$$b) \quad \lim_{x\to+0}\Big(\operatorname{ctg} 2x\Big)^{\frac{1}{\ln x}}$$

Лекция 19. Формула и ряд Тейлор

Многочлен Тейлора. Формула Тейлора. Ряд тейлора. Формулы и ряды Тейлора для некоторых элементарных функций и использование их для вычисления пределов и в приближённых вычислениях.

Формула и ряд Тейлора[9] относятся к числу важнейших понятий математического анализа. Они широко используются в математике. В частности, в этом семестре мы будем использовать их при исследовании функций, приближённом вычислении значений функций, численном решении уравнений и оценке возникающих при этом ошибок.

19.1. Многочлен Тейлора

Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в некотором интервале, содержащем точку x_0. Построим многочлен степени $m < n$

$$P_m(x) = C_0 + C_1(x-x_0) - C_2(x-x_0)^2 + \dots + C_m(x-x_0)^m = \tag{19.1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_k(x-x_0)^k,$$

коэфиценты которого определим из условия совпадения значений этого многочлена и его m производных с соответствующими значениями функций $y = f(x)$ и её производных в точке x_0.

$$\begin{cases} P_m(x_0) = C_0 = f(x_0), \\ P'_m(x_0) = C_1 = f'(x_0), \\ P''_m(x_0) = 2\cdot 1\cdot C_2 = f''(x_0), \\ P'''_m(x_0) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot C_3 = f'''(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P^{(k)}_m(x_0) = k\cdot(k-1)\dots 2\cdot 1\cdot C_k = f^{(k)}(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P^{(m)}_m(x_0) = m\cdot(m-1)\dots 2\cdot 1\cdot C_m = f^{(m)}(x_0). \end{cases} \tag{19.2}$$

[9] Б.Тейлор(1685-1731) - английский математик.

Члены в производных от многочлена (19.1), содержащие множитель $(x - x_0)$ в точке x_0, равны нулю. Производные порядка выше m от многочлена m-й степени также равны нулю. Из (19.2) имеем

$$C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, k = 0, 1, \ldots, m. \tag{19.3}$$

В (19.3) положено $0! = 1, f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Следовательно, искомый многочлен (19.1) с коэффициентами C_k, определяемыми по формуле (19.3), будет

$$P_m(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m = \tag{19.4}$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^m.$$

Определение 19.1. *Многочлен (19.4) называется m-м многочленом Тейлора функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$.*

Если функция $f(x)$ сама по себе является многочленом степени m, то запись ее в виде (19.4) всегда возможна и озночает лишь представлени данного многочлена по степеням разности $(x - x_0)$.

Пример 19.1. *Представить функцию $f(x) = x^2$ в виде многочлена Тейлора по степеням $(x - 3)$.*

Решение: Имеем $f(3) = 9, f^{'}(3) = 6, f^{''}(3) = 2$. Все производные выше второго порядка от $f(x) = x^2$ равны нулю. Следовательно, многочлен Тейлора при $x_0 = 3$ для $f(x) = x^2$ имеет вид

$$P_2(x) = 9 + 6(x - 3) + (x - 3)^2.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, очевидно, получим данную функцию $f(x) = x^2$.

Пример 19.2. *Пусть $f(x) = (a + x)^m$ и $x_0 = 0$.*

Тогда по (19.4)

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{((a + x)^m)^{(k)}_{x=0}}{k!} x^k = (a + x)^m,$$

где

$$((a + x)^m)^{(k)} = m(m - 1)...(m - k + 1)(a + x)^{m-k}_{x=0} =$$
$$= m(m - 1)...(m - k + 1)a^{m-k}$$