Discrete Mathematics (0034)
Lecture Notes

Yulwon Rhee (202211342)

Department of Computer Science and Engineering, Konkuk University

1 Week 1

1.1 논리와 명제

논리 : 사고의 규칙
명제 논리(Propositional Logic): T/F 판별 가능한 문장 or 수식
술어 논리(Predicate Logic): 변수 포함 명제
단순 명제(Simple Proposition): 하나의 문장 or 수식으로 구성된 명제
합성 명제(Composition Proposition): 단순 명제들이 논리 연산자로 연결

항진 명제(Tautology): 항상 T인 합성 명제
모순 명제(Contradiction): 항상 F인 합성 명제

1.2 논리 연산자

Table 1: Logical Operators

연산자	기호
부정(NOT)	$\sim$
논리곱(AND)	$\wedge$
논리합(OR)	$\vee$
배타적 논리합(XOR)	$\oplus$
조건(if then)	$\rightarrow$
쌍방 조건(iff)	$\leftrightarrow$

Table 2: Truth Table for the XOR, Implication and Biconditional Proposition

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- p이면 q이다. (if p then q, q when p, p only if q)
- p는 q의 충분조건이다. (p is sufficient for q)
- q는 p의 필요조건이다. (q is necessary for p)
- p는 q를 함축한다. (p implies q)

1.3 논리 연산자 우선순위

$$\sim \; > \; \wedge \; > \; \vee \; > \; \to \; > \; \leftrightarrow$$

1.4 논리 연산: 상호 관계

Table 3: $p \to q$에 대하여

역(Converse)	$q \to p$
이(Inverse)	$\sim p \to \sim q$
대우(Contrapositive)	$\sim q \to \sim p$

1.5 예제 풀이

e.g.) You cannot ride the rollercoaster if you are under 4 ft. tall unless you are older than 16 years old.
p : You can ride the rollercoaster
q : You are under 4 ft. tall
r : You are older than 16 years old
$\sim p$ if q unless r
$\Rightarrow \sim p$ if q if $\sim r$
$\Rightarrow \sim r \to (q \to \sim p)$
$\equiv (\sim r \wedge q) \to \sim p$

2 Week 2

2.1 비트 연산(Bit Operations)

Table 4: Logical Operators

Name	NOT	AND	OR	XOR	Implies	Iff
Propositional Logic	$\sim$	$\wedge$	$\vee$	$\oplus$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
Boolean Algebra	$\overline{p}$	$p \cdot q$	$+$	$\oplus$		
C/C++/Java(Wordwise)	!	&&	||	!=		==
C/C++/Java(Bitwise)	~	&	|	^		

2.2 논리적 동치 관계

$p \leftrightarrow q$가 항진 명제 $\rightarrow$ p, q는 논리적 동치, $p \equiv q$ 또는 $p \Leftrightarrow q$

Table 5: 논리적 동치 관계

법칙 이름	동치 관계
결합 법칙	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
흡수 법칙	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
드 모르간 법칙	$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$ $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$
조건 법칙	$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
대우 법칙	$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

2.3 술어 논리(Predicate Logic)

$p(x) = x$에 대한 명제술어

2.4 술어 한정자(Predicate Quantifier)

$\forall$: 모든
$\exists$: 어떤
괄호를 이용하여 모순이 없도록 범위 지정 필요
제한된 정의역 표현: 변수가 만족해야 하는 조건이 한정기호 다음에 표기
e.g.)

$$\forall x < 0(x^2 > 0), \text{ 정의역은 실수 } \Longrightarrow \forall x(x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$$
$$\exists x > 0(x^2 = 2), \text{ 정의역은 실수 } \Longrightarrow \exists x(x > 0 \wedge x^2 = 2)$$

부정:

$$\sim \forall(p(x)) \equiv \exists x(\sim p(x))$$
$$\sim (\exists x p(x)) \equiv \forall x(\sim p(x))$$

2.5 중첩 한정자

$\forall x \exists y\ P(x,y)$: For every x, there is a y for which $P(x,y)$ is true.
$\exists x \forall y\ P(x,y)$: There is an x for which $P(x,y)$ is true for every y.

2.6 예제 풀이

1. If a user is active at least one network link will be available.
   $A(u)$: User u is active.
   $S(n,x)$: Network link n is in status x.
   $\exists u\ A(u) \rightarrow \exists n\ S(n, \text{available})$

2. Everyone has exactly one best friend.
$\rightarrow$ For every person x, person x has exactly one best friend.
$\rightarrow$ 'Exactly one' means that
   1. There is a person y who is the best friend of x.
   2. For every person z, if person z is not y, then z is not the best friend of x.

   $B(x,y)$: y is the best friend of x.
   $\forall x \exists y(B(x,y))$, y의 조건: $\forall z((z \neq y) \rightarrow \sim B(x,z))$

$L(x,y)$: x loves y.
3. There is somebody whom everybody loves.
   $\exists y \forall x\ L(x,y)$ ($\exists y$와 $\forall x$ 순서 유의!)
4. Nobody loves everybody
   $\sim \exists x \forall y\ L(x,y) \equiv \forall x \exists y\ \sim L(x,y)$

3 Week 3

3.1 추론

(연역적) 추론(Argument): 주어진 명제 p_n을 바탕으로 새로운 명제 q를 유도
p_n: 전제(Premise), 가정(Hypothesis)
q: 결론(Conclusion)
유효 추론(Valid Argument): 전제 T, 결론 T
허위 추론(Fallacious Argument): 결론 F

Table 6: 논리적 추론 법칙

법칙 이름	추론 법칙
긍정 법칙*	$p,\ p \to q \vdash q$
부정 법칙*	$\sim q,\ p \to q \vdash \sim p$
조건 삼단 법칙*	$p \to q,\ q \to r \vdash p \to r$
선언 삼단 법칙	$p \vee q,\ \sim p \vdash q$
양도 법칙	$(p \to q) \wedge (r \to s),\ p \vee r \vdash (q \vee s)$
파괴적 법칙	$(p \to q) \wedge (r \to s),\ \sim q \vee \sim s \vdash \sim p \vee \sim r$
선접 법칙	$p \vdash p \vee q$
분리 법칙	$p \wedge q \vdash p$
연접 법칙	$p,\ q \vdash p \wedge q$

* 가장 많이 사용되고 잘 알려진 3가지 법칙

3.2 대치 vs 추론

대치의 공식은 합성 명제 전체 또는 한 부분에 적용 가능
추론의 법칙은 합성 명제의 주 연산자에 사용

3.3 증명법: 한정기호를 사용한 명제의 추론규칙

전칭 예시화(Universal Instantiation): $\forall x P(x) \to \exists c P(c)$
전칭 일반화(Universal Generalisation): $P(c)$ for an arbitrary $c \to \forall x P(x)$
존재 예시화(Existential Instantiation): $\exists x P(x) \to P(c)$ for some c (c가 적어도 하나 존재)
존재 일반화(Existential Generalisation): $P(c)$ for some $c \to \exists x P(x)$

3.4 정리의 증명

정의: 논의 대상 보편화 위해 사용 용어 or 기호 의미를 확실히 규명한 문장 or 식
e.g.) 한 내각의 크기가 직각인 삼각형은 직각삼각형, 명제는 T/F 판별 가능한 문장 or 수식
공리: 별도 증명 없이 T로 이용되는 명제
e.g) p가 참이면 $p \vee q$도 참, $a = b$면, $a + c = b + c$
정리: 공리, 정의로 T가 확인된 명제
증명: 공리, 정의, 정리로 명제가 T임을 확인하는 과정

3.5 증명 방법

$p \to q$ 증명: p, q 모두 T or p 무조건 거짓
직접 증명법: $p \to q$ 직접 증명
간접 증명법: 동치로 $p \to q$ 변환하여 증명. 대우 증명법, 모순 증명법, 반례 증명법, 존재 증명법
기타 증명법: 수학적 귀납법

3.6 수학적 귀납법

연역법(Deduction): 사실(Fact), 공리(Axiom)에 입각해 추론(Inference)을 통해 새로운 사실 도출
귀납법(Induction): 관찰, 실험에 기반한 가설을 귀납 추론을 통해 일반적인 규칙으로 입증

3.7 예제 풀이

1. There is someone in this class who has been to France
   Everyone who goes to France visits the Louvre.
   Therefore, someone in this class has visited the Louvre.

Solution.
x: 사람
$C(x) : x$ is in this class.
$F(x) : x$ has been to France.
$L(x) : x$ visits to Louvre.

$\exists x(C(x) \wedge F(x)),\ \forall x(F(x) \to L(x)) \vdash \exists x(C(x) \wedge L(x))$

Some c, $C(c) \wedge F(c)$: T (존재 예시화)
$\forall x \to c \in x,\ F(c) \to L(c)$: T (전칭 예시화)
$C(c) \wedge F(c) \vdash C(c), F(c)$

$F(c),\ F(c) \to L(c) \vdash L(c)$
$C(c),\ L(c) \to C(c) \wedge L(c)$
$C(c) \wedge L(c) \to \exists x(C(x) \wedge L(x))$ (존재 일반화)

2. Everyone in New Jersey lives within 50 miles of the ocean.
Someone in New Jersey has never seen the ocean.
Therefore, someone who lives within 50 miles of the ocean has never seen the ocean.

Solution.
x: 사람
$N(x)$: x is in New Jersey.
$O(x)$: x lives within 50 miles of the ocean.
$S(x)$: x has seen the ocean.

$\forall x(N(x) \to O(x)),\ \exists x(N(x) \wedge \sim S(x)) \vdash \exists x(O(x) \wedge \sim S(x))$

$\exists x(N(x) \wedge \sim S(x))$, Some $c \in x \vdash N(c) \wedge \sim S(c)$
$\forall x(N(x) \to O(x))$, Some $c \in x \vdash N(c) \to O(c)$
$N(c) \wedge \sim S(c) \vdash N(c),\ \sim S(c)$
$N(c),\ N(c) \to O(c) \vdash O(c)$
$O(c),\ \sim S(c) \vdash O(c) \wedge \sim S(c)$
$O(c) \wedge \sim S(c) \to \exists x(O(x) \wedge \sim S(x))$

3. Every student has an Internet account.
Homer does not have and Internet account.
Maggie has an Internet account.

Solution.

x: 사람
$S(x)$: x is a student.
$I(x)$: x has an Internet account.

$\forall x(S(x) \to I(x)),\ \sim I(\text{Homer}),\ I(\text{Maggie}) \vdash ?$

$\forall x(S(x) \to I(x)),\ \text{Homer} \in x \vdash S(\text{Homer}) \to I(\text{Homer})$
$\forall x(S(x) \to I(x)),\ \text{Maggie} \in x \vdash S(\text{Maggie}) \to I(\text{Maggie})$
$S(\text{Homer}) \to I(\text{Homer}) \equiv \sim I(\text{Homer}) \to \sim S(\text{Homer})$

$\sim I(\text{Homer}),\ \sim I(\text{Homer}) \rightarrow \sim S(\text{Homer}) \vdash \sim S(\text{Homer})$

$\therefore \forall x(S(x) \rightarrow I(x)),\ \sim I(\text{Homer}),\ I(\text{Maggie}) \vdash \sim S(\text{Homer})$

4 Week 4

4.1 직접 증명법(Direct Proof)

$p \to q$가 T 증명

4.2 모순 증명법(귀류법, Contradiction Proof)

주어진 문제의 명제 부정 후 논리 전개

$$\begin{aligned} \sim (p \wedge (\sim q)) &\equiv \sim p \vee \sim (\sim q) \\ &\equiv \sim p \vee q \\ &\equiv p \to q \end{aligned}$$

$p \wedge (\sim q)$가 T라고 하고, 모순 유도 시 원래 명제 T

4.3 대우 증명법(Contrapositive Proof)

$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$에서, $\sim q \to \sim p$가 T 증명

4.4 존재 증명법(Existence Proof)

$\exists x$ such that $p(x)$ 증명

4.5 반례 증명법(Counter-Example Proof)

반례를 통해 증명
$\forall x p(x)$가 F임을 보이기 위해 $\sim \forall x p(x) \equiv \exists x \sim p(x)$에서 $p(x)$가 F인 x 적어도 하나 존재

4.6 필요충분조건 증명법(Iff Proof)

$p \to q,\ q \to p$ 증명 $\Rightarrow p \leftrightarrow q$ 증명

5 Week 5

5.1 집합

Cardinality: 원소 개수
부분 집합(Subset): A의 모든 원소가 B의 원소에 속할 때, $A \subseteq B$. 부분 집합이 아닐 때, $A \nsubseteq B$
진부분 집합(Proper Subset): $A \subseteq B$, $A \neq B \Longrightarrow A \subset B$. 진부분 집합이 아닐 때, $A \not\subset B$
멱집합(Power Set): 모든 부분 집합을 원소로 가지는 집합 $= P(S) = 2^S$. $|P(S)| = 2^{|S|}$

5.2 부분 집합의 성질

- $\forall P,\ P \subseteq P$
- $\forall P,\ \varnothing \subseteq P$

5.3 집합의 연산

Table 7: Set Operators

연산	기호
합집합	$A \cup B$
교집합	$A \cap B$
차집합	$A - B$
대칭 차집합	$A \oplus B$
곱집합	$A \times B$

서로소: $A \cap B = \varnothing$
곱집합(Cartesian Product): $a \in A,\ b \in B,\ (a,b)$인 모든 순서쌍의 집합
e.g) $A = 1,2,3$, $B = a,b,c$라 할 때, $A \times B = (1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)$
드 모르간 법칙: $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

5.4 집합의 분할

분할(Partition): $\exists S \neq \varnothing (\pi = \{A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots, A_k\})$

1. $i = 1, \cdots, k$에 대하여, $A_i \subseteq S$ $(S \neq \varnothing)$
2. $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$
3. $i \neq j \rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$
   c.f.) $A_i =$ 분할의 블록

6 Week 6

6.1 보수

r진수 정수 N에서 $r-1$의 보수: $(r^n - 1) - N$
r진수 정수 N에서 r의 보수: $(r^n) - N = (r-1$의 보수$) + 1$

6.2 부호화 절대치 표현

- 연산 결과가 정확하지 않음
- 0의 표현이 2가지

6.3 1의 보수 표현

- 연산 결과는 정확하지만 (초과 비트를 더해줄 때)
- 0의 표현이 2가지

6.4 2의 보수 표현

- 연산 결과가 정확함
- 0의 표현이 1가지
- 음수 값 하나 더 표현 가능 (0의 표현이 하나 줄어들어서)

6.5 초과 비트 발생 시

- 1의 보수: 초과 비트를 덧셈
- 2의 보수: 무시

7 Week 7

7.1 행렬

대각합(Trace): 대각성분의 합. $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{trace}(A)$
교대 행렬(Skewed-Symmetric Matrix): $A = -A^T$

7.2 행렬식

$\det(A) = |A|$

$$\text{let } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\text{let } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12} - b_{21} - b_{33} - b_{13}b_{22}b_{31}$$

정칙 행렬(Non-Singular Matrix): $\det(A) \neq 0$
특이 행렬(Singular Matrix): $\det(A) = 0$

7.3 행렬식의 성질

- $n \times n$ 행렬 A에서 임의의 두 행 또는 열이 같으면 $\det(A) = 0$
- $n \times n$ 행렬 A에서 임의의 두 행 또는 열을 바꾸어서 만든 행렬 B에서 $\det(B) = -\det(A)$
- $n \times n$ 행렬 A에서 임의의 행 또는 열의 모든 원소가 0이면 $\det(A) = 0$
- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(kA) = k\det(A)$

가역적(Nonsingular, Invertible): A, B가 정칙 행렬. $AB = BA = I$인 경우

8 Week 8 (중간고사)

9 Week 9

9.1 관계

- 서로 다른 두 집합에 속하는 원소들 간의 순서(Order)를 표현
- 순서쌍 집합에 속하면서 순서쌍을 이루는 원소들은 '관계'가 있다
- 순서쌍 집합은 곱집합의 부분집합

9.2 이항 관계(Binary Relation)

집합 A에서 집합 B로 가는 관계
R: $A \times B$의 부분 집합
$a \in A, b \in B$일 때, $(a,b) \in R \rightarrow {}_aR_b$; $(a,b) \notin R \rightarrow {}_a\not{R}_b$

정의역(Domain): A에서 B로 가는 이항 관계 R에서 집합 A, $\mathrm{dom}(R) = \{a | a \in A\}$
공변역(Codomain): A에서 B로 가는 이항 관계 R에서 집합 B, $\mathrm{codom}(R) = \{b | b \in B\}$
치역(Range): A에서 B로 가는 이항 관계 R에서 집합 B의 부분 집합, $\mathrm{ran}(R) = \{b | (a,b) \in R\} \subseteq B$

n항 관계(n-ray Relation): $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$의 부분 집합, $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$

역관계(Inverse Relations): B에서 A로의 관계, $R^{-1} = \{(b,a) | (a,b) \in R\}$, ${}_aR_b$ 존재 $\rightarrow {}_bR_a^{-1}$ 존재

9.3 관계의 표현: 서술식 방법

e.g.) $A = 1,2,3$에서 원소 a,b가 $a \geq b$인 관계 R

9.4 관계의 표현: 나열식 방법

- 화살표 도표(Arrow diagram)
- 좌표 도표(Coordinate diagram):
  - 집합 A의 원소를 x축 위의 점으로, B의 원소를 y축 위의 점으로 표시
- 방향 그래프(Directed graph):
  - 관계 R이 하나의 집합 A에 대한 관계 표현일 때
  - A의 각 원소 $\Rightarrow$ 그래프의 정점(Vertex)
  - $(a,b) \in R$이면 a에서 b로 화살표가 있는 연결선(Edge)로 표현
- 관계 행렬(Relation matrix):
  - 부울(Boolean) 행렬(행렬 안 모든 원소들이 0 또는 1인 행렬)을 이용

- $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$에서 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$로 가는 관계 R에 대한 $m\times n$ 행렬 $M_R=[m_{ij}]$

$$m_{ij}=\begin{cases}1,(a_i,b_j)\in R\\0,(a_i,b_j)\notin R\end{cases}$$

- e.g.) $A=\{1,2,3\}$과 $B=\{a,b\}$의 이항 관계 $R=\{(1,b),(2,a),(2,b),(3,a)\}$

$$M_R=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}a&b\end{matrix}\\\begin{bmatrix}0&1\\1&1\\1&0\end{bmatrix}\end{array}\qquad M_{R^{-1}}=\begin{array}{c}\\a\\b\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3\end{matrix}\\\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

9.5 관계의 성질

반사 관계(Reflexive Relation): 모든 $a\in A$에 대해 $(a,a)\in R$인 관계
비반사 관계(Irreflexive Relation): 모든 $a\in A$에 대해 $(a,a)\notin R$인 관계

반사 관계와 비반사 관계의 관계 행렬

- 반사 관계: $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{bmatrix}$
- 비반사 관계: $\begin{bmatrix}0&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{bmatrix}$
- 반사 관계도 비반사 관계도 아닌 경우: $\begin{bmatrix}0&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{bmatrix}$

대칭 관계(Symmetric Relation):
$\exists a,b\in A$에 대해 $(a,b)\in R$이면 $(b,a)\in R$, (a,b) 존재 $\rightarrow (b,a)$ 존재
관계 행렬에서 대각 성분 기준으로 대칭이면 대칭 관계 성립

반대칭 관계:
$\exists a,b\in A$에 대해 $(a,b)\in R$일 때, $(b,a)\in R$이면 $a=b$인 관계
$a\neq b$이고, $(a,b)\in R$이면 $(b,a)\notin R$

추이 관계: $\exists a,b,c \in A$에 대해 $(a,b) \in R$이고, $(b,c) \in R$이면 $(a,c) \in R$인 관계

9.6 합성 관계(Composite Relation)

A에서 B로의 관계 R_1과 B에서 C로의 관계 R_2에 대해서, A에서 C로의 합성 관계 $= R_1 \cdot R_2$ 또는 R_1R_2

$$R_1 \cdot R_2 = \{(a,c) | a \in A, c \in C, (a,b) \in R_1 \text{이고 } (b,c) \in R_2\}$$

합성 관계의 연산: $R \cdot S = M_{R \cdot S} = M_R \odot M_S$

$$\text{e.g.) } M_R = \begin{matrix} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \qquad M_S = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$R \cdot S = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \\ (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

합성 관계의 거듭제곱 $R^n = \begin{cases} R & (n = 1) \\ R^{n-1} \cdot R & (n > 1) \end{cases}$

기타 연산

- $R_1 \cap R_2 = M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$
  $= \{(a,b) \in R_1 \cap R_2 | (a,b) \in R_1 \wedge (a,b) \in R_2\}$
- $R_1 \cup R_2 = M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}$
  $= \{(a,b) \in R_1 \cup R_2 | (a,b) \in R_1 \vee (a,b) \in R_2\}$
- $R_1 - R_2 = M_{R_1 - R_2} = \{(a,b) \in R_1 - R_2 | (a,b) \in R_1 \wedge (a,b) \notin R_2\}$

9.7 추이 관계와 합성 관계

[정리] 추이 관계와 거듭제곱의 관계

집합 A에 대한 관계 R이 추이 관계일 필요충분조건은 모든 양의 정수 n에 대하여 $R^n \subseteq R$이다.

9.8 폐포(Closure)

폐포(Closure): A상의 관계 R이 어떤 성질을 만족하지 않을 때, 그 성질을 만족하도록 순서쌍들을 추가하여 R^*(원하는 성질이 만족되는 가장 작은 집합)로 확장

성질 P에 대한 관계 R의 폐포: A에 대한 관계 R에 대해, R^*가 R을 포함하면서 성질 P를 가질 때, R^*는 P에 대한 R의 폐포

9.9 반사 폐포(Reflexive Closure)

A에 대해, R을 포함하면서 반사 관계를 갖는 관계 S
$S = R \cup \{(a,a) | a \in A\}$

9.10 대칭 폐포(Symmetric Closure)

A에 대해, R을 포함하면서 대칭 관계를 갖는 관계 S
$S = R \cup \{(b,a) \in A \times A | (a,b) \in R\} = R \cup R^{-1}$

9.11 추이 폐포(Transitive Closure)

A에 대해, R을 포함하면서 추이 관계를 갖는 관계 S
$S = R \cup \{(a,c) \in A \times A | (a,b) \in R \ \wedge (b,c) \in R\}$

9.12 연결 관계(Connectivity Relation) R^*

$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R^1 \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$
연결 관계 R^*는 R의 추이 폐포

[정리] R이 n개의 원소를 갖는 집합에 대한 관계이고, M_R을 관계 R에 대한 부울 행렬이라고 했을 때, R의 추이 폐포 R^*는

$$M_{R^*} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee \cdots \vee M_{R^n}$$

9.13 예제 풀이

양의 정수(Positive Integer) 집합에서 두 원소 a,b에 대해서 'a가 b를 나눈다'라는 관계는 어떤 성질을 만족하는가? (관계(1) 강의 참조)

10 Week 10

10.1 동치 관계(Equivalence relation)

동치 관계: 반사 관계, 대칭 관계, 추이 관계가 모두 성립하는 경우

10.2 동치류(Equivalence Class) $[a]$

A에 대한 관계 R이 동치 관계일 때, R에 대한 a의 동치류: a와 순서쌍을 이루는 원소들의 집합

$[a] = \{x|(a,x) \in R\}$

DM-06-관계(2)_2 (2022) 29:57부터...

함수 파트는 나중에 따로 봐야지..

11 Week 11

11.1 그래프(Graph)

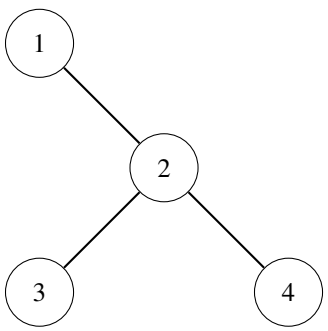
공집합이 아닌 정점(Vertex or Node)의 집합 V와 서로 다른 정점의 쌍 (v_i, v_j)를 연결하는 변 또는 연결선(Edge)의 집합 E로 구성되는 구조 G

$G = (V, E)$

$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$

$E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\} = \{(v_i, v_j), \cdots\}$

e.g.)



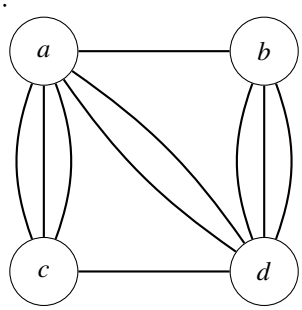
$V = \{1,2,3,4\},\ E = \{(1,2),(2,3),(2,4)\}$

무방향 그래프(Undirected Graph): 특별한 언급 없으면 무방향 그래프

방향 그래프(Directed Graph, Digraph): 선행자? 후속자?

단순 그래프(Simple Graph): 루프가 없는 그래프

멀티 그래프(Multigraph):



연결 그래프(Connected Graph): 모든 Vertex가 연결된 그래프, 모든 Vertex간 경로 존재

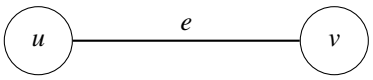
강한 연결 그래프(Strongly Connected Graph): 방향 그래프에서만, 모든 두 Vertex v_1, v_2에 대해 $v_1 \leftrightarrow v_2$

연결 요소(Connectivity Component): 그래프에서 모든 Vertex들이 연결되어 있는 부분 그래프

연결 수(Connectivity Number): G에서 연결 요소 개수

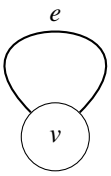
11.2 그래프 용어

인접(Adjacent)과 근접(Incident):



u, v는 서로 Adjacent, e는 u, v에 Incident

루프(Loop):



근접하는 점이 같은 e

경로(Path): Vertex들의 열(Sequence) $v_1, v_2, \cdots, v_n$에서 $(v_{k-1}, v_k) \in E, 1 \leq k < n$, 경로의 길이는 $k-1$
단순 경로(Simple Path): 같은 Edge를 두 번 포함하지 않는 경로
기본 경로(Elementary Path): 같은 Node를 두 번 포함하지 않는 경로

사이클(Cycle) 또는 순회(Circuit): $v_1 = v_k (k \neq 1)$인 경로, 종점 == 시점
단순 사이클(Simple Cycle): 같은 Edge를 반복해 방문하지 않는 사이클
기본 사이클(Elementary Cycle): 시점 제외 어떤 Node도 반복해 방문하지 않는 사이클

길이(Length): 경로 또는 사이클을 구성하는 Edge의 수

차수(Degree) $d(v)$: Vertex v에 근접하는 Edge의 수, Loop는 두 개로 Count
홀수점(Odd Vertex): 차수가 홀수인 Vertex
짝수점(Even Vertex): 차수가 짝수인 Vertex

외차수(Out-degree) $out-d(v)$: 방향 그래프에서 Vertex v에서 시작하는 화살표 수

내차수(In-degree) $in-d(v)$: 방향 그래프에서 Vertex v에서 끝나는 화살표 수

[정리] 차수에 대한 정리
- $G = (V, E)$에서, 모든 Vertex의 차수의 합은 Edge의 수의 두 배이다.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

- $G = (V, E)$에서, 차수가 홀수인 정점의 수는 짝수이다.

11.3 그래프 vs 트리(Tree)

- 사이클이 없는 그래프
- 루트(Root)가 한 개 존재
- 루트로부터 다른 모든 Node로 가는 경로가 항상 유일하게 존재
- 루트는 모든 트리의 출발점

11.4 오일러 경로(Eulerian Path) 및 오일러 회로(Eulerian Circuit)

오일러 경로: 멀티 그래프에서 모든 Edge들을 한 번씩만 통과하는 경로를 찾는 문제
오일러 회로: Node는 여러 번 통과할 수 있지만, Edge는 한 번씩만 통과하는 사이클

어떤 그래프 G가 오일러 경로를 가지기 위한 필요충분조건은 G가 연결 그래프이고, 홀수 차수의 개수가 0 또는 2인 경우이다.

어떤 그래프 G가 오일러 회로를 가지기 위한 필요충분조건은 G가 연결 그래프이고, 모든 Node들이 짝수 개의 차수를 가지는 경우이다.

11.5 해밀턴 경로(Hamiltonian Path) 및 해밀턴 회로(Hamiltonian Circuit)

해밀턴 경로: 그래프에서 모든 Node를 오직 한 번씩만 지나지만 시점으로 돌아오지 않는 경로
해밀턴 회로: 그래프에서 모든 Node를 오직 한 번씩만 지나는 순회
해밀턴 회로에 대한 충분 조건:

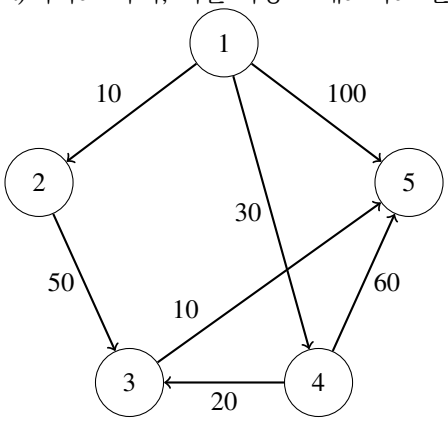
- 차수 1을 갖는 Node를 가진 그래프는 해밀턴 순환을 가질 수 없다.
- 차수가 2인 Node에 근접하는 두 Vertex는 해밀턴 순환에 포함된다.
- 한 Node에 근접하는 두 Vertex가 해밀턴 순환에 포함되면, 그 Node에 근접한 다른 Vertex는 해밀턴 순환에 포함될 수 없다.

Ore's Theorem: $n \geq 3$일 때, n개의 Node를 갖는 단순 연결 그래프 G에서 인접하지 않은 임의의 정점 u, v에 대해 $d(u) + d(v) \geq n$이면 G는 해밀턴 그래프이다.

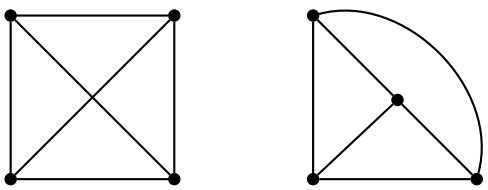
Dirac's Theorem: $n \geq 3$일 때, n개의 Node를 갖는 단순 연결 그래프 G에서 임의의 정점 v에 대해 $2d(v) \geq n$이면 G는 해밀턴 그래프이다.

11.6 특수 형태의 그래프

가중 그래프(Weight Graph): G의 각 Edge에 0보다 큰 수가 할당되었을 때, 이 값을 가중값(Weight)이라고 하며, 이를 가중 그래프라고 한다.



동형 그래프(Isomorphic Graph): $G_1 = (V_1, E_1)$과 $G_2 = (V_2, E_2)$가 주어졌을 때, 전단사 함수 $f : V_1 \to V_2$가 존재하여 $\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$이면 f를 동형(Isomorphism)이라고 하고, G_1과 G_2를 동형 그래프라 한다.

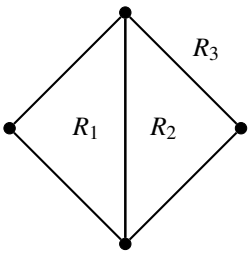


11.7 오일러의 정리

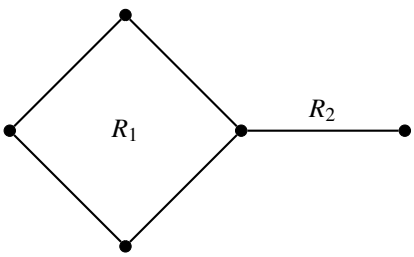
연결된 평면 그래프 G에서 Vertex의 수를 v, Edge의 수를 e, 면(Space)의 수를 s라고 할 때, $v - e + s = 2$

11.8 평면 그래프

평면 그래프(Planar Graph): $G=(V,E)$를 평면에 그릴 때, 교차하지 않는 그래프
면 f의 차수 $d(f)$: 평면 그래프의 면 f의 경계를 이루는 변의 수
e.g.)



$$d(R_1)=3,\ d(R_2)=3,\ d(R_3)=4$$
$$d(R_1)+d(R_2)+d(R_3)=2e$$



$$d(R_1)=4,\ d(R_2)=6$$
$$d(R_1)+d(R_2)=2e$$

평면 그래프의 면의 차수의 총 합은 변의 수의 두 배이다.

$$2e=\sum_f d(f)$$

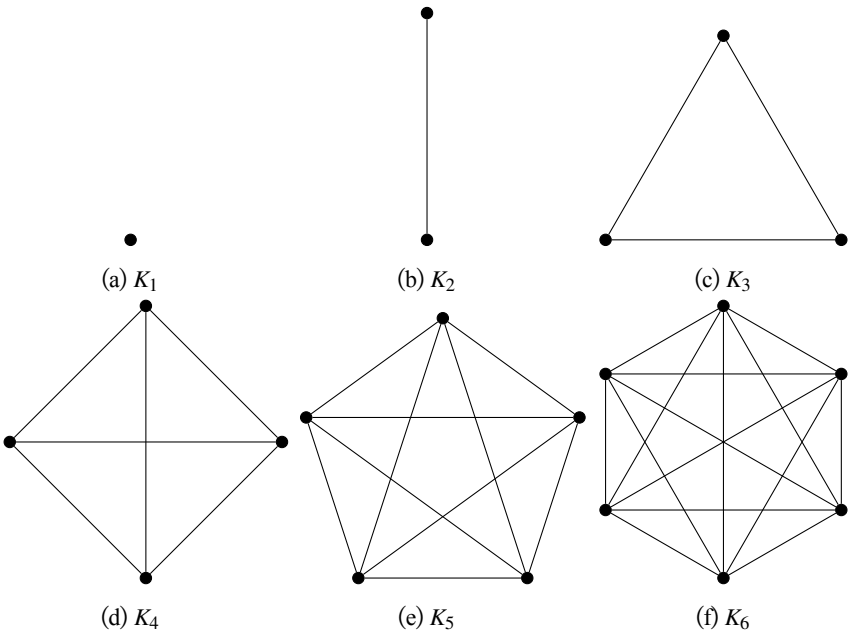
연결된 평면 단순 그래프의 Vertex의 수를 v, Edge의 수를 e라 할 때, $v\geq 3$이면 $e\leq 3(v-2)$
모든 면의 차수는 3이상이므로, $2e=\sum_f d(f)\geq 3f$, $2=v-e+f\leq c-e+\frac{2}{3}e\leq v-\frac{1}{3}e$

12 Week 12

12.1 특수 형태의 그래프

완전 그래프(Complete Graph): 모든 n개의 Vertex들의 쌍 사이에 Edge가 존재하는 $G = K_n$

e.g.)



(a) K_1 (b) K_2 (c) K_3

(d) K_4 (e) K_5 (f) K_6

이분 그래프(Bipartite Graph): V가 X와 $Y = V - X$로 나누어져, 각 Edge가 X 내의 Vertex와 Y 내의 Vertex의 쌍으로 연결될 때, $G = (V, E)$

완전 이분 그래프(Complete Bipartite Graph): X내의 모든 Vertex와 Y내의 모든 Vertex 사이에 Edge가 존재할 때, 그래프 G

e.g.)

(a) $K_{2,3}$ (b) $K_{2,4}$

12.2 그래프의 표현 방법

인접 행렬(Adjacency Matrix): $G=(V,E)$에서, $|V|=n$일 때, G의 인접 행렬은 $n \times n$ 행렬 A

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

인접 리스트(Adjacency List): 각 Vertex에 대해 포인터가 주어지고, 그 Vertex로 부터 인접한 Vertex들을 모두 Linked List에 담음 (List 내에서는 순서에 관계가 없음)

Linked List는 Node의 연결로 표현

- Head: Linked List의 시작 Node (그래프의 각 Vertex들)
- Node: 데이터 필드 + 포인트 필드 (다음에 연결된 Node의 주소 저장)
- 마지막 Node의 포인트 필드는 `null`

12.3 그래프의 응용 및 활용

최단 경로 찾기(Shortest Path Problem): 다익스트라(Dijkstra) 알고리즘

해밀턴 순회의 응용: 일반적인 해결 알고리즘 존재 X → 최근접 이웃 방법 (Nearest Neighbour Method, Greedy 알고리즘)

12.4 그래프의 탐색(Traversal)

깊이 우선 탐색(Depth First Search; DFS):
- 시작 Vertex v에서 인접 Vertex 중 방문하지 않은 Vertex w 방문
- w에서 다시 인접 Vertex 중 방문하지 않은 Vertex u 방문 반복
- 어떤 Vertex v 방문 후 v에 인접한 모든 Vertex 방문한 경우, 바로 이전 Vertex로 돌아가 위 반복
- 모든 Vertex 방문 후 탐색 종료

Stack 사용 or 재귀 알고리즘으로 구현

너비 우선 탐색(Breath First Search; BFS): 처음 방문한 Vertex와 인접한 Vertex들을 차례로 방문
- 시작 Vertex v에서 인접한 Vertex 모두 차례로 방문
- 더 이상 방문할 Vertex가 없을 때, 다시 v에 인접한 Vertex중 처음 방문한 Vertex와 인접한 Vertex 방문
- v에 인접한 Vertex중 두 번째 방문한 Vertex와 인접한 Vertex 방문 반복
- 모든 Vertex 방문 후 탐색 종료

Queue 사용

12.5 트리

트리(Tree):
- A connected undirected graph with no circuits
- An undirected graph is a tree iff there is a unique simple path between any two of its vertices
- 특별히 지정된 노드인 루트가 있고, 나머지 노드들은 다시 각각 트리이면서 연결되지 않는(disjoint) $T_1, T_2, \cdots, T_n (N \geq 0)$으로 나누어 진다.
- 이 때 $T_1, T_2, \cdots, T_n$을 루트의 서브 트리(Subtree)라고 한다.

루트(Root): 주어진 트리의 시작 노드, 트리의 가장 높은 곳에 위치
차수(Degree): 각 노드의 서브 트리의 개수
잎 노드 or 단말 노드(Leaf Node): 차수가 0인 노드
자식 노드(Children Node): 어떤 노드의 서브 트리의 루트 노드
부모 노드(Parent Node): 자식 노드의 반대
형제 노드(Sibling Node): 동일한 부모를 가지는 노드
중간 노드(Internal Node): 루트도 아니고 잎 노드도 아닌 노드
조상(Ancestor): 루트로부터 각 노드에 이르는 경로 상에 나타난 모든 노드들
자손(Descendant): 각 노드부터 잎 노드에 이르는 경로 상에 나타난 모든 노드들

레벨(Level): 루트의 레벨 $= 0$, 자손 노드로 내려가며 ++
트리의 높이 or 깊이(Height or Depth): 트리에서 노드가 가질 수 있는 맥스 레벨
숲(Forest): 서로 연결되지 않는 트리들의 집합, 트리에서 루트를 제거 $\rightarrow$ 숲 생성

G는 트리
$\equiv$ G는 연결되어 있고, $M = n - 1$
$\equiv$ G는 연결되어 있고, 어느 한 연결선만을 제거하더라도 G는 연결되지 않음
$\equiv$ G는 사이클을 가지지 않고, $m = n - 1$
$\equiv$ G는 어느 한 연결선만 첨가하더라도 사이클 형성

12.6 이진 트리

이진 트리(Binary Tree): 노드들의 유한 집합, 공집합이거나, 루트와 왼쪽 서브 트리, 오른쪽 서브 트리로 이루어짐
사향 이진 트리(Skewed Binary Tree): 왼쪽 or 오른쪽으로 편향된 트리
완전 이진 트리(Complete Binary Tree): 높이가 k일 때 레벨 1부터 $k-1$까지는 모두 차있고 레벨 k에서는 왼쪽 노드부터 차례로 차있는 이진 트리
포화 이진 트리(Full Binary Tree): 잎 노드가 아닌 것들은 모두 2개씩 자식 노드를 가지며 트리의 높이가 일정할 때

이진 트리가 레벨 i에서 가질 수 있는 최대 노드 수 $= 2^i$
높이가 k인 이진 트리가 가질 수 있는 최대 전체 노드 수 $= 2^{k+1} - 1$
잎 노드 개수 $= n_0$, 차수가 2인 노드 개수 $= n_2$일 때, $n_0 = n_2 + 1$ 항상 성립

12.7 이진 트리의 표현

배열:
- 트리의 중간에 새로운 노드를 삽입하거나 기존의 노드를 지울 때 비효율적
- 높이가 h인 이진 트리는 각 노드 번호를 인덱스로 하여 1차원 배열로 구현 가능 (인덱스는 1부터 시작)
- 노드 인덱스 n의 부모 인덱스 $= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
- 노드 인덱스 n의 왼쪽 자식 인덱스 $= 2n$, 오른쪽 자식 인덱스 $= 2n + 1$

연결 리스트: 일반적으로 가장 많이 사용. 중간 데이터, 왼쪽 자식 포인터, 오른쪽 자식 포인터 저장

13 Week 13

13.1 이진 트리의 탐방

트리의 각 노드를 꼭 한 번씩만 방문(Traversal)하는 방법
- 각 노드와 그 노드의 서브 트리를 같은 방법으로 탐방
- 전순위, 중순위, 후순위 탐방 기법
- D: 노드, L: 노드의 왼쪽 서브 트리, R:노드의 오른쪽 서브 트리
- 왼쪽을 오른쪽보다 항상 먼저 방문한다고 가정
- 중순위: LDR
- 전순위: DLR
- 후순위: LRD
- 수식 표현에서 중순위 표기(Infix), 전순위 표기(Prefix), 후순위 표기(Postfix)와 각각 대응

탐방의 결과, 각 노드에 들어있는 데이터를 차례로 나열

중순위:
```
void inOrder(TREE* currentNode) {
    if (currentNode != NULL) {
        inOrder(currentNode->leftChild);
        std::cout << currentNode->data;
        inOrder(currentNode->rightChild);
    }
}
```
전순위:
```
void preOrder(TREE* currentNode) {
    if (currentNode != NULL) {
        std::cout << currentNode->data;
        preOrder(currentNode->leftChild);
        preOrder(currentNode->rightChild);
    }
}
```
후순위:
```
void postOrder(TREE* currentNode) {
    if (currentNode != NULL) {
        postOrder(currentNode->leftChild);
        postOrder(currentNode->rightChild);
        std::cout << currentNode->data;
    }
}
```

13.2 순회 표기 & 수식 트리

중순위: $(a+b)\times(c-d)$
전순위: $\times+ab-cd$
후순위: $ab+cd-\times$

전순위 수식 $+-\times\ 2\ 3\ 5\div\wedge\ 2\ 3\ 4$ == 중순위 수식 $2\times3-5+2^3\div4$
후순위 수식 $7\ 2\ 3\times-4\wedge9\ 3\div+$ == 중순위 수식 $(7-2\times3)^4+9\div3$

후순위 표기식과 스택을 활용하여 수식 트리 생성:
후순위 표기식이 주어지면 스택에 피연산자 저장
연산자를 만나면 스택에서 두 개의 피연산자 `pop()` 후 연산 결과(트리) 다시 저장

13.3 생성 트리와 최소 비용 생성 트리

생성 트리(Spanning Tree): $\exists G$에서 모든 노드들을 포함하는 트리
비용(Cost): 트리 연결선의 값의 합
최소 비용 생성 트리(Minimum Spanning Tree: MST): 생성 트리 중 최소 비용

Prim's Algorithm:
- $G=(V,E)$에서 $V=\{1,2,\cdots,n\}$
- 노드의 집합 U를 1로 시작
- $u\in U,\ v\in V-U$일 때, U와 $V-U$를 연결하는 사이클 형성 X인 가장 짧은 연결선 (u,v)를 찾아 v를 U에 포함시킴
- 위를 $U-V$까지 반복

```
1   void prim(graph G: set_of_edges T) {
2       set_of_vertices U;
3       vertex u, v;
4       T = NULL;
5       U = {1};
6       while (U != V) {
7           let (u, v) be a lowest cost edge such that u
    ↪ is in U and v is in V - U;
8           if ((u, v) does not create a cycle) {
9               T = T ∪ {(u, v)};
10              U = U ∪ {v};
11          }
12      }
13  }
```

Kruskal Algorithm:

- $G = (V, E)$에서 $V = \{1, 2, \cdots, n\}$, $T =$ (연결선의 집합)
- Let $T = \varnothing$
- E를 비용이 적은 순서로 정렬
- 가장 최솟값 가진 연결선 (u, v) 차례로 찾아 사이클 형성 X이면 T에 포함
- 위를 $|T| = |V| - 1$까지 반복

```
1   void kruskal(graph G: set_of_edges T) {
2       T = NULL;
3       while (T contains less than n - 1 edges and E is
    ↪  not empty) {
4           choose an edge (v, w) from E of lowest cost;
5           delete (v, w) from E;
6           if ((v, w) does not create a cycle in T)
7               add (v, w) to T;
8           else discard (v, w);
9       }
10      if (T contains fewer than n - 1 edges)
11          std::cout << "No Spanning Tree";
12  }
```

13.4 트리의 활용

문법의 파싱(Parsing)

허프만 코드(Huffman Code):

- 알파벳 문자를 0과 1의 비트 코드로 Encoding
- 문자의 발생 빈도에 따라 코드의 길이를 다르게 → 통신의 효율성
- 접두어 성질: 어떤 문자 코드도 다른 문자 코드의 접두어 코드가 아님

Huffman Algorithm:

- 발생 빈도가 가장 낮은 두 문자를 선택해 하나의 이진 트리로 연결
  - 왼쪽 노드에는 빈도수 낮은 문자, 오른쪽 노드에는 빈도수 높은 문자
  - 그 두 문자의 루트 노드는 두 문자의 빈도의 합
  - 문자들을 이진 트리로 연결
  - 그 후에 이진 트리들을 연결
- 위 과정을 모든 문자가 하나의 이진 트리로 묶일 때까지 반복
- 생성된 이진 트리의 왼쪽 노드는 0, 오른쪽 노드에는 1 부여
- 루트부터 해당 문자까지 0 또는 1을 순서대로 나열한 것이 해당 문자의 허프만 코드

14 Week 14

14.1 이진 탐색 트리

이진 탐색 트리(Binary Search Tree):
- 모든 노드 x에 대하여 노드 y가 노드 x의 왼쪽 서브 트리에 있을 때 $y < x$ 이고, 노드 z가 노드 x의 오른쪽 서브 트리에 있으면 $x < z$인 이진 트리
- $<$는 순서 관계를 의미
- 높이 균형 이진 트리인 경우 탐색 시간은 $\log n$

14.2 결정 트리

결정 트리(Decision Tree): 8개의 동전 문제