ベイズフィルタ

にゃーん

2019 年 9 月 21 日

この資料は、文献 [1] の 2.3 節と 2.4 節をまとめたものです。

1　ロボットと環境の相互作用

1.1　ロボットの状態

ロボットにおける**状態**として、ここではグローバル座標系 (地図座標系) におけるロボットの**位置**と**向き**を考える。3 次元の空間を動き回るロボットの場合、その状態は 6 変数あれば表現できる。6 変数のうち 3 変数はロボットの位置で、直交座標系における x 座標、y 座標、z 座標、そして残りの 3 変数はロボットの向きで、ロール角、ピッチ角、ヨー角となる。平面上を動き回るロボットの場合、その状態は 3 変数で表現できる。位置には直交座標系における x 座標と y 座標、向きには回転角 (ヨー角) が用いられる。ロボットの状態は変数 x で表す。

1.2　ロボットの制御

ロボットに制御が加わることによって、ロボットの状態 x は変化する。ロボットの制御は、例えば並進速度 v と回転速度 ω の 2 つで表現できる。ロボットに与える制御は変数 u で表す。

1.3　ロボットの観測

ロボットは、自身に装備されたセンサを用いて、周囲の環境を計測する。計測データとしては、例えばレーザレンジファインダによって取得されたスキャンデータなどが挙げられる。ロボットの計測データは変数 z で表す。

1.4　確率によるモデル

ロボットの状態 x、制御 u、計測 z の関係は、図 1 に示すような確率モデルとして表現できる。ここでは離散的な時刻 $t = 0, 1, \cdots$ において変数が記述されるとする。時刻 t におけるロボットの状態、制御、計測をそれぞれ x_t、u_t、z_t とする。時刻 $t-1$ において、ロボットは状態 x_{t-1} にある。時刻 t で、ロボットに制御 u_t が加わって、ロボットは状態 x_{t-1} から状態 x_t へと遷移する。この状態遷移の後に、ロボットはセンサから計測データ z_t を得る。従って、ロボットに対する制御の後に、センサによる計測が起こる。図 1 において、灰色に塗られた変数 (制御と計測) は既知のものであり、ロボットはその値を入手できる。本当に知りたいのは白色の変数 (状態) であるが、直接表には現れない (灰色の変数を介して間接的に現れる) ので、ベイズフィルタなどのアルゴリズムを駆使して、既知の変数から推定する必要がある。

時刻 t におけるロボットの状態 x_t は、過去の全ての状態や計測、制御に依存すると考えられるので、ロボットの状態 x_t を表す確率分布は $p(x_t | x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t})$ のように書ける。しかし、ここではマルコフ性を仮定し、ロボットの現在の状態 x_t は、直前の状態 x_{t-1} と、ロボットに与えられた制御 u_t のみによって決まると考える。一時刻前の状態 x_{t-1} には、それよりも前の状態 $x_{0:t-2}$ や、計測 $z_{1:t-1}$、制御 $u_{1:t-1}$ に関する情報が全て詰まっている。それゆえ、変数 x_t を決めるうえでは、直前の状態 x_{t-1} と現在の制御 u_t さえあれば十分だということを示唆している。従って、x_t

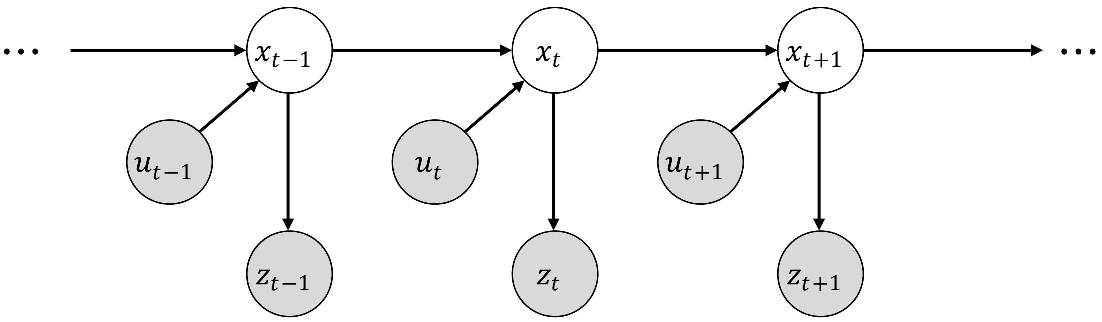

図 1　ロボットの確率モデル

の確率分布については次の等式が仮定される。

$$p(x_t|x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(x_t|x_{t-1}, u_t) \tag{1}$$

時刻 t におけるロボットの計測 z_t についても、上記と同様にマルコフ性が仮定される。これより、z_t は過去の全ての状態や計測、制御には依存するのではなく、ロボットの現在の状態 x_t にのみ影響を受ける。図 1 からも明らかなように、現在の状態 x_t には、それ以前の全ての状態 $x_{0:t-1}$ や、計測 $z_{1:t-1}$、制御 $u_{1:t}$ に関する情報が凝縮されているので、z_t を得るうえでは、x_t 以外の変数は不要となる。従って、z_t の確率分布については次の等式が仮定される。

$$p(z_t|x_{0:t}, z_{1:t-1}, u_{t:t}) = p(z_t|x_t) \tag{2}$$

x_t に関する確率分布 $p(x_t|x_{t-1}, u_t)$ は**状態遷移確率**とよばれる。ロボットの状態が x_{t-1} にあって、制御 u_t が加わったときに、どの状態に遷移し得るのかを表す。状態 x_t は決定論的な関数ではなく、確率分布によって記述されるので、制御や状態に加わるノイズの影響が、最初から考慮されている。z_t に関する確率分布 $p(z_t|x_t)$ は**計測確率**とよばれる。ロボットが状態 x_t にいるときに、どのような計測データ z_t が得られるのかを表す。計測 z_t も確率分布として記述されるので、ノイズの影響が考慮される。図 1 は、確率変数間の依存関係を表しており、現在の状態 x_t は直前の状態 x_{t-1} と制御 u_t に、計測 z_t は現在の状態 x_t に依存している。状態 x_t は次の状態 x_{t+1} にのみ影響を及ぼす。

1.5　ロボットの信念

前節から、ロボットの状態変数と、制御や計測との関係が、2 つの確率分布 $p(x_t|x_{t-1}, u_t)$、$p(z_t|x_t)$ として表現された。しかし本当にやりたいのは、実際の数値として入手可能な制御や計測から、陽には現れないロボットの状態を推定することである。ロボットの現在の状態 x_t を推定するために、以下のような確率分布 $\mathrm{bel}(x_t)$ を考える。

$$\mathrm{bel}(x_t) = p(x_t|z_{1:t}, u_{1:t}) \tag{3}$$

$\mathrm{bel}(x_t)$ は、過去全ての計測 $z_{1:t}$ と制御 $u_{1:t}$ が明らかになっているときの、状態 x_t に関する確率分布である。従って $\mathrm{bel}(x_t)$ は、時刻 t における計測 z_t が**得られた後**に求められる。このことから、$\mathrm{bel}(x_t)$ は**事後信念**とよばれる。計測 z_t が反映される前の**事前信念**として、次の $\overline{\mathrm{bel}}(x_t)$ を考えることができる。

$$\overline{\mathrm{bel}}(x_t) = p(x_t|z_{1:t-1}, u_{1:t}) \tag{4}$$

ロボットが計測 z_t を得る前に、ロボットは事前信念 $\overline{\mathrm{bel}}(x_t)$ に基づいて現在の状態 x_t を推定する。次に計測 z_t が観測されると、z_t を使って、現在の状態 x_t に関する予測を $\overline{\mathrm{bel}}(x_t)$ から $\mathrm{bel}(x_t)$ へと更新できる。z_t を用いて、$\overline{\mathrm{bel}}(x_t)$ から $\mathrm{bel}(x_t)$ を計算し、現在の状態 x_t に関する確率分布を更新することを、**修正**や**計測更新**という。次の制御 u_{t+1} が与えられると、現在の $\mathrm{bel}(x_t)$ と u_{t+1} から、事前信念 $\overline{\mathrm{bel}}(x_{t+1})$ が新たに計算される。そして、次の観測 z_{t+1} によって、事前信念 $\overline{\mathrm{bel}}(x_{t+1})$ から事後信念 $\mathrm{bel}(x_{t+1})$ が計算されて、状態 x_{t+1} に関する推定は修正される。制御と計測によって、このような信念分布 $\overline{\mathrm{bel}}(x_t), \mathrm{bel}(x_t)$ の計算が綿々と続くことになる。

2　ベイズフィルタ

2.1　アルゴリズム

制御と計測から信念分布 $\mathrm{bel}(x_t)$ を計算するための一般的な枠組みとして、ベイズフィルタがある。カルマンフィルタやパーティクルフィルタは、全てベイズフィルタの派生形として捉えられる。ベイズフィルタは以下のアルゴリズム 1 のように記述される。時刻 $t-1$ における事後信念 $\mathrm{bel}(x_{t-1})$ から、時刻 t における事後信念 $\mathrm{bel}(x_t)$ を計算するためのものである。

アルゴリズム 1 ベイズフィルタ

Input:

時刻 $t-1$ における事後信念 $\mathrm{bel}(x_{t-1})$

時刻 t における制御 u_t

時刻 t における計測 z_t

Output:

時刻 t における事後信念 $\mathrm{bel}(x_t)$

1: **for** all x_t **do**

2: $\quad \overline{\mathrm{bel}}(x_t) = \int p(x_t | x_{t-1}, u_t)\, \mathrm{bel}(x_{t-1}) dx_{t-1}$

3: $\quad \mathrm{bel}(x_t) = \eta\ p(z_t | x_t)\, \overline{\mathrm{bel}}(x_t)$

4: **end for**

ベイズフィルタは 2 つの大まかなステップ、**予測**と**修正**に分けられる。アルゴリズムの 2 行目は予測ステップを表している。制御 u_t を用いて、直前の事後信念 $\mathrm{bel}(x_{t-1})$ から、現在の状態 x_t に関する事前信念 $\overline{\mathrm{bel}}(x_t)$ が計算され、x_t に対する予測が行われる。計算は、2 つの確率分布、状態遷移確率 $p(x_t | x_{t-1}, u_t)$ と直前の事後信念 $\overline{\mathrm{bel}}(x_{t-1})$ の積の、変数 x_{t-1} に関する積分である。

$$\overline{\mathrm{bel}}(x_t) = \int p(x_t | x_{t-1}, u_t)\, \mathrm{bel}(x_{t-1}) dx_{t-1} \tag{5}$$

状態が離散的であれば、積分は次のように総和に置き換えられる。即ち、時刻 $t-1$ で取り得る全ての状態 x_{t-1} について、2 つの確率分布の積 $p(x_t | x_{t-1}, u_t)\, \mathrm{bel}(x_{t-1})$ を足し合わせたものになる。

$$\overline{\mathrm{bel}}(x_t) = \sum_{x_{t-1}} p(x_t | x_{t-1}, u_t)\, \mathrm{bel}(x_{t-1}) \tag{6}$$

アルゴリズムの 3 行目は修正ステップを表している。計測 z_t を用いて、現在の事前信念 $\overline{\mathrm{bel}}(x_t)$ から事後信念 $\mathrm{bel}(x_t)$ が計算される。即ち、予測ステップで得られていた x_t に対する事前信念 $\overline{\mathrm{bel}}(x_t)$ が、z_t の観測によって、より精度の高い事後信念 $\mathrm{bel}(x_t)$ へと更新される。計算は、2 つの確率分布、計測確率 $p(z_t | x_t)$ と事前信念 $\overline{\mathrm{bel}}(x_t)$ の積である。$\mathrm{bel}(x_t)$ が確率としての条件を満たす (積分の結果が 1 になる) ように、正規化定数 η を乗算する。

$$\mathrm{bel}(x_t) = \eta\ p(z_t | x_t)\, \overline{\mathrm{bel}}(x_t) \tag{7}$$

ベイズフィルタを使って計算を始めるためには、初期状態 x_0 における信念 $\mathrm{bel}(x_0)$ が必要である。初期状態が明らかであれば、x_0 に全ての確率密度が集中したデルタ関数や、x_0 の周囲のごく狭い範囲に確率密度が集中した、分散が非常に小さい正規分布を $\mathrm{bel}(x_0)$ として利用できる。初期状態が不明であれば、x_0 の全定義域にわたって、確率密度が定数となる一様分布を $\mathrm{bel}(x_0)$ として採用できる。

ベイズフィルタでは、取り得る全ての状態 x_t について、上式のような総和と積分を計算しなければならない。予測ステップにおいて、x_{t-1} の全定義域にわたる積分を厳密に (解析的に) 実行できるか、あるいは有限回の和に置き換えて計算できる必要がある。取り得る状態 x_t が連続的であれば、全ての x_t において $\overline{\mathrm{bel}}(x_t)$ と $\mathrm{bel}(x_t)$ を計算するのは

不可能である。状態 x_t が離散的であっても、状態空間が広い (取り得る状態 x_{t-1} の数が大きい) 場合は、計算量の観点から、予測ステップでの総和の計算が困難になる。従って、状態空間が非常に狭いという、ごく限られた場合にしか、上記に示すベイズフィルタを適用できないと考えられる。

2.2 アルゴリズムの導出

ここでは、時刻 $t-1$ における事後信念 $\mathrm{bel}(x_{t-1}) = p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t-1})$ から、時刻 t における事後信念 $\mathrm{bel}(x_t) = p(x_t|z_{1:t}, u_{1:t})$ が計算できることを示す。但し、初期状態 x_0 に関する事後信念 $\mathrm{bel}(x_0)$ は既知とする。時刻 $t-1$ において、事後信念 $\mathrm{bel}(x_{t-1})$ がベイズフィルタにより正しく計算できると仮定する。時刻 t における事後信念 $\mathrm{bel}(x_t)$ は、ベイズの定理から

$$\begin{aligned}\mathrm{bel}(x_t) &= p(x_t|z_{1:t}, u_{1:t}) \\ &= \frac{p(z_t|x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t})p(x_t|z_{1:t-1}, u_{1:t})}{p(z_t|z_{1:t-1}, u_{1:t})} \qquad (\because \text{ベイズの定理}) \qquad (8) \\ &= \eta\ p(z_t|x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t})p(x_t|z_{1:t-1}, u_{1:t}) \qquad (9)\end{aligned}$$

と変形できる。ここで $\eta = p(z_t|z_{1:t-1}, u_{1:t})$ は、状態 x_t には依存しないため、定数として扱っている。式 2 でみたように、現在の観測 z_t は、状態 x_t のみによって決まり、それ以外の変数とは独立なので

$$\mathrm{bel}(x_t) = \eta\ p(z_t|x_t)p(x_t|z_{1:t-1}, u_{1:t}) \qquad (10)$$

とできる。右側の項 $p(x_t|z_{1:t-1}, u_{1:t})$ は事前信念 $\overline{\mathrm{bel}}(x_t)$ であるので、結局次のようになる。

$$\mathrm{bel}(x_t) = \eta\ p(z_t|x_t)\,\overline{\mathrm{bel}}(x_t) \qquad (11)$$

これはアルゴリズムの 3 行目に示した、修正ステップを表している。

時刻 t における事前信念 $\overline{\mathrm{bel}}(x_t)$ は、以下のように x_{t-1} についての周辺化として

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{bel}}(x_t) &= p(x_t|z_{1:t-1}, u_{1:t}) \\ &= \int p(x_t|x_{t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t})p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t})dx_{t-1} \qquad (\because \text{周辺化}) \qquad (12)\end{aligned}$$

と記述できる。式 1 でみたように、現在の状態 x_t は、直前の状態 x_{t-1} 及び制御 u_t のみから決定されるので

$$\overline{\mathrm{bel}}(x_t) = \int p(x_t|x_{t-1}, u_t)p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t})dx_{t-1} \qquad (13)$$

とできる。右辺の項 $p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t})$ について、x_{t-1} は時刻 $t-1$ 以前の変数から決まるため、未来に得られる制御 u_t は条件変数から取り去ることができる。即ち $p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t-1})$ となるから

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{bel}}(x_t) &= \int p(x_t|x_{t-1}, u_t)p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t-1})dx_{t-1} \qquad (14) \\ &= \int p(x_t|x_{t-1}, u_t)\,\mathrm{bel}(x_{t-1})dx_{t-1} \qquad (15)\end{aligned}$$

とできる。これはアルゴリズムの 2 行目に示した、予測ステップを表している。

ベイズフィルタを示す際に、マルコフ性の仮定が重要な役割を果たしている。ベイズフィルタを実行するためには、状態遷移確率 $p(x_t|x_{t-1}, u_t)$、計測確率 $p(z_t|x_t)$、そして初期信念 $\mathrm{bel}(x_0)$ が必要である。制御 u_t と計測 z_t、直前の事後信念 $\mathrm{bel}(x_{t-1})$ を入力として取り、過去の全ての制御 $u_{1:t}$ と計測 $z_{1:t}$ で条件付けられた、現在の状態 x_t に関する事後信念 $\mathrm{bel}(x_t)$ を出力として返す。計測確率 $p(z_t|x_t)$ と状態遷移確率 $p(x_t|x_{t-1}, u_t)$ は、ロボットや環境の特性に応じて適切にモデル化される。

参考文献

[1] Sebastian Thrun, Wolfram Burgard, and Dieter Fox. 確率ロボティクス プレミアムブックス版. 株式会社マイナビ出版, 2016. 上田 隆一 訳.