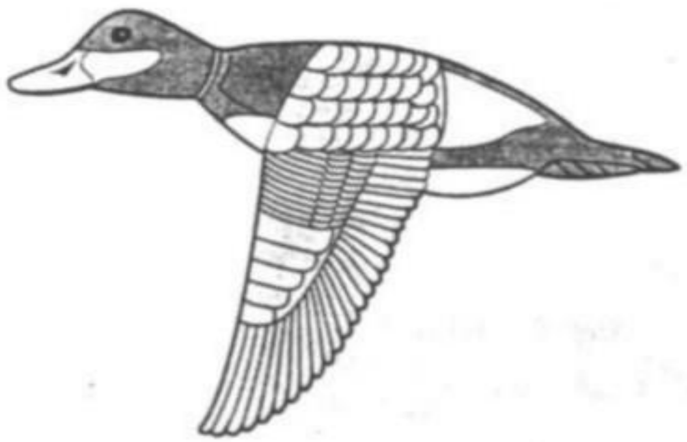
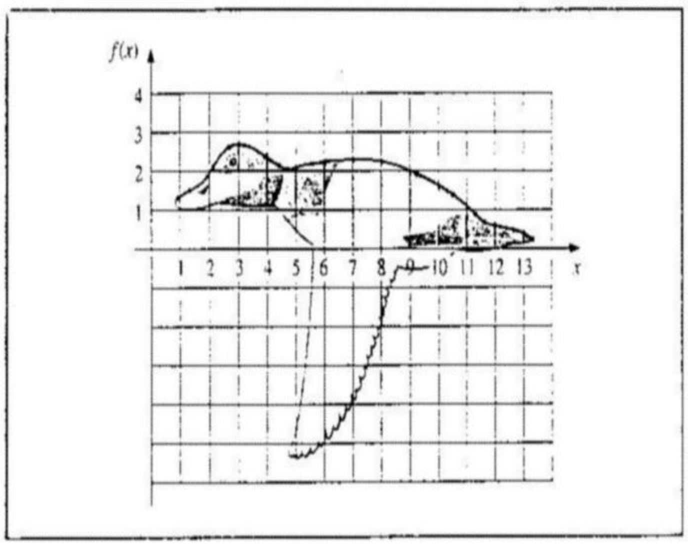
Interpolación por Splines

Función Spline

- Ajusta una curva suave a los puntos
- Sigue la idea de la spline flexible de un dibujante
- Consiste de polinomios definidos sobre subintervalos
- Los polinomios se unen entre sí satisfaciendo ciertas condiciones de continuidad

Aplicación: spline natural





Grados de una spline

Supongamos $(n+1)$ puntos

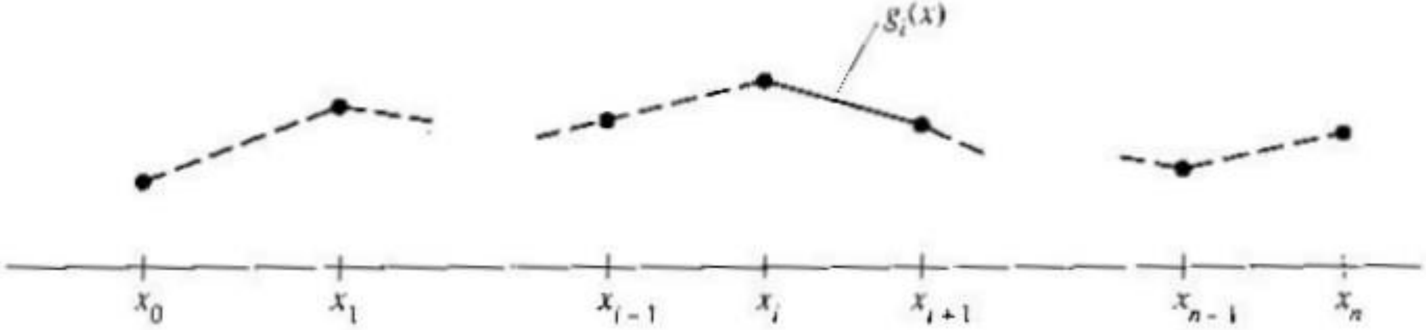
(no necesariamente igualmente espaciados)

$(x_i, y_i) \qquad i = 0,1,\ldots n$

Deseamos ajustar un conjunto de polinomios de grado n

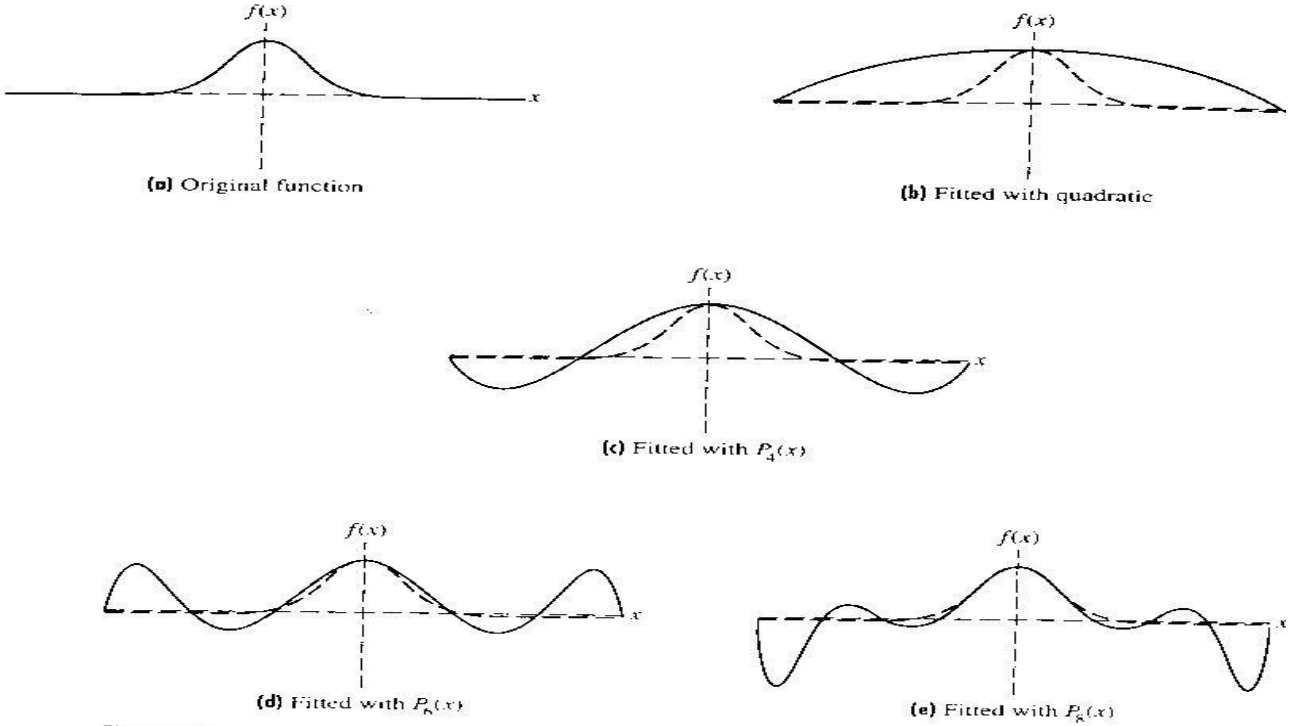
$g_i(x)$ desde x_i hasta x_{i+1}

Spline lineal



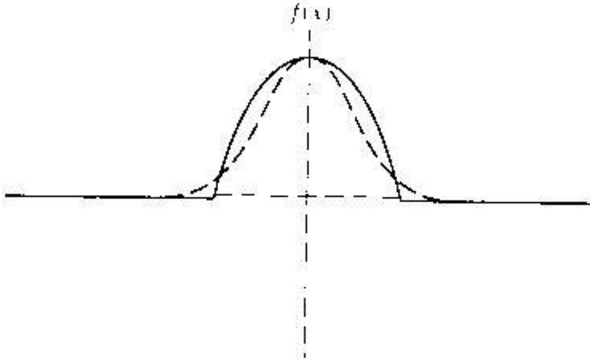
- Pendiente discontinua en los puntos

Polinomios de más alto grado



- F es chata (excepto entre -1 y 1)
- Se requieren ceros fuera de [-1,1]
- Así se crean las oscilaciones
- SOLUCIÓN? Ajustar distintos polinomios

Ajuste mixto



- Se ajustó una cuadrática en [-0.65, 0.65]
- P(x)=0 fuera de esa región
- Discontinuidad en las pendientes donde se unen los polinomios

Definición

Una función spline de grado k con nodos

$t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$

es una función S tal que

a) en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i)$ S es un polinomio de grado menor o igual que k

b) S tiene (k-1) derivadas continuas en $[t_0, t_n]$

Splines cúbicas

$$k = 3$$

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \in [t_0, t_1] \\ S_1(x) & x \in [t_1, t_2] \\ & \vdots \\ S_{n-1}(x) & x \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases}$$

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad i = 0, n-1$$

$$Incognitas \quad (coeficient\,es)? \quad 4n$$

Se necesitan 4n ecuaciones

Balance de Ecuaciones

- Condiciones de interpolación
  - Para los puntos interiores: 2(n-1) ecuaciones
  - Para los extremos: 2 ecuaciones
- Condiciones de continuidad
  - 2(n-1) ecuaciones
- Condiciones de extremo (terminales)
  - Spline cúbica natural ó
  - Spline enclavada ó
  - Spline periódica
  - 2 ecuaciones

Condiciones de Interpolación

a) para los puntos interiores

$$S_{i-1}(t_i) = y_i = S_i(t_i) \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

b) para los extremos

$$S_0(t_0) = y_0$$

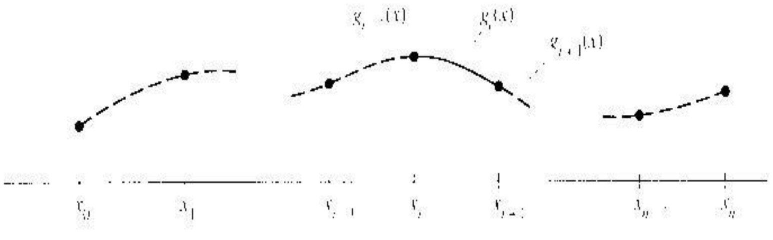
$$S_{n-1}(t_n) = y_n$$

Condiciones de Continuidad

$$S'_{i-1}(t_i) = S'_i(t_i) \qquad 1 \le i \le n-1$$

$$S''_{i-1}(t_i) = S''_i(t_i) \qquad 1 \le i \le n-1$$

Condiciones de Extremo: Spline Cúbica Natural



$$S_0''(t_0) = 0$$

$$S_{n-1}''(t_n) = 0$$

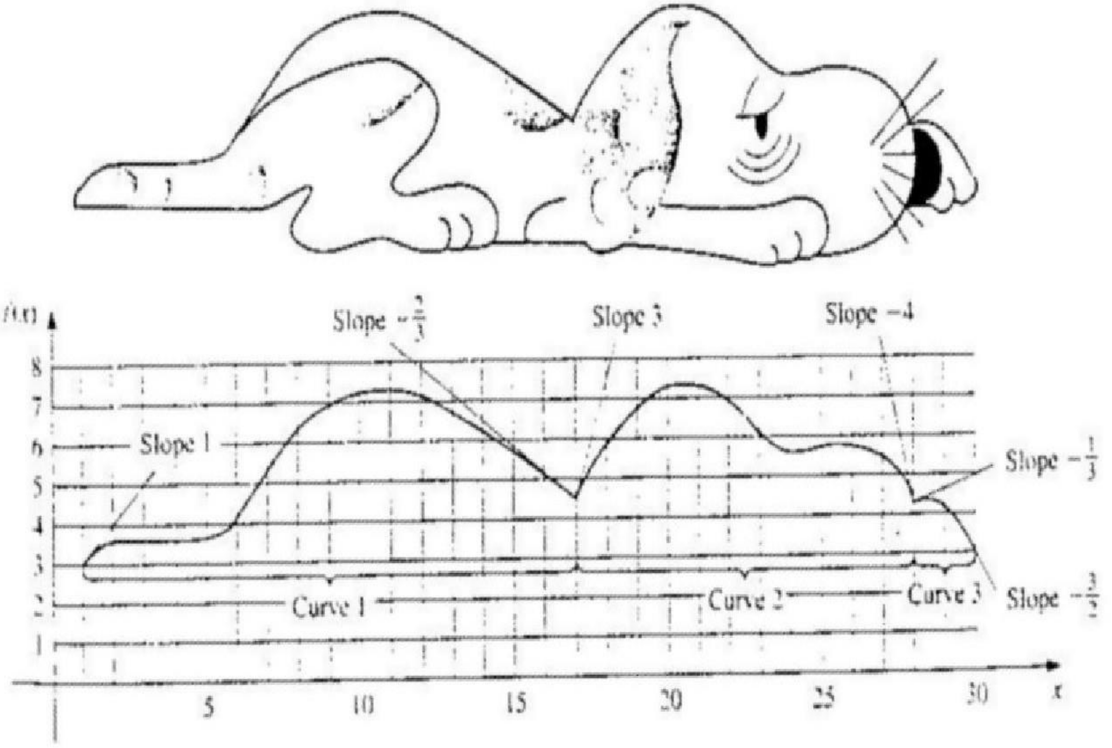
- Derivada segunda igual a cero en los extremos=> derivada primera constante
- => función lineal en los extremos

- La curva se “achata” cerca de los extremos

Condiciones de Extremo: Spline Enclavada (clamped)

$$S_0'(t_0) = y_0'$$
$$S_{n-1}'(t_n) = y_n'$$

Aplicación: splines enclavadas



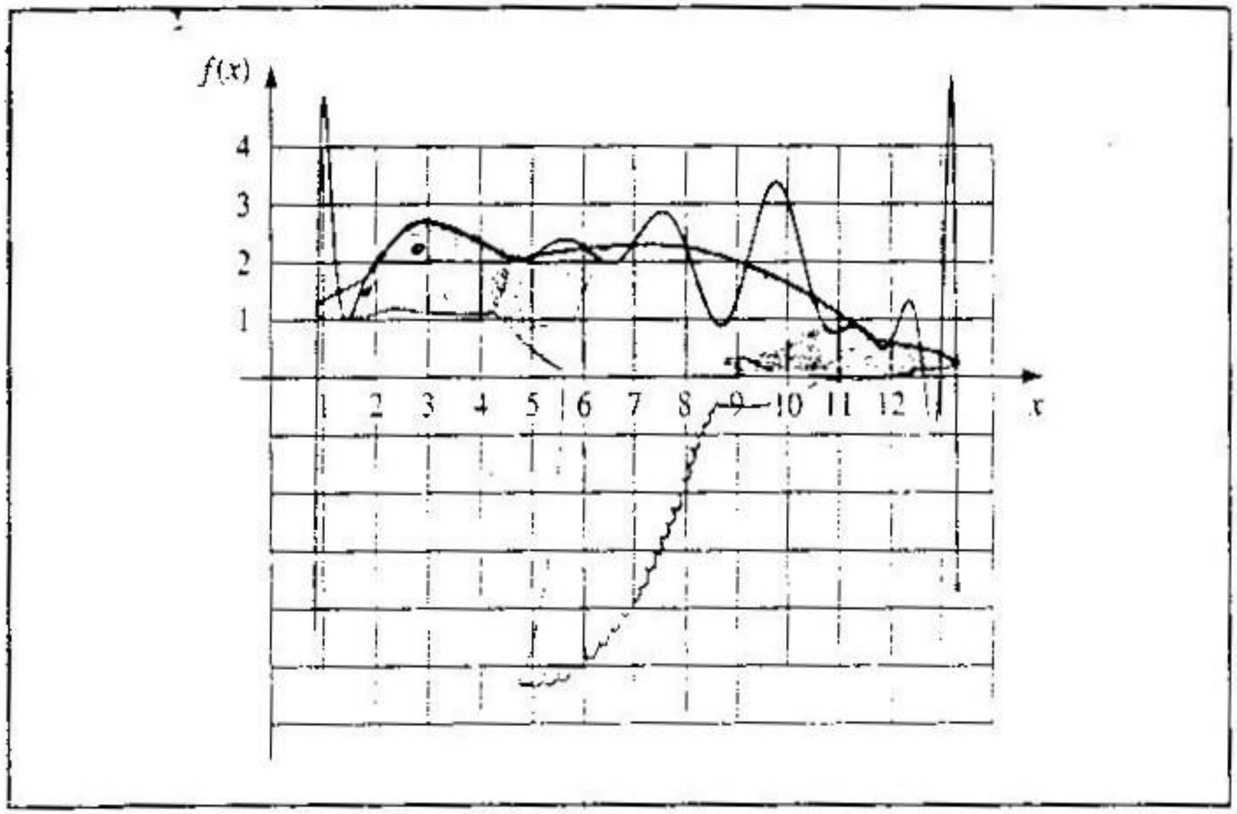
Condiciones de Extremo: Spline Periódica

$$y_0 = y_n$$

$$S_0'(t_0) = S_{n-1}'(t_n)$$

$$S_0''(t_0) = S_{n-1}''(t_n)$$

Ventaja: evita el fenómeno de Runge



Algoritmo de splines cúbicas

Ecuaciones

$Dados \quad (x_i, y_i) \quad (x_{i+1}, y_{i+1})$

se tiene la ecuación :

$$g_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \qquad (1)$$

Se desea una spline de la forma :

$$g(x) = g_i(x) \qquad para \quad [x_i, x_{i+1}] \qquad i = 0,1,\ldots n-1$$

Condiciones

$$g_i(x_i) = y_i \qquad i = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (a)$$

$$g_{n-1}(x_n) = y_{n-1}$$

$$g_i(x_{i+1}) = g_{i+1}(x_{i+1}) \qquad i = 0,1,\ldots,n-2 \quad (b)$$

$$g_i'(x_{i+1}) = g_{i+1}'(x_{i+1}) \qquad i = 0,1,\ldots,n-2 \quad (c)$$

$$g_i''(x_{i+1}) = g_{i+1}''(x_{i+1}) \qquad i = 0,1,\ldots,n-2 \quad (d)$$

Solución

$$de\,(a) \quad d_i = y_i \qquad i = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (\mathrm{a}')$$

$$de\,(b) \quad y_{i+1} = a_i(x_{i+1}-x_i)^3 + b_i(x_{i+1}-x_i)^2 + c_i(x_{i+1}-x_i) + y_i$$

$$= a_i h_i^{\,3} + b_i h_i^{\,2} + c_i h_i + y_i \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

$$derivando:$$

$$g_i'(x) = 3a_i h_i^2 + 2b_i h_i + c_i$$

$$g_i''(x) = 6a_i h_i + 2b_i \qquad i = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (e)$$

Simplificación del desarrollo

$$z_i = g_i''(x_i) \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

$$z_n = g_{n-1}''(x_n)$$

Coeficientes

$$de\ (e) \quad z_i = 2b_i$$

$$z_{i+1} = 6a_i h_i + 2b_i$$

Entonces

$$b_i = \frac{z_i}{2} \qquad \text{(f)}$$

$$a_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{6h_i} \qquad \text{(g)}$$

Sustituyendo …

b_i de (f)

a_i de (g)

d_i de (a')

en (1) y resolvemos para c_i :

$$y_{i+1} = \left(\frac{z_{i+1} - z_i}{6h_i} \right) h_i^3 + \frac{z_i}{2} h_i^2 + c_i h_i + y_i$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i z_i + h_i z_{i+1}}{6}$$

Invocando iguales pendientes …

de (c) (igualdad de derivadas primeras en $x = x_i$)

$$y_i' = 3a_i(x_i - x_i)^2 + 2b_i(x_i - x_i) + c_i = c_i$$

en el intervalo anterior :

$$y_i' = 3a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1}$$

$$y_i' = 3a_{i-1}h_{i-1}{}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}$$

igualando las y_i' y reemplazando los coeficientes :

Ecuación general

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i z_i + h_i z_{i+1}}{6} =$$

$$= 3\left(\frac{z_i - z_{i-1}}{6h_{i-1}}\right)h_{i-1}^2 + 2\,\frac{z_{i-1}}{2}\,h_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{2h_{i-1}z_{i-1} + h_{i-1}z_i}{6}$$

Ordenando:

$$\mathrm{h}_{\mathrm{i\text{-}1}} z_{i-1} + \left(2h_{i-1} + 2h_i\right)z_i + h_i z_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)$$

$$\mathrm{h}_{\mathrm{i\text{-}1}} z_{i-1} + \left(2h_{i-1} + 2h_i\right)z_i + h_i z_{i+1} = 6\left(f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]\right)$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} =$$

$$= 6 \begin{bmatrix} f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1] \\ f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2] \\ f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3] \\ \vdots \\ f[x_{n-1},x_n]-f[x_{n-2},x_{n-1}] \end{bmatrix}$$

$n-1$ ecuaciones $\quad n+1$ incógnitas

Condiciones para Extremos

1. Spline natural

$$z_0 = 0 \qquad z_n = 0$$

2. Spline enclavada

$$f'(x_0) = A \qquad f'(x_n) = B$$

a la izquierda : $2h_0 z_0 + h_1 z_1 = 6(f[x_0, x_1] - A)$

a la derecha : $h_{n-1} z_{n-1} + 2h_n z_n = 6(B - f[x_{n-1}, x_n])$

La matriz de coeficientes queda así:

$$\text{Condición 1 (natural)}: \qquad z_0 = z_n = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$\text{Condición 2 (clamped)}: \qquad f'(x_0) = A \quad f'(x_n) = B$$

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_1 & & & \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & \\ & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \\ & & & \ddots & \\ & & & h_{n-2} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}$$

Condiciones para extremos

3. Parábolas en los extremos

$z_0 = z_1 \qquad z_{n-1} = z_n$

4. Extrapolaciones lineales

z_0 es extrapolación lineal de z_1 y z_2

a la izquierda : $\dfrac{z_1 - z_0}{h_0} = \dfrac{z_2 - z_1}{h_1} \quad \Rightarrow z_0 = \dfrac{(h_0 + h_1)z_1 - h_0 z_2}{h_1} \qquad (4.1)$

z_n es extrapolación lineal de z_{n-1} y $z_{\text{n-2}}$

a la derecha : $\dfrac{z_n - z_{n-1}}{h_{n-1}} = \dfrac{z_{n-1} - z_{n-2}}{h_{n-2}} \quad \Rightarrow z_n = \dfrac{(h_{n-2} + h_{n-1})z_{n-1} - h_{n-1} z_{n-2}}{h_{n-2}} \qquad (4.2)$

La matriz de coeficientes queda así:

$$\text{Condición 3:} \qquad z_0 = z_1 \quad z_n = z_{n-1}$$

$$\begin{bmatrix} (3h_0 + 2h_1) & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \\ & & & \ddots & \\ & & & h_{n-2} & (2h_{n-2} + 3h_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$\text{Condición 4:} \qquad z_0 \text{ y } z_n \text{ son extrapolaciones lineales}$$

$$\Rightarrow \text{usar (4.1) } z_0 = g(z_1, z_2) \quad \text{y (4.2)} \quad z_n = g(z_{n\text{-}1}, z_{n\text{-}2})$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{(h_0 + h_1)(h_0 + 2h_1)}{h_1} & \dfrac{h_1^2 - h_0^2}{h_1} & & & \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \\ & & & \ddots & \\ & & & \dfrac{h_{n-2}^2 - h_{n-1}^2}{h_{n-2}} & \dfrac{(h_{n-1} + h_{n-2})(h_{n-1} + 2h_{n-2})}{h_{n-2}} \end{bmatrix}$$

Observaciones

- Después de obtener los z, se pueden calcular los coeficientes a, b, c para cada cúbica
- Matrices simétricas
- Datos igualmente espaciados, las matrices se reducen a formas simples

Lectura obligatoria

- Gerald C.F., Wheatley P.O. Applied Numerical Analysis, Addison Wesley, 7a Ed., 2004 - págs 168-179