行列輪講: 練習問題

杉浦 圭祐

慶應義塾大学理工学部情報工学科 松谷研究室

July 28, 2023

目次

第 1 回: 行列の基本処理, 逆行列

1 以下の行列積の (i,j) 成分を, 各行列の成分を用いて書いてください.

$$\mathbf{AB}$$
$$\mathbf{A}^\top\mathbf{B}$$
$$\mathbf{ABC}$$
$$\mathbf{ABCD}$$
$$\mathbf{AB}^\top\mathbf{CD}^\top$$
$$\mathbf{A}^n$$

例: $$\left(\mathbf{ABA}^\top\right)_{ij} = \sum_k \sum_l a_{ik} b_{kl} a_{jl}$$

2 対称行列, エルミート行列, 正定値行列, 直交行列, ユニタリ行列とは何か, 確認しましょう.

第 1 回: 行列の基本処理, 逆行列

3 Sherman-Morrison-Woodbury の公式があります. どのようなときに, この公式が役に立つでしょうか.

$$\left(\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\right)^{-1}=\mathbf{A}-\mathbf{A}\mathbf{B}\left(\mathbf{D}+\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}$$

4 上式から, 以下の式を導出してください.

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{c}^{\top}\right)^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{c}^{\top}\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{c}^{\top}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}}$$

5 シューア補行列による以下の式を, 確認してください.

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{pmatrix}$$

第 2 回: 行列式, トレース

1. 同じ列ベクトルを 2 箇所に含んだ行列の, 行列式が 0 になることを確認してください.

$$\det\Big(\big(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n\big)\Big) = 0$$

2. n 次正方行列 $\mathbf{A}$ を c 倍したとき, 行列式は元の c^n 倍になることを確認してください (置換による行列式の定義を用いる).

$$\det(c\mathbf{A}) = c^n \det(\mathbf{A})$$

3. 上を用いて, i 列目に j 列目の c 倍を足しても $(i \neq j)$, 行列式が変わらないことを確認してください.

$$\begin{aligned}&\det\Big(\big(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i + c\mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n\big)\Big)\\ &= \det\Big(\big(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n\big)\Big)\end{aligned}$$

4. 以下を確認してください (1 行目から 2 行目を引き, 2 列目に 1 列目を足す).

$$\det\left(\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{B} & \mathbf{A}\end{pmatrix}\right) = \det(\mathbf{A}+\mathbf{B})\det(\mathbf{A}-\mathbf{B})$$

5. 以下を確認してください. $\mathbf{A}$ の余因子行列 $\operatorname{adj}\mathbf{A}$, 行列式 $\det(\mathbf{A})$, 逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ について,

$$(\operatorname{adj}\mathbf{A})\,\mathbf{A} = (\det(\mathbf{A}))\,\mathbf{I}$$

6. 以下を確認してください.

$$\operatorname{tr}\left(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}\right) = \operatorname{tr}(\mathbf{A})$$

第 3 回: 行列とベクトルの微分

1. $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ を n, m 次縦ベクトルとします. 以下の微分の形 (サイズ) を確認しましょう. 分子レイアウト, 分母レイアウトの双方で考えてください.

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}, \ \frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}}, \ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$$

目次

1 以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{AB})_{ij} &= \sum_k a_{ik} b_{kj} \\
\left(\mathbf{A}^\top \mathbf{B}\right)_{ij} &= \sum_k a_{ki} b_{kj} \\
(\mathbf{ABC})_{ij} &= \sum_k \sum_m a_{ik} b_{km} c_{mj} \\
(\mathbf{ABCD})_{ij} &= \sum_k \sum_m \sum_n a_{ik} b_{km} c_{mn} d_{nk} \\
\left(\mathbf{AB}^\top \mathbf{CD}^\top\right)_{ij} &= \sum_k \sum_m \sum_n a_{ik} b_{mk} c_{mn} d_{kn} \\
(\mathbf{A}^n)_{ij} &= \sum_{u_1} \sum_{u_2} \cdots \sum_{u_{n-1}} a_{i,u_1} a_{u_1,u_2} \cdots a_{u_{n-2},u_{n-1}} a_{u_{n-1},j}
\end{aligned}
$$

2. 省略.
3. $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ を, $m \times m$, $m \times n$, $n \times m$, $n \times n$ 行列とする. ここで $m \gg n$ とすると, 左辺を計算するためには, 大きな m 次行列の逆行列が必要である. 一方, 左辺の代わりに右辺を計算することにすれば, 小さな n 次行列の逆行列を求めるだけでよい.

$$\left(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\right)^{-1} = \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{B}\left(\mathbf{D} + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}$$

4. 省略.
5. 省略.

第 2 回: 行列式, トレース

1. $\lambda = \det\Big(\big(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n\big)\Big)$ とする. 列を交換すると, 行列式の符号は反転する. しかし, 列を交換しても, 元と同じ行列であるから, $\lambda = -\lambda$ である. よって, $\lambda = 0$ である.
2. 省略.
3. 以下のように示せる. 最初の式変形では, 列の線形変換と行列式との関係を用いる. 最後の式変形では, 同じ列を含んでいれば行列式が 0 となることを用いる.

$$
\begin{aligned}
&\det\big((\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i + c\mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n)\big) \\
&= \det\big((\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n)\big) + c\det\big((\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n)\big) \\
&= \det\big((\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n)\big)
\end{aligned}
$$

4 以下のように示せる. 最後の式変形では, ブロック下三角行列の関係を用いる.

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{B} & \mathbf{A}\end{pmatrix}\right) &= \det\left(\begin{pmatrix}\mathbf{A}-\mathbf{B} & \mathbf{B}-\mathbf{A}\\ \mathbf{B} & \mathbf{A}\end{pmatrix}\right)\\ &= \det\left(\begin{pmatrix}\mathbf{A}-\mathbf{B} & \mathbf{0}\\ \mathbf{B} & \mathbf{A}+\mathbf{B}\end{pmatrix}\right)\\ &= \det\left(\mathbf{A}-\mathbf{B}\right)\det\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)\end{aligned}$$

5 $(\mathrm{adj}\,\mathbf{A})\,\mathbf{A}$ の (i,j) 要素は, 次のようになる. δ_{ij} は, クロネッカーのデルタである. 余因子行列 $\mathrm{adj}\,\mathbf{A}$ の (i,k) 要素は, $\mathbf{A}$ の (k,i) 余因子 Δ_{ki} となることに注意する.

$$\begin{aligned}((\mathrm{adj}\,\mathbf{A})\,\mathbf{A})_{ij} &= \sum_k (\mathrm{adj}\,\mathbf{A})_{ik}\,a_{kj} = \sum_k \Delta_{ki} a_{kj} \\ &= \delta_{ij}\det(\mathbf{A}) = (\det(\mathbf{A})\mathbf{I})_{ij}\end{aligned}$$

6 トレースの循環性を用いる.

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}\right) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$$