

# 行列輪講: 第 2 回 行列式, トレース

杉浦 圭祐

慶應義塾大学理工学部情報工学科 松谷研究室

August 23, 2023

# 目次

① 概要

② 行列式

③ トレース

# 目次

## ① 概要

## ② 行列式

## ③ トレース

# このスライドの概要

- 行列式, トレースについて確認する
  - 行列式に関する公式 (転置, 行列積, 逆行列, 固有値, ブロック行列)
  - 行列式と余因子展開
  - トレースに関する公式

# 目次

① 概要

② 行列式

③ トレース

# 行列式 (Determinant)

- 行列式は, 行列の大きさのようなもの
- $\{1, 2, \dots, n\}$  を適当に入れ替えて,  $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$  を作る.
- このような置換  $\sigma$  は, 全部で  $n!$  通りあって, まとめて  $S_n$  で表す.

$$S_3 = \{\{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 3, 2\}, \{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 1, 3\}, \\ \{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 3, 1\}, \{1, 2, 3\} \rightarrow \{3, 1, 2\}, \{1, 2, 3\} \rightarrow \{3, 2, 1\}\}$$

- $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$  は, 何度か入れ替えれば, 元の  $\{1, 2, \dots, n\}$  に戻せる. 入れ替える回数の偶奇は, 一意に定まる.
- 即ち,  $\sigma$  に対して, 以下の  $\text{sgn}(\sigma)$  は一意に定まる.

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{偶数回の入れ替えで元に戻せる} \\ -1 & \text{奇数回の入れ替えで元に戻せる} \end{cases}$$

# 行列式 (Determinant)

- $\sigma = \{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 3, 1\}$  とすると,  $\text{sgn}(\sigma) = 1$ .
  - $\{2, 3, 1\} \rightarrow \{2, 1, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ .
- $\sigma = \{1, 2, 3\} \rightarrow \{3, 2, 1\}$  とすると,  $\text{sgn}(\sigma) = -1$ .
  - $\{3, 2, 1\} \rightarrow \{2, 3, 1\} \rightarrow \{2, 1, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ .
- $\mathbf{A}$  を  $n$  次正方行列とする.
- $S_n$  と  $\sigma$  を使って,  $\mathbf{A}$  の行列式は次のようにかける.

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

- $n = 2$  とすると,  $S_n = \{\{1, 2\}, \{2, 1\}\}$ ,  $\text{sgn} = (1, -1)$ .
- $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .
- 全部で,  $n!$  個の項が現れる.

### 3 次行列の行列式

- $\mathbf{A}$  を  $n$  次正方行列とする.
- $S_n$  と  $\sigma$  を使って,  $\mathbf{A}$  の行列式は次のようにかける.

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

- $n = 3$  とすると,

$$S_3 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 1, 3\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}, \{3, 2, 1\}\}$$

$$\operatorname{sgn} = (1, -1, -1, 1, 1, -1)$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12} (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) \\ &\quad + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

- これは**サラスの公式**とよばれる.



# 置換に関する性質

- 置換は全単射 (1 対 1 で対応する).
- 置換  $\sigma$  の逆写像を,  $\sigma^{-1}$  とかく.

$$\sigma = \{1, 2, 3\} \rightarrow \{3, 1, 2\}, \sigma^{-1} = \{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 3, 1\}$$

- 以下の 6 つの置換  $\sigma_1, \dots, \sigma_6$  は, 同じものを指すことに注意.

$$\sigma_1 = \{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 3, 1\}, \sigma_2 = \{1, 3, 2\} \rightarrow \{2, 1, 3\}$$

$$\sigma_3 = \{2, 1, 3\} \rightarrow \{3, 2, 1\}, \sigma_4 = \{2, 3, 1\} \rightarrow \{3, 1, 2\},$$

$$\sigma_5 = \{3, 1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, \sigma_6 = \{3, 2, 1\} \rightarrow \{1, 3, 2\}$$

- 2 つの置換の合成  $\tau \circ \sigma$  も, 新たな置換となる.

$$\sigma = \{1, 2, 3\} \rightarrow \{3, 1, 2\}, \tau = \{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 1, 3\}$$

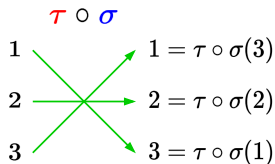
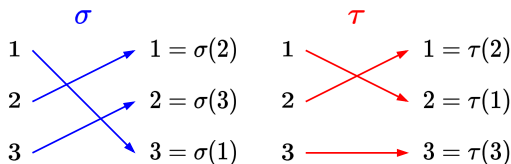
$$\tau \circ \sigma = \{1, 2, 3\} \rightarrow \{3, 2, 1\}$$

# 置換に関する性質

- 2つの置換の合成  $\tau \circ \sigma$  も, 新たな置換となる.

$$\sigma = \{1, 2, 3\} \rightarrow \{3, 1, 2\}, \tau = \{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 1, 3\}$$

$$\tau \circ \sigma = \{1, 2, 3\} \rightarrow \{3, 2, 1\}$$



# 置換に関する性質

- 恒等置換を,  $\iota$  とかく.

$$\iota = \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$$

- $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \iota$ ,  $\operatorname{sgn}(\tau\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)$
- $\operatorname{sgn}(\iota) = 1$ ,  $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$
- $\mathbf{A} = (a_{ij})$  を行列,  $\sigma$  を置換としたとき,

$$a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} = a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

- $\sigma = \{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 3, 1\}$  とする.  $\sigma^{-1} = \{2, 3, 1\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  となる.

$$\begin{aligned}a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}a_{\sigma^{-1}(3)3} &= a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31} \\ &= a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\end{aligned}$$

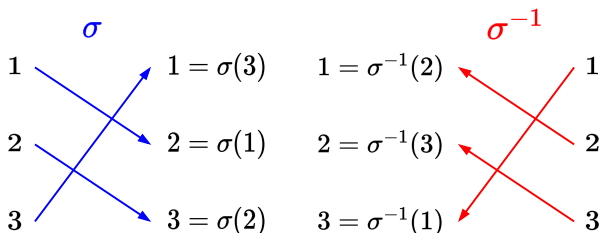
# 置換に関する性質

- $A = (a_{ij})$  を行列,  $\sigma$  を置換としたとき,

$$a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} = a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

- $\sigma = \{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 3, 1\}$  とする.  $\sigma^{-1} = \{2, 3, 1\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  となる.

$$a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} a_{\sigma^{-1}(3)3} = a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$



## 転置の行列式

$$\det(\mathbf{A}^\top) = \det(\mathbf{A})$$

- 行列式の定義から,

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ \det(\mathbf{A}^\top) &= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) (\mathbf{A}^\top)_{1\tau(1)} (\mathbf{A}^\top)_{2\tau(2)} \cdots (\mathbf{A}^\top)_{n\tau(n)} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \cdots a_{\tau(n)n}\end{aligned}$$

# 転置の行列式

- 行列式の定義から,

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$\det(\mathbf{A}^\top) = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \cdots a_{\tau(n)n}$$

- $\sigma^{-1}$  について総和を取ることは,  $\sigma$  について総和を取ることに同じだから,  $\tau = \sigma^{-1}$  とする.
- $\tau = \sigma^{-1}$  とおくと,  $\operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$  であり, 以下が成り立つので,  $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top)$ .

$$\begin{aligned} a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \cdots a_{\tau(n)n} &= a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\ &= a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

# 対角行列の行列式

## 対角行列の行列式

$n$  次の対角行列があるとする. 行列式は, 対角成分  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  の積となる.

$$\det \left( \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \right) = \prod_i \lambda_i$$

- 行列式の定義において, 恒等置換  $\iota$  に対応する項だけが残る:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_i \lambda_i \end{aligned}$$

# 上三角行列, 下三角行列の行列式

## 上三角行列, 下三角行列の行列式

$n \times n$  の上三角, 下三角行列があるとする. 行列式は, 対角成分  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  の積となる.

$$\det \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \prod_i \lambda_i$$
$$\det \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ * & \lambda_2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ * & \cdots & * & \lambda_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \prod_i \lambda_i$$



# 上三角行列, 下三角行列の逆行列の行列式

## 上三角行列, 下三角行列の逆行列の行列式

元の対角成分の逆数  $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$  の積となる.

$$\det \left( \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} \right) = \prod_i \lambda_i^{-1}$$
$$\det \left( \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ * & \lambda_2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ * & \cdots & * & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} \right) = \prod_i \lambda_i^{-1}$$

# 列の線形変換, 列の入れ替え, 行列のスカラー倍

## 列の線形変換, 列の入れ替え

列を入れ替えると, 行列式の符号が反転する.

$$\begin{aligned}\det\left(\left(\mathbf{a}_1, \dots, \lambda\mathbf{a}_i + \mu\mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{a}_n\right)\right) &= \lambda \det\left(\left(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n\right)\right) \\ &\quad + \mu \det\left(\left(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{a}_n\right)\right) \\ \det\left(\left(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n\right)\right) &= -\det\left(\left(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n\right)\right)\end{aligned}$$

## 行列のスカラー倍

行列を  $c$  倍すると, 行列式は  $c^n$  倍になる.

$$\det(c\mathbf{A}) = c^n \det(\mathbf{A})$$

- $\det(\mathbf{A}^\top) = \det(\mathbf{A})$  であるから, 列だけでなく, 行についても同様のことがいえる.

# 列の線形変換, 列のスカラー倍

## 同じ列を含むとき

同じ列ベクトルを 2 箇所に含むとき, 行列式は 0 となる.

$$\det\left(\left(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n\right)\right) = 0$$

## 列のスカラー倍

列を  $c$  倍すると, 行列式は  $c$  倍になる.

$$\det\left(\left(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n\right)\right) = c \det\left(\left(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n\right)\right)$$

$i$  列目に,  $j$  列目の  $c$  倍を足しても ( $i \neq j$ ), 行列式は変わらない.

$$\det\left(\left(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i + c\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n\right)\right) = \det\left(\left(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n\right)\right)$$

- $\det(\mathbf{A}^\top) = \det(\mathbf{A})$  であるから, 列だけでなく, 行についても同様のことがいえる.

# 行列積, 行列の累乗, 逆行列

## 行列積, 行列の累乗の行列式

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$$

$$\det(\mathbf{A}^n) = \det(\mathbf{A})^n$$

## 逆行列の行列式

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

- 以下の2つの式から分かる.

$$\det(\mathbf{AA}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^{-1})$$

$$\det(\mathbf{AA}^{-1}) = \det(\mathbf{I}) = 1$$

# 固有値と固有ベクトル

- $A$  を,  $n$  次正方行列とする.
- 以下を満たすような  $\lambda$  を,  $A$  の固有値という.
- また  $x$  を, 固有値  $\lambda$  に対する固有ベクトルという.

$$Ax = \lambda x$$

- 上式は,  $\det(\lambda I - A) = 0$  と同値である (詳細は省略).
- $\det(\lambda I - A) = 0$  の左辺を展開すれば,  $\lambda$  に関する  $n$  次式となる:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0$$

- 上式は, 固有多項式という. 重複を許せば, 固有値は  $n$  個ある.
- $A$  が正則であれば (逆行列があれば),  $\lambda_i \neq 0$ .

# 固有値と固有ベクトル

- $A$  の逆行列の固有値は,  $A$  の固有値の逆数  $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$  である.
- また,  $A$  の逆行列は,  $A$  と共通の固有ベクトルをもつ.
- $A$  の固有値は以下を満たす.

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

- これを式変形すればよい ( $A$  は正則なので,  $\lambda \neq 0$ ).

$$\mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \lambda^{-1}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}$$

## 固有値と行列式

$\mathbf{A}$  を,  $n$  次正方行列とする.  $\mathbf{A}$  の固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  の積は,  $\mathbf{A}$  の行列式となる.

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

- 以下の固有多項式について,  $\lambda = 0$  とする.

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

- 左辺は,  $\det(-\mathbf{A}) = (-1)^n \det(\mathbf{A})$ .
- 右辺は,  $\prod_i (-\lambda_i) = (-1)^n \prod_i \lambda_i$ .

# 固有値と行列式

## 固有値と行列式

$\mathbf{A}$  を,  $n$  次正方行列とする.  $\mathbf{A}$  の固有値の逆数  $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$  の積は,  $\mathbf{A}^{-1}$  の行列式となる.

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i^{-1}$$

- $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A})^{-1}$  と,  $\det(\mathbf{A}) = \prod_i \lambda_i$  から分かる.



# ブロック上三角行列, 下三角行列の行列式

## ブロック上三角行列, 下三角行列の行列式

$$\det \left( \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{X} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \right) = 1, \quad \det \left( \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{X} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \right) = 1$$

$$\det \left( \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \right) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D})$$

$$\det \left( \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \right) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D})$$

$$\det \left( \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \right) = \det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \det(\mathbf{A} - \mathbf{B})$$

- 証明は省略.

# ブロック対角行列の行列式

## ブロック対角行列の行列式

$$\det \left( \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{A}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{A}_n \end{pmatrix} \right) = \det(\mathbf{A}_1) \det(\mathbf{A}_2) \cdots \det(\mathbf{A}_n)$$

$$\det \left( \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{A}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{A}_n \end{pmatrix}^{-1} \right) = \det(\mathbf{A}_1)^{-1} \det(\mathbf{A}_2)^{-1} \cdots \det(\mathbf{A}_n)^{-1}$$

# ブロック行列の行列式

## ブロック行列の行列式

$$\det \left( \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \right) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) \quad \mathbf{A} \text{ が正則}$$

$$\det \left( \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \right) = \det(\mathbf{D}) \det(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}) \quad \mathbf{D} \text{ が正則}$$

- シューア補行列による表現から導出できる (上側).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

- 3つの行列の行列式の積を求める.
- 最初と最後の行列の行列式は1である.

# ブロック行列の行列式

## Weinstein-Aronszajn Identity

$\mathbf{A}$  を  $m \times n$ ,  $\mathbf{B}$  を  $n \times m$  の行列とする.

$$\det(\mathbf{I}_m + \mathbf{AB}) = \det(\mathbf{I}_n + \mathbf{BA})$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が  $m$  次ベクトルであるとき,

$$\det(\mathbf{I}_m + \mathbf{ab}^\top) = 1 + \mathbf{b}^\top \mathbf{a}$$

- 先ほどの式において ( $\mathbf{I}_m, \mathbf{I}_n$  は正則であるので),

$$\begin{aligned} \det \left( \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & -\mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \right) &= \det(\mathbf{I}_m) \det(\mathbf{I}_n + \mathbf{BI}_m^{-1}\mathbf{A}) = \det(\mathbf{I}_n + \mathbf{BA}) \\ &= \det(\mathbf{I}_n) \det(\mathbf{I}_m + \mathbf{AI}_n^{-1}\mathbf{B}) = \det(\mathbf{I}_m + \mathbf{AB}) \end{aligned}$$

# 余因子展開

## 余因子展開

$\mathbf{A}$  を,  $n$  次正方行列とする. 各  $i$  行目と  $j$  列目について,

$$\det(\mathbf{A}) = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} = \sum_j a_{ij}\Delta_{ij}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} = \sum_i a_{ij}\Delta_{ij}$$

- 上式の  $\Delta_{ij}$  は,  $\mathbf{A}$  の  $(i, j)$  余因子 (Cofactor) とよぶ.

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{\mathbf{A}}_{ij})$$

- $\tilde{\mathbf{A}}_{ij}$  は,  $\mathbf{A}$  から  $i$  行目と  $j$  列目を取り除いた,  $n-1$  次行列である.
- $\Delta_{ij}$  は,  $i$  行目と  $j$  行目の成分には依存しない.

# 余因子展開

## 余因子展開

$\mathbf{A}$  を,  $n$  次正方行列とする.  $\Delta_{ij}$  を  $\mathbf{A}$  の  $(i, j)$  余因子とする.

$$a_{i1}\Delta_{k1} + a_{i2}\Delta_{k2} + \cdots + a_{in}\Delta_{kn} = \begin{cases} \det(\mathbf{A}) & i = k \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

$$a_{1j}\Delta_{1k} + a_{2j}\Delta_{2k} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nk} = \begin{cases} \det(\mathbf{A}) & j = k \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

# 余因子行列

## 余因子行列

$A$  を,  $n$  次行列とする.  $A$  の  $(i, j)$  余因子  $\Delta_{ij}$  を並べた行列  $\text{adj } A$  を,  $A$  の余因子行列という.

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

- $\text{adj } A$  の  $(i, j)$  成分は,  $(j, i)$  余因子  $\Delta_{ji}$  となる.

# 余因子行列, 行列式, 逆行列

## 余因子行列, 行列式, 逆行列

$\mathbf{A}$  の余因子行列  $\text{adj } \mathbf{A}$ , 行列式  $\det(\mathbf{A})$ , 逆行列  $\mathbf{A}^{-1}$  について,

$$(\text{adj } \mathbf{A}) \mathbf{A} = \mathbf{A} (\text{adj } \mathbf{A}) = (\det(\mathbf{A})) \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{adj } \mathbf{A}$$



# 目次

① 概要

② 行列式

③ トレース

# 行列のトレース

- $A$  を,  $n$  次正方行列とする.
- $A$  の対角成分  $a_{ii}$  の和を,  $A$  の**トレース**とよぶ.
- トレースを,  $\text{tr}(A)$  とかく.

$$\text{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$$

- 歪対称行列 ( $A^\top = -A$ ) の対角成分は 0 なので, トレースは 0.
- 単位行列  $I_n$  のトレースは  $n$ .

# 行列の和, 転置とトレース

## 行列の和, 転置とトレース

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B})$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}^\top) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$$

- トレースの定義から, 以下のように確認できる.

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \sum_i (\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ii} = \sum_i (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_i a_{ii} + \sum_i b_{ii} \\ &= \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B})\end{aligned}$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}^\top) = \sum_i (\mathbf{A}^\top)_{ii} = \sum_i a_{ii} = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$$

## 行列の積とトレース

$$\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$$

- トレースの定義から, 以下のように確認できる.

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) &= \sum_i (\mathbf{AB})_{ii} = \sum_i \sum_k a_{ik} b_{ki} = \sum_k \sum_i b_{ki} a_{ik} \\ &= \sum_k (\mathbf{BA})_{kk} = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})\end{aligned}$$

# トレースの循環性

## トレースの循環性

$$\text{tr}(\mathbf{ABC}) = \text{tr}(\mathbf{BCA}) = \text{tr}(\mathbf{CAB})$$

$$\text{tr}(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX}) = \text{tr}(\mathbf{A})$$

- トレースの定義から、以下のように確認できる.

$$\begin{aligned}\text{tr}(\mathbf{ABC}) &= \sum_i (\mathbf{ABC})_{ii} = \sum_i \sum_k \sum_l a_{ik} b_{kl} c_{li} \\ &= \sum_k \sum_l \sum_i b_{kl} c_{li} a_{ik} = \text{tr}(\mathbf{BCA}) \\ &= \sum_l \sum_i \sum_k c_{li} a_{ik} b_{kl} = \text{tr}(\mathbf{CAB})\end{aligned}$$

- たらい回しのような公式である.

# 行列, ベクトル積とトレース

## 行列, ベクトル積とトレース

$A$  を,  $n$  次正方行列,  $b, c$  を  $n$  次ベクトルとする.

$$\mathrm{tr}(Abc^{\top}) = c^{\top}Ab$$

$$\mathrm{tr}(bc^{\top}) = c^{\top}b$$

- $b, c$  がベクトルで, 上のような形であれば, 順序を入れ替えることでトレース  $\mathrm{tr}$  を除去できる.

# 固有値とトレース

## 固有値とトレース

$\mathbf{A}$  を,  $n$  次正方行列とする.  $\mathbf{A}$  の固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  の和は,  $\mathbf{A}$  のトレースとなる.

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_i \lambda_i$$

- 以下の固有多項式について,  $\lambda^{n-1}$  の係数を考える.

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

- 左辺は,  $-\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ .
  - $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$  には,  $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$  という項が現れる.
  - $\lambda^{n-1}$  の係数は,  $-(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$  となる.
- 右辺は,  $-\sum_i \lambda_i$ .

# 逆行列とトレース

## 逆行列とトレース

$A$  を,  $n$  次正方行列とする.  $A$  の逆行列のトレースは,  $A$  の固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  の逆数の和となる.

$$\mathrm{tr}(A^{-1}) = \sum_i \lambda_i^{-1}$$

- $A$  は, ユニタリ行列  $P$  により,  $P^{-1}AP$  と三角化できる (後述).
- $P^{-1}AP$  の対角成分は,  $A$  の固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  である.
- $P^{-1}AP$  の逆行列も三角行列で,  $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$  を対角成分にもつので,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left((P^{-1}AP)^{-1}\right) &= \sum_i \lambda_i^{-1} \\ &= \mathrm{tr}(P^{-1}A^{-1}P) = \mathrm{tr}(A^{-1}PP^{-1}) = \mathrm{tr}(A^{-1})\end{aligned}$$



# 対角行列のトレース

## 対角行列のトレース

$\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  を  $n$  次対角行列とする.  $\mathbf{A}, \mathbf{A}^{-1}$  のトレースは、次のようになる.

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr} \left( \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \right) = \sum_i a_i$$

$$\text{tr}(\mathbf{A}^{-1}) = \text{tr} \left( \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix} \right) = \sum_i a_i^{-1}$$

# 上三角行列, 下三角行列の逆行列のトレース

## 上三角行列, 下三角行列の逆行列のトレース

元の対角成分の逆数  $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$  の和となる。

$$\text{tr} \left( \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} \right) = \sum_i \lambda_i^{-1}$$

$$\text{tr} \left( \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ * & \lambda_2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ * & \cdots & * & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} \right) = \sum_i \lambda_i^{-1}$$

# ブロック行列のトレース

## ブロック行列のトレース

$$\mathrm{tr} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & * & \cdots & * \\ * & \mathbf{A}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & \mathbf{A}_n \end{pmatrix} \right) = \sum_i \mathrm{tr}(\mathbf{A}_i)$$

# 固有値, 対角化, 三角化に関するまとめ

- $A$  を,  $n$  次正方行列とする.
- $A$  に  $n$  個の線形独立な固有ベクトルがあれば, それを並べた行列  $P$  で,  $P^{-1}AP$  と対角化できる (対角成分は  $A$  の固有値).
- 任意の  $A$  は, ユニタリ行列  $P$  で,  $P^{-1}AP$  と三角化できる (上三角行列, 対角成分は  $A$  の固有値).
- $A$  が正規行列 ( $AA^H = A^HA$ ) なら, ユニタリ行列で対角化できる.
  - $A^H$  は,  $A$  の共役転置.
  - 正規行列: ユニタリ行列 ( $AA^H = I$ ), エルミート行列 ( $A^H = A$ ), 歪エルミート行列 ( $A^H = -A$ ), 直交行列 ( $AA^T = I$ ), 対称行列 ( $A^T = A$ ), 歪対称行列 ( $A^T = -A$ ).
- $A$  が実対称行列なら, 直交行列で対角化できる.
- エルミート行列と対称行列の固有値は, 全て実数である.