

# INTERPOLACIÓN CON TRAZADORES O SPLINES

---

Ing. Yamil Armando Cerquera Rojas  
Especialista en Sistemas U. Nacional de Colombia  
Docente Universidad Surcolombiana

## SPLINES CÚBICOS

### DEFINICIÓN

### FUNCIONES SPLINES DE GRADO 1

### FUNCIONES SPLINES DE GRADO 2

### FUNCIONES SPLINES CÚBICOS

#### Ejemplo Spline Cúbico

#### Un caso particular

#### El caso general

#### Solución Con MatLab

#### Ejercicios

---

## TRAZADORES CÚBICOS: SPLINES CÚBICOS

Este tipo de interpolación que ha demostrado poseer una gran finura y que inclusive es usado para el diseño asistido por computadora, por ejemplo, de tipos de letra.

Esta interpolación se llama *interpolación segmentaria* o *interpolación por splines*. La idea central es que en vez de usar un solo polinomio para interpolar todos los datos, se pueden usar segmentos de polinomios entre pares coordenados de datos y unir cada uno de ellos adecuadamente para ajustar los datos.

Vale la pena resaltar que entre todas las formas de ajustar datos, los *splines cúbicos* han resultado ser los más adecuados para cualquier tipo de aplicación.

Así pues, se puede decir de manera informal, que una función spline está formada por varios polinomios, cada uno definido en un intervalo y que se unen entre sí bajo ciertas condiciones de continuidad.

Para un conjunto numeroso de puntos no es muy útil calcular el polinomio interpolante que pasa por estos puntos, pues éste tiende a tener grandes oscilaciones. Más aconsejable es hacer una interpolación secuencial de grado bajo sobre subconjuntos más pequeños del total de puntos, definiendo así una función a trozos.

La interpolación a trozos más útil y de uso generalizado en diversos campos tales como el diseño, los gráficos por computadora, la economía, etc., es la que se realiza mediante polinomios de grado tres llamados trazadores o *splines cúbicos* que se definen en cada uno de los sub intervalos  $(x_k, x_{k+1})$  definidos por las abscisas de los puntos  $(x_i, y_i)$  a interpolar. La idea es construir estos polinomios cúbicos de tal forma que cualesquiera dos de ellos definidos en intervalos contiguos  $(x_{k-1}, x_k)$  y  $(x_k, x_{k+1})$ , ambos coincidan en  $x_k$  no solo como función sino también en su primera y segunda derivada, con el fin de que haya suavidad en los puntos  $(x_k, y_k)$  de coincidencia de ambas gráficas.

En cada sub intervalo  $(x_{i-1}, x_i)$ .

- $s(x)$  tiene derivada continua hasta de orden  $k-1$  en  $(x_0, x_n)$ .

### FUNCIONES SPLINES DE GRADO 0

Los splines de grado 0 son funciones constantes por zonas. Una forma explícita de presentar un spline de grado 0 es la siguiente:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = c_0 \dots x \in (t_0, t_1) \\ S_1(x) = c_1 \dots x \in (t_1, t_2) \\ \dots \\ S_{n-1}(x) = c_{n-1} \dots x \in (t_{n-1}, t_n) \end{cases}$$

Los intervalos  $(t_{i-1}, t_i)$  ó  $(x_{i-1}, x_i)$  no se intersectan entre sí, por lo que no hay ambigüedad en la definición de la función en los nodos.

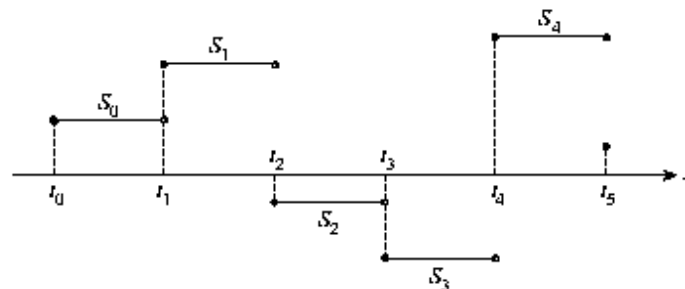


Figura 1: Spline de grado 0 con seis puntos.

### FUNCIONES SPLINES DE GRADO 1

Los splines de grado 1 son funciones polinomiales de grado 1 (Rectas de la forma  $f(x)=ax+b$ ) que se encargan de unir cada par de coordenadas mediante una recta.

Dados los  $n+1$  puntos:

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$y$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_n$

Una función spline de grado 1 que interpole los datos es simplemente unir cada uno de los puntos (Par coordenadas) mediante segmentos de recta, como se ilustra en las siguientes figuras:

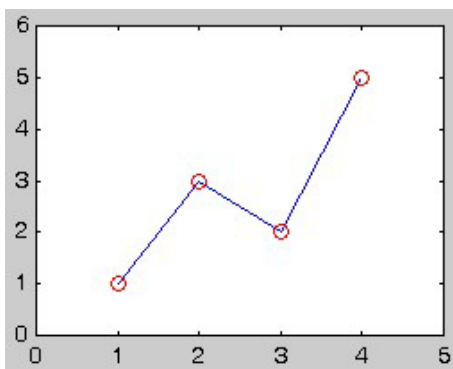


Fig 2

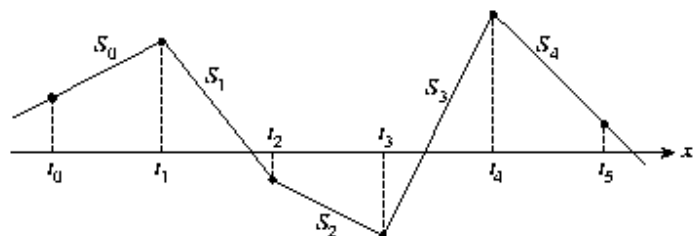


Fig 3: Spline de grado 1 con 6 puntos

Claramente esta función cumple con las condiciones de la spline de grado 1. Así, se tiene que para este caso:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0x + b_0 \dots x \in (t_0, t_1) \\ S_1(x) = a_1x + b_1 \dots x \in (t_1, t_2) \\ \dots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1}x + b_{n-1} \dots x \in (t_{n-1}, t_n) \end{cases}$$

$$\hat{0}$$

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0x + b_0 \dots x \in (x_0, x_1) \\ S_1(x) = a_1x + b_1 \dots x \in (x_1, x_2) \\ \dots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1}x + b_{n-1} \dots x \in (x_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

Donde:

1.  $s_j(x)$  es un polinomio de grado menor o igual que 1
2.  $s(x)$  tiene derivada continua de orden  $k-1=0$ .
3.  $s(x_j)=y_j$ , para  $j=0,1,2,\dots,n$

Por lo tanto, el spline de grado 1 queda definido como:

$$s(x) = \left\{ \begin{array}{l} y_0 + f[x_1, x_2](x - x_0) \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ y_1 + f[x_2, x_1](x - x_1) \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ \dots \\ y_{n-1} + f[x_n, x_{n-1}](x - x_{n-1}) \text{ si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{array} \right\}$$

Donde  $f[x_i, x_j]$  es la diferencia dividida de Newton.

## FUNCIONES SPLINES DE GRADO 2

Los splines de orden dos, se encargan de unir cada par coordenado con ecuaciones polinomiales de orden dos. Las ecuaciones son de la forma  $ax^2 + bx + c$ .

Para aclarar bien la idea, vea un ejemplo concreto,

**Ejemplo 2:** Considere los siguientes datos:

<b>x</b>	<b>3</b>	<b>4.5</b>	<b>7</b>	<b>9</b>
<b>y</b>	<b>2.5</b>	<b>1</b>	<b>2.5</b>	<b>0.5</b>

Proceda a calcular la interpolación por splines de grado 2. Primero que nada, observe que se forman tres intervalos en los datos sobre el eje x:

$$\begin{aligned} &[3, 4.5] \\ &[4.5, 7] \\ &[7, 9] \end{aligned}$$

Para cada uno de los tres (3) intervalos, se debe definir una función polinomial de grado 2, tal como se ilustra a continuación:

$$s(x) = \left\{ \begin{array}{l} a_1x^2 + b_1x + c_1 \text{ si } x \in [3,4.5] \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \text{ si } x \in [4.5,7] \\ a_3x^2 + b_3x + c_3 \text{ si } x \in [7,9] \end{array} \right\}$$

Vale la pena aclarar que la ecuación  $a_1x^2 + b_1x + c_1$ , une los puntos cuyas coordenadas están dadas por (3,2.5) y (4.5,1), la ecuación  $a_2x^2 + b_2x + c_2$ , une los puntos cuyas coordenadas están dadas por (4.5,1) y (7,2.5), y la ecuación  $a_3x^2 + b_3x + c_3$  los puntos cuyas coordenadas están dadas por (7,2.5) y (9,0.5). En conclusión siendo 4 par coordenados se unen estos mediante tres ecuaciones polinomiales de orden 2.

Para resolver el problema, primero, se hace que el spline pase por los puntos de la tabla de datos (por cada par coordenado). Es decir, se debe cumplir que:

$$s(3)=2.5, \quad s(4.5)=1, \quad s(7)=2.5 \quad \text{y} \quad s(9)=0.5$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se forman las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} s(3)=2.5 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9a_1 + 3b_1 + c_1 = 2.5 \end{array} \right\} \text{ Ec 1} \\ s(4.5)=1 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4.5^2 a_1 + 4.5b_1 + c_1 = 1 \\ 4.5^2 a_2 + 4.5b_2 + c_2 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ec 2} \\ \text{Ec 3} \end{array} \\ s(7)=2.5 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 49a_2 + 7b_2 + c_2 = 2.5 \\ 49a_3 + 7b_3 + c_3 = 2.5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ec 4} \\ \text{Ec 5} \end{array} \\ s(9)=0.5 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 81a_3 + 9b_3 + c_3 = 0.5 \end{array} \right\} \text{ Ec 6} \end{aligned}$$

Hasta aquí, se tiene un total de 6 ecuaciones vs. 9 incógnitas. El siguiente paso es manejar la existencia de las derivadas continuas. En el caso de los splines de grado 2, se necesita que el spline tenga derivada continua de orden  $k-1=1$ , es decir, primera derivada continua.

Se calcula primero la primera derivada:

$$s'(x) = \left\{ \begin{array}{l} 2a_1x + b_1 \text{ si } x \in [3,4.5] \\ 2a_2x + b_2 \text{ si } x \in [4.5,7] \\ 2a_3x + b_3 \text{ si } x \in [7,9] \end{array} \right\}$$

Se observa que las derivadas anteriores, están formadas por segmentos de rectas, que pudieran presentar discontinuidad en los cambios de intervalo. Es decir, las posibles discontinuidades se darían en  $x=4.5$  y  $x=7.0$ . Por lo tanto para que  $s'(x)$  sea continua, se debe cumplir que:  $2a_1(4.5)+b_1=2a_2(4.5)+b_2$ , siendo igual a:

$$s'(4.5) \Rightarrow \left\{ 9a_1 + b_1 = 9a_2 + b_2 \right\} \text{ Ec 7}$$

y también debe cumplirse que:  $2a_2(7)+b_2=2a_3(7)+b_3$ , siendo igual a:

$$s'(7) \Rightarrow \left\{ 14a_2 + b_2 = 14a_3 + b_3 \right\} \text{ Ec 8}$$

Así que ahora, se tiene un total de 8 ecuaciones versus 9 incógnitas; esto da un grado de libertad para elegir alguna de las incógnitas. Se elige por simple conveniencia  $a_1 = 0$ .

De esta forma, se tiene un total de 8 ecuaciones vs. 8 incógnitas, siendo las ecuaciones las siguientes:

$$\begin{aligned} 3b_1 + c_1 &= 2.5 & Ec\ 1 \\ 4.5b_1 + c_1 &= 1 & Ec\ 2 \\ 20.25a_2 + 4.5b_2 + c_2 &= 1 & Ec\ 3 \\ 49a_2 + 7b_2 + c_2 &= 2.5 & Ec\ 4 \\ 49a_3 + 7b_3 + c_3 &= 2.5 & Ec\ 5 \\ 81a_3 + 9b_3 + c_3 &= 0.5 & Ec\ 6 \\ b_1 - 9a_2 - b_2 &= 0 & Ec\ 7 \\ 14a_2 + b_2 - 14a_3 - b_3 &= 0 & Ec\ 8 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones tiene la siguiente forma matricial:

$$\begin{array}{cccccccc|c|c} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 2.5 \\ 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 1 \\ 0 & 0 & 20.25 & 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 1 \\ 0 & 0 & 49 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 7 & 1 & c_2 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 7 & 1 & a_3 & 0.5 \\ 1 & 0 & -9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & 0 & -14 & -1 & 0 & c_3 & 0 \end{array} =$$

Haciendo uso de MatLab ó Scilab, se tendría lo siguiente:

```
x=[3 1 0 0 0 0 0 0
    4.5 1 0 0 0 0 0 0
    0 0 20.25 4.5 1 0 0 0
    0 0 49 7 1 0 0 0
    0 0 0 0 49 7 1
    0 0 0 0 81 9 1
    1 0 -9 -1 0 0 0 0
    0 0 14 1 0 -14 -1 0];
b=[2.5;1;1;2.5;2.5;0.5;0;0];
x=inv(x)*b
```

x =

-1.0000  
5.5000  
0.6400  
-6.7600  
18.4600  
-1.6000  
24.6000  
-91.3000

Ó usando *Mathematica* se obtiene la siguiente solución:

$$\begin{aligned} b_1 & -1 \\ c_1 & 5.5 \\ a_2 & 0.64 \\ b_2 & -6.76 \\ c_2 & 18.46 \\ a_3 & -1.6 \\ b_3 & 24.6 \\ c_3 & -91.3 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores (junto con  $a_1=0$ ), se obtiene la función spline cuadrática que interpola la tabla de datos dada:

$$s(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -x + 5.5 & \text{si } x \in [3, 4.5] \\ .0.64x^2 - 6.76x + 18.46 & \text{si } x \in [4.5, 7] \\ -1.6x^2 + 24.6x - 91.3 & \text{si } x \in [7, 9] \end{array} \right\}$$

La Figura 4, contiene tanto los puntos iniciales de la tabla de datos, así como el spline cuadrático. Esta gráfica se generó usando *Mathematica*.

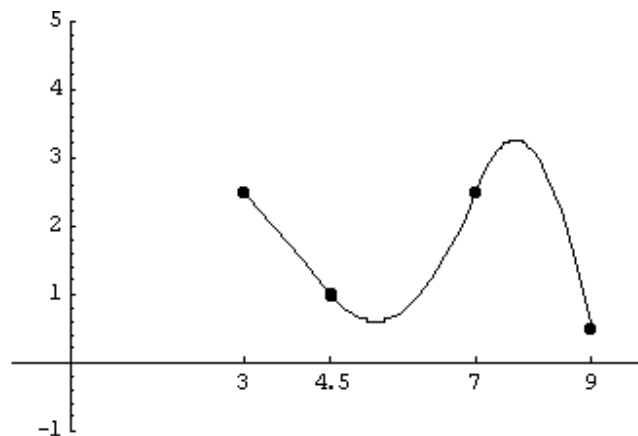


Fig 4

El mismo ejercicio anterior resuelto por MatLab sería de la siguiente manera

Código 1: Produce Fig 5

```
X=[3 4.5 7 9];
Y=[2.5 1 2.5 0.5]
X1=3:0.1:9;
Spl1=spline(X,Y,X1);
plot(X,Y,X1,Spl1);
axis([0,10,0,3.5])
grid on
```

Código 2: Produce Fig 6

```
X=[3 4.5 7 9];
Y=[2.5 1 2.5 0.5]
X1=3:0.1:9;
Spl1=spline(X,Y,X1);
plot(X,Y,X1,Spl1,X,Y,'o','MarkerFaceColor','g');
axis([0,10,0,3.5])
grid on
```

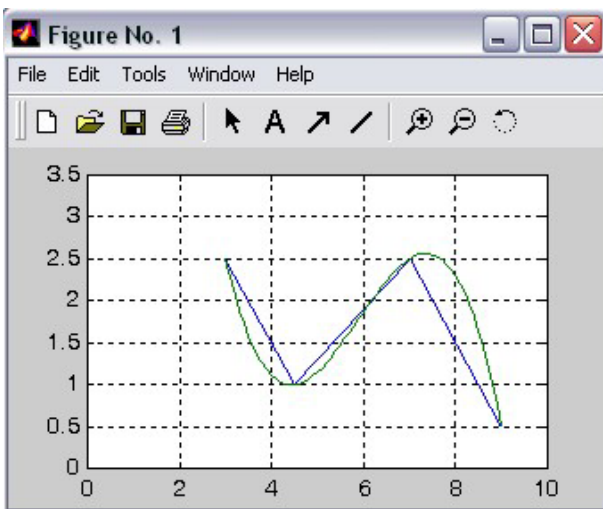


Fig. 5

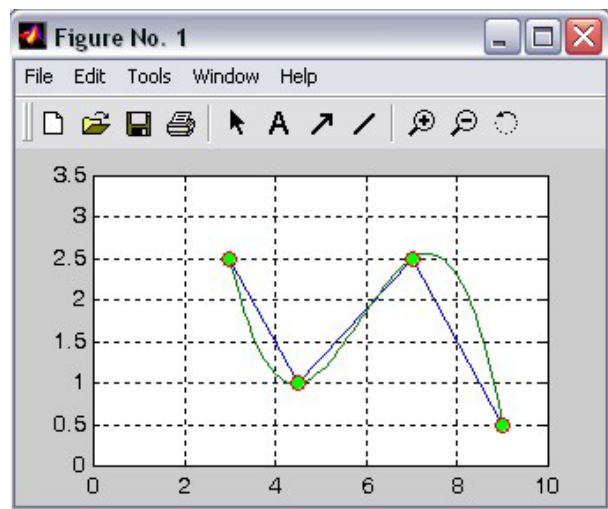


Fig. 6

Ó haciendo uso de la función `interp1` de MatLab se puede dar así:

```
X=[3 4.5 7 9];
Y=[2.5 1 2.5 0.5]
X1=3:0.1:9;
Int1=interp1(X,Y,X1,'spline');
plot(X,Y,X1,Int1,X,Y,'o','MarkerFaceColor','g');
```

El siguiente caso, que es el más importante en las aplicaciones, sigue exactamente los mismos pasos del ejemplo que acabamos de resolver, solamente que en vez de trabajar con polinomios cuadráticos, lo hace con polinomios cúbicos.

### **FUNCIONES CON SPLINES CUBICOS**

El spline cúbico ( $k=3$ ) es el método más empleado como se ha mencionado anteriormente, debido a que proporciona un excelente ajuste a los puntos tabulados y su cálculo no es excesivamente complejo.

Sobre cada intervalo  $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ ,  $S$  está definido por un polinomio cúbico diferente. Sea  $S_i$  el polinomio cúbico que representa a  $S$  en el intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ , por tanto:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) \dots x \in (t_0, t_1) \\ S_1(x) \dots x \in (t_1, t_2) \\ \dots \\ S_{n-1}(x) \dots x \in (t_{n-1}, t_n) \end{cases}$$

Los polinomios  $S_{i-1}$  y  $S_i$  interpolan el mismo valor en el punto  $t_i$ , es decir, se cumple:

$$S_{i-1}(t_i) = y_i = S_i(t_i) \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Por lo que se garantiza que  $S$  es continuo en todo el intervalo. Además, se supone que  $S'$  y  $S''$  son continuas, condición que se emplea en la deducción de una expresión para la función del spline cúbico.

Aplicando las condiciones de continuidad del spline  $S$  y de las derivadas primera  $S'$  y segunda  $S''$ , es posible encontrar la expresión analítica del spline. No vamos a obtener esta expresión, ya que su demostración queda fuera del ámbito de estos apuntes. Simplemente se dirá que la expresión resultante es:

$$S_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} + \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x - t_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_ih_i}{6}\right)(t_{i+1} - x)$$

En la expresión anterior,  $h_i = t_{i+1} - t_i$  y  $z_0, z_1, \dots, z_n$  son incógnitas. Para determinar sus valores, se utilizan las condiciones de continuidad que deben cumplir estas funciones. El resultado (que tampoco se demuestra) es:

$$h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})z_i + h_iz_{i+1} = \frac{6}{h_{i-1}}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_i}(y_i - y_{i-1})$$

La ecuación anterior, con  $i=1, 2, \dots, n-1$  genera un sistema de  $n-1$  ecuaciones lineales con  $n+1$  incógnitas  $z_0, z_1, \dots, z_n$ . Se puede elegir  $z_0$  y  $z_1$  de forma arbitraria y resolver el sistema de ecuaciones resultante para obtener los valores de  $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ . Una elección especialmente adecuada es hacer  $z_0 = z_1 = 0$ . La función spline resultante se denomina **spline cúbico natural** y el sistema de ecuaciones lineal expresado en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} u_1 & h_1 & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & \\ & h_2 & u_3 & h_3 & \\ & & & & \\ & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

En donde:

$$\begin{aligned} h_i &= t_{i+1} - t_i \\ u_i &= 2(h_i + h_{i-1}) - \frac{h_{i-1}^2}{u_{i-1}} \\ b_i &= \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) \\ v_i &= b_i - b_{i-1} - \frac{h_{i-1}v_{i-1}}{u_{i-1}} \end{aligned}$$

Algoritmo para encontrar los coeficientes  $z_i$  de un spline cúbico.

```
Input n, ti, yi
for i=0, 1, ..., n-1 do
```



```

hi=ti+1-ti
bi=6(yi+1-yi)/hi
end
U1=2(h0+h1)
V1=b1-b0
for i=2,3,...,n-1 do
    ui=2(hi+hi-1)-hi-12/ui-1
    vi=bi-bi-1-hi-1vi-1/ui-1
end
zn=0
for i=n-1,n-1,...,1 do
    zi=(vi-hizi+1)/ui
end
z0=0
output zi

```

Este sistema de ecuaciones, que es tridiagonal, se puede resolver mediante eliminación gaussiana sin pivoteo. El código acepta como entrada un conjunto de nodos ( $t_i$ ) y el conjunto de los valores de la función correspondiente ( $y_i$ ) y produce un vector con los vectores  $z_i$ . Por último, el valor del spline  $S$  en un punto  $x$  cualquiera interpolado se puede calcular de forma eficiente empleando la siguiente expresión:

$$S_i(x) = y_i + (x - t_i)[C_i + (x - t_i)[B_i + (x - t_i)A_i]]$$

En donde:  $A_i = \frac{1}{6h_i}(z_{i+1} - z_i)$ ,  $B_i = \frac{z_i}{2}$ ,  $C = -\frac{h_i}{6}z_{i+1} - \frac{h_i}{3}z_i + \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i)$

Se muestra un ejemplo para ilustrar el empleo de los splines cúbicos para interpolar los valores de una tabla. En la tabla 1 se muestran algunos valores de una serie de valores tabulados a intervalos regulares de la función  $f(x) = \sqrt{x}$  en el intervalo  $[0, 2.25]$ . También se indican los valores interpolados empleando el correspondiente spline cúbico así como el error absoluto cometido. Obsérvese que el error es cero para los nudos. En la figura 7 se representan gráficamente los valores tabulados.

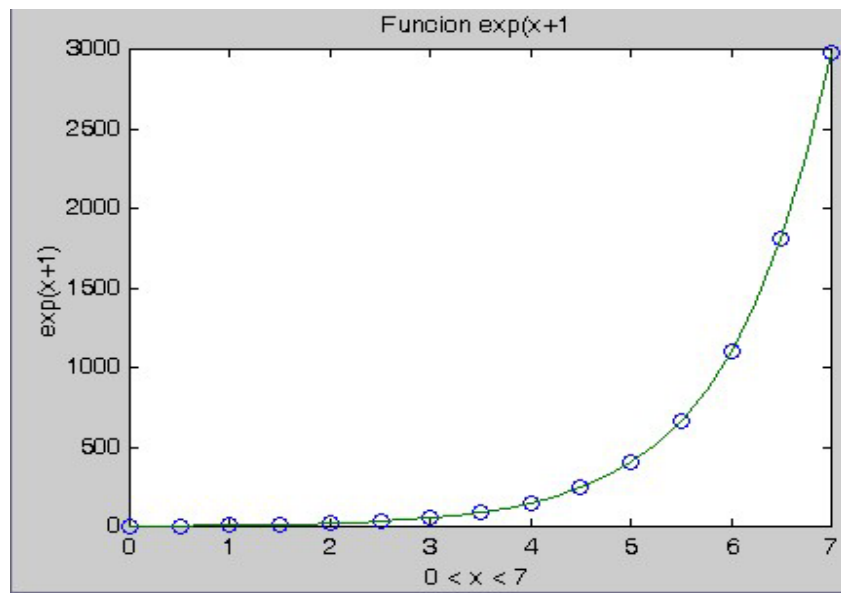
**Tabla 1:** Valores interpolados mediante un spline cúbico para la función  $N+1$  e indicación del error cometido (en valor absoluto).

$x$	$\sqrt{x}$	$S_i(x)$	$ \mathcal{E}_a(x) $
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000E+00
0.0625		0.1426	1.0732E-01
0.1250		0.2782	7.5266E-02
0.1875		0.3997	3.3261E-02
0.2500	0.5000	0.5000	0.0000E+00
0.3125		0.5744	1.5440E-02
0.3750		0.6285	1.6155E-02
0.4375		0.6701	8.6732E-03

0.5000	0.7071	0.7071	0.0000E+00
1.7500	1.3228	1.3228	0.0000E+00
1.8125		1.3462	6.8994E-07
1.8750		1.3693	5.9953E-06
1.9375		1.3919	8.7004E-06
2.0000	1.4142	1.4142	0.0000E+00
2.0625		1.4361	2.4522E-05
2.1250		1.4577	4.7329E-05
2.1875		1.4790	4.6215E-05
2.2500	1.5000	1.5000	0.0000E+00

En la Fig 7 se muestra la representación de la función  $e^{x+1}$  en el intervalo  $[0,7]$ .

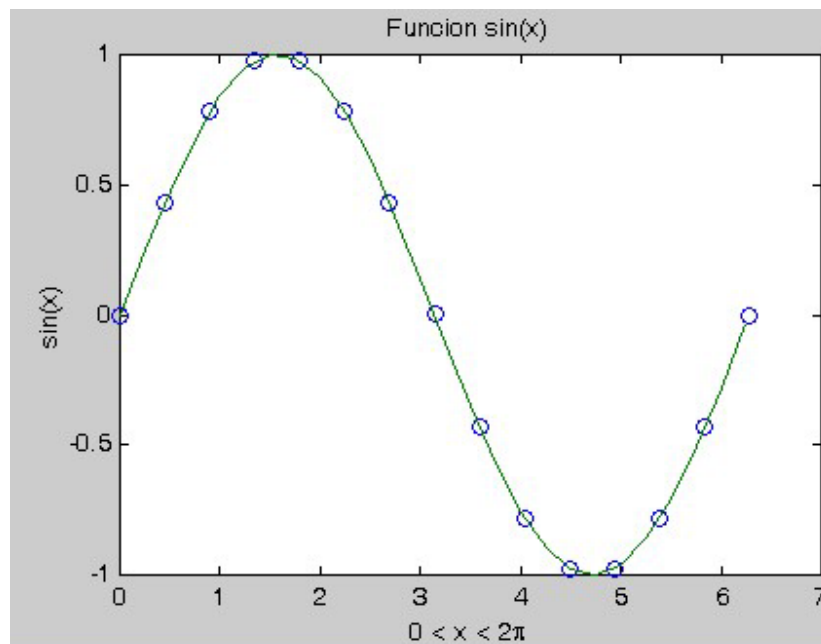
```
x=0:0.5:7;
y=exp(x+1);
xx = 0:.25:7;
yy = spline(x,y,xx);
plot(x,y,'o',xx,yy)
xlabel('0 < x < 7')
ylabel('exp(x+1)')
title('Funcion exp(x+1)')
```



**Figure 7:** Representación de la función  $e^{x+1}$ . Los círculos representan los valores tabulados de la función y la línea continua los puntos interpolados mediante una función spline cúbica.

En la figura 8 se muestra otro ejemplo. Se representan gráficamente los puntos interpolados mediante una función spline cúbica para la función  $y=\sin(x)$  haciendo uso de Matlab.

```
x=0:pi/7:2*pi;
y=sin(x);
xx = 0:.25:2*pi;
yy = spline(x,y,xx);
plot(x,y,'o',xx,yy)
xlabel('0 < x < 2\pi')
ylabel('sin(x)')
title('Funcion sin(x)')
```



**Figure 8:** Representación de la función  $y=\sin(x)$ . Los círculos representan los valores tabulados de la función y la línea continua los puntos interpolados mediante una función spline cúbica.

**Ejemplo Spline Cúbico:** Para hacer más firme el entendimiento, se escribe la definición correspondiente a este caso ( $k=3$ ).

Dados  $n+1$  datos:

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$y$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$

Un Spline cúbico que interpola estos datos, es una función  $s(x)$  definida como sigue:

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ \dots & \dots \\ s_{n-1}(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Donde cada  $s_i(x)$  es un polinomio cúbico;  $s_i(x_i)=y_i$ , para toda  $i=0,1,\dots,n$  y tal que  $s(x)$  tiene primera y segunda derivadas continuas en  $(x_0, x_n)$

**Ejemplo 3.** Interpolar los siguientes datos mediante un spline cúbico:

<b>x</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>5</b>
<b>y</b>	<b>-1</b>	<b>2</b>	<b>-7</b>

**Solución:** Se define un polinomio cúbico en cada uno de los intervalos que se forman:

A continuación, Se busca que se cumpla la condición de que la spline debe pasar por los puntos dados en la tabla, o sea  $s(x)=y$ , así, se tiene que:

$$s(2) = -1 \Rightarrow 8a_1 + 4b_1 + 2c_1 + d_1 = -1 \quad \text{Ec 1}$$

$$s(3) = 2 \Rightarrow 27a_1 + 9b_1 + 3c_1 + d_1 = 2 \quad \text{Ec 2}$$

$$= 2 \Rightarrow 27a_2 + 9b_2 + 3c_2 + d_2 = 2 \quad \text{Ec 3}$$

$$s(5) = -7 \Rightarrow 125a_2 + 25b_2 + 5c_2 + d_2 = -7 \quad \text{Ec 4}$$

Ahora se calcula la primera derivada de  $s(x)$ :

$$s'(x) = \begin{cases} 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1 & \text{si } x \in [2,3] \\ 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2 & \text{si } x \in [3,5] \end{cases}$$

Al igual que en el caso de los splines cuadráticos, se presentan ecuaciones que pueden tener discontinuidad en los cambios de intervalo; las posibles discontinuidades son los puntos donde se cambia de intervalo, en este caso  $x=3$ . Para evitar esta discontinuidad, se evalúa en  $x=3$  los dos polinomios y se igualan de la siguiente manera:  $3a_1(3)^2 + 2b_1(3) + c_1 = 3a_2(3)^2 + 2b_2(3) + c_2$ . Siendo igual a:

$$27a_1 + 6b_1 + c_1 = 27a_2 + 6b_2 + c_2 \quad \text{Ec 5}$$

De la misma manera se procede con la segunda derivada:

$$s''(x) = \begin{cases} 6a_1x + 2b_1 & \text{si } x \in [2,3] \\ 6a_2x + 2b_2 & \text{si } x \in [3,5] \end{cases}$$

Para lograr que  $s''(x)$  sea continua en el punto  $x=3$   $6a_1(3) + 2b_1 = 6a_2(3) + 2b_2$ , que correspondería a:

$$18a_1 + 2b_1 = 18a_2 + 2b_2 \quad \text{Ec 6}$$

En este punto se cuenta con 6 ecuaciones y 8 incógnitas, por lo tanto se tienen 2 grados de libertad; en general, se agregan las siguientes 2 condiciones:

$$\begin{aligned} s''(x_0) &= 0 \\ s''(x_n) &= 0 \end{aligned}$$

De lo cual se obtiene:

$$s''(2)=0 \text{ entonces } 6a_1(2) + 2b_1 = 0 \quad \therefore \quad 12a_1 + 2b_1 = 0 \quad \text{Ec 7}$$

$$s''(5)=0 \text{ entonces } 6a_2(5) + 2b_2 = 0 \quad \therefore \quad 30a_2 + 2b_2 = 0 \quad \text{Ec. 8}$$

Con lo cual, se ha completado un juego de 8 ecuaciones vs. 8 incógnitas, como sigue:

$$8a_1 + 4b_1 + 2c_1 + d_1 = -1$$

$$\begin{array}{rcl}
 27a_1 + 9b_1 + 3c_1 + d_1 & = & 2 \\
 27a_2 + 9b_2 + 3c_2 + d_2 & = & 2 \\
 125a_2 + 25b_2 + 5c_2 + d_2 & = & -7 \\
 27a_1 + 6b_1 + c_1 - 27a_2 - 6b_2 - c_2 & = & 0 \\
 18a_1 + 2b_1 - 18a_2 - 2b_2 & = & 0 \\
 12a_1 + 2b_1 & = & 0 \\
 30a_2 + 2b_2 & = & 0
 \end{array}$$

Cuya forma matricial es la siguiente:

$$\begin{array}{cccccccccccl}
 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & -1 \\
 27 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 9 & 3 & 1 & c_1 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 125 & 25 & 5 & 1 & d_1 & -7 \\
 27 & 6 & 1 & 0 & -27 & -6 & -1 & 0 & a_2 & = & 0 \\
 18 & 2 & 0 & 0 & -18 & -2 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\
 12 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 2 & 0 & 0 & d_2 & 0
 \end{array}$$

Usando Matlab se tendría la solución con el siguiente código:

```

hold off
Xi=[2 3 5];
Yi=[-1 2 -7];
x=[8 4 2 1 0 0 0 0; 27 9 3 1 0 0 0 0; 0 0 0 0 27 9 3 1; 0 0 0 0 125 25 5 1; 27 6 1 0 -27 -6 -1 0; 18 2 0 0 -18 -2 0 0; 12 2 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 30 2 0 0];
y=[-1; 2; 2; -7; 0; 0; 0; 0];
var=inv(x)*y;
plot(Xi,Yi,'o','MarkerFaceColor','g')
axis([0 6 -8 4]);
grid on
y1=2:0.1:3;
y2=3:0.1:5;
x1=var(1:4);
x2=var(5:8);
yi1=polyval(x1,y1);
yi2=polyval(x2,y2);
hold on;
plot(y1,yi1,y2,yi2)
%var =
%    7.5000
%   -67.5000
%   198.0000
%  -187.0000
%   -0.0000
%    0.0000
%   -4.5000
%   15.5000

```

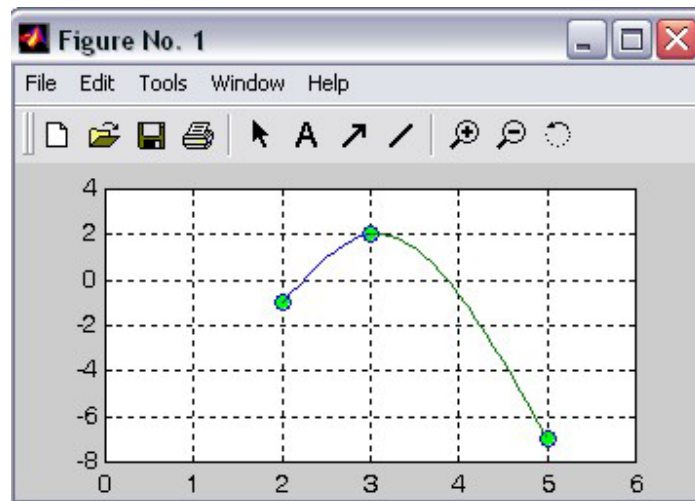


Fig. 9

Si se agregan las siguientes dos líneas para realizarlo directamente con la función spline del matlab se tendrá la siguiente figura:

```
xx=0:0.1:6;  
Int1=spline(Xi,Yi,xx,'spline');  
plot(xx,Int1,'r');
```

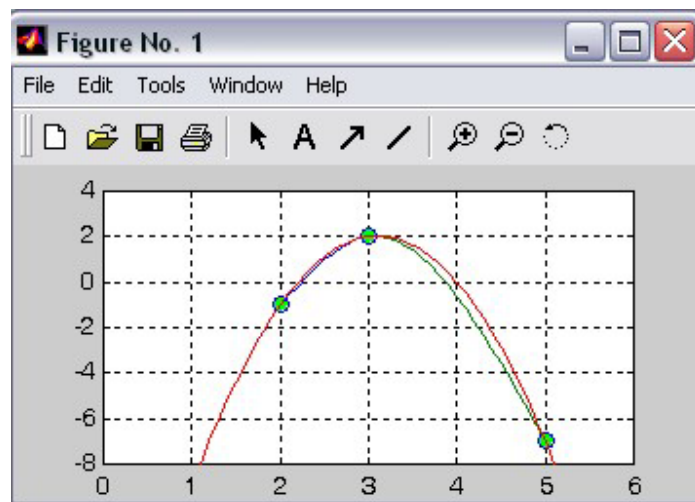


Fig. 10

Ó usando *Mathematica*, se obtiene la siguiente solución:

$$\begin{aligned}a_1 &= -1.250 \\b_1 &= 7.500 \\c_1 &= -10.750 \\d_1 &= 0.500 \\a_2 &= 0.625 \\b_2 &= -9.375 \\c_2 &= 39.875 \\d_2 &= -50.125\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la función inicial, se ve que el spline cúbico para la tabla de datos dada, queda definida como sigue:

$$s(x) = \begin{cases} -1.25x^3 + 7.5x^2 - 10.75x + 0.5 & \text{si } x \in [2,3] \\ 0.625x^3 - 9.375x^2 + 39.875x - 50.125 & \text{si } x \in [3,5] \end{cases}$$

Se muestra la gráfica correspondiente a este ejercicio, creada también en *Mathematica*.

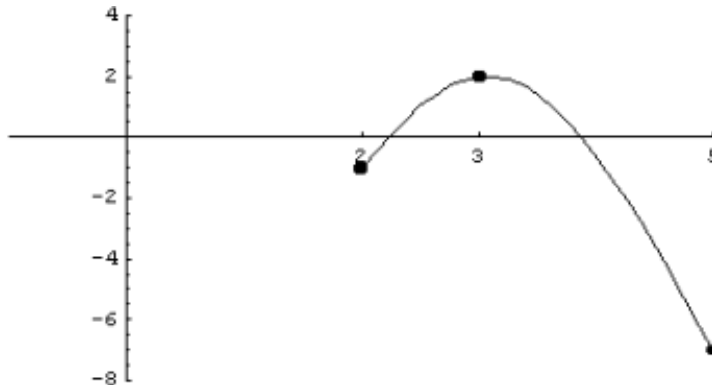


Fig. 11

Obsérvese la finura con la que se unen los polinomios cúbicos que conforman el spline. Prácticamente ni se nota que se trata de dos polinomios diferentes!. Esto es debido a las condiciones que se impusieron sobre las derivadas de la función. Esta finura casi artística, es la que permite aplicar los splines cúbicos, para cuestiones como el diseño de letras por computadoras, o bien a problemas de aplicación donde la interpolación que se necesita es de un caracter bastante delicado, como podría tratarse de datos médicos sobre algún tipo de enfermedad.

**Ejemplo 4:** Interpolan los siguientes datos utilizando splines cúbicos:

$x$	-1	1	2	4
$y$	-1	1	5	-2

**Solución:** Nuevamente, se define un polinomio cúbico en cada uno de los intervalos:

$$S(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1, & \text{si } x \in [-1,1] \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2, & \text{si } x \in [1,2] \\ a_3x^3 + b_3x^2 + c_3x + d_3, & \text{si } x \in [2,4] \end{cases}$$

Después, se hace que el Spline pase por los puntos dados en la tabla. Así, se tiene que:

$$s(-1) = -1 \text{ implica que, } -a_1 + b_1 - c_1 + d_1 = -1$$

$$s(1) = 1 \text{ implica que, } a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 1, \quad a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 1$$

$$s(2) = 5 \text{ implica que, } 8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 = 5, \quad 8a_3 + 4b_3 + 2c_3 + d_3 = 5$$

$$\text{Y finalmente } s(4) = -2 \text{ implica que, } 64a_3 + 16b_3 + 4c_3 + d_3 = -2$$

Enseguida, se calcula la primera derivada:

$$S'(x) = \begin{cases} 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1, & \text{si } x \in [-1,1] \\ 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2, & \text{si } x \in [1,2] \\ 3a_3x^2 + 2b_3x + c_3, & \text{si } x \in [2,4] \end{cases}$$

Se nota entonces, que las posibles discontinuidades de  $s'(x)$  son  $x=1$  y  $x=2$ . Por lo tanto, para hacer que  $s'(x)$  sea continua, se igualan las ecuaciones correspondientes en ambos valores:

$$3a_1 + 2b_1 + c_1 = 3a_2 + 2b_2 + c_2$$

$$12a_2 + 4b_2 + c_2 = 12a_3 + 4b_3 + c_3$$

Ahora se procede a calcular la segunda derivada:

$$S''(x) = \begin{cases} 6a_1x + 2b_1, & \text{si } x \in [-1,1] \\ 6a_2x + 2b_2, & \text{si } x \in [1,2] \\ 6a_3x + 2b_3, & \text{si } x \in [2,4] \end{cases}$$

Nuevamente, las posibles discontinuidades se podrían dar en los puntos  $x=1$  y  $x=2$ . Por lo tanto, para que  $s''(x)$  sea continua, se igualan las ecuaciones en ambos valores:

$$6a_1 + 2b_1 = 6a_2 + 2b_2 \rightarrow 3a_1 + b_1 = 3a_2 + b_2$$

$$12a_2 + 2b_2 = 12a_3 + 2b_3 \rightarrow 6a_2 + b_2 = 6a_3 + b_3$$

Finalmente, se agregan las condiciones de que la doble derivada se anule en los puntos inicial y final de la tabla. En este caso,

$$s''(-1) = 0 \rightarrow -6a_1 + 2b_1 = 0 \rightarrow -3a_1 + b_1 = 0$$

$$s''(4) = 0 \rightarrow 24a_3 + 2b_3 = 0 \rightarrow 12a_3 + b_3 = 0$$

Con esto se tiene un juego de Doce ecuaciones vs. Doce incógnitas:

$$-a_1 + b_1 - c_1 + d_1 = -1$$

$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 1$$

$$a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 1$$

$$8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 = 5$$

$$8a_3 + 4b_3 + 2c_3 + d_3 = 5$$

$$64a_3 + 16b_3 + 4c_3 + d_3 = -2$$

$$3a_1 + 2b_1 + c_1 = 3a_2 + 2b_2 + c_2$$

$$12a_2 + 4b_2 + c_2 = 12a_3 + 4b_3 + c_3$$

$$3a_1 + b_1 = 3a_2 + b_2$$

$$6a_2 + b_2 = 6a_3 + b_3$$

$$-3a_1 + b_1 = 0$$

$$12a_3 + b_3 = 0$$



Este sistema tiene la siguiente forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & 1 & 0 & -12 & -4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a1 \\ b1 \\ c1 \\ d1 \\ a2 \\ b2 \\ c2 \\ d2 \\ a3 \\ b3 \\ c3 \\ d3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usando *Mathematica*, se obtiene la solución:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{51}{140}, \quad a_2 = -\frac{21}{10}, \quad a_3 = \frac{24}{35} \\ b_1 &= \frac{153}{140}, \quad b_2 = \frac{297}{35}, \quad b_3 = -\frac{288}{35} \\ c_1 &= \frac{89}{140}, \quad c_2 = -\frac{473}{70}, \quad c_3 = \frac{1867}{70} \\ d_1 &= -\frac{153}{40}, \quad d_2 = \frac{48}{35}, \quad d_3 = -\frac{732}{35} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la Spline cúbico es:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{51}{140}x^3 + \frac{153}{140}x^2 + \frac{89}{140}x - \frac{153}{40} & \text{si } x \in [-1, 1] \\ -\frac{21}{10}x^3 + \frac{297}{35}x^2 - \frac{473}{70}x + \frac{48}{35} & \text{si } x \in [1, 2] \\ \frac{24}{35}x^3 - \frac{288}{35}x^2 + \frac{1867}{70}x - \frac{732}{35} & \text{si } x \in [2, 4] \end{cases}$$

Finalmente, se muestra la gráfica correspondiente.

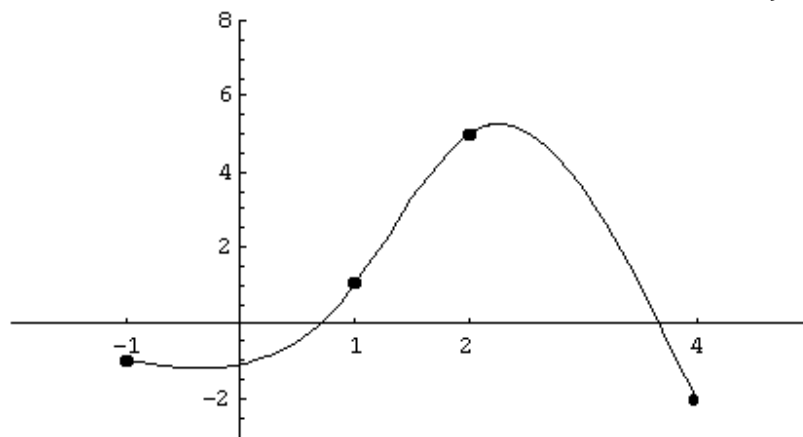


Fig. 12

### Un caso particular

Se ilustra un proceso de construcción con el ejemplo siguiente, en el cual se trata de hallar el trazador cúbico para los puntos:

$$(x_0, y_0) = (1, 2), \quad (x_1, y_1) = (3, 4), \quad (x_2, y_2) = (4, 3), \quad (x_3, y_3) = (6, 2).$$

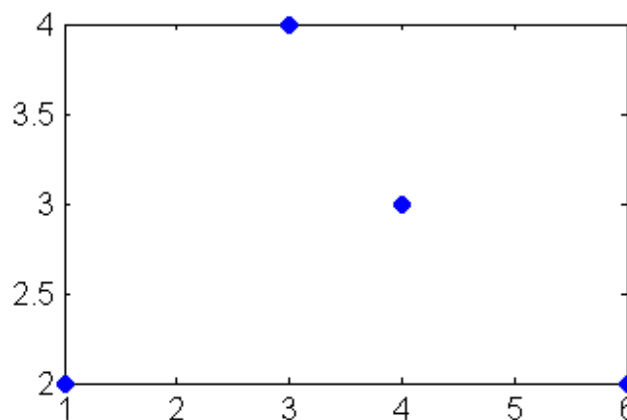


Fig. 13

Como puede observarse, es necesario construir el trazador  $S(x)$  que se define como  $S_0(x)$  en el intervalo  $[1, 3]$ , como  $S_1(x)$  en el intervalo  $[3, 4]$  y como  $S_2(x)$  en el intervalo  $[4, 6]$ , donde

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \text{ para } j = 0, 1, 2$$

Como  $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 4$  y  $x_3 = 6$ , es claro que

$$a_0 = S_0(x_0) = 2, \quad a_1 = S_1(x_1) = 4 \quad \text{y} \quad a_2 = S_2(x_2) = 3$$

Además se define  $a_3 = S_2(x_3)$ .

En los siguientes pasos se dan condiciones que deben cumplir los coeficientes de los polinomios cúbicos  $a_j, b_j, c_j, d_j$ , para  $j=0, 1, 2$

1. *Continuidad.*

En primer lugar, se pide que  $S_0(x)$  coincida con  $S_1(x)$  en  $x_1$ . Además,  $S_1(x)$  debe coincidir con  $S_2(x)$  en  $x_2$ . Estas dos condiciones, junto a la definición que se hizo antes de que  $a_3 = S_2(x_3)$  conducirá a las tres ecuaciones:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \text{ para } j = 0, 1, 2. \text{ Ec 1}$$

2. donde:  $h_j = x_{j+1} - x_j$ , para  $j=0,1,2$ .

3. *Suavidad.* Como  $S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$ , para  $j=0,1,2$

Ahora debe cumplirse que  $S'_0(x_1) = S'_1(x_1)$  y que  $S'_1(x_2) = S'_2(x_2)$ . Al agregarle a estas dos condiciones la definición de  $b_3 = S'_2(x_3)$ , se obtienen las tres ecuaciones:

$$b_{j+1} = b_j + c_j h_j + 3d_j h_j^2, \text{ para } j=0,1,2 \text{ Ec 2}$$

4. *Coincidencia en concavidad.*

Calculando la segunda derivada de cada uno de los polinomios  $S_j(x)$ :

$$S''_j(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j) \text{ Para } j=0,1,2$$

Ahora se le pide la condición  $S''_0(x_1) = S''_1(x_1)$  y  $S''_1(x_2) = S''_2(x_2)$ . Como  $S''_j(x_j) = 2c_j$  para  $j=0,1,2$ . De manera similar a como se hizo en los anteriores casos, se agrega la definición de  $c_3 = S''_2(x_3)/2$ , se obtienen las ecuaciones:

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j \text{ para } j = 0, 1, 2. \text{ Ec 3}$$

5. Despejando  $d_j$  de la ecuación 3 se obtiene:

$$d_j = \frac{1}{3h_j}(c_{j+1} - c_j) \text{ Ec 4}$$

6. sustituyendo  $d_j$  en 1 y en 2 se obtienen las relaciones 5 y 6:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}), j=0,1,2 \text{ Ec 5}$$

$$b_{j+1} = b_j + (c_j + c_{j+1})h_j, j=0,1,2 \text{ Ec 6}$$

7. Despejando  $b_j$  de la ecuación 5

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}), j = 0, 1, 2. \text{ Ec 7}$$

8. y haciendo un corrimiento de índices, se obtiene:

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j), \quad j = 1, 2, 3. \quad \text{Ec 8}$$

9. De igual forma, en la ecuación 6 se hace un corrimiento de índices para obtener

$$b_j = b_{j-1} + (c_{j-1} + c_j)h_{j-1}, \quad j=1,2,3 \quad \text{Ec 9}$$

10. Al sustituir en esta última ecuación la expresión para  $b_j$  obtenida en Ec7 y en Ec8, y haciendo las simplificaciones del caso se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$11. \quad h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_jc_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}), \quad \text{para } j=1,2$$

12. Concretamente, es el sistema:

$$\begin{cases} h_0c_0 + 2(h_0 + h_1)c_1 + h_1c_2 = \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ h_1c_1 + 2(h_1 + h_2)c_2 + h_2c_3 = \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \end{cases}$$

13. *Trazador cúbico con frontera libre*

Hay varios tipos de trazadores que se pueden obtener, dependiendo de las condiciones de frontera que le pongamos en los extremos  $x_0, x_n$ , en el cual se está haciendo la interpolación. En este material, y continuando con el ejemplo que estamos trabajando, le pedimos al trazador  $S(x)$  las condiciones:

$S''(x_0) = 0$  y  $S''(x_3) = 0$ , por lo que se concluye que  $c_0 = 0$  y que  $c_3 = 0$ . De esta manera el sistema anterior puede escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

En el ejemplo, el sistema anterior toma la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema es:  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = -1.0714286$ ,  $c_2 = 0.4285714$ ,  $c_3 = 0$

Como ya se sabía desde antes,:  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 4$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = 2$

$$\text{De la ecuación 4 se calcula: } \begin{cases} d_0 = -0.1785714 \\ d_1 = 0.5 \\ d_2 = -0.0714857 \end{cases}$$

De la ecuación 7 se obtiene: 
$$\begin{cases} b_0 = 1.7142857 \\ b_1 = -0.4285714 \\ b_2 = -1.0714285 \end{cases}$$

Finalmente, se concluye que el trazador cúbico con frontera libre es:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 2 + 1.7142857(x-1) - 0.1785714(x-1)^3 & \text{si } x \in [1,3] \\ S_1(x) = 4 - 0.4285714(x-3) - 1.0714286(x-3)^2 + 0.5(x-3)^3 & \text{si } x \in [3,4] \\ S_2(x) = 3 - 1.0714285(x-4) + 0.4285714(x-4)^2 - 0.0714857(x-4)^3 & \text{si } x \in [4,6] \end{cases}$$

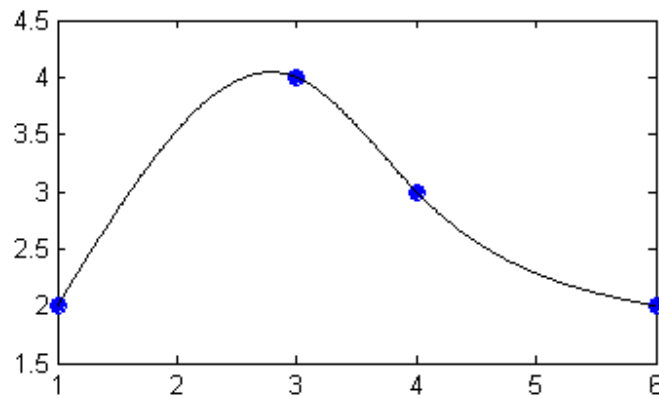


Fig. 14

## El caso general

Para un conjunto de  $N+1$  puntos  $(x, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , en el proceso de construcción del trazador cúbico, se buscan los coeficientes  $a_j, b_j, c_j$  y  $d_j$ , que cumplan las siguientes relaciones:

1.  $S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$ , para  $j=0, 1, 2, \dots, n-1$
2.  $a_j = S_j(x_j) = y_j$ , para  $j=0, 1, 2, \dots, n-1$ . Además,  $a_n = s_{n-1}(x_n) = y_n$
3.  $h_j = x_{j+1} - x_j$ , para  $j=0, 1, 2, \dots, n-1$
4.  $d_j = \frac{1}{3h_j}(c_{j+1} - c_j)$ , para  $j=0, 1, 2, \dots, n-1$
5.  $b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})$ , para  $j=0, 1, 2, \dots, n-1$

6. Se forma un sistema de  $n-1$  ecuaciones con  $N+1$  incógnitas  $c_0, c_1, \dots, c_n$ :

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_jc_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

Al agregarle a este sistema las condiciones de frontera libre  $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ , se concluye que  $c_0 = c_n = 0$  y el sistema resulta con una matriz tridiagonal de coeficientes que tiene solución única. Además, esta es una solución explícita.

7. Algoritmo de trazador con frontera libre.

**Entrada:**  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , con  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ .

**Salida:**  $a_j, b_j, c_j, d_j$  para  $j = 0, 1, \dots, n-1$

1. Para  $j = 0, 1, \dots, n-1$ : se define

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

$$a_j = y_j$$

2.  $a_n = y_n$

3. Para  $j = 0, 1, \dots, n-1$ : se define

$$\alpha_j = \frac{3[a_{j+1}h_{j-1} - a_j(h_j + h_{j-1}) + a_{j-1}h_j]}{h_{j-1}h_j}$$

4. Se define

$$i_0 = 1, \mu_0 = 0, z_0 = 0, i_n = 1, z_n = 0, c_n = 0$$

5. Para  $j = 1, 2, \dots, n-1$  se define

$$l_i = 2(h_i + h_{i-1}) - h_{i-1}\mu_{i-1}$$

$$\mu_i = h_i / l_i$$

$$z_i = (\alpha_i - h_{i-1}z_{i-1}) / l_i$$

6. Para  $j = n-1, n-2, \dots, 0$  se define

$$c_j = z_j - \mu_j c_{j+1}$$

$$b_j = (a_{j+1} - a_j) / h_j - h_j(c_{j+1} + 2c_j) / 3$$

$$d_j = (c_{j+1} - c_j) / (3h_j)$$

### Práctica con MATLAB

En primer lugar se espera que el usuario resuelva el sistema de ecuaciones lineales con el que se concluyó la sección introductoria y use los comandos específicos de MATLAB para su solución.

En efecto, se puede seguir la siguiente secuencia de instrucciones para determinar la solución del sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 1.331 & 1.21 & 1.1 & 1; \\ 12.167 & 5.29 & 2.3 & 1; \end{bmatrix}$$

```
    59.319 15.21  3.9  1;  
    132.651 26.01  5.1  1];  
b = [];  
b = [3.887; 4.276; 4.651; 2.117];  
c = A\b  
c = -0.2015  
    1.4385  
   -2.7477  
    5.4370
```

Con este proceso se han obtenido los coeficientes del polinomio.

Otra manera de resolverlo es directamente con comandos específicos del software, como se explica a continuación.

MATLAB realiza varias tareas de interpolación mediante el comando `interp`, el cual, dependiendo de los parámetros con que sea evaluado, ejecuta métodos diferentes de interpolación<sup>2</sup>

Para hallar los coeficientes del polinomio interpolante podemos recurrir al comando ***polyfit***, que tiene sintaxis ***polyfit***(X,Y,m), el cual retorna el polinomio de mínimos cuadrados de grado de mejor ajuste a los datos. Es bien sabido que si tenemos puntos el polinomio de grado que mejor se ajusta a esos datos en el sentido de mínimos cuadrados es precisamente el polinomio interpolante.

Por ejemplo, para hallar el resultado del polinomio interpolante que pasa por los cuatro puntos , , y al evaluarlo en el valor de , se puede seguir la siguiente secuencia de instrucciones:

```
X=[1.1, 2.3, 3.9, 5.1];  
Y=[3.8870, 4.2760, 4.65110, 2.1170];  
P = polyfit(X,Y,3)  
Resultado=Polyval(P,2.5)
```

Esto da como resultado

```
P =  
   -0.2015    1.4387   -2.7481    5.4372  
Resultado =  
    4.4108
```

El resultado obtenido en la variable P son los coeficientes del polinomio de interpolación dispuestos en un vector:

```
P = -0.2015    1.4387   -2.7481    5.4372
```

Estos coeficientes se interpretan como el polinomio:

$$-0.2015x^3 + 1.4387x^2 - 2.7481x + 5.4372$$

Note que la instrucción `>> Resultado=Polyval(P,2.5)`, permite encontrar el valor del polinomio evaluado en 2.5. Esta función de MATLAB permite también evaluar un polinomio en un vector de valores y en este caso retornaría un vector de resultados. Esta adaptabilidad de la función ***Polyval*** para evaluarse en un vector de valores la hace muy útil

para graficar cualquier polinomio en un intervalo dado, como se verá en el siguiente ejemplo.

La siguiente secuencia de instrucciones está orientada al cálculo del polinomio interpolante para los puntos (1,5), (3,1), (4,3), (5,-1), (7,4) y (10,2) y, alternativamente la aproximación y visualización del trazador cúbico (*splines*).

```
hold off
x=[1 3 4 5 7 10];
y=[5 1 3 -1 4 2];
P = polyfit(x,y,5);
t=0:0.1:11;
W=polyval(P,t);
plot(x,y,'*k')
hold on;
plot(t,W,'k')
z=interp1(x,y,t,'spline');
plot(t,z,'r')
```

En figura 15 puede compararse el trazador cúbico con el polinomio interpolante para los seis puntos. Como puede notarse, el trazador cúbico se acomoda mejor a los datos y no produce oscilaciones indeseables para efecto de hacer extrapolaciones más apropiadas.

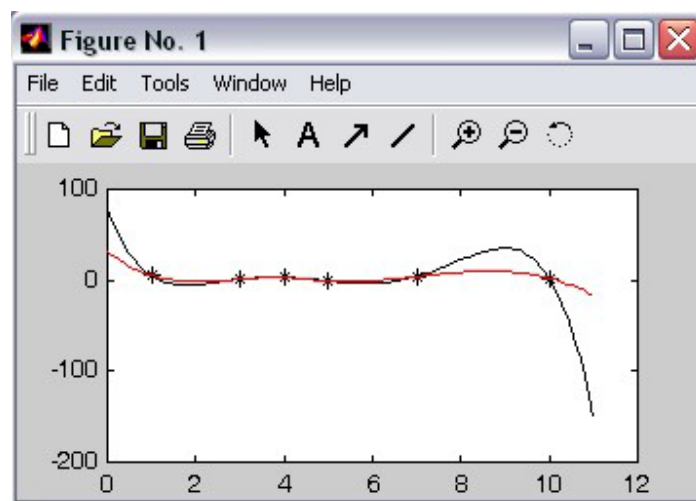


Fig. 15