞれ $L=5$，$L=9$ となる．

並べている途中の状態を考える．k を非負整数とし，右端から四角い石が k 個連続している状態を C_k とする．例えば，$M=4$ の時に以下の列を考える．

列 3　○□□□○○□□

列 4　□○□○○

$M=4$ の場合を考えているため，列 3 と列 4 はまだ停止していない．列 3 は右端から四角い石が 2 個連続しているので状態 C_2 である．列 4 は右端に四角い石がないので状態 C_0 である．状態 C_k から n 個石を並べたときに初めて停止条件を満たす確率を a_{kn} とする．ここで n は非負整数である．a_{kn} に対して以下のような母関数 $A_k(t)$ を定義する．

$$A_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n a_{kn}$$

この時，以下の問いに答えよ．

(1) $M=1$ の時，L の平均と分散を求めよ．

(2) $A_k(t)$ が満たす漸化式を求めよ．

(3) $A_k(t)$ を q, M, t, k を用いて表せ．

(4) L の平均を求めよ．

Problem 3

Let us randomly place circle stones ○ and square stones □ one by one in a line from left to right. The circle and square stones are placed with probability $1-q$ and q, respectively, according to the independent and identical distribution, where $0 < q < 1$. The placement stops right after M square stones are placed in a row, where M is a positive integer. We show examples of the lines for $M = 4$ as follows.

line 1 ○□□□□

line 2 □○□○○□□□□

Let L be a random variable which represents the number of the stones after stopping the placement. For the case of the lines shown above, $L = 5$ and $L = 9$ for lines 1 and 2, respectively.

Here, we consider intermediate states during the placement. Let k be a non-negative integer and let C_k be a state of a line where there are k square stones in a row from the right end. For instance, we consider the following lines for $M = 4$.

line 3 ○□□□○○□□

line 4 □○□○○

Since we are considering the case of $M = 4$, lines 3 and 4 are not stopped yet. Line 3 is in state C_2 since there are 2 square stones in a row from the right end. Line 4 is in state C_0 since there is no square stone at the right end. Let a_{kn} be the probability that the stopping condition is met after placing n stones starting from state C_k, where n is a non-negative integer. We define the following generating function $A_k(t)$ for a_{kn}.

$$A_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n a_{kn}$$

Answer the following questions.

(1) Calculate the mean and variance of L for $M = 1$.

(2) Obtain the recurrence relation that $A_k(t)$ satisfies.

(3) Obtain $A_k(t)$ as a function of q, M, t, and k.

(4) Calculate the mean of L.

(草稿用紙)

(草稿用紙)