

Métodos de
Computación
Científica

31 de julio

2012

Resumen

Contenido

Teoría de Errores	7
Error Absoluto y Relativo	7
Fuentes de los errores.....	7
Propagación del error.....	7
Error por redondeo	8
Error por truncamiento	8
Comparación entre errores de redondeo y truncado.....	9
Errores asociados con operaciones aritméticas.....	9
Cancelación de cifras significativas	11
Condicionamiento de un problema	12
Álgebra lineal numérica	12
Definición de matriz	12
Tipos de matrices	13
Otros tipos de matrices.....	15
Matriz hermitiana.....	15
Matriz definida positiva.....	16
Matrices de permutación	17
Operaciones	18
Suma.....	18
Producto por un escalar	18
Producto.....	19
Autovalores	20
Definición	20
Radio espectral.....	20
Radio espectral de la inversa.....	21
Convergencia de matrices	22
Normas	22
Definición	22
Consistencia	23
Casos particulares: normas de vectores	24
Casos particulares: normas de matrices	24
Propiedades.....	25
Desigualdad de Cauchy Schwarz	25
Autovalores y autovectores	26
Definición del problema	26
Teorema de Gerschgorin.....	26
Método de las potencias.....	28

Método de las potencias inverso	30
Desplazamientos	30
Resumen.....	31
Conclusiones	31
Transformaciones similares	32
Teorema de Schur	32
Forma real de Schur	33
Resolución de sistemas lineales – Introducción.....	33
Escalado.....	34
Operaciones elementales.....	34
Rango de una matriz	34
Sistemas fáciles de resolver	36
Resolución de sistemas lineales – Métodos directos.....	36
Método de Cramer.....	36
Método de Gauss	36
Factorización LU	36
Construcción de la factorización LU	37
Resolución de sistemas aplicando la factorización LU	38
Método QR.....	38
Factorización de Cholesky.....	39
Evaluación de determinantes.....	39
Estabilidad de sistemas lineales	39
Refinamiento Iterativo - Método de Residuos.....	41
Propagación de Errores en la Solución de Sistemas Lineales	42
Resolución de sistemas lineales – Métodos iterativos.....	43
Ventajas y desventajas	43
Método iterativo general	43
Método de Jacobi.....	44
Convergencia en jacobi	45
Matriz diagonalmente dominante	45
Orden conveniente para Jacobi	46
Jacobi en términos de factorización LU	46
Método Gauss Seidel.....	46
Gauss Seidel en términos de factorización LU	48
Costo computacional.....	48
Método SOR	49
Observaciones	49
Resolución de sistemas no lineales	49

Método incremental	49
Método de Bisección.....	50
Método de Newton-Raphson.....	51
Método de la secante.....	51
Método Regula Falsi.....	52
Método del punto fijo o sustitución sucesiva	52
Múltiples raíces	52
Derivación Numérica.....	53
Diferencias hacia adelante	53
Diferencias hacia atrás	53
Diferencias centrales.....	53
Integración numérica	53
Newton-Cotes Formulas.....	53
Rectangular Rule	53
Trapezoidal rule.....	54
Simpson's rule	55
Simpson's One-Third Rule	55
Simpson's Three-Eighth's Rule	55
Richardson extrapolation	55
Roemberg Integration	56
Gauss Quadrature	57
Cambio de intervalos	58
Cuadrados Mínimos	59
Forma de Lagrange para interpolación polinomial	59
Definición	59
Existencia y unicidad del polinomio de interpolación.....	60
Demostración del teorema de existencia y unicidad.....	60
Splines	62
Interpolación segmentaria lineal	62
Interpolación segmentaria cuadrática	63
Interpolación segmentaria cúbica.....	64
Estadística básica.....	65
Frecuencias.....	65
Centro de una distribución	66
Espacios de probabilidad finita	67
Función de distribución de probabilidad	68
Extensión de una distribución.....	69
Amplitud.....	69

Desviación media absoluta.....	69
Desviación media cuadrática.....	69
Varianza y desviación estándar	69
Desviación estándar	69
Varianza.....	69
EJEMPLO.....	69
Respuesta:	70
Probabilidad	71
Experimento aleatorio	71
Espacio muestral	71
Eventos.....	72
Definición de probabilidad	72
Propiedades.....	72
Particiones.....	72
Probabilidad condicional.....	72
Independencia.....	73
Variables aleatorias y sus distribuciones	73
Características	73
Variable aleatoria.....	74
Distribución de probabilidad de una variable aleatoria	74
Media y varianza	74
Función de densidad de probabilidad	75
Esperanza de una variable aleatoria	75
Varianza de una variable aleatoria.....	75
Distribución de probabilidad.....	76
Definición de función de distribución	76
Distribuciones de variables discretas	77
Ejemplo.....	78
Distribuciones de variable continua.....	87
Función de densidad	92
Función de distribución.....	93
Función de densidad de probabilidad	95
Función de distribución de probabilidad	95
Funciones generadoras asociadas.....	95
Muestreo.....	98
Proceso físico para extraer una muestra aleatoria	98
Muestras con o sin reemplazo.....	98
Muestra aleatoria simple	98

Suma muestral	99
Media muestral	99
Teorema del límite central	99
Método simple: variables 0-1.....	99
Muestreo de población pequeña	100

Teoría de Errores

Error Absoluto y Relativo

Si X_a es una aproximación a X , la diferencia entre el valor real y el valor aproximado se llama valor absoluto (E_x):

$$E_x = X - X_a$$

El error relativo, R_x , se define como:

$$R_x = (X - X_a) / X, X \neq 0$$

Un número X_a es considerado como una aproximación al valor real X a d dígitos significativos si d es el entero positivo mas grande que satisface

$$\text{valorAbsoluto}(R_x) < 1/2 \times 10^{-d}$$

Fuentes de los errores

- Errores en el modelo matemático
- Errores de programación
- Errores en la entrada
- Errores de la máquina
- Errores de truncado asociados al proceso matemático

Propagación del error

La propagación del error es el error en la salida de un procedimiento debido al error en los datos de entrada. Para encontrar el error de propagación, la salida de un procedimiento (f) es considerada como una función de los parámetros de entrada (X_1, X_2, \dots, X_n):

$$f = f(X_1, X_2, \dots, X_n) = f(\bar{X})$$

Aquí, $\bar{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$ es el vector de los parámetros de entrada. Si los valores aproximados de los parámetros de entrada son utilizados en la computación numérica, el valor de f puede hallarse usando la expansión de la serie de Taylor sobre los valores aproximados $\bar{\bar{X}} = \{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n\}^T$ como

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) + \frac{\partial f}{\partial X_1}(\bar{X})(X_1 - \bar{X}_1) + \frac{\partial f}{\partial X_2}(\bar{X})(X_2 - \bar{X}_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial X_n}(\bar{X})(X_n - \bar{X}_n)$$

luego el error de la entrada puede ser expresado como

$$\Delta f = f - \bar{f} = f(X_1, X_2, \dots, X_n) - f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)$$

$$f(x) = f(\tilde{x}) + (x - \tilde{x})f'(\tilde{x}) + \frac{1}{2}(x - \tilde{x})^2 f''(\tilde{x}) + \dots$$

$$\underbrace{|f(x) - f(\tilde{x})|}_{\text{error en la evaluación}} \approx \underbrace{|f'(\tilde{x})|}_{\text{amplificación}} \underbrace{|x - \tilde{x}|}_h$$

Error por redondeo

Es aquel tipo de error en donde el número significativo de dígitos después del punto decimal se ajusta a un número específico provocando con ello un ajuste en el último dígito que se toma en cuenta. Los errores de redondeo resultan de representar aproximadamente números que son exactos.

Las reglas del redondeo se aplican al decimal situado en la siguiente posición al número de decimales que se quiere transformar, es decir, si tenemos un número de 3 decimales y queremos redondear a 2, se aplicará las reglas de redondeo:

- Dígito menor que 5: Si el siguiente decimal es menor que 5, el anterior no se modifica.

Ejemplo: 12,612. Redondeando a 2 decimales deberemos tener en cuenta el tercer decimal: $12,612 = 12,61$.

-Dígito mayor que 5: Si el siguiente decimal es mayor o igual que 5, el anterior se incrementa en una unidad.

Ejemplo: 12,618. Redondeando a 2 decimales deberemos tener en cuenta el tercer decimal: $12,618 = 12,62$.

Error por truncamiento

Truncamiento es el término usado para reducir el número de dígitos a la derecha del punto decimal, descartando los menos significativos.

Por ejemplo dados los números reales:

3,14159265358979...

32,438191288

6,34444444444444

Para truncar estos números a dígitos decimales, sólo consideramos los 4 dígitos a la derecha de la coma decimal.

El resultado es:

3,1415

32,4381

6,3444

Nótese que en algunos casos, el truncamiento dará el mismo resultado que el redondeo, pero el truncamiento no redondea hacia arriba ni hacia abajo los dígitos, meramente los corta en el dígito especificado. El error de truncamiento puede ser hasta el doble del error máximo que se puede tener usando redondeo.

Los errores de truncamiento, resultan de representar aproximadamente un procedimiento matemático exacto.

Comparación entre errores de redondeo y truncado

- Si se *suman* números positivos con redondeo, los errores de redondeo serán positivos o negativos al azar y tenderán a cancelarse.
- Si se *suman* números positivos con truncado, los errores de truncado siempre van en la misma dirección y se refuerzan entre sí.
- Se prefiere ARITMETICA CON REDONDEO

Errores asociados con operaciones aritméticas

En la suma y en la resta, las cotas para el error absoluto en el resultado están dadas por la suma de las cotas para los errores absolutos de los operandos.

SUMA

$$x_1 = \tilde{x}_1 \pm \varepsilon_1 \Rightarrow \tilde{x}_1 - \varepsilon_1 \leq x_1 \leq \tilde{x}_1 + \varepsilon_1$$

$$x_2 = \tilde{x}_2 \pm \varepsilon_2 \Rightarrow \tilde{x}_2 - \varepsilon_2 \leq x_2 \leq \tilde{x}_2 + \varepsilon_2$$

$$\tilde{x}_1 - \varepsilon_1 + \tilde{x}_2 - \varepsilon_2 \leq x_1 + x_2 \leq \tilde{x}_1 + \varepsilon_1 + \tilde{x}_2 + \varepsilon_2$$

$$(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \leq x_1 + x_2 \leq (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$$x_1 + x_2 = (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) \pm (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

RESTA

$$x_1 = \tilde{x}_1 \pm \varepsilon_1 \Rightarrow \tilde{x}_1 - \varepsilon_1 \leq x_1 \leq \tilde{x}_1 + \varepsilon_1$$

$$x_2 = \tilde{x}_2 \pm \varepsilon_2 \Rightarrow \tilde{x}_2 - \varepsilon_2 \leq x_2 \leq \tilde{x}_2 + \varepsilon_2$$

$$-\tilde{x}_2 - \varepsilon_2 \leq -x_2 \leq -\tilde{x}_2 + \varepsilon_2$$

$$(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \leq x_1 - x_2 \leq (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$$x_1 - x_2 = (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) \pm (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

En la multiplicación y la división, las cotas para los errores relativos están dadas por la suma de las cotas para los errores relativos en los operandos.

PRODUCTO

$$r = \frac{\tilde{x} - x}{x} \Rightarrow \tilde{x} = x + xr = x(1 + r)$$

$$\tilde{p} = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 = x_1(1 + r_1)x_2(1 + r_2) = \underbrace{x_1 x_2}_p \underbrace{(1 + r_1)(1 + r_2)}_{1 + r_p}$$

$$1 + r_p = (1 + r_1)(1 + r_2) = 1 + r_1 + r_2 + r_1 r_2$$

$$r_p = r_1 + r_2 + \underbrace{r_1 r_2}_{\text{despreciable si:}}$$

$$\begin{array}{l} |r_1| \ll 1 \\ |r_2| \ll 1 \end{array}$$

$$|r_p| = |r_1 + r_2| \leq |r_1| + |r_2|$$

COCIENTE

$$\tilde{c} = \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_2} = \frac{x_1(1 + r_1)}{\underbrace{x_2}_c \underbrace{(1 + r_2)}_{1 + r_c}}$$

$$r_c = \frac{(1 + r_1)}{(1 + r_2)} - 1 = \frac{1 + r_1 - 1 - r_2}{(1 + r_2)}$$

$$r_c = \frac{r_1 - r_2}{1 + r_2} \quad \text{si } |r_2| \ll 1 \Rightarrow$$

$$r_c = r_1 - r_2$$

$$|r_c| = |r_1 - r_2| \leq |r_1| + |r_2|$$

OBS: Si los términos en una suma de términos positivos son de distintos órdenes de magnitud, se deben adicionar en **orden creciente** para lograr mejor precisión en el resultado

(Si sumamos primero todos los pequeños, quedará un número grande que eventualmente será comparable con el máximo)

Cancelación de cifras significativas

La aritmética de ordenador requiere que al hacer cálculos organicemos con detalle los mismos para que las aproximaciones que se hagan no afecten en demasía a la precisión del resultado final. Con respecto a esto y, en concreto, cuando restamos dos números similares, se da el fenómeno de la cancelación de cifras significativas que, en determinados procesos de cálculo, puede afectar considerable y negativamente a la precisión del resultado final.

Ejemplo

Consideremos dos números reales “casi” iguales.

$$p = 1.23456789 \quad q = 1.23454678$$

y supongamos que estamos trabajando con una precisión de 9 cifras. Si los restamos:

$$p - q = 0.00002111$$

Observamos que hemos perdido precisión ya que de 9 cifras significativas, hemos pasado a sólo 4 (el resto son iguales). Puede ocurrir, entonces, que el ordenador sustituya estas cifras por ceros o por valores arbitrarios (depende de la máquina), lo que puede afectar a los cálculos siguientes.

Veamos otro ejemplo donde se constata el efecto que produce el fenómeno de la cancelación de cifras significativas.

Ejemplo

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Error en el discriminante:

$$\sqrt{b^2 - 4ac} \approx |b|$$

$$x^2 - 110x + 1 = 0$$

$$b^2 - 4ac = (-110)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 12100 - 4 = 12096$$

$$0.1210:00 \quad 10^5$$

$$- 0.0000:04 \quad 10^5$$

$$0.1209:96 \quad 10^5$$

Cancelación en el numerador

$$x_{1,2} = \frac{110 \pm 110}{2} \Rightarrow x_1 = 110 \quad x_2 = 0$$

raíz verdadera : 0.09092 (conservar más de 4 S)

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Condicionamiento de un problema

En abstracto podemos ver un problema como una función $f : X \rightarrow Y$ de un espacio vectorial normado de datos en un espacio vectorial normado de resultados. Por ejemplo, el problema de calcular la mitad de un número real se puede ver como la función

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Y el problema de calcular las raíces de un polinomio también se puede interpretar de esta forma aunque los espacios X e Y que intervienen son un poco más complicados.

Esta función es casi siempre no lineal (incluso en Álgebra Lineal) pero si continua. Y lo que se pretende es saber cómo actúa f sobre un punto concreto $x \in X$. Intuitivamente, para un valor $x \in X$, se dice que un problema está bien condicionado (en realidad debería decirse bien condicionado para el valor dado x , pero se sobreentenderá lo de que es para un valor concreto que siempre se dará previamente) si cualquier pequeña modificación en x produce una pequeña modificación en $f(x)$. Un problema mal condicionado es aquel para el que hay pequeñas modificaciones de x que producen grandes modificaciones de $f(x)$.

Se denomina a K número de condicionamiento de un problema:

$$\frac{|f(x) - f(\tilde{x})|}{|f(\tilde{x})|} \approx \frac{|f'(\tilde{x})| |\tilde{x}|}{|f(\tilde{x})|} \frac{|\Delta x|}{|\tilde{x}|}$$
$$K = \frac{|f'(\tilde{x})| |\tilde{x}|}{|f(\tilde{x})|}$$

Este número mide la sensibilidad del problema f a las pequeñas perturbaciones de x . Así, si $K(x)$ es pequeño, errores relativos pequeños en el dato producen errores relativos pequeños en la solución; mientras que si $K(x)$ es grande errores relativos pequeños en los datos producen errores relativos grandes en la solución. En este caso, el problema está mal condicionado; y en el anterior el problema está bien condicionado.

Álgebra lineal numérica

Definición de matriz

Una **matriz** es un arreglo rectangular de números colocados entre paréntesis, cuadrados o líneas dobles.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Una matriz se representa mayormente por paréntesis o corchetes.

En matemáticas, una **matriz** es una ordenación rectangular de números, o más generalmente, una tabla consistente en cantidades abstractas que pueden sumarse y multiplicarse. Las

matrices se utilizan para describir sistemas de ecuaciones lineales, realizar un seguimiento de los coeficientes de una aplicación lineal y registrar los datos que dependen de varios parámetros. Las matrices se describen en el campo de la teoría de matrices. Pueden sumarse, multiplicarse y descomponerse de varias formas, lo que también las hace un concepto clave en el campo del álgebra lineal.

Tipos de matrices

Tipo de matriz	Definición	Ejemplo
FILA	<i>Aquella matriz que tiene una sola fila, siendo su orden $1 \times n$</i>	$A_{1 \times 3} = (7 \quad 2 \quad -5)$
COLUMNA	<i>Aquella matriz que tiene una sola columna, siendo su orden $m \times 1$</i>	$A_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$
RECTANGULAR	<i>Aquella matriz que tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su orden $m \times n$, $m \neq n$</i>	$A_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 5 & 7 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
TRASPUESTA	<i>Dada una matriz A, se llama traspuesta de A a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas. Se representa por A^t ó A^T</i>	<i>Si es $A = (a_{ij})_{m \times n}$ su traspuesta es $A^t = (a_{ji})_{n \times m}$</i> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$
OPUESTA	<i>La matriz opuesta de una dada es la que resulta de sustituir cada elemento por su opuesto. La opuesta de A es $-A$.</i>	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$, $-A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 7 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$
NULA	<i>Si todos sus elementos son cero. También se denomina matriz cero y se denota por $O_{m \times n}$</i>	$O_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
CUADRADA	<i>Aquella matriz que tiene igual número de filas que de columnas, $m = n$, diciendose que la matriz es de <u>orden n</u>. <u>Diagonal principal</u> : son los elementos a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}</i>	$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

	<p><u>Diagonal secundaria</u> : son los elementos a_{ij} con $i+j = n+1$</p> <p><u>Taza</u> de una matriz cuadrada : es la suma de los elementos de la diagonal principal $\text{tr } A$.</p>	<p>Diagonal principal :</p> $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 4 & 11 \\ 1 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ <p>Diagonal secundaria :</p> $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 4 & 11 \\ 1 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$
SIMÉTRICA	<p>Es una matriz cuadrada que es igual a su traspuesta.</p> <p>$A = A^t$, $a_{ij} = a_{ji}$</p>	$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 9 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
ANTISIMÉTRICA	<p>Es una matriz cuadrada que es igual a la opuesta de su traspuesta.</p> <p>$A = -A^t$, $a_{ij} = -a_{ji}$</p> <p>Necesariamente $a_{ii} = 0$</p>	$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -6 \\ 9 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
DIAGONAL	<p>Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal</p>	$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
ESCALAR	<p>Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales</p>	$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
IDENTIDAD	<p>Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales a 1. También se denomina matriz unidad.</p>	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
TRIANGULAR	<p>Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos por encima (por debajo) de la diagonal principal nulos.</p> <p>Obs: $\prod_{i=1}^n (a_{ii} - \lambda) = 0$ $\lambda = a_{ii} \forall i = 1, n$</p>	<p>T. superior</p> $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ <p>T. inferior</p> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

ORTOGONAL	<p>Una matriz ortogonal es necesariamente cuadrada e invertible : $A^{-1} = A^T$</p> <p>La inversa de una matriz ortogonal es una matriz ortogonal.</p> <p>El producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal.</p> <p>El determinante de una matriz ortogonal vale +1 ó -1.</p>	$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$ $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
NORMAL	<p>Una matriz es normal si conmuta con su traspuesta. Las matrices simétricas, antisimétricas u ortogonales son necesariamente normales.</p>	$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ $A \cdot A^T = A^T \cdot A$
INVERSA	<p>Decimos que una matriz cuadrada A tiene inversa, A^{-1}, si se verifica que :</p> $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ <p>Obs: no todas las matrices admiten inversa.</p>	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Otros tipos de matrices

Matriz hermitiana

Una matriz Hermitiana (o Hermítica) es una matriz cuadrada de elementos complejos que tiene la característica de ser igual a su propia traspuesta conjugada. Es decir, el elemento en la i -ésima fila y j -ésima columna es igual al conjugado del elemento en la j -ésima fila e i -ésima columna, para todos los índices i y j :

$$a_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$$

o, escrita con la traspuesta conjugada A^* :

$$A = A^*$$

Por ejemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 1 \end{bmatrix}$$

es una matriz hermítica.

Matriz definida positiva

Sea M una matriz hermitiana cuadrada $n \times n$. De ahora en adelante denotaremos la transpuesta de una matriz o vector a como a^T , y el conjugado transpuesto, a^* . Esta matriz M se dice **definida positiva** si cumple con una (y por lo tanto, las demás) de las siguientes formulaciones equivalentes:

1. Para todos los vectores no nulos $z \in \mathbb{C}^n$ tenemos que

$$z^* M z > 0.$$

Nótese que $z^* M z$ es siempre real. El producto anterior, recibe el nombre de **Producto Cuántico**.

2. Todos los autovalores λ_i de M son positivos. (Recordamos que los autovalores de una matriz hermitiana o en su defecto, simétrica, son reales.)

3. La función

$$\langle x, y \rangle = x^* M y$$

define un producto interno \mathbb{C}^n .

4. Todos los menores principales de M son positivos. **O lo que es equivalente; todas las siguientes matrices tienen determinantes positivos.**

- la superior izquierda de M de dimensión 1×1
- la superior izquierda de M de dimensión 2×2
- la superior izquierda de M de dimensión 3×3
- ...
- la superior izquierda de M de dimensión $(n-1) \times (n-1)$
- M en sí misma

Para matrices semidefinidas positivas, todos los menores principales tienen que ser no negativos (Criterio de Silvestre o Sylvester).

OBS: Análogamente, si M es una matriz real simétrica, se reemplaza \mathbb{C}^n por \mathbb{R}^n , y la conjugada transpuesta por la transpuesta.

Propiedades:

- Toda matriz definida positiva es invertible (su determinante es positivo), y su inversa es definida positiva.
- Si M es una matriz definida positiva y $r > 0$ es un número real, entonces rM es definida positiva.
- Si M y N son matrices definidas positivas, entonces la suma $M + N$ también lo es. Además si
- $MN = NM$, entonces MN es también definida positiva.

- Toda matriz definida positiva M , tiene al menos una matriz raíz cuadrada N tal que $N^2 = M$.

Matrices de permutación

La **matriz permutación** es la matriz cuadrada con todos sus $n \times n$ elementos iguales a 0, excepto uno cualquiera por cada fila y columna, el cual debe ser igual a 1. De acuerdo a esta definición existen $n!$ matrices de permutación distintas, de las cuales una mitad corresponde a matrices de **permutación par** (con el determinante igual a 1) y la otra mitad a matrices de **permutación impar** (con el determinante igual a -1).

Para $n = 3$ se tiene:

Matrices de permutación par:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices de permutación impar:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puede notarse que las matrices de permutación conforman un grupo de orden $n!$ respecto al producto.

Propiedades:

- El elemento neutro del grupo es la matriz identidad.
- El elemento inverso de cada elemento del grupo de matrices de permutación es la matriz traspuesta correspondiente.
- Cada elemento del grupo de matrices de permutación es una matriz ortogonal.
- El producto de matrices de permutación par siempre genera una matriz de permutación par.
- El producto de matrices de permutación impar siempre genera una matriz de permutación par.
- El producto de matrices de permutación de paridad distinta siempre genera una matriz de permutación impar.
- Observe que las matrices de permutación par conforman un semigrupo y que además el grupo de matrices de permutación no es conmutativo.
- Cada elemento del grupo de matrices de permutación fuera del semigrupo es una matriz simétrica.
- Si P es una matriz de permutación, entonces:

- P tiene inversa.
- P es ortogonal.

Operaciones

Suma

Dadas dos matrices de la misma dimensión, $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$, se define la matriz suma como: $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$. Es decir, aquella matriz cuyos elementos se obtienen: sumando los elementos de las dos matrices que ocupan la misma misma posición.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- Interna: La suma de dos matrices de orden $m \times n$ es otra matriz dimensión $m \times n$.
- Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Elemento neutro: $A + 0 = A$, donde 0 es la matriz nula de la misma dimensión que la matriz A.
- Elemento opuesto: $A + (-A) = 0$. La matriz opuesta es aquella en que todos los elementos están cambiados de signo.
- Conmutativa: $A + B = B + A$

Producto por un escalar

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ y un número real $k \in \mathbb{R}$, se define el producto de un número real por una matriz: a la matriz del mismo orden que A, en la que cada elemento está multiplicado por k.

$$k \cdot A = (k a_{ij})$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$ $A \in M_{m \times n}$, $a, b \in \mathbb{R}$
- $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$, $A, B \in M_{m \times n}$, $a \in \mathbb{R}$
- $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$ $A \in M_{m \times n}$, $a, b \in \mathbb{R}$
- $1 \cdot A = A$ $A \in M_{m \times n}$

Producto

Dos matrices A y B se dicen multiplicables si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B.

$$M_{m \times n} \times M_{n \times p} = M_{m \times p}$$

El elemento c_{ij} de la matriz producto se obtiene multiplicando cada elemento de la fila i de la matriz A por cada elemento de la columna j de la matriz B y sumándolos.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 5 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Propiedades:

- Asociativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- Elemento neutro: $A \cdot I = A$, donde I es la matriz identidad del mismo orden que la matriz A.
- No es Conmutativa: $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Distributiva del producto respecto de la suma: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Algunas demostraciones:

- $(AB)^T = B^T A^T$

$$[(AB)^T]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{k=1}^p a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^p b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^p [B^T]_{ik} [A^T]_{kj} = [B^T A^T]_{ij}$$

Cqd.

- $(A^T)^T = A$

$$\left[(A^T)^T \right]_{ij} = [A^T]_{ji} = [A]_{ij}$$

Cqd.

$$\bullet \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$I^T = I$$

$$(A^{-1}A)^T = I$$

$$A^T (A^{-1})^T = I$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

Cqd.

Autovalores

Definición

Sea A una matriz de orden $n \times n$.

Un vector no nulo $X \in \mathbb{R}^n$ es un autovector o vector propio de A si existe un escalar λ tal que $AX = \lambda X$.

A este λ se le llama **autovalor** o valor propio de A . A este X se le llama **autovector** o vector propio correspondiente a λ .

Radio espectral

Espectro de A :

$$\sigma(A) = \{\lambda_i\} \quad i=1, n$$

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios (reales o complejos) de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, entonces su radio espectral $\rho(A)$ se define como:

$$\rho(A) := \max_i (|\lambda_i|)$$

El siguiente lema muestra una mayorante sencilla hasta ahora útil para el radio espectral de una matriz:

LEMA: Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una matriz de valores complejos, $\rho(A)$ su radio espectral y $\|\cdot\|$ una norma matricial consistente; entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

TEOREMA: Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una matriz de valores complejos y $\rho(A)$ su radio espectral, entonces:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \quad \text{si y sólo si } \rho(A) < 1.$$

Además, si $\rho(A) > 1$, $\|A^k\|$ no está sometido a valores k en aumento.

Radio espectral de la inversa

$$Ax = \lambda x$$

$$A^{-1}Ax = \lambda A^{-1}x$$

$$\frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x$$

$$\rho(A^{-1}) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{|\lambda_i|} \right)$$

$$\rho(A^{-1}) = \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|}$$

LEMA: Sea A cuadrada, entonces para cualquier norma consistente y subordinada a una norma de vectores:

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

DEM:

$$u_i = \frac{x_i}{\|x_i\|} \quad Ax = \lambda x$$

$$\|A\| = \max_{\|v\|=1} \|Av\| \geq \max_{1 \leq i \leq n} \|Au_i\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|\lambda_i u_i\|$$

$$\|A\| \geq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \underbrace{\|u_i\|}_1$$

$$\|A\| \geq \rho(A)$$

TEOREMA: Si A es simétrica, entonces todos sus autovalores son reales.

TEOREMA: Si A es simétrica y definida positiva, entonces todos sus autovalores son reales y positivos.

DEM:

$$Ax = \lambda x$$

$$x^T Ax = x^T \lambda x = \lambda x^T x = \lambda \|x\|_2^2$$

$$\text{sabemos que: } x^T Ax > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\|x\|_2^2 > 0$$

$$\Rightarrow \lambda > 0$$

Convergencia de matrices

El concepto de convergencia de matrices permite decidir si una matriz es o no apta, para que se le pueda aplicar un método numérico.

Para asegurar que una matriz se puede utilizar en un proceso iterativo, se requiere que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$$

Donde 0 es la matriz nula de origen = A. Cualquier matriz que satisfaga esta condición, se dice que es una matriz convergente.

LEMA: Los autovalores de A^m son los autovalores de A elevados a la m.

TEOREMA:

Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- a) A es convergente
- b) $\lim_{m \rightarrow \infty} \|A^m\| = 0$ para alguna norma
- c) $\rho(A) < 1$

LEMA: Si para alguna norma submultiplicativa de matrices $\|A\| < 1$ entonces A es convergente.

Normas

Definición

Es una función valuada real con propiedades que generalizan el concepto Euclídeo de longitud. Para que una función sea una norma debe cumplir con las siguientes propiedades:

1) Norma de vectores

$$\begin{aligned} \text{Pr1} \quad \|x\| &> 0 \quad \text{si } x \neq 0 \\ \|x\| &= 0 \quad \text{si } x = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Pr2} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \alpha \text{ es un escalar}$$

Desigualdad del triángulo :

$$\text{Pr3} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Ejemplos:

$$x = [-5 \quad 3 \quad -2]^T$$

$$y = [2+i \quad -1-i \quad 1]^T$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_p|$$

$$\|x\|_1 = 10 \quad \|y\|_1 = \sqrt{5} + \sqrt{2} + 3$$

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_p|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{38} \quad \|y\|_2 = \sqrt{12}$$

2) Norma de matrices

$$\text{Pr 1} \quad \|\underline{A}\| > 0 \quad \text{si } \underline{A} \neq \underline{0}$$

$$\|\underline{A}\| = 0 \quad \text{si } \underline{A} = \underline{0}$$

$$\text{Pr 2} \quad \|\alpha \underline{A}\| = |\alpha| \|\underline{A}\| \quad \alpha \text{ es un escalar}$$

$$\text{Pr 3} \quad \|\underline{A} + \underline{B}\| \leq \|\underline{A}\| + \|\underline{B}\|$$

Propiedad Submultiplicativa :

$$\text{Pr 4} \quad \|\underline{AB}\| \leq \|\underline{A}\| \|\underline{B}\|$$

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ -0.18 & 1.2 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^p |a_{ij}| \quad \|A\|_1 = 1.7$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^p |a_{ij}| \quad \|A\|_\infty = 1.38$$

Consistencia

Sean μ , ν y ρ normas definidas en $F^{m \times n}$, $F^{n \times p}$ y $F^{m \times p}$, respectivamente. Diremos que μ , ν y ρ son consistentes si para todas matrices $A \in F^{m \times n}$ y $B \in F^{n \times p}$ se verifica

$$\rho(AB) \leq \mu(A)\nu(B)$$

En particular una norma ν definida en $F^{n \times n}$ se dice que es consistente si $\nu(AB) \leq \nu(A)\nu(B)$ para todas $A, B \in F^{n \times n}$.

Una norma ν definida en $F^{n \times n}$ consistente también se dice que es multiplicativa o submultiplicativa.

Un caso particular importante es el de las normas consistentes (también llamadas en este caso compatibles) con las normas de vector: Si μ es una norma definida en $F^{n \times n}$ y v es una norma definida en F^n entonces se dice que μ es consistente o compatible con la norma de vector v si para toda matriz $A \in F^{n \times n}$ y todo vector $x \in F^n$ se tiene que

$$v(Ax) \leq \mu(A)v(x)$$

Casos particulares: normas de vectores

familia de normas L_p

$$\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{1/p} \quad 1 \leq p \leq \infty$$

En particular,

$$\text{Norma infinito : } \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\text{Norma Euclídea : } \|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right]^{1/2}$$

familia de normas L_p ponderada

$$\|x\|_{p,w} = \left[\sum_{i=1}^n w_i |x_i|^p \right]^{1/p} \quad 1 \leq p \leq \infty$$

Casos particulares: normas de matrices

Subordinada a la familia de normas L_1

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Subordinada a la familia de normas L_∞

$$\text{Norma infinito : } \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Subordinada a la familia de normas Euclídeas

$$\text{Norma Espectral : } \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \quad \rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

$A^T A$ es simétrica y definida positiva \Rightarrow autovalores reales y positivos

Norma Euclídea ó Frobenius

$$\|A\|_F = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right]^{1/2}$$

Propiedades

1)

Sea $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|$ dos normas de vectores

Entonces existen dos constantes positivas α y β tal que :

$$\alpha\|\underline{x}\| \leq \|\underline{x}\| \leq \beta\|\underline{x}\| \quad \forall \underline{x} \in \mathfrak{R}^n$$

Casos particulares :

$$\|\underline{x}\|_{\infty} \leq \|\underline{x}\|_2 \leq \|\underline{x}\|_1$$

$$\|\underline{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\underline{x}\|_2$$

$$\|\underline{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\underline{x}\|_{\infty}$$

2)

Sea $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|$ dos normas de matrices

Entonces existen dos constantes positivas α y β tal que :

$$\alpha\|\underline{A}\| \leq \|\underline{A}\| \leq \beta\|\underline{A}\| \quad \forall \underline{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$$

Caso particular :

$$\sqrt{n}\|\underline{A}\|_F \leq \|\underline{A}\|_2 \leq \|\underline{A}\|_F$$

Desigualdad de Cauchy Schwarz

La desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que para todo par de vectores x e y de un espacio vectorial real o complejo dotado de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (es decir, un espacio prehilbertiano),

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle.$$

Equivalentemente, tomando la raíz cuadrada en ambos lados, y refiriéndose a la norma de los vectores, la desigualdad se escribe como

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{o} \quad \underline{v}^T \underline{w} \leq \|\underline{v}\|_2 \|\underline{w}\|_2$$

Adicionalmente, los dos lados son iguales si y sólo si x e y son linealmente dependientes (geométricamente, si son paralelos o uno de los vectores es igual a cero).

La desigualdad de Cauchy-Schwarz se usa para probar que el producto escalar es una función continua con respecto a la topología inducida por el mismo producto escalar.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz se usa para probar la desigualdad de Bessel.

La formulación general del principio de incertidumbre de Heisenberg se deriva usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el espacio de producto escalar de las funciones de onda físicas.

Autovalores y autovectores

Definición del problema

$$A x = \lambda x \quad x \neq 0$$

$$P = \{\lambda_i, i = 1, n\} \quad P: \text{Espectro de } A$$

$$(A - \lambda I) x = 0$$

para que el sistema tenga otra solución además de $x = 0$:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \text{Polinomio característico}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p(A) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{3}i \quad \lambda_3 = 1 - \sqrt{3}i$$

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-1 & -1 \\ -1 & 1 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

Teorema de Gerschgorin

El **teorema de Gerschgorin** nos dice que los autovalores de una matriz compleja (esto incluye también a las reales) de orden $n \times n$, se encuentran en el espacio del plano complejo delimitado por la unión de los círculos D_i .

Un círculo D_i tiene el centro en el valor del elemento a_{ii} de la matriz, y su radio se obtiene sumando el resto de los elementos de la fila en valor absoluto, es decir:

$$c_i = a_{ii} \\ r_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Entonces los autovalores de la matriz A se encuentran en la unión de los n círculos. Además, cada componente conexa de esa unión contiene tantos autovalores como círculos haya en ella, tanto círculos como autovalores contados con multiplicidad.

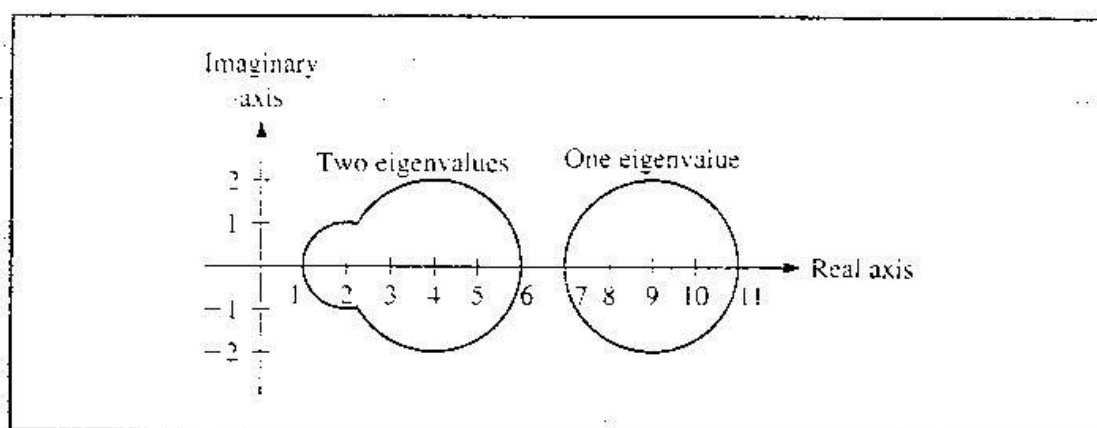
Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z-4| \leq 2\}$$

$$R_2 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z-2| \leq 1\}$$

$$R_3 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z-9| \leq 2\}$$



DEM (con otro enunciado y un ejemplo):

“Todo autovalor λ (real o complejo) de una matriz $B = [b_{ij}]$, $i, j = 1, \dots, n$, satisface a lo menos una de las desigualdades

$$|\lambda - b_{ij}| \leq r_i; \quad r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |b_{ij}|; \quad i = 1, \dots, n.$$

Como $\lambda(B^T) = \lambda(B)$, también cada autovalor yace en el disco de centro b_{ii} y de radio $r_i = \sum_{j=1}^n |b_{ji}|$; $j = 1, \dots, n$.”

“Sea S_p la unión de p discos así y S_{n-p} la unión de los restantes $n-p$ discos. Entonces, si $S_p \cap S_{n-p} = \emptyset$ (son disjuntos), hay precisamente p autovalores de B en S_p .”

Demostración: Sea λ un autovalor de B y v su autovector derecho

$$\lambda v = Bv$$

Entonces, $(\lambda - b_{ii})v_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n b_{ij}v_j$

Sea v_m el mayor elemento de v . Entonces:

$$\left| \frac{v_j}{v_m} \right| \leq 1, \forall j, y |\lambda - b_{mm}| \leq \sum_{j=1, j \neq m}^n |b_{mj}| \left| \frac{v_j}{v_m} \right| \leq \sum_{j=1, j \neq m}^n |b_{mj}|$$

Esto es válido para todo λ .

Ejemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 2 \\ 0.01 & 10 & 10 \\ -0.01 & 1 & 100 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda_1 - 1| \leq 2.1; \quad |\lambda_2 - 10| \leq 10.01; \quad |\lambda_3 - 100| \leq 1.01;$$

Al usar las filas, hay un autovalor en el tercer disco y dos autovalores en la unión de los otros dos discos.

Pero trabajando con las columnas:

$$|\lambda_1 - 1| \leq 0.02; \quad |\lambda_2 - 10| \leq 1.1; \quad |\lambda_3 - 100| \leq 12;$$

Hay un autovalor en cada uno de los discos.

Método de las potencias

En análisis numérico, el **método de las potencias** es un método iterativo que calcula sucesivas aproximaciones a los autovectores y autovalores de una matriz.

El método se usa principalmente para calcular el autovector de mayor autovalor en matrices grandes. En particular, Google lo emplea para calcular el PageRank de los documentos en su motor de búsqueda.

El método converge lentamente y solo puede determinar uno de los autovectores de la matriz.

El método empieza por tomar cualquier vector x_0 , que puede ser una aproximación inicial al autovector dominante o un vector escogido aleatoriamente. En cada paso k , se calcula

$$x_{k+1} = \frac{Ax_k}{\|Ax_k\|}.$$

Entonces x_k converge normalmente al autovector de mayor autovalor.

Este método puede usarse también para calcular el radio espectral de una matriz, computando el cociente de Rayleigh

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ x^T Ax &= \lambda x^T x \\ \lambda &= \frac{x^T Ax}{x^T x} = \frac{x^T Ax}{\|x\|_2^2} \end{aligned}$$

Cálculo del mínimo autovalor:

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ A^{-1}Ax &= \lambda A^{-1}x \\ \frac{1}{\lambda}x &= A^{-1}x \\ \text{si } |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| \\ \Rightarrow \frac{1}{|\lambda_n|} > \frac{1}{|\lambda_{n-1}|} \geq \dots \geq \frac{1}{|\lambda_1|} \\ z_k &= A^{-1}x_k \Leftrightarrow Ax_k = x_k \\ PA z_k &= P x_k \quad LU z_k = P x_k = v_k \end{aligned}$$

Velocidad de convergencia:

- * determinada por las relaciones $\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \quad j = 2, n$
- * relación dominante: $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k$
- * $|\lambda_1| \approx |\lambda_2| \Rightarrow$ converge lentamente
- * autovalores negativos \Rightarrow oscilación
- * converg. de orden lineal $\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|v_{k+1} - x\|}{\|v_k - x\|} = C$

Método de las potencias inverso

Dado $x_0 \in \Re^n$ con $\|x_0\|_\infty = 1$, factorizar $PA = LU$ para $k = 0$ hasta converg.
repetir

$$LU z_k = v_k$$

$$v_{k+1} = \frac{z_k}{\|z_k\|_\infty}$$

fin repetir

$$x_m = P v_m$$

$$\lambda_n = \frac{x^T A x}{x^T x}$$

Desplazamientos

Común:

$$A x_j = \lambda_j x_j$$

$$A x_j - \hat{\lambda} I x_j = \lambda_j x_j - \hat{\lambda} x_j$$

$$(A - \hat{\lambda} I) x_j = (\lambda_j - \hat{\lambda}) x_j$$

$$\frac{1}{(\lambda_j - \hat{\lambda})} x_j = (A - \hat{\lambda} I)^{-1} x_j$$

$$\begin{array}{ccccccc} - & | & - & - & | & - & - & - & - & - & | & - & - & - & - & | & - \\ \lambda_n & & \lambda_{n-1} & & \lambda_{j+1} & & \hat{\lambda} & & \lambda_j & & & & \lambda_1 \end{array}$$

Inverso:

$$\text{Dado } x_0 \in \Re^n \text{ con } \|x_0\|_\infty = 1, \hat{\lambda} \in \Re$$

$$\text{factorizar } P(A - \hat{\lambda} I) = LU$$

para $k = 0$ hasta converg.

repetir

$$LU z_k = v_k$$

$$v_{k+1} = \frac{z_k}{\|z_k\|_\infty}$$

fin repetir

$$x_m = P v_m$$

$$\lambda = \frac{x^T (A - \hat{\lambda} I) x}{x^T x} + \hat{\lambda}$$

Resumen

- Método: Potencias

Ecuación: $x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$

Computa: Máximo autovalor

- Método: Inverso potencias

Ecuación: $Ax^{(k+1)} = x^{(k)}$

Computa: Mínimo autovalor

- Método: Inverso potencias con desplazamientos

Ecuación: $x^{(k+1)} = (A - \mu I) x^{(k)}$

Computa: Autovalor más lejano a μ

- Método: Inverso potencias inverso con desplazamientos

Ecuación: $(A - \mu I) x^{(k+1)} = x^{(k)}$

Computa: Autovalor más cercano a μ

Conclusiones

Ventaja

- Simplicidad

Desventajas

- Calcula los autovalores individualmente
- Requiere un autovalor dominante
- Surgen problemas con autovalores complejos
- Requiere buena distancia entre el autovalor dominante y su vecino
- La inicialización del autovector afecta la velocidad de convergencia
- Herramienta para propósitos especiales
- Muy buena si se conoce bien el problema

Necesidad de herramientas de propósito general ...

- que exijan tomar menos decisiones
- que calculen todo el espectro a la vez

Transformaciones similares

Las matrices $A \in R^{n \times n}$ y $B \in R^{n \times n}$ se denominan **similares** si $\exists S \in R^{n \times n}$ no singular tal que $A = S^{-1} B S$

Las transformaciones similares **preservan los autovalores**.

TEOREMA:

Sea $A \in R^{n \times n}$ similar a $B \in R^{n \times n}$; $A = S^{-1} B S$. Sea λ autovalor de A y sea x autovector de A entonces λ es autovalor de B si Sx es autovector de B .

DEM:

$$A x = \lambda x$$

$$S^{-1} B S x = \lambda x$$

$$B S x = \lambda S x$$

$$B y = \lambda y$$

Teorema de Schur

En álgebra lineal, la **descomposición de Schur** o **triangulación de Schur** (así llamada por el matemático alemán Issai Schur) es una importante descomposición matricial.

Si A es una matriz cuadrada sobre números complejos, entonces A puede descomponerse como

$$A = Q U Q^*,$$

donde Q es una matriz unitaria, Q^* es la traspuesta conjugada de Q , y U es una matriz triangular superior cuyas entradas diagonales son exactamente los autovalores de A .

Toda matriz cuadrada tiene una descomposición de Schur, y por lo tanto, toda matriz cuadrada es unitariamente equivalente a una matriz triangular (de hecho, $Q^* A Q = U$). Sin embargo, esta descomposición no es única.

Escríbase a la matriz triangular U como $U = D + N$, donde D es diagonal y N es estrictamente triangular superior (y por lo tanto nilpotente). La matriz diagonal D contiene los autovalores de A en orden arbitrario. Más aún, la parte nilpotente N en general tampoco es única, pero su norma de Frobenius queda determinada unívocamente por A .

Si A es una matriz normal, entonces U es incluso una matriz diagonal y los vectores columna de Q son los autovectores de A . En este caso, la descomposición de Schur se llama descomposición espectral. Más aún, si A es definida positiva, la descomposición de Schur de A es la misma que la descomposición en valores singulares de la matriz.

Una familia conmutativa de matrices puede triangularizarse simultáneamente. Esto significa que, dadas varias matrices conmutativas A_1, \dots, A_n , existe una matriz unitaria Q tal que las matrices $Q^* A_1 Q, \dots, Q^* A_n Q$ son todas triangular superiores.

Forma real de Schur

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces $\exists U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ortogonal

tal que $T = U^T A U$ con

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \cdots & T_{1k} \\ 0 & T_{22} & T_{23} & \cdots & T_{2k} \\ 0 & 0 & T_{33} & \cdots & T_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & T_{kk} \end{bmatrix}$$

donde $T_{ii} \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \Rightarrow$ es un autovalor real de T

o bien $T_{ii} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \Rightarrow$ sus autoval. son un par de

autoval. complejos conjugados de T

Resolución de sistemas lineales – Introducción

En matemáticas y álgebra lineal, un **sistema de ecuaciones lineales**, también conocido como **sistema lineal de ecuaciones** o simplemente **sistema lineal**, es un conjunto de ecuaciones lineales (es decir, un sistema de ecuaciones en donde cada ecuación es de primer grado), definidas sobre un cuerpo o un anillo conmutativo. Un ejemplo de sistema lineal de ecuaciones sería el siguiente:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

El problema consiste en encontrar los valores desconocidos de las variables x_1 , x_2 y x_3 que satisfacen las tres ecuaciones.

El problema de los sistemas lineales de ecuaciones es uno de los más antiguos de la matemática y tiene una infinidad de aplicaciones, como en procesamiento digital de señales, análisis estructural, estimación, predicción y más generalmente en programación lineal así como en la aproximación de problemas no lineales de análisis numérico.

En general, un sistema con m ecuaciones lineales y n incógnitas puede ser escrito en forma normal como:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + \dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + \dots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + \dots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Donde x_1, \dots, x_n son las incógnitas y los números $a_{ij} \in \mathbb{K}$ son los coeficientes del sistema sobre el cuerpo $\mathbb{K} [= \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots]$.

Es posible reescribir el sistema separando con coeficientes con notación matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Si representamos cada matriz con una única letra obtenemos:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Donde \mathbf{A} es una matriz m por n , \mathbf{x} es un vector columna de longitud n y \mathbf{b} es otro vector columna de longitud m . El sistema de eliminación de Gauss-Jordan se aplica a este tipo de sistemas, sea cual sea el cuerpo del que provengan los coeficientes.

Condiciones para que el sistema tenga una solución única (Teorema):

- a) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene una solución $\forall \mathbf{b}$
- b) si existe una solución para el sistema, esta es única
- c) $\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- d) Las columnas (filas) de \mathbf{A} son linealmente independientes
- e) $\exists \mathbf{A}^{-1}$ tal que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$
- f) $\det \mathbf{A} \neq 0$

Obs: Una matriz que satisface las condiciones del teorema es NO SINGULAR.

Escalado

El determinante cambia MUCHO con el escalado:

$$\det(\sigma \mathbf{A}) = \sigma^n \det \mathbf{A}$$

No se puede usar el determinante para decidir en forma numérica cuántas soluciones tiene un sistema, se debe utilizar el rango.

Operaciones elementales

Entre filas (o columnas):

- Multiplicar una fila por una constante distinta de cero.
- Intercambiar dos filas.
- Sumar a una fila un múltiplo de otra

Rango de una matriz

La dimensión común del espacio filas y columnas de una matriz \mathbf{A} se denomina rango de \mathbf{A} . Las operaciones elementales entre filas no cambian el espacio de filas de \mathbf{A} .

CALCULO

Una matriz $A \in M_{m \times n}$ se dice matriz escalonada (o que se encuentra en **forma canónica**) si:

1. El primer elemento de cada fila no nulo es 1.
2. Para todo par de filas consecutivas se tiene:
 - a. La segunda fila es nula ó
 - b. Las dos son no nulas y el primer elemento no nulo de la segunda fila está a la derecha del primer elemento no nulo de la primer fila.

Para calcular el rango de una matriz A efectuamos operaciones elementales por fila y/o columnas para hallar otra matriz equivalente a A que sea escalonada. El número de filas (o columnas) no idénticamente nulas es el **rango** de A.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad r(A) = 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r(B) = 2$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r(C) = 3$$

OBS: si además de las propiedades de matriz escalonada, una matriz A verifica que cada columna que contiene un 1 principal tiene ceros en todos sus otros elementos, entonces se dice que la matriz está en **forma canónica reducida**. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TEOREMA (Rouché-Frobenius)

Un sistema $AX=b$ de m ecuaciones lineales con n incógnitas y coeficientes en un cuerpo K es compatible si y sólo si $\text{rang } A = \text{rang } (A|b)$. Además será compatible determinado si y sólo si $\text{rang } A = \text{rang } (A|b) = n$.

Propiedades

Dado un sistema $AX=b$ y a partir del teorema anterior obtenemos:

- si $\text{rang } A \neq \text{rang } (A|b)$ entonces el sistema es **incompatible**
- si $\text{rang } A = \text{rang } (A|b) < n$ entonces el sistema es **compatible indeterminado**

Sistemas fáciles de resolver

- Matrices diagonales
- Matrices triangulares inferiores
- Matrices triangulares superiores

Resolución de sistemas lineales – Métodos directos

En esta sección estudias como obtener la solución de un sistema de $AX = b$, lo que significa que A es regular o invertible o que verifica $\det(A) \neq 0$, mediante un método directo. Siendo éste cualesquiera que permita, en ausencia de errores, mediante un número finito de pasos obtener la solución exacta. Esto no ocurre generalmente debido a los inevitables errores de redondeo.

Método de Cramer

Dado el sistema $Ax=B$, con A regular, $B \in M_{n \times 1}$, su solución viene dada por:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1 \dots n$$

Donde A_i es la matriz resultante de sustituir la columna i -ésima de A por el vector B .

Método de Gauss

Consiste en transformar un sistema $Ax=B$ dado, en un sistema equivalente (con las mismas soluciones) cuya matriz de coeficientes es escalonada, de esta forma la resolución es inmediata. Para esto, basta con realizar operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada $A|b$ del sistema.

Observaciones

- El método de Gauss puede fallar si alguno de los pivotes del proceso es nulo. En muchos casos esto puede evitarse permutando filas en ese momento y continuar la triangulación.
- El costo computacional del método de Gauss es menor que el del método de Cramer.

Factorización LU

Toda matriz A regular (excepto permutaciones en las filas) puede expresarse en la forma $A=LU$ donde L es una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal y U una matriz triangular superior.

TEOREMA: Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ tal que las n submatrices diagonales

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \text{ con } 1 \leq k \leq n$$

Son inversibles. Entonces existe una única matriz $L \in M_n(K)$ triangular inferior con $l_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, n$ y existe una única $U \in M_n(K)$ matriz triangular superior tal que $A=LU$.

Construcción de la factorización LU

Supongamos que A verifica las condiciones anteriores y que realizamos operaciones elementales hasta obtener una matriz triangular superior U. Sean $E_1 \dots E_k$ las matrices elementales tales que

$$E_k \dots E_1 A = U,$$

Entonces

$$A = (E_k \dots E_1)^{-1} U,$$

Por lo tanto,

$$L = E_1^{-1} \dots E_k^{-1}$$

Si en el proceso de triangulación anterior sólo hemos utilizado matrices del tipo $P_{ij}(t)$ con $i > j$, la matriz L es triangular inferior con 1's en la diagonal, por ser producto de matrices triangulares inferiores con 1's en la diagonal.

Observaciones

La factorización LU de una matriz es la interpretación matricial del método de Gauss.

Si A es inversible y al aplicar el método de Gauss es necesario realizar alguna permutación de filas (por tener pivote nulo) la matriz no puede factorizarse en la forma LU. Sin embargo, es posible reordenar las filas de A (encontrar una matriz de permutación P) tal que la matriz reordenada (PA) sí admita factorización LU.

EJEMPLO

Para encontrar la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 5 & 21 \end{pmatrix}$$

Primero convertimos en cero todos los elementos debajo del primer elemento de la diagonal de A aplicando operaciones elementales obteniendo la siguiente matriz.

$$U_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 8 \\ 0 & -3 & 5 & 17 \end{pmatrix}$$

Mientras tanto comenzamos la construcción de una matriz triangular inferior, L_1 , con 1's en la diagonal principal. Para hacer esto colocamos los opuestos de los multiplicadores utilizados en las operaciones de la fila en la primera columna de L_1 , debajo del primer elemento diagonal de L_1 y obtenemos la siguiente matriz:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & * & 1 & 8 \\ 4 & * & * & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora sumamos (-3) veces la segunda fila de U_1 a la tercera fila de U_1 y sumamos (-1) veces la tercer fila de U_1 a la cuarta fila de U_1 . Colocamos los opuestos de los multiplicadores debajo del segundo elemento diagonal de L_1 y obtenemos:

$$U_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & * & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora sumamos (-1) veces la tercer fila de U_2 a la cuarta fila de U_2 . Luego colocamos el opuesto de este multiplicador debajo del tercer elemento diagonal de L_2 y obtenemos las matrices:

$$U_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices U_3 y L_3 componen una factorización LU para la matriz A.

Resolución de sistemas aplicando la factorización LU

Dado un sistema de ecuaciones lineales $Ax=b$, si A es una matriz que admite factorización LU, el sistema puede expresarse de la forma $LUx=b$. Por lo tanto la resolución del sistema se reduce a la resolución de dos sistemas cuyas matrices de coeficientes son triangulares.

$$LY=b,$$

$$Ux=Y$$

(en ese orden).

Método QR

Se factoriza A de la forma $A=QR$, con Q una matriz ortogonal, $Q^T Q=I$ y R tringular superior. De este modo el sistema $Ax=B$ queda equivalente a la resolución de los sistemas:

$$Qz=B \text{ De solución } z=Q^T B$$

$$Rx=z \text{ Triangular superior}$$

EJEMPLO

Determinar la factorización QR para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Primero se aplica el proceso de Gram-Schmidt a las columnas de A y se obtienen los vectores q_1, q_2 y q_3 . Estos vectores conforman las columnas de Q. Luego $R = Q^T A$.

Factorización de Cholesky

Toda matriz simétrica A definida positiva posee una única descomposición $A = L^T L$ donde L es una matriz triangular inferior. En consecuencia el sistema $Ax = B$ equivale a resolver:

$$L^T z = B \text{ triangular superior}$$

$$Lx = z \text{ triangular superior}$$

Evaluación de determinantes

Teorema que establece como afectan las operaciones elementales al valor del determinante

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

a) Si A' es la matriz que resulta de multiplicar una fila de A por la constante k

$$\Rightarrow \det(A') = k \det(A)$$

b) Si A' es la matriz que resulta de intercambiar dos filas de A

$$\Rightarrow \det(A') = -\det(A)$$

a) Si A' es la matriz que resulta de adicionar a un múltiplo de una fila de A a otra fila cualquiera de A

$$\Rightarrow \det(A') = \det(A)$$

Estabilidad de sistemas lineales

En esta sección estudiaremos cuan sensitiva es la solución del sistema lineal $Ax = b$ a cambios o perturbaciones en los datos A y b. Note que A ó B pueden contener errores ya sea por las truncaciones envueltas al entrar estos en la computadora o porque sean datos experimentales. De modo que queremos ver como esto puede afectar la solución calculada x. Primero estudiamos variaciones en b únicamente. Sea \tilde{b} una aproximación de b y \tilde{x} la solución del sistema (aproximado) $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Queremos estimar el error $x - \tilde{x}$ en términos de la diferencia $b - \tilde{b}$. Para esto definimos:

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Estas se conocen como la *norma vectorial infinita* y la *norma matricial* asociada respectivamente. Estas normas satisfacen las siguientes propiedades para cualesquiera vectores x, y y matrices A, B :

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular)
2. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
3. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$
4. $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$

Tenemos ahora el siguiente teorema:

Teorema: Sea A una matriz no singular. Sean x, \hat{x} las soluciones de los sistemas $Ax=b$ y $A\hat{x} = \hat{b}$. Entonces

$$\frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|b - \hat{b}\|}{\|b\|}$$

Si definimos $\text{Rel}(\hat{x}) = \|x - \hat{x}\| / \|x\|$, y el *número de condición* de A por

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

entonces podemos escribir el resultado del teorema como

$$\text{Rel}(\hat{x}) \leq \kappa(A) \text{Rel}(\hat{b})$$

De modo que si $\kappa(A)$ es "grande", entonces $\text{Rel}(\hat{b})$ se puede magnificar por un factor hasta de $\kappa(A)$. Decimos pues que el sistema $Ax=b$ es *mal acondicionado* si $\kappa(A)$ es "grande". De lo contrario el sistema se dice que es *bien acondicionado*. Note que como $AA^{-1} = I$, entonces

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| = \kappa(A)$$

i.e., $\kappa(A) \geq 1$ para toda matriz A .

Teorema : Sea A una matriz no singular y \hat{A} otra matriz tal que

$$\|A - \hat{A}\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

Entonces \hat{A} es no singular y

$$\frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \|A^{-1}\| \|A - \hat{A}\|} \left(\frac{\|A - \hat{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b - \hat{b}\|}{\|b\|} \right)$$

Refinamiento Iterativo - Método de Residuos

El Método de Eliminación Gaussiana produce la solución exacta de un sistema lineal en aproximadamente $(1/3)n^3$ operaciones aritméticas donde n es el orden de la matriz de coeficientes A . En general, debido a que los cálculos se hacen con precisión finita, la solución obtenida por Eliminación Gaussiana no es la solución exacta del sistema (aunque esta cerca de serlo si el sistema es bien acondicionado). Veamos ahora un proceso iterativo que toma la solución calculada por el Método de Eliminación Gaussiana y trata de mejorarla.

Sea $x^{(0)}$ la solución calculada por Eliminación Gaussiana y x la solución exacta del sistema, i.e., $Ax=b$. Para cualquier $x^{(k)}$, $k \geq 0$ defina $\tilde{e}^{(k)} = x - x^{(k)}$ (error exacto) y $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$, $k \geq 0$ (los residuos). Entonces es fácil ver que $A\tilde{e}^{(k)} = r^{(k)}$, de modo que utilizando la factorización LU de A ya calculada para obtener $x^{(0)}$, podemos resolver $A\tilde{e}^{(k)} = r^{(k)}$. Este sistema tampoco se puede resolver en forma exacta obteniendo así una aproximación $e^{(k)}$ de $\tilde{e}^{(k)}$. Definimos ahora $x^{(k+1)} = x^{(k)} + e^{(k)}$ la cual debe ser una mejor aproximación de x que $x^{(k)}$. El proceso continúa de esta manera en forma inductiva hasta que un cierto criterio de "paro" se cumple y el proceso termina. En forma algorítmica tenemos:

1. Sea L y U los factores (aproximados) de A .
2. Sea $x^{(0)}$ la solución aproximada de $Ax=b$ obtenida mediante Eliminación Gaussiana.
3. Para $k=0, 1, 2, \dots$
 - a. Calcule $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$.
 - b. Resuelva $Ae^{(k)} = r^{(k)}$.
 - c. Ponga $x^{(k+1)} = x^{(k)} + e^{(k)}$.

Note que en el cálculo del residuo $r^{(k)}$ en el paso (3a) tenemos cancelación de cifras significativas ya que $Ax^{(k)} \gg b$. Para evitar esto el cálculo debe hacerse en precisión extendida y el resto de los cálculos en precisión normal. El ciclo en (3) se puede detener con un criterio como

$$\|e^{(k)}\| \leq 10^{-t} \|x^{(k)}\|$$

lo que garantiza t cifras correctas en la solución calculada en caso de convergencia. Normalmente sin embargo el ciclo no debe ejecutarse más de dos veces.

Note que el cálculo de $r^{(k)}$ en (3a) requiere de n^2 multiplicaciones con aproximadamente la misma cantidad de sumas y restas. Para la solución del sistema en (3b) se usa la factorización LU de A del paso (1) de modo que esto toma aproximadamente n^2 operaciones. Así que cada pasada por el ciclo (3) conlleva aproximadamente $2n^2$ multiplicaciones y divisiones.

EJEMPLO: Considere el sistema lineal

$$\begin{cases} 0.375x_1 + 0.271x_2 = 0.612 \\ 0.491x_1 + 0.381x_2 = 0.311 \end{cases}$$

La solución exacta a tres cifras significativas es $x_1=15.2$, $x_2=-18.7$. Si resolvemos el sistema mediante eliminación Gaussiana sin pivoteo y usando aritmética de tres cifras tenemos:

$$\begin{cases} 0.375x_1 + 0.271x_2 = 0.612 \\ 0.491x_1 + 0.381x_2 = 0.311 \end{cases} \quad m_{21} = \frac{0.491}{0.375} = 1.31 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0.375x_1 + 0.271x_2 = 0.612 \\ 0.0260x_2 = -0.491 \end{cases}$$

de donde obtenemos $x_1^{(0)} = 15.3$, $x_2^{(0)} = -18.9$. El residual de esta solución calculada está dado por:

$$r^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.612 \\ 0.311 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.375 & 0.271 \\ 0.491 & 0.381 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15.3 \\ -18.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00360 \\ -0.000400 \end{pmatrix}$$

correcto a tres cifras. Podemos calcular $e^{(0)}$ mediante:

$$\begin{pmatrix} 0.375 & 0.271 \\ 0.491 & 0.381 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.00360 \\ -0.000400 \end{pmatrix} \quad m_{21} = \frac{0.491}{0.375} = 1.31 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0.375 & 0.271 \\ 0.491 & 0.0260 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.00360 \\ 0.00432 \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos que $e_1^{(0)} = 0.130$, $e_2^{(0)} = 0.166$. La solución mejorada es:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 15.3 \\ -18.9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.130 \\ 0.166 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.4 \\ -18.7 \end{pmatrix}$$

lo cual es mejor que $x^{(0)}$. El proceso se puede repetir una o dos veces más.

Propagación de Errores en la Solución de Sistemas Lineales

Cuando usamos Eliminación Gaussiana para resolver el sistema $Ax=b$ en una computadora normal, ocurren errores de redondeo en cada paso del proceso debido a la aritmética finita de la máquina. Queremos estudiar como estos errores se propagan o acumulan durante todo el proceso y estimar el error en la solución calculada. En realidad al final del proceso de eliminación Gaussiana obtenemos un vector \hat{x} tal que $A\hat{x} \approx b$. En el *análisis de errores hacia atrás* nos interesa saber si \hat{x} es la solución exacta de otro problema que este cerca del problema original en cierto sentido.

TEOREMA

Sea \hat{x} la solución calculada del sistema $Ax=b$ mediante eliminación Gaussiana usando aritmética de punto flotante base b con una mantisa de t cifras. Sea u el epsilon de la máquina. Entonces \hat{x} es la solución exacta del sistema $(A + H)\hat{x} = b$ donde $H=(h_{ij})$ y

$$\|H\| \leq 1.01(n^3 + 3n^2)\rho u \|A\|$$

donde n es el tamaño de A y

$$\rho = \frac{1}{\|A\|} \max_{1 \leq i,j,k \leq n} |a_{ij}^{(k)}|$$

El factor ρ del teorema mide la razón de crecimiento de las entradas de la matriz de coeficientes según el método numérico progresa. La cota superior de este factor depende de la estrategia de pivoteo que se use. En particular

$$\rho \leq 2^{n-1}, \text{ para pivoteo parcial}$$

$$\rho \leq 1.8n^{(nn)/4}, \text{ para pivoteo completo o total}$$

En cualquiera de los dos casos, si n no es muy grande, el teorema lo que dice es que \hat{x} es solución exacta de un problema que está cerca del original. En este sentido es que decimos que Eliminación Gaussiana es un método *estable*. Esto no implica que \hat{x} esté cerca de la solución exacta x .

Resolución de sistemas lineales – Métodos iterativos

Un método iterativo es un método que progresivamente va calculando aproximaciones a la solución de un problema. En Matemáticas, en un método iterativo se repite un mismo proceso de mejora sobre una solución aproximada: se espera que lo obtenido sea una solución más aproximada que la inicial. El proceso se repite sobre esta nueva solución hasta que el resultado más reciente satisfaga ciertos requisitos. A diferencia de los métodos directos, en los cuales se debe terminar el proceso para tener la respuesta, en los métodos iterativos se puede suspender el proceso al término de una iteración y se obtiene una aproximación a la solución.

Ventajas y desventajas

Un elemento en contra que tienen los métodos iterativos sobre los métodos directos es que calculan aproximaciones a la solución. Los métodos iterativos se usan cuando no se conoce un método para obtener la solución en forma exacta. También se utilizan cuando el método para determinar la solución exacta requiere mucho tiempo de cálculo, cuando una respuesta aproximada es adecuada, y cuando el número de iteraciones es relativamente reducido.

Método iterativo general

Un método iterativo consta de los siguientes pasos.

1. inicia con una solución aproximada (Semilla),
2. ejecuta una serie de cálculos para obtener o construir una mejor aproximación partiendo de la aproximación semilla. La fórmula que permite construir la aproximación usando otra se conoce como ecuación de recurrencia.
3. se repite el paso anterior pero usando como semilla la aproximación obtenida.

Método de Jacobi

El método Jacobi es el método iterativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales más simple y se aplica sólo a sistemas cuadrados, es decir a sistemas con tantas incógnitas como ecuaciones.

1. Primero se determina la ecuación de recurrencia. Para ello se ordenan las ecuaciones y las incógnitas. De la ecuación i se despeja la incógnita i . En notación matricial se escribirse como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{B} \mathbf{x}$$

donde \mathbf{x} es el vector de incógnitas.

2. Se toma una aproximación para las soluciones y a ésta se le designa por \mathbf{x}_0

3. Se itera en el ciclo que cambia la aproximación

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{c} + \mathbf{B} \mathbf{x}_i$$

EJEMPLO

Partiendo de ($x = 1$, $y = 2$) aplique dos iteraciones del método de Jacobi para resolver el sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$$

Debemos primeramente despejar de la ecuación la incógnita correspondiente.

$$x = 0.20 + 0.00x - 0.40y$$

$$y = 0.00 + 0.25x + 0.00y$$

Escrito en la notación vectorial quedaría:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.20 \\ 0.00 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00 & -0.40 \\ 0.25 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Aplicamos la primera iteración partiendo de $x_0 = 1.00$ y $y_0 = 2.00$:

$$x_1 = 0.20 + 0.00(1.00) - 0.40(2.00) = -0.60$$

$$y_1 = 0.00 + 0.25(1.00) + 0.00(2.00) = 0.25$$

Aplicamos la segunda iteración partiendo de $x_1 = -0.60$ y $y_1 = 0.25$:

$$x_2 = 0.20 + 0.00(-0.60) - 0.40(0.25) = 0.10$$

$$y_2 = 0.00 + 0.25(-0.60) + 0.00(0.25) = -0.15$$

Aplicamos la siguiente iteración partiendo de $x_2 = 0.10$ y $y_2 = -0.15$:

$$x_3 = 0.20 + 0.00(0.10) - 0.40(-0.15) = 0.26$$

$$y_3 = 0.00 + 0.25(0.10) + 0.00(-0.15) = 0.025$$

Aplicamos la siguiente iteración partiendo de $x_3 = 0.26$ y $y_3 = 0.025$:

$$x_4 = 0.20 + 0.00 (0.26) - 0.40 (0.025) = 0.190$$

$$y_4 = 0.00 + 0.25 (0.26) + 0.00 (0.025) = 0.065$$

Aplicamos la siguiente iteración partiendo de $x_4 = 0.190$ y $y_4 = 0.065$:

$$x_5 = 0.20 + 0.00 (0.19) - 0.40 (0.065) = 0.174$$

$$y_5 = 0.00 + 0.25 (0.19) + 0.00 (0.065) = 0.0475$$

Aplicamos la siguiente iteración partiendo de $x_5 = 0.174$ y $y_5 = 0.0475$:

$$x_6 = 0.20 + 0.00 (0.174) - 0.40 (0.0475) = 0.181$$

$$y_6 = 0.00 + 0.25 (0.174) + 0.00 (0.0475) = 0.0435$$

En forma de tabla:

i	x_i	y_i	x_{i+1}	y_{i+1}	D_i
0	01.000	2.000	-6.000	0.250	1.750
1	-0.600	0.250	0.100	-0.150	0.700
2	0.100	-0.150	0.260	0.025	0.175
3	0.260	0.025	0.190	0.065	0.070
4	0.190	0.065	0.174	0.047	0.017
5	0.174	0.047	0.181	0.043	0.007
6	1.181	0.043	0.182	0.045	0.001

donde

$$D_i = \max (|x_i - x_{i+1}|, |y_i - y_{i+1}|)$$

Este D_i es utilizado como criterio de paro en las iteraciones: Cuando D_i es menos que cierto valor dado (digamos 0.001) uno ya no realiza la siguiente iteración.

Convergencia en jacobi

Uno de los principales problemas de los métodos iterativos es la garantía de que el método va a converger, es decir, va a producir una sucesión de aproximaciones cada vez efectivamente más próximas a la solución. En el caso del método de Jacobi no existe una condición exacta para la convergencia. Lo mejor es una condición que garantiza la convergencia, pero en caso de no cumplirse puede o no haberla es la siguiente:

Si la matriz de coeficientes original del sistema de ecuaciones es diagonalmente dominante, el método de Jacobi seguro converge.

Matriz diagonalmente dominante

Una matriz se dice matriz diagonalmente dominante, si en cada uno de los renglones, el valor absoluto del elemento de la diagonal principal es mayor que la suma de los valores absolutos de los elementos restantes del mismo renglón. A veces la matriz de un sistema de ecuaciones

no es diagonalmente dominante pero cuando se cambian el orden de las ecuaciones y las incógnitas el nuevo sistema puede tener matriz de coeficientes diagonalmente dominante.

Orden conveniente para Jacobi

En ciertas ocasiones al aplicar Jacobi la matriz no es diagonalmente dominante y por tanto no existirá garantía de convergencia. Sin embargo, en algunos casos será posible reordenar las incógnitas en otra manera de forma que la nueva matriz de coeficientes sea diagonalmente dominante. Esto se puede detectar revisando todos los posibles ordenamientos de las incógnitas y ver cómo es la matriz resultante. Claro que esto conlleva un buen número de pruebas pues el número posible de ordenamientos en n variables es $(n - 1)!$ pero cuando n es reducido es sencillo.

EJEMPLO

Indique cuál es el orden conveniente para aplicar Jacobi al sistema:

$$\begin{cases} 3x + 12y - z = -2 \\ 11x - 4y + 3z = -3 \\ -3x - 2y - 12z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 12 & -1 \\ 11 & -4 & 3 \\ -3 & -2 & -12 \end{pmatrix}$$

Con el orden $y \rightarrow x \rightarrow z$ el sistema y su matriz de coeficientes quedan:

$$\begin{cases} 12y + 3x - z = -2 \\ -4y + 11x + 3z = -3 \\ -2y - 3x - 12z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 3 & -1 \\ -4 & 11 & 3 \\ -2 & -3 & -12 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es diagonalmente dominante.

Jacobi en términos de factorización LU

$$A = L + D + U$$

$$Ax = b$$

$$(L + D + U)x = b$$

$$Dx_{k+1} = -(L + U)x_k + b$$

$$x_{k+1} = -\underbrace{D^{-1}(L + U)}_{M_J}x_k + D^{-1}b$$

Método Gauss Seidel

El método de Gauss-Seidel es muy semejante al método de Jacobi. Mientras que en el de Jacobi se utiliza el valor de las incógnitas para determinar una nueva aproximación, en el de Gauss-Seidel se va utilizando los valores de las incógnitas recién calculados en la misma iteración, y no en la siguiente. Por ejemplo, en el método de Jacobi se obtiene en el primer cálculo x_{i+1} , pero este valor de x no se utiliza sino hasta la siguiente iteración. En el método de Gauss-Seidel en lugar de eso se utiliza de x_{i+1} , en lugar de x_i , en forma inmediata para calcular el valor de y_{i+1} , de igual manera procede con las siguientes variables; siempre se utilizan las variables recién calculadas.

EJEMPLOS

1)

Partiendo de $(x = 1, y = 2)$ aplique dos iteraciones del método de Gauss-Seidel para resolver el sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$$

Debemos primeramente despejar de la ecuación la incógnita correspondiente.

$$x = 0.20 + 0.00x - 0.40y$$

$$y = 0.00 + 0.25x + 0.00y$$

Aplicamos la primera iteración partiendo de $x_0 = 1.00$ y $y_0 = 2.00$:

$$x_1 = 0.20 + 0.00(+1.000) - 0.40(2.00) = -0.600$$

$$y_1 = 0.00 + 0.25(-0.600) + 0.00(2.00) = -0.15$$

Aplicamos la segunda iteración partiendo de $x_1 = -0.600$ y $y_1 = -0.15$:

$$x_2 = 0.20 + 0.00(-0.600) - 0.40(-0.15) = 0.26$$

$$y_2 = 0.00 + 0.25(0.26) + 0.00(-0.15) = 0.065$$

Aplicamos la tercera iteración partiendo de $x_2 = 0.26$ y $y_2 = 0.065$:

$$x_2 = 0.20 + 0.00(0.26) - 0.40(0.065) = 0.174$$

$$y_2 = 0.00 + 0.25(0.174) + 0.00(0.174) = 0.0435$$

2)

Partiendo de $(x = 1, y = 2, z = 0)$ aplique dos iteraciones del método de Gauss-Seidel para resolver el sistema:

$$\begin{cases} 10x + 0y - z = -1 \\ 4x + 12y - 4z = 8 \\ 4x + 4y + 10z = 4 \end{cases}$$

Debemos primeramente despejar de la ecuación la incógnita correspondiente.

$$x = -0.10 + 0.00x + 0.00y + 0.10z$$

$$y = 0.66 - 0.33x + 0.00y + 0.33z$$

$$z = 0.40 - 0.40x - 0.40y + 0.00z$$

Aplicamos la primera iteración partiendo de $x_0 = 1.00$, $y_0 = 2.00$, y $z = 0.00$:

$$x_1 = -0.10 + 0.00(1.00) + 0.00(2.00) + 0.10(0.00) = -0.1$$

$$y_1 = 0.66 - 0.33(-0.10) + 0.00(2.00) + 0.33(0.00) = 0.70$$

$$z_1 = 0.40 - 0.40(-0.10) - 0.40(0.70) + 0.00(0.00) = 0.16$$

Aplicamos la segunda iteración partiendo de $x_1 = -0.10$ y $y_1 = 0.70$ y $z_1 = 0.16$:

$$x_1 = -0.10 + 0.00(-0.10) + 0.00(0.70) + 0.10(0.16) = -0.084$$

$$y_1 = 0.66 - 0.33(-0.084) + 0.00(0.70) + 0.33(0.16) = 0.748$$

$$z_1 = 0.40 - 0.40(-0.084) - 0.40(0.748) + 0.00(0.16) = 0.134$$

Aplicamos la tercera iteración partiendo de $x_1 = -0.084$ y $y_1 = 0.748$ y $z_1 = 0.134$:

$$x_1 = -0.10 + 0.00(-0.084) + 0.00(0.748) + 0.10(0.134) = -0.086$$

$$y_1 = 0.66 - 0.33(-0.086) + 0.00(0.748) + 0.33(0.134) = 0.740$$

$$z_1 = 0.40 - 0.40(-0.086) - 0.40(0.740) + 0.00(0.134) = 0.138$$

Gauss Seidel en términos de factorización LU

$$A = L + D + U$$

$$Ax = b$$

$$(L + D + U)x = b$$

$$(L + D)x_{k+1} = -Ux_k + b$$

$$x_{k+1} = \underbrace{-(L + D)^{-1}U}_{M_{GS}} x_k + (L + D)^{-1}b$$

OBS: Si

- A es simétrica, definida positiva, entonces Gauss-Seidel converge
- Si A es estrictamente diagonal dominante por filas,

entonces Gauss-Seidel y Jacobi convergen.

Costo computacional

Es difícil estimar el costo computacional de un método iterativo, pues de antemano se desconoce cuántas iteraciones requerirá para obtener una respuesta que satisfaga al usuario. Generalmente se procede a calcular el costo computacional por iteración. En el caso del método de Jacobi la relación de recurrencia utilizada es:

$$x_{i+1} = c + B x_i$$

No es difícil estimar el costo computacional que involucra: el producto de la matriz B, $n \times n$ por el vector x_i toma $n \times (2n - 1)$ FLOPs, y la suma de dos vectores en \mathbb{R}^n toma n FLOPs lo cual da un total de $2n^2$ FLOPs en cada iteración del método de Jacobi.

Utilizando esta información podemos concluir que si el algoritmo toma m iteraciones entonces el total de FLOPs será de:

$$2mn^2$$

Por ello es que el método de Jacobi se prefiere en problemas donde n es grande, cuando se puede garantizar la convergencia y cuando el número de iteraciones esperado es bajo.

Método SOR

Podemos definir otra descomposición de la matriz A de la forma

$$\omega A = (D + \omega L) - (-\omega U + (1 - \omega)D),$$

que da lugar al método iterativo conocido como el método SOR (successive over relaxation)

$$(D + \omega L)x^{k+1} = (-\omega U + (1 - \omega)D)x^k + \omega b$$

Criterio de convergencia

$$0 < \omega < 2$$

Observaciones

- $\omega=1$ Método de Gauss-Seidel
- $\omega<1$ Subrelajación (paso más corto que el de GS)
- $\omega>1$ Sobrerelajación (paso más largo que el de GS)

Resolución de sistemas no lineales

Método incremental

En éste método el valor de x es incrementado desde un valor inicial x_1 sucesivamente hasta que se observe un cambio en el signo de la función $f(x)$. La idea es que $f(x)$ cambie de signo entre x_i y x_{i+1} si tiene una raíz en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Esto implica que

$$f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$$

Cuando se cruza una raíz. Aquí, $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, donde Δx denota el tamaño del paso inicial. Una vez que se localiza la raíz entre x_i y x_{i+1} el proceso puede repetirse con un Δx menor a partir de un nuevo punto inicial: x_i .

Tras sucesivas aplicaciones de este procedimiento, podemos hacer el intervalo Δx tan pequeño como deseemos para satisfacer el criterio de convergencia.

NOTAS

- 1) El método incremental puede usarse para encontrar sólo las raíces reales de una función $f(x)$. El valor inicial de este método, x_1 suele tomarse como el menor valor en el rango de interés. Luego de hallar una raíz $x = x_1^*$, otras raíces pueden hallarse utilizando x_1^* como nuevo punto de partida y el Δx original como el nuevo tamaño del paso. El procedimiento se aplica hasta que se observe otro cambio en el signo, lo que indica que se está atravesando la segunda raíz, $x = x_2^*$.
- 2) Si el gráfico de $f(x)$ toca el eje x en forma tangente, la función $f(x)$ no presentará un cambio de signo, entonces el método incremental no podrá encontrar las raíces.
- 3) El método no puede distinguir entre una raíz y un punto aislado.

- 4) Un tamaño de paso acelerado puede ser utilizado para encontrar la raíz rápidamente. En este caso el tamaño del paso debe aumentarse (por ejemplo duplicarse) en cada etapa.

EJEMPLO (ver del libro pág 59)

Método de Bisección

Con el objetivo de encontrar las raíces de la ecuación $f(x)=0$ usando el método de bisección, la función $f(x)$ primero se evalúa en intervalos iguales de x hasta encontrar dos valores de la función con signos opuestos. Sea $a = x_k$ y $b = x_{k+1}$ los valores de x tales que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos. Esto implica que la función $f(x)$ tiene una raíz entre $a = x_k$ y $b = x_{k+1}$. El intervalo (x_k, x_{k+1}) , donde se espera que se encuentre la raíz, es llamado intervalo de incertidumbre. El punto medio de este intervalo (a,b) se calcula como

$$x_{mid} = \frac{a + b}{2}$$

Y se determina el valor de la función $f(x_{mid})$. Si este valor es 0, x_{mid} es una raíz de $f(x)=0$. Si x_{mid} es distinto de 0, luego el signo de $f(x_{mid})$ debe coincidir con el signo de $f(a)$ o de $f(b)$. Si los signos de $f(x_{mid})$ y $f(a)$ coinciden, luego a se reemplaza por x_{mid} , en caso contrario b se reemplaza por x_{mid} . Entonces el intervalo de incertidumbre se reduce a la mitad del valor original. Nuevamente se computa x_{mid} utilizando el nuevo intervalo y el procedimiento se repite hasta que se satisfaga el criterio de convergencia utilizado.

Puede utilizarse el siguiente criterio de convergencia:

$$|f(x_{mid})| \leq \varepsilon$$

Asumiendo que los valores de a y b , tal que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos, son conocidos, el procedimiento iterativo usado para encontrar las raíces de $f(x)=0$ puede resumirse como:

- 1) Set $a^{(1)} = a, b^{(1)} = b$ y $i = 0$.
- 2) Set iteration number $i = i + 1$.
- 3) Find $x_{mid} = \frac{a^{(i)} + b^{(i)}}{2}$.
- 4) Si x_{mid} satisface el criterio de convergencia

$$|f(x_{mid})| \leq \varepsilon$$

Tomar la raíz $x_{root} = x_{mid}$ y detener el procedimiento, en otro caso seguir por el paso 5.

- 5) Si $f(x_{mid})f(a^{(i)}) > 0$, ambos $f(x_{mid})$ y $f(a^{(i)})$ tienen el mismo signo, entonces, $a^{(i+1)} = x_{mid}$ y $b^{(i+1)} = b^{(i)}$ e ir al paso 2.
- 6) Si $f(x_{mid})f(a^{(i)}) < 0$, ambos $f(x_{mid})$ y $f(a^{(i)})$ tienen signos opuestos, entonces, $b^{(i+1)} = x_{mid}$ y $a^{(i+1)} = a^{(i)}$ e ir al paso 2.

NOTAS

- 1) El método de bisección funciona cuando el intervalo de incertidumbre inicial (a,b) contiene un número impar de raíces. El método no funcionará si el intervalo (a,b) contiene raíces dobles ya que $f(a)$ y $f(b)$ tendrán el mismo signo.
- 2) El método no distingue entre singularidad y raíz.

EJEMPLO (ver pág 63)

Método de Newton-Raphson

Este método es uno de los mas poderosos usados para encontrar las raíces de $f(x)=0$. Se pueden hallar las aproximaciones de las raíces de la siguiente manera:

$$x = x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Donde x_2 denota una aproximación hacia la raíz. Para hallar la raíz luego utilizamos x_2 en lugar de x_1 en el lado derecho de la ecuación anterior para obtener x_3 . Este procedimiento iterativo puede generalizarse como:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}; i = 1, 2, \dots$$

NOTAS

- 1) Este método requiere las derivadas de la función, $f' = \frac{df}{dx}$. En muchos casos, tal como las ecuaciones polinomiales, la derivada de $f(x)$ puede obtenerse fácilmente. En otros problemas esta tarea no es tan sencilla. En algunos casos $f(x)$ no está dada en forma explícita. En estos casos la derivada puede obtenerse utilizando derivación numérica.
- 2) Converge rápidamente en la mayoría de los casos. De todos modos puede no converger si el valor inicial x_1 está muy lejos de la raíz exacta. También puede no converger si el valor de la derivada es cercano a 0 o varía sustancialmente cerca de la raíz. Estas dificultades pueden corregirse eligiendo un nuevo valor inicial. El siguiente criterio de convergencia puede utilizarse para detener el proceso iterativo:

$$|x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon, \quad \left| \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} \right| \leq \varepsilon, x_i \neq 0$$

Y

$$|f(x_i)| \leq \varepsilon$$

- 3) También puede utilizarse para hallar raíces complejas.

EJEMPLOS (ver pág 65 en adelante)

Método de la secante

Puede implementarse de la siguiente manera:

- 1) Comenzar con dos aproximaciones x_1 y x_2 para la raíz de $f(x)=0$ y un número pequeño ε para testear la convergencia. Set $i=2$.
- 2) Encontrar una nueva aproximación, x_{i+1} como:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

- 3) Verificar la convergencia, si $|f(x_{i+1})| \leq \varepsilon$, detener el proceso y tomar x_{i+1} como la raíz. De otro modo actualizar el número de interacción ($i=i+1$) y volver al paso 2.

EJEMPLOS (ver libro pág 71)

Método Regula Falsi

Fórmula general de aproximación:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Para la siguiente iteración x_{i+1} reemplaza x_i si $f(x_{i+1})f(x_i) > 0$ o x_{i-1} si $f(x_{i+1})f(x_{i-1}) > 0$. Este proceso iterativo puede detenerse mediante el siguiente criterio de convergencia:

$$|f(x_i)| \leq \varepsilon \text{ y } |x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon$$

NOTAS

- 1) En algunos casos la convergencia de este método es muy lenta.
- 2) La ecuación para calcular la siguiente aproximación se ve idéntica a la del método de la secante. Sin embargo éste método converge en casos donde Secante no lo hace.

Método del punto fijo o sustitución sucesiva

En éste método la ecuación $f(x)=0$ se reescribe de la forma $x=g(x)$, y el proceso iterativo usa la siguiente relación:

$$x_{i+1} = g(x_i); i = 1, 2, 3, \dots$$

Se puede utilizar el siguiente criterio de convergencia:

$$|x_{i+1} - g(x_{i+1})| \leq \varepsilon$$

El método es muy sencillo pero no siempre converge, depende de la elección de $g(x)$. El criterio que debe satisfacerse para la convergencia hacia la raíz correcta es el siguiente:

$$|g'(x)| < 1$$

En un vecindario de la raíz correcta.

EJEMPLO (Ver pág.77 del libro)

Múltiples raíces

Si se conoce a priori el número de raíces puede modificarse el método de Newton de la siguiente manera:

$$x_{i+1} = x_i - p \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Donde p es la multiplicidad de la raíz.

EJEMPLOS (ver pág 86 del libro).

Derivación Numérica

Consideremos una función $f(x)$. Los valores de la función en los puntos discretos x_{i-1} , x_i y x_{i+1} pueden utilizarse para encontrar una expresión aproximada a la derivada de f . La derivada de f en x_i , $\frac{df}{dx}$ en x_i puede aproximarse como $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, donde Δx representa los cambios en x en el intervalo Δx . Los cambios discretos en f y en x pueden hallarse de tres maneras diferentes, cada uno dando una aproximación diferente a $\frac{df}{dx}$ en x_i .

Diferencias hacia adelante

$$\frac{df}{dx} \text{ en } x_i \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Diferencias hacia atrás

$$\frac{df}{dx} \text{ en } x_i \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Diferencias centrales

$$\frac{df}{dx} \text{ en } x_i \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

Donde $f_i = f(x_i)$, $f_{i-1} = f(x_{i-1})$ y $f_{i+1} = f(x_{i+1})$.

Integración numérica

Cuando $f(x)$ es una función complicada o imposible de integrar mediante tablas se utiliza integración numérica. En algunos casos $f(x)$ no se conoce en forma analítica, se conoce mediante una tabla de puntos discretos en un intervalo a hasta b (pueden ser resultados de un estudio experimental). Los límites de integración pueden ser infinitos o la función $f(x)$ puede ser discontinua o puede volverse infinita en algún punto del intervalo. En todos estos casos la integral puede ser evaluada en forma numérica.

Newton-Cotes Formulas

Se base en reemplazar una función complicada o información tabular por alguna función aproximada que se integra fácilmente, es decir:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_m(x) dx$$

Donde $p_m(x)$ es la función aproximada, usualmente un polinomio de grado m donde los coeficientes se determinan tal que $f(x)$ y $p_m(x)$ tengan los mismos valores en un número finito de puntos.

Rectangular Rule

La función $f(x)$ puede aproximarse usando una serie de pedazos de polinomios. En este enfoque, el rango de integración $a \leq x \leq b$ se divide en un número finito (n) de intervalos tal que sus tamaños está dado por:

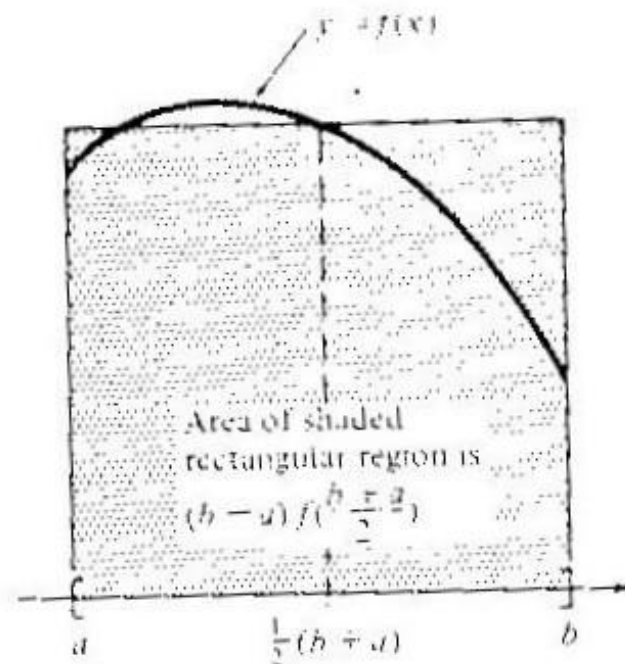
$$h = \Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Los puntos discretos en el rango de integración se define como $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ y $x_n = b$ donde

$$x_i = a + ih; i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Luego:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{f_i + f_{i+1}}{2} \right)$$



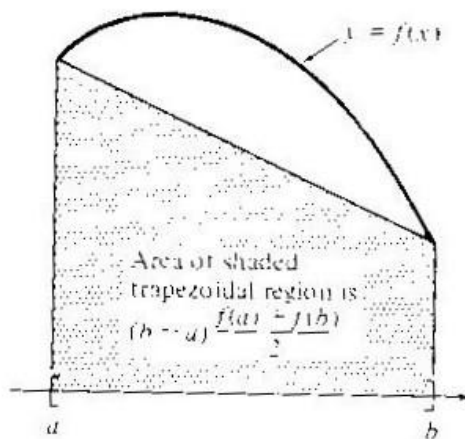
Trapezoidal rule

El método corresponde a la aproximación de $f(x)$ por polinomios de grado uno $p_1(x) = c_1x + c_0$. En este caso el área debajo de la curva $f(x)$ en el intervalo $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ es igual al área del trapecio. Denotando el área de los trapecios como I_1, I_2, \dots, I_n tenemos:

$$I_1 = \left(\frac{f_0 + f_1}{2} \right) h, I_2 = \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right) h, \dots, I_i = \left(\frac{f_{i-1} + f_i}{2} \right) h, \dots, y I_n = \left(\frac{f_{n-1} + f_n}{2} \right) h$$

La integral puede ser evaluada como:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n I_i = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$$



Simpson's rule

Una forma de obtener una aproximación mejor que las anteriores es utilizar un polinomio de orden mayor.

Simpson's One-Third Rule

La integral

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Es evaluada utilizando una parábola o un polinomio de segundo grado para aproximar $f(x)$.

Simpson's Three-Eighth's Rule

En éste método la integral es evaluada aproximando la función $f(x)$ por un polinomio de grado 3, $p_3(x)$.

Richardson extrapolation

En muchos problemas de ingeniería, las integrales deben ser evaluadas en forma precisa. Una posibilidad es usar un número grande de segmentos (n) en el método de los trapecios o de simpson para reducir el error de truncado. Aun así, después de un cierto número de segmentos, el error de redondeo empieza a dominar la precisión del resultado. Además el esfuerzo computacional el mayor cuanto más grande sea el número de segmentos. Otra posibilidad para mejorar la rpesisión de la integral es usar un esquema conocido como Ruchardson's Extrapolation, en el cual dos integrales numéricas estimadas se combinan para obtener una tercera, con un valor mas preciso. **El algoritmo computacional que implementa la extrapolación de Richardson de una manera eficiente se conoce como Roemberg integration.** Este es un procedimiento recursivo que puede utilizarse para generar el valor de la integral respetando una tolerancia previamente especificada.

Roemberg Integration

En análisis numérico, el **Método de Romberg** genera una matriz triangular cuyos elementos son estimaciones numéricas de la integral definida siguiente:

$$\int_a^b f(x) dx$$

usando la extrapolación de Richardson de forma reiterada en la regla del trapecio. El método de Romberg evalúa el integrando en puntos equiespaciados del intervalo de integración estudiado. Para que este método funcione, el integrando debe ser suficientemente derivable en el intervalo, aunque se obtienen resultados bastante buenos incluso para integrandos poco derivables. Aunque es posible evaluar el integrando en puntos no equiespaciados, en ese caso otros métodos como la cuadratura gaussiana o la cuadratura de Clenshaw–Curtis son más adecuados.

METODO

El método se define de forma recursiva así:

$$\begin{aligned} R(0,0) &= \frac{1}{2}(b-a)(f(a) + f(b)) \\ R(n,0) &= \frac{1}{2}R(n-1,0) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}} f(a + (2k-1)h_n) \\ R(n,m) &= R(n,m-1) + \frac{1}{4^m - 1}(R(n,m-1) - R(n-1,m-1)) \end{aligned}$$

o

$$R(n,m) = \frac{1}{4^m - 1}(4^m R(n,m-1) - R(n-1,m-1))$$

donde

$$\begin{aligned} n &\geq 1 \\ m &\geq 1 \\ h_n &= \frac{b-a}{2^n}. \end{aligned}$$

La cota superior asintótica del error de $R(n,m)$ es:

$$O(h_n^{2^{m+1}}).$$

La extrapolación a orden cero $R(n,0)$ es equivalente a la Regla del trapecio con $n+2$ puntos. a orden uno $R(n,1)$ es equivalente a la Regla de Simpson con $n+2$ puntos.

Cuando la evaluación del integrando es numéricamente costosa, es preferible reemplazar la interpolación polinómica de Richardson por la interpolación racional propuesta por Bulirsch & Stoer.

EJEMPLO

Como ejemplo, se le integra la función gaussiana en el intervalo $[0, 1]$, esto es la función error evaluada en 1, cuyo valor es $\text{erf}(1) \doteq 0.842700792949715$. Se calculan los elementos de la matriz triangular fila a fila, terminando los cálculos cuando la diferencia entre las dos últimas filas es menor que $1\text{E-}8$.

```
0.77174333
0.82526296  0.84310283
0.83836778  0.84273605  0.84271160
0.84161922  0.84270304  0.84270083  0.84270066
0.84243051  0.84270093  0.84270079  0.84270079  0.84270079
```

El resultado en la esquina inferior derecha de la matriz triangular es el resultado correcto con la precisión deseada. Nótese que este resultado se deriva de aproximaciones mucho peores obtenidas con la regla del trapecio mostradas aquí en la primera columna de la matriz triangular.

Gauss Quadrature

En análisis numérico un método de cuadratura es una aproximación de una integral definida de una función. Una cuadratura de Gauss n -puntos llamada así debido a Carl Friedrich Gauss, es una cuadratura que selecciona los puntos de la evaluación de manera óptima y no en una forma igualmente espaciada, construida para dar el resultado de un polinomio de grado $2n-1$ o menos, elegibles para los puntos x_i y los coeficientes w_i para $i=1, \dots, n$. El dominio de tal cuadratura por regla es de $[-1, 1]$ dada por:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Tal cuadratura dará resultados precisos solo si $f(x)$ es aproximado por un polinomio dentro del rango $[-1, 1]$. Si la función puede ser escrita como $f(x)=W(x)g(x)$, donde $g(x)$ es un polinomio aproximado y $W(x)$ es conocido.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 W(x)g(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i g(x_i).$$

Fórmula para calcular w_i :

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2) [P'_n(x_i)]^2}$$

Lista de coeficientes de w_i y puntos x_i para $n=1, \dots, 5$

Número de puntos, n	Puntos, x_i	Pesos, w_i
1	$x_1=0$	$w_1=2$
2	$x_1 = -1/\sqrt{3} \quad x_2 = 1/\sqrt{3}$	$w_1=1 \quad w_2=1$
3	$x_1=-0.7745966 \quad x_2=0 \quad x_3=0.7745966$	$w_1=0.55555 \quad w_2=0.88888 \quad w_3=0.55555$
4	$x_1=-0.861136311 \quad x_2=-0.33998104 \quad x_3=0.33998104 \quad x_4=0.861136311$	$w_1=0.3478548451 \quad w_2=0.6521451549 \quad w_3=0.6521451549 \quad w_4=0.3478548451$
5	$x_1=-0.90617984 \quad x_2=-0.53846931 \quad x_3=0 \quad x_4=0.53846931 \quad x_5=0.90617984$	$w_1=0.23692688509 \quad w_2=0.4786286705 \quad w_3=0.56888888 \quad w_4=0.4786286705 \quad w_5=0.23692688509$

Cambio de intervalos

Los cambios de intervalos van de $[-1, 1]$ después de aplicar la cuadratura de Gauss:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right) dx$$

Después de aplicar la cuadratura la aproximación es:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right)$$

EJEMPLO

Aproxime la integral $f(x) = x^3 + 2x^2$ de 1 a 5 cuando $n = 2$ mediante el método de cuadratura de Gauss y después compárelo con el resultado exacto.

$$\int_1^5 (x^3 + 2x^2) dx$$

$$\int_1^5 (x^3 + 2x^2) dx = 238.66667$$

$$n = 2$$

$$2n - 1 = 2(2) - 1 = 3$$

Con $n = 2$ podemos resolver la integral con exactitud para todos los polinomios de grado igual o menor a 3 para $f(x)$

$$\frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right) dx = \frac{5-1}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{5-1}{2}x + \frac{5+1}{2}\right) dx = 2 \int_{-1}^1 f(2x+3) dx$$

$$\approx 2 \sum_{i=1}^2 w_i f(2x_i + 3) = 2(w_1 f(2x_1 + 3) + w_2 f(2x_2 + 3)) = 238.66667$$

Cuadrados Mínimos

En todos los ejemplos anteriores (aproximación por rectas, polinomios, conj. De funciones, etc.) Calculamos las distancias de los datos experimentales ε_i a una familia de rectas, polinomios o curvas que dependían de ciertos parámetros. Seguidamente sumamos todas las distancias elevadas al cuadrados, y al resultado lo llamamos E. Luego encontramos los parámetros de las rectas o curvas que minimizaban dicha expresión.

Hay situaciones en las que no todos los datos tienen la misma importancia en el cálculo de E. Un ejemplo es cuando hay más incertidumbre asociada a una medición que a las demás. En ese caso uno puede desear que dicha medición tenga menos importancia en el momento de aproximar los datos por rectas o curvas que las restantes.

Un posible procedimiento a seguir es el siguiente.

A cada medición se le asocia un peso ω_i . Típicamente, se le suele asociar a cada medición un peso que sea inversamente proporcional a la incertidumbre asociada a dicha medida elevada al cuadrado $\omega_i = \frac{1}{(\Delta y_i)^2}$, aunque otras elecciones son posibles.

En la definición de E, tenemos en cuenta dicho peso:

$$E = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \omega_i$$

El resto del procedimiento es exactamente igual al de los casos anteriores, o sea minimizamos la expresión obtenida para E, teniendo en cuenta los factores ω_i . Observemos que el desarrollo de E es análogo al caso anterior con la diferencia que cada sumando queda multiplicado por el factor de peso ω_i . O sea, cada vez que tenemos una sumatoria del tipo $\sum_{i=1}^N \dots_i$ la misma se transformará a una sumatoria del tipo $\sum_{i=1}^N \dots_i \omega_i$.

Como ejemplo, para el caso de las rectas del tipo forma $y = ax$ obtenemos

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^N \omega_i x_i^2}$$

OBS: en general lo que busca esta técnica es minimizar la suma de los errores al cuadrado.

Forma de Lagrange para interpolación polinomial

Definición

Dado un conjunto de $k + 1$ puntos

$$(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$$

donde todos los x_j se asumen distintos, el **polinomio interpolador en la forma de Lagrange** es la combinación lineal

$$L(x) = \sum_{j=0}^k y_j \ell_j(x)$$

de bases polinómicas de Lagrange

$$\ell_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \dots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \dots \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

Existencia y unicidad del polinomio de interpolación

La función que estamos buscando es una función polinómica $L(x)$ de grado k con

El problema de interpolación puede tener tan solo una solución, pues la diferencia entre dos tales soluciones, sería otro polinomio de grado k a lo sumo, con $k+1$ ceros.

Por lo tanto, $L(x)$ es el único polinomio interpolador.

Si x_0, x_1, \dots, x_n son números reales distintos,

entonces para valores arbitrarios y_0, y_1, \dots, y_n

hay un único polinomio p_n de grado a lo sumo n tal que :

$$p_n(x_i) = y_i \quad 0 \leq i \leq n$$

- $\exists!$ polinomio de interpolación de grado $\leq n$ para una tabla con $(n+1)$ puntos (asumiendo abscisas x_i distintas)
- $\exists n$ diferentes formas de construir este polinomio (\neq s algoritmos). Una alternativa es Lagrange.

El polinomio de Lagrange se escribe como:

$$p(x) = y_0 \alpha_0(x) + y_1 \alpha_1(x) + \dots + y_n \alpha_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \alpha_i(x)$$

Donde $\alpha_i(x)$ con $0 \leq i \leq n$ son polinomios de grado n con la propiedad:

$$\alpha_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Demostración del teorema de existencia y unicidad

a) **UNICIDAD** (por contradicción)

Supongamos que existen dos polinomios distintos $p_n(x)$ y $q_n(x)$.

Entonces, $\text{grado}(p_n(x)) \leq n$ y

$$\text{grado}(q_n(x)) \leq n$$

Si generamos el polinomio diferencia:

$$d_n(x) = p_n(x) - q_n(x)$$

$$\begin{cases} p_n(x_i) = y_i \\ q_n(x_i) = y_i \end{cases} \quad 0 \leq i \leq n$$

$$d_n(x_i) = p_n(x_i) - q_n(x_i) = y_i - y_i = 0$$

x_0, x_1, \dots, x_n son $(n+1)$ raíces del polinomio $d_n(x)$.

$$d_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \cdot z(x)$$

donde

- $\text{grado}(d_n(x)) = n + 1 + \text{grado}(z(x)) \quad (1)$
- ó bien
- $z(x) \equiv 0$

Si se verifica (1)

$$\Rightarrow \text{Como } \text{grado}(z(x)) \geq 0 \Rightarrow \text{grado}(d_n(x)) \geq n+1 \quad (**)$$

Si comparo (*) con (**) $\Rightarrow \exists$ una contradicción Y lo que ocurre es (2)

$$\Rightarrow d_n(x) = 0 \quad \Rightarrow p_n(x) = q_n(x) \text{ CQD.}$$

b) **EXISTENCIA** (por inducción sobre el grado del polinomio)

- Base: $n=0$ (obvia)

$$(x_0, y_0) \rightarrow p_0(x_0) = \text{cte} \quad (\text{grado } 0)$$

$$p_0(x_0) = y_0 \quad \underline{p_0(x_0) = y_0 = \text{cte}}$$

- Hipótesis inductiva:

asumo que

$$\exists p_{k-1}(x) \text{ de grado a lo sumo } (k-1) \quad \text{tal que}$$

$$p_{k-1}(x_i) = y_i \quad 0 \leq i \leq k-1$$

ppq'

$$\exists p_{k-1}(x), \text{ grado } (p_{k-1}(x)) \leq k \text{ tal que}$$

$$p_k(x) = y_i \quad 0 \leq i \leq k-1$$

Construyo:

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$$

Obs: $p_k(x)$ interpola los datos (x_i, y_i) $0 \leq i \leq k-1$ determinemos el coeficiente c de modo tal que $p_k(x_k) = y_k$

Reemplazando queda:

$$p_k(x) = y_k = p_{k-1}(x_k) + c(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})$$

$$\Rightarrow c = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})}$$

Como por hipótesis $x_k \neq y_j \forall k \neq j \Rightarrow$ el polinomio es $\neq 0 \Rightarrow \exists c$

CQD.

Splines

Muy frecuentemente se dispone de una gran cantidad de datos relativos a una función, conocida o no, que se desea aproximar. Las técnicas de interpolación polinómica dan lugar en general a interpolantes que presentan grandes oscilaciones. La interpolación spline desempeña un papel fundamental en el tratamiento de este tipo de problemas. En lo que sigue, nos centraremos principalmente en la interpolación spline cúbica, aunque trataremos primero brevemente la lineal y la cuadrática.

El término "spline" hace referencia a una amplia clase de funciones que son utilizadas en aplicaciones que requieren la interpolación de datos, o un suavizado de curvas. Los splines son utilizados para trabajar tanto en una como en varias dimensiones. Las funciones para la interpolación por splines normalmente se determinan como minimizadores de la aspereza sometidas a una serie de restricciones.

En este artículo nos referiremos con el término "spline" a su versión restringida en una dimensión y polinomial, que es la más comúnmente utilizada.

Interpolación segmentaria lineal

Este es el caso más sencillo. En él, vamos a interpolar una función $f(x)$ de la que se nos dan un número N de pares $(x, f(x))$ por los que tendrá que pasar nuestra función polinómica $P(x)$. Esta serie de funciones nuestras van a ser lineales, esto es, con grado 1: de la forma $P(x) = ax + b$.

Definiremos una de estas funciones por cada par de puntos adyacentes, hasta un total de $(N-1)$ funciones, haciéndolas pasar obligatoriamente por los puntos que van a determinarlas, es decir, la función $P(x)$ será el conjunto de segmentos que unen nodos consecutivos; es por ello que nuestra función será continua en dichos puntos, pero no derivable en general.

Ejemplo : Interpolar con splines $f(x) = 1/x$, en los puntos en los que x vale 1, 2 y 4

- $f(1) = 1$
- $f(2) = 0.5$
- $f(4) = 0.25$

El primer segmento $P_1(x) = ax + b$ deberá unir los primeros dos puntos de coordenadas (1,1) y (2,0.5). Surge un sistema lineal de dos ecuaciones en dos incógnitas:

- $1 = a + b$

- $0.5 = 2a + b$

De (1) se obtiene:

$$a = 1 - b \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2) se obtiene:

$$0.5 = 2(1 - b) + b$$

luego

$$b = 1.5$$

Reemplazando el valor de (b) en (1), se obtiene:

$$a = -0.5$$

Por lo tanto, se concluye que: $P_1(x) = -0.5x + 1.5$ El segundo segmento $P_2(x) = ax + b$ deberá unir el segundo punto (2,0.5) con el tercer punto (4,0.25). Análogamente a lo hecho para $P_1(x)$, en el caso de $P_2(x)$ se obtiene:

1. $(1) \quad 0.5 = 2a + b$

2. $(2) \quad 0.25 = 4a + b$

$$a = -0.125, \quad b = 0.75$$

$$\text{Luego } P_2(x) = -0.125x + 0.75$$

Interpolación segmentaria cuadrática

En este caso, los polinomios $P(x)$ a través de los que construimos el Spline tienen grado 2. Esto quiere decir, que va a tener la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$

Como en la interpolación segmentaria lineal, vamos a tener $N-1$ ecuaciones (donde N son los puntos sobre los que se define la función). La interpolación cuadrática nos va a asegurar que la función que nosotros generemos a trozos con los distintos $P(x)$ va a ser continua, ya que para sacar las condiciones que ajusten el polinomio, vamos a determinar como condiciones:

- Que las partes de la función a trozos $P(x)$ pasen por ese punto. Es decir, que las dos $P_n(x)$ que rodean al $f(x)$ que queremos aproximar, sean igual a $f(x)$ en cada uno de estos puntos.
- Que la derivada en un punto siempre coincida para ambos "lados" de la función definida a trozos que pasa por tal punto común.

Esto sin embargo no es suficiente, y necesitamos una condición más. ¿Por qué?. Tenemos 3 incógnitas por cada $P(x)$. En un caso sencillo con $f(x)$ definida en tres puntos y dos ecuaciones $P(x)$ para aproximarla, vamos a tener seis incógnitas en total. Para resolver esto necesitaríamos seis ecuaciones, pero vamos a tener tan sólo cinco: cuatro que igualan el $P(x)$ con el valor de $f(x)$ en ese punto (dos por cada intervalo), y la quinta al igualar la derivada en el punto común a las dos $P(x)$.

Se necesita una sexta ecuación, ¿de dónde se extrae? Esto suele hacerse con el valor de la derivada en algún punto, al que se fuerza uno de los $P(x)$.

Interpolación segmentaria cúbica

$k = 3$

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \in [t_0, t_1] \\ S_1(x) & x \in [t_1, t_2] \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) & x \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases}$$

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad i = 0, n-1$$

Incognitas (coeficientes)? $4n$

Se necesitan $4n$ ecuaciones

En este caso, cada polinomio $P(x)$ a través del que construimos los Splines en $[m,n]$ tiene grado 3. Esto quiere decir, que va a tener la forma $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

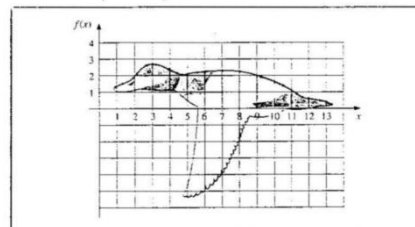
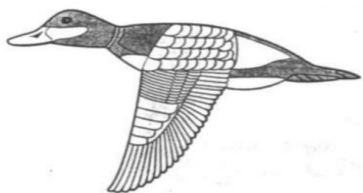
En este caso vamos a tener cuatro variables por cada intervalo (a,b,c,d) , y una nueva condición para cada punto común a dos intervalos, respecto a la derivada segunda:

- Que las partes de la función a trozos $P(x)$ pasen por ese punto. Es decir, que las dos $P_n(x)$ que rodean al $f(x)$ que queremos aproximar, sean igual a $f(x)$ en cada uno de estos puntos.
- Que la derivada en un punto siempre coincida para ambos "lados" de la función definida a trozos que pasa por tal punto común.
- Que la derivada segunda en un punto siempre coincida para ambos "lados" de la función definida a trozos que pasa por tal punto común.

Como puede deducirse al compararlo con el caso de splines cuadráticos, ahora no nos va a faltar una sino dos ecuaciones (condiciones) para el número de incógnitas que tenemos.

La forma de solucionar esto, determina el carácter de los splines cúbicos. Así, podemos usar:

- **Splines cúbicos naturales:** La forma más típica. La derivada segunda de P se hace 0 para el primer y último punto sobre el que está definido el conjunto de Splines, esto son, los puntos m y n en el intervalo $[m,n]$.



- Dar los valores de la derivada segunda de m y n de forma "manual", en el conjunto de splines definidos en el intervalo $[m,n]$.
- Hacer iguales los valores de la derivada segunda de m y n en el conjunto de splines definidos en el intervalo $[m,n]$

- **Splines cúbicos sujetos:** La derivada primera de P debe tener el mismo valor que las derivada primera de la función para el primer y último punto sobre el que está definido el conjunto de Splines, esto son, los puntos m y n en el intervalo [m,n].

Estadística básica

La **Estadística** es la parte de las Matemáticas que se encarga del estudio de una determinada característica en una población, recogiendo los datos, organizándolos en tablas, representándolos gráficamente y analizándolos para sacar conclusiones de dicha población.

Según se haga el estudio sobre todos los elementos de la población o sobre un grupo de ella, vamos a diferenciar dos tipos de Estadística:

Estadística descriptiva. Realiza el estudio sobre la población completa, observando una característica de la misma y calculando unos parámetros que den información global de toda la población.

Estadística inferencial. Realiza el estudio descriptivo sobre un subconjunto de la población llamado muestra y, posteriormente, extiende los resultados obtenidos a toda la población.

Frecuencias

Se llama **frecuencia** a la cantidad de veces que se repite un determinado valor de la variable.

Tipos de frecuencia:

En estadística se pueden distinguir hasta cuatro tipos de frecuencias (véase *fig.1*), estas son:

- **Frecuencia absoluta** Es el promedio de una suma predeterminada y además consiste en saber cual es el número o símbolo de mayor equivalencia. (n_i) de una variable estadística X_i , es el número de veces que este valor aparece en el estudio. A mayor tamaño de la muestra aumentará el tamaño de la frecuencia absoluta; es decir, la suma total de todas las frecuencias absolutas debe dar el total de la muestra estudiada (N).
- **Frecuencia relativa (f_i),** es el cociente entre la frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra (N). Es decir,

$$f_i = \frac{n_i}{N} = \frac{n_i}{\sum_i n_i}$$

siendo el f_i para todo el conjunto i . Se presenta en una tabla o nube de puntos en una distribución de frecuencias.

Si multiplicamos la frecuencia relativa por 100 obtendremos el porcentaje o tanto por ciento (p_i) que presentan esta característica respecto al total de N , es decir el 100% del conjunto.

- **Frecuencia absoluta acumulada (N_i),** es el número de veces n_i en la muestra N con un valor igual o menor al de la variable. La última frecuencia absoluta acumulada deberá ser igual a N .
- **Frecuencia relativa acumulada (F_i),** es el cociente entre la frecuencia absoluta acumulada y el número total de datos, N . Es decir,

$$F_i = \frac{N_i}{N}$$

Con la frecuencia relativa acumulada por 100 se obtiene el *porcentaje acumulado* (P_i), que al igual que F_i deberá de resultar al final el 100% de N .

La representación gráfica de la distribución de frecuencias acumuladas se denomina ojiva. En ella el eje de las abscisas corresponde a los límites de clase y el de las ordenadas a los porcentajes acumulados.

EJEMPLOS

Supongamos que las calificaciones de un alumno de secundaria fueran las siguientes:

18, 13, 12, 14, 11, 08, 12, 15, 05, 20, 18, 14, 15, 11, 10, 10, 11, 13. Entonces:

- La frecuencia absoluta de 11 es 3, pues 11 aparece 3 veces.
- La frecuencia relativa de 11 es 0.17, porque corresponde a la división 3/18.

Centro de una distribución

Formas de medirlo:

- **Moda:** valor mas frecuente.
- **Media:** promedio.
- **Mediana:** es el valor debajo del cual queda la mitad de los valores de la muestra.

¿Cómo calcular la mediana?

Es el valor medio en un conjunto de valores ordenados. Corresponde al percentil 50 o segundo cuartil (P50 o Q2). Los pasos son: 1) Arregla los valores en orden del menor al mayor 2) Cuenta de derecha a izquierda o al revés hasta encontrar el valor o valores medios. Ejemplo: tenemos el siguiente conjunto de números 8,3,7,4,11,2,9,4,10,11,4 ordenamos: 2,3,4,4,4,7,8,9,10,11,11 En esta secuencia la mediana es 7, que es el número central. Y si tuviésemos: 8,3,7,4,11,9,4,10,11,4, entonces ordenamos: 3,4,4,4,7,8,9,10,11,11 y la mediana (M_d) está en: los números centrales son 7 y 8, lo que haces es sumar 7 + 8 y divides entre 2 y $M_d = 7.5$.

Existen dos métodos para el cálculo de la mediana:

1. Considerando los datos en forma individual, sin agruparlos.
2. Utilizando los datos agrupados en intervalos de clase.

A continuación veamos cada una de ellas.

Datos sin agrupar

Sean $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ los datos de una muestra *ordenada en orden creciente* y designando la mediana como M_e , distinguimos dos casos:

a) Si n es *impar*, la mediana es el valor que ocupa la posición $(n + 1)/2$ una vez que los datos han sido ordenados (en orden creciente o decreciente), porque éste es el valor central. Es decir: $M_e = x_{(n+1)/2}$.

Por ejemplo, si tenemos 5 datos, que ordenados son: $x_1 = 3, x_2 = 6, x_3 = 7, x_4 = 8, x_5 = 9 \Rightarrow$ El valor central es el tercero: $x_{(5+1)/2} = x_3 = 7$. Este valor, que es la mediana de ese conjunto de datos, deja dos datos por debajo (x_1, x_2) y otros dos por encima de él (x_4, x_5).

b) Si n es par, la mediana es la media aritmética de los dos valores centrales. Cuando n es par, los dos datos que están en el centro de la muestra ocupan las posiciones $n/2$ y $n/2 + 1$. Es decir: $M_e = (x_{n/2} + x_{n/2+1})/2$.

Por ejemplo, si tenemos 6 datos, que ordenados son: $x_1 = 3, x_2 = 6, x_3 = 7, x_4 = 8, x_5 = 9, x_6 = 10 \Rightarrow$ Hay dos valores que están por debajo del $x_{n/2} = x_3 = 7$ y otros dos que quedan por encima del siguiente dato $x_{n/2+1} = x_4 = 8$. Por tanto, la mediana de este grupo de datos es la media aritmética

de estos dos datos: $M_e = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{7 + 8}{2} = 7,5$.

Datos agrupados

Al tratar con datos agrupados, si $\frac{n}{2}$ coincide con el valor de una frecuencia acumulada, el valor de la mediana coincidirá con la abscisa correspondiente. Si no coincide con el valor de ninguna abscisa, se calcula a través de semejanza de triángulos en el histograma o polígono de frecuencias acumuladas, utilizando la siguiente equivalencia:

$$\frac{N_i - N_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} = \frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}}{p} \Rightarrow p = \frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}}{N_i - N_{i-1}} (a_i - a_{i-1})$$

Donde N_i y N_{i-1} son las frecuencias absolutas acumuladas tales que $N_{i-1} < \frac{n}{2} < N_i$, a_{i-1} y a_i son los extremos, interior y exterior, del intervalo donde se alcanza la mediana y $M_e = a_{i-1} + p$ es la abscisa a calcular, la moda. Se observa que $a_i - a_{i-1}$ es la amplitud de los intervalos seleccionados para el diagrama.

Espacios de probabilidad finita

Sea S un espacio muestral finito, es decir

$$S = \{a_1, a_2, \dots, a_{1n}\}$$

Un espacio de probabilidad finita o modelo de probabilidad finita, se obtiene asignando a cada punto en S un número real p_i , llamado la probabilidad de a_i , que satisface las siguientes propiedades:

- La suma de los p_i , es 1, es decir $\sum p_i = 1$
- Cada p_i es no negativo (puede ser cero)

Función de distribución de probabilidad

Sea X una variable aleatoria discreta cuyos valores suponemos ordenados de menor a mayor. Llamaremos **función de distribución de la variable X** , y escribiremos $F(x)$ a la función:

$$F(x) = p(X \leq x)$$

La función de distribución asocia a cada valor de la variable aleatoria la probabilidad acumulada hasta ese valor.

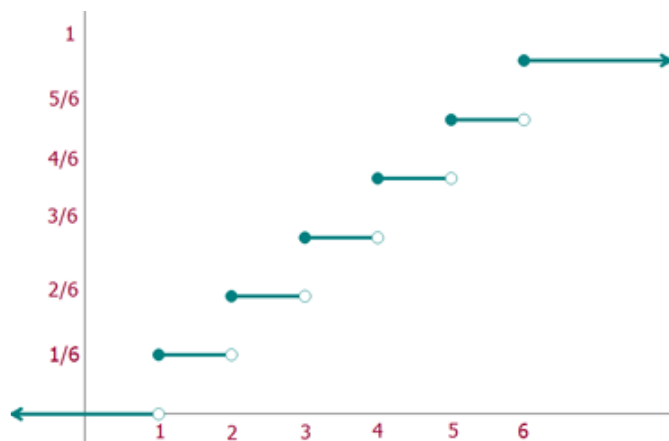
EJEMPLO

Calcular la función de distribución de probabilidad de las puntuaciones obtenidas al lanzar un dado.

x	p_i
$x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	$\frac{1}{6}$
$2 \leq x < 3$	$\frac{2}{6}$
$3 \leq x < 4$	$\frac{3}{6}$
$4 \leq x < 5$	$\frac{4}{6}$
$5 \leq x < 6$	$\frac{5}{6}$
$6 \leq x$	1

Representación

La representación de una **función de distribución de probabilidad** es una gráfica escalonada.



Extensión de una distribución

Amplitud

A= observ. Más grande – observ. Más pequeña.

EJEMPLO: A= 79.5 – 58.5=21

Los extremos pueden ser pocos confiables.

Desviación media absoluta

Su valor se calcula sumando los valores absolutos de los errores individuales del pronóstico y dividiendo entre el número de periodos de datos (n).

$$MAD = \frac{1}{n} \sum |real - pronóstico|$$

Desviación media cuadrática

$$MAD = \frac{1}{n} \sum (real - pronóstico)^2$$

Varianza y desviación estándar

Desviación estándar

La desviación estándar (σ) mide cuánto se separan los datos.

La fórmula es fácil: es la raíz cuadrada de la **varianza**. Así que, "¿qué es la varianza?"

Varianza

la varianza (que es el cuadrado de la desviación estándar: σ^2) se define así:

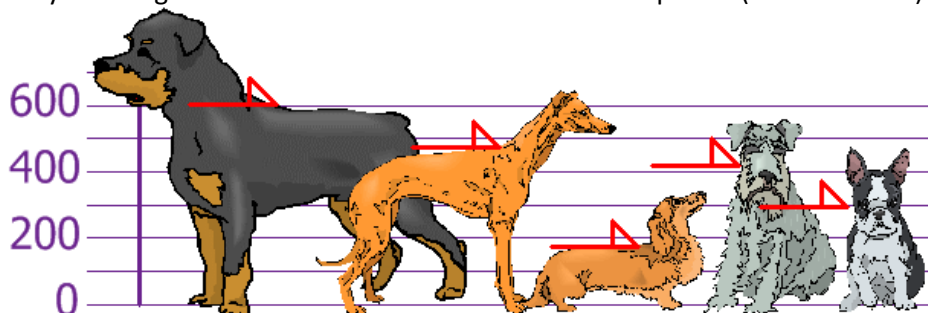
Es la media de las diferencias con la media **elevadas al cuadrado**.

En otras palabras, sigue estos pasos:

1. Calcula la media (el promedio de los números)
2. Ahora, por cada número resta la media y eleva el resultado al cuadrado (la diferencia elevada al cuadrado).
3. Ahora calcula la media de esas diferencias al cuadrado. (¿Por qué al cuadrado?)

EJEMPLO

Tú y tus amigos habéis medido las alturas de vuestros perros (en milímetros):



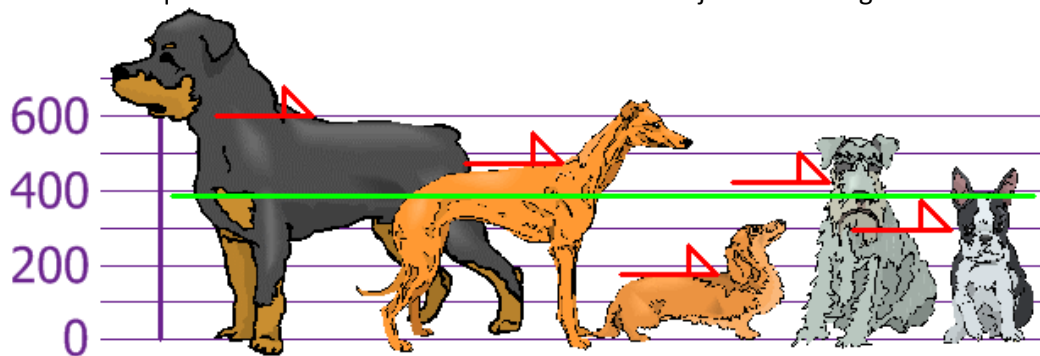
Las alturas (de los hombros) son: 600mm, 470mm, 170mm, 430mm y 300mm.

Calcula la media, la varianza y la desviación estándar.

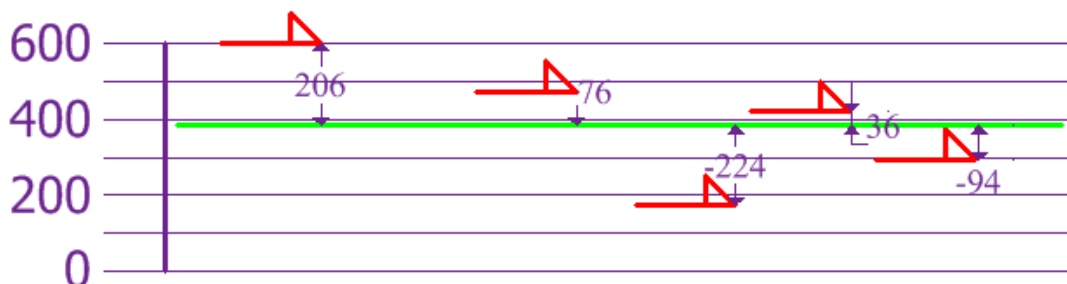
Respuesta:

$$\text{Media} = \frac{600 + 470 + 170 + 430 + 300}{5} = \frac{1970}{5} = 394$$

así que la altura media es 394 mm. Vamos a dibujar esto en el gráfico:



Ahora calculamos la diferencia de cada altura con la media:



Para calcular la varianza, toma cada diferencia, elévala al cuadrado, y haz la media:

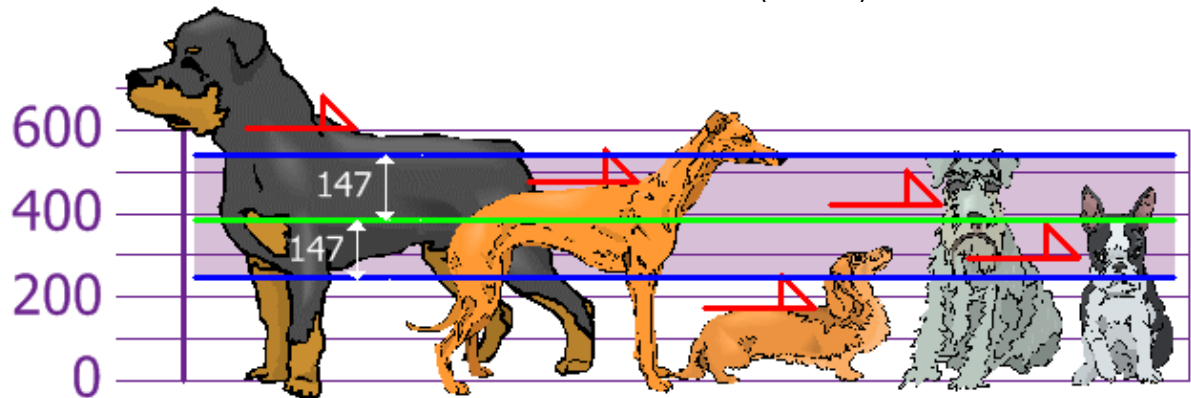
$$\text{Varianza: } \sigma^2 = \frac{206^2 + 76^2 + (-224)^2 + 36^2 + (-94)^2}{5} = \frac{108,520}{5} = 21,704$$

Así que la varianza es 21,704.

Y la desviación estándar es la raíz de la varianza, así que:

$$\text{Desviación estándar: } \sigma = \sqrt{21,704} = 147$$

y lo bueno de la desviación estándar es que es útil: ahora veremos qué alturas están a distancia menos de la desviación estándar (147mm) de la media:



Así que usando la desviación estándar tenemos una manera "estándar" de saber qué es normal, o extra grande o extra pequeño.

Los Rottweilers **son** perros grandes. Y los Dachsunds **son** un poco menudos... ¡pero que no se enteren!

Nota: ¿por qué *al cuadrado*?

Elevar cada diferencia al cuadrado hace que todos los números sean positivos (para evitar que los números negativos reduzcan la varianza)

Y también hacen que las diferencias grandes se destaquen. Por ejemplo $100^2=10,000$ es mucho más grande que $50^2=2,500$.

Pero elevarlas al cuadrado hace que la respuesta sea muy grande, así que lo deshacemos (con la raíz cuadrada) y así la desviación estándar es mucho más útil.

Probabilidad

Experimento aleatorio

Aquellos fenómenos con las siguientes propiedades

- No se conoce a priori el resultado.
- No se conocen todos los resultados posibles.
- Se lo puede repetir bajo las mismas condiciones.

EJEMPLOS:

- Sacar cartas de un mazo.
- Tirar una moneda.
- Arrojar un dado.

Espacio muestral

Se denomina al conjunto de todos los posibles resultados de un fenómeno aleatorio.

Se lo nota con la letra Ω .

EJEMPLO:

Se tiran dos monedas: $\Omega = \{(C, C); (C, K); (K, C); (K, K)\}$

Eventos

- Cada subconjunto del espacio muestral (del conjunto de resultados) se denomina evento.
- Si el evento consta de un solo elemento de Ω se lo denomina evento elemental o punto muestral.
- Si consta de mas elementos recibe el nombre de evento compuesto.
- Ω se lo llama evento seguro.
- Al evento que no contiene ningún punto muestral se lo llama evento imposible \emptyset .

Definición de probabilidad

Supongamos tener un Ω con un número finito de eventos simples, igualmente posibles.

Llamaremos **probabilidad** de un evento A al cociente entre el número de eventos simples contenidos en A sobre el número total de eventos simples.

$$P(A) = n_A/n$$

Propiedades

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(\emptyset) = 0$
4. La probabilidad de un evento A es igual a uno menos la probabilidad de su complementario.

Diremos que dos eventos A y B son mutuamente excluyentes o incompatibles cuando la ocurrencia de uno excluye la ocurrencia del otro. Si A y B son mutuamente excluyentes entonces: $P(A \cap B) = 0$.

TEOREMA de la probabilidad total: Sean A y B dos eventos cualesquiera pertenecientes al espacio muestral Ω entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Particiones

Una partición de un espacio muestral S es una colección de sucesos mutuamente excluyentes $\{I_0 \dots I_n\}$, cuya unión es la totalidad del espacio muestral $S \quad I_0 \cup I_1 \cup I_2 \dots \cup I_n = S$.

Probabilidad condicional

Llamaremos probabilidad condicional $P(B/A)$ a la probabilidad de B habiendo ocurrido A. Como se sabe que A ha ocurrido, ella se vuelve el nuevo espacio muestral, reemplazando el S original.

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

Independencia

Diremos que dos eventos A y B son independientes cuando la ocurrencia de uno no tiene ningún efecto sobre la probabilidad de ocurrencia del otro y viceversa.

$$P(A/B)=P(A)$$

$$P(B/A)=P(B)$$

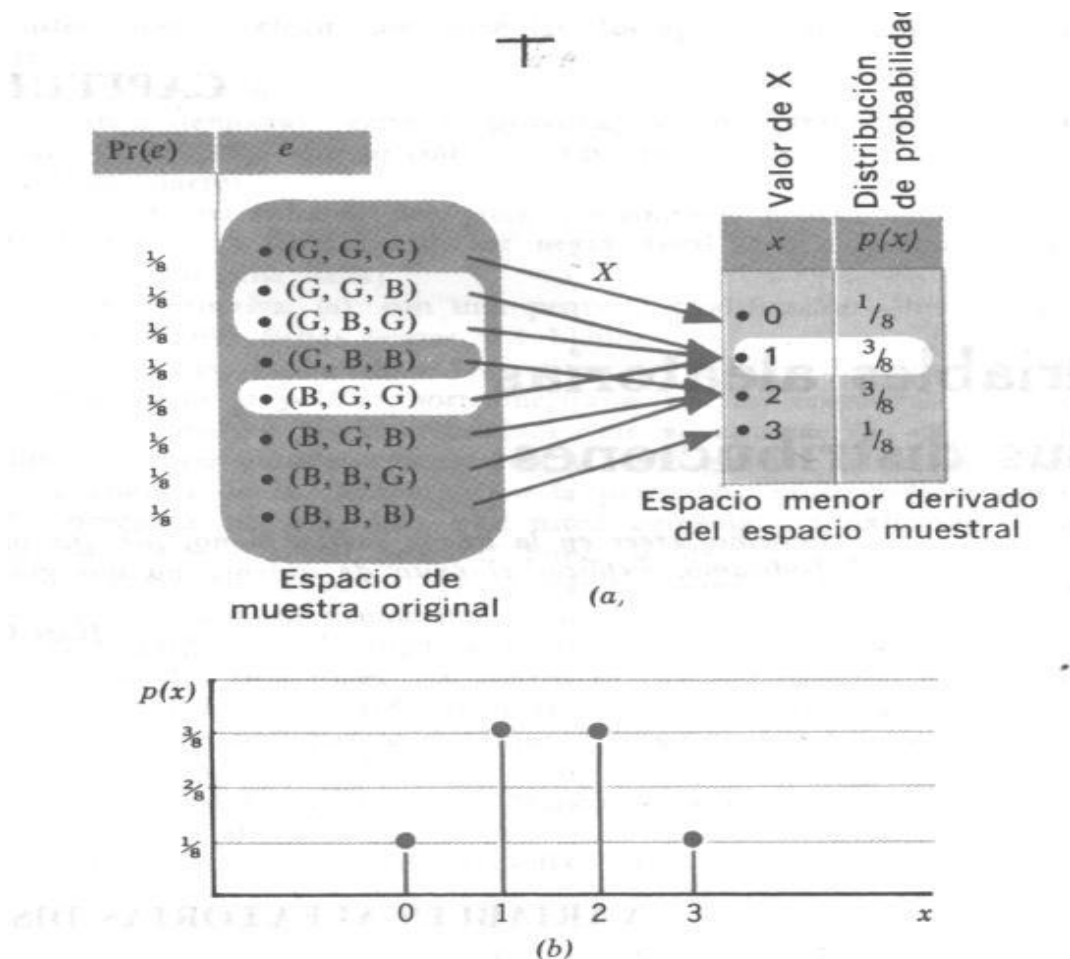
Variables aleatorias y sus distribuciones

Características

- Una variable aleatoria es una función con valores numéricos y definida sobre un espacio muestral
- Una variable aleatoria discreta toma diversos valores con probabilidades especificadas por su distribución de probabilidad
- Utilidad de una v.a.: reduce el espacio de muestra a uno más fácil de manejar
- Ejemplo: En una familia de 3 hijos, cuál es la probabilidad de que haya un varón o menos?

$$\Pr(X \leq 1) = p(0) + p(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

a) Variable aleatoria X= "Cantidad de varones"



(a) La variable aleatoria $X =$ "cantidad de varones". (b) Diagrama de la distribución de probabilidad.

b) Diagrama de su distribución de probabilidad

Variable aleatoria

- Frecuentemente interesa conocer más que el resultado de un experimento aleatorio, una función de dicho resultado.
- *Una variable aleatoria es una función con valores numéricos y definida sobre un espacio muestral*
- Si lanzamos al aire tres monedas, podemos definir la función como X:
- X: número de caras que resultan del experimento.
- Hemos definido una función del espacio muestral en la recta. Tales funciones X, cuyos valores dependen del resultado de un experimento aleatorio se llaman variables aleatorias.
- Si toma ciertos valores aislados de un intervalo, es v.a. discreta, sino continua.
- La distribución se puede representar como:
 - Tabla
 - Diagrama
 - Fórmula

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria X es el conjunto de sus posibles valores numéricos x_1, x_2, \dots, x_n y las probabilidades correspondientes P_i , $i=1, 2, \dots, n$ tal que:

$$p(x_i) \geq 0, \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

La colección de pares $(x_i, p(x_i))$ es llamada distribución de probabilidad.

Media y varianza

- Si el tamaño de la muestra aumentara ilimitadamente, la distribución de frecuencia relativa se fijaría en la distribución de probabilidad.
- A partir de la distribución de frecuencia relativa, se puede calcular la media y la varianza de la muestra.
- Es natural que a partir de la distribución de probabilidad se calculen los valores análogos con las siguientes definiciones:

Media de población

$$\mu \equiv \sum_x x p(x)$$

Varianza

$$\sigma^2 \equiv \sum_x (x - \mu)^2 p(x)$$

Se simplifica como :

$$\sigma^2 = \sum_x x^2 p(x) - \mu^2$$

Función de densidad de probabilidad

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X se denota como:

$$f_X(x)$$

Se define de modo tal que:

$$f_X(x)\Delta x$$

Representa la probabilidad de ocurrencia de X en el intervalo:

$$\left[x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2} \right]$$

Para una variable aleatoria:

$$f_X(x_i) = P[X = x_i]$$

Propiedades

$$f_X(x_i) \geq 0$$

$$\sum_i f_X(x_i) = 1$$

Esperanza de una variable aleatoria

Sea X una V.A. continua que toma los valores x_1, x_2, \dots, x_n con f.d. $f_X(x_i)$, entonces:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i f_X(x_i)$$

Si X es una V.A continua entonces:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X f_X(x) dx$$

E(X) también se la conoce como media de X, o media de la población y se la nota $E(X)=\mu$

Varianza de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f_X(x)$, definimos varianza de X:

$$\sigma^2 = E[(X - E(X))^2] = E[(X - \mu)^2]$$

Si X es una variable discreta

$$Var(X) = \sum_{-\infty < X < \infty} (x_i - \mu)^2 f_X(x_i)$$

Si X es una variable continua

$$Var(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \mu)^2 f_X(x) dx$$

La varianza sigma cuadrado es una medida de dispersión de los valores de la variable aleatoria con respecto a su centro de gravedad μ .

Consideremos una variable aleatoria con la siguiente distribución de probabilidad.

x	6	7	8
F(x)	0.4	0.4	0.2

$$E(X)=6*0.4+7*0.4+8*0.2=6.8$$

$$\text{Var}(X)=(6-6.8)^2*0.4+(7-6.8)^2*0.4+(8-6.8)^2*0.2=0.56$$

Distribución de probabilidad

En teoría de la probabilidad y estadística, la **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria es una función que asigna a cada suceso definido sobre la variable aleatoria la probabilidad de que dicho suceso ocurra. La distribución de probabilidad está definida sobre el conjunto de todos los sucesos, cada uno de los sucesos es el rango de valores de la variable aleatoria.

La distribución de probabilidad está completamente especificada por la **función de distribución**, cuyo valor en cada real x es la probabilidad de que la variable aleatoria sea menor o igual que x .

Definición de función de distribución

Dada una variable aleatoria X , su **función de distribución**, $F_X(x)$, es

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Por simplicidad, cuando no hay lugar a confusión, suele omitirse el subíndice X y se escribe, simplemente, $F(x)$.

Propiedades

Como consecuencia casi inmediata de la definición, la función de distribución:

- Es una función continua por la derecha.
- Es una función monótona no decreciente.

Además, cumple

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

y

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

Para dos números reales cualesquiera a y b tal que $(a < b)$, los sucesos $(X \leq a)$ y $(a < X \leq b)$ son mutuamente excluyentes y su unión es el suceso $(X \leq b)$, por lo que tenemos entonces que:

$$P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$$

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

y finalmente

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Por lo tanto una vez conocida la función de distribución $F(x)$ para todos los valores de la variable aleatoria X conoceremos completamente la distribución de probabilidad de la variable.

Para realizar cálculos es más cómodo conocer la distribución de probabilidad, y sin embargo para ver una representación gráfica de la probabilidad es más práctico el uso de la función de densidad.

Distribuciones de variables discretas

Se denomina distribución de variable discreta a aquella cuya función de probabilidad sólo toma valores positivos en un conjunto de valores de X finito o infinito numerable. A dicha función se le llama función de masa de probabilidad. En este caso la distribución de probabilidad es la suma de la función de masa, por lo que tenemos entonces que:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=-\infty}^x f(k)$$

Y, tal como corresponde a la definición de distribución de probabilidad, esta expresión representa la suma de todas las probabilidades desde $-\infty$ hasta el valor x .

Distribución binomial

En estadística, la **distribución binomial** es una distribución de probabilidad discreta que mide el número de éxitos en una secuencia de n ensayos de Bernoulli independientes entre sí, con una probabilidad fija p de ocurrencia del éxito entre los ensayos.

Un experimento de Bernoulli se caracteriza por ser dicotómico, esto es, sólo son posibles dos resultados. A uno de estos se denomina éxito y tiene una probabilidad de ocurrencia p y al otro, fracaso, con una probabilidad $q = 1 - p$. En la distribución binomial el anterior experimento se repite n veces, de forma independiente, y se trata de calcular la probabilidad de un determinado número de éxitos. Para $n = 1$, la binomial se convierte, de hecho, en una distribución de Bernoulli.

Para representar que una variable aleatoria X sigue una distribución binomial de parámetros n y p , se escribe:

$$X \sim B(n, p)$$

La distribución binomial es la base del test binomial de significación estadística.

EJEMPLOS

Las siguientes situaciones son ejemplos de experimentos que pueden modelizarse por esta distribución:

- Se lanza un dado diez veces y se cuenta el número X de treses obtenidos: entonces $X \sim B(10, 1/6)$
- Se lanza una moneda dos veces y se cuenta el número X de caras obtenidas: entonces $X \sim B(2, 1/2)$

- Una partícula se mueve unidimensionalmente con probabilidad q de moverse de aquí para allá y $1-q$ de moverse de allá para acá

EXPERIMENTO BINOMIAL

Existen muchas situaciones en las que se presenta una experiencia binomial. Cada uno de los experimentos es independiente de los restantes (la probabilidad del resultado de un experimento no depende del resultado del resto). El resultado de cada experimento ha de admitir sólo dos categorías (a las que se denomina éxito y fracaso). Las probabilidades de ambas posibilidades han de ser constantes en todos los experimentos (se denotan como p y q o p y $1-p$).

Se designa por X a la variable que mide el número de éxitos que se han producido en los n experimentos.

Quando se dan estas circunstancias, se dice que la variable X sigue una distribución de probabilidad binomial, y se denota $B(n, p)$.

CARACTERISTICAS ANALITICAS

Su función de probabilidad es

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

donde $x = \{0, 1, 2, \dots, n\}$,

siendo $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ las combinaciones de n en x (n elementos tomados de x en x)

Ejemplo

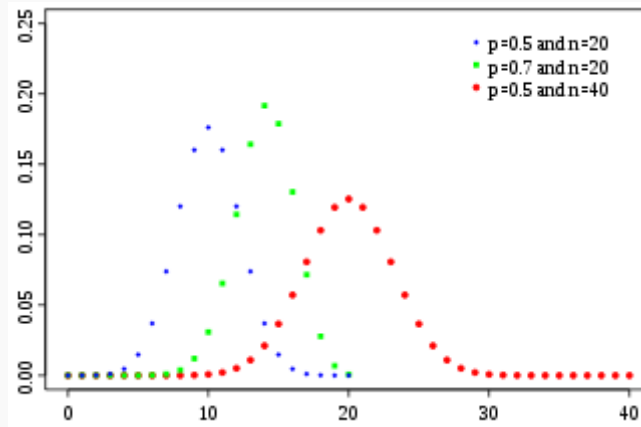
Supongamos que se lanza un dado 50 veces y queremos la probabilidad de que el número 3 salga 20 veces. En este caso tenemos una $X \sim B(50, 1/6)$ y la probabilidad sería $P(X=20)$:

$$P(X = 20) = \binom{50}{20} (1/6)^{20} (1 - 1/6)^{50-20}$$

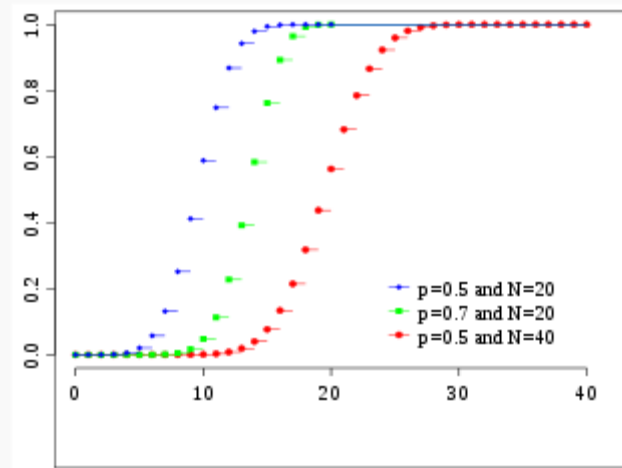
PROPIEDADES

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= np \\ \mathbb{V}\text{ar}[X] &= np(1-p) \end{aligned}$$

Distribución binomial



Función de probabilidad



Función de distribución de probabilidad

Parámetros

$$n \geq 0 \text{ número de ensayos } (\text{entero})$$

$$0 \leq p \leq 1 \text{ probabilidad de éxito } (\text{real})$$

Dominio

$$k \in \{0, \dots, n\}$$

Función de probabilidad(fp)

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Función de distribución(cdf)

$$I_{1-p}(n - \lfloor k \rfloor, 1 + \lfloor k \rfloor)$$

Media

$$np$$

<u>Mediana</u>	Uno de $\{\lfloor np \rfloor, \lceil np \rceil\}_1$
<u>Moda</u>	$\lfloor (n + 1)p \rfloor$
<u>Varianza</u>	$np(1 - p)$
<u>Coefficiente de simetría</u>	$\frac{1 - 2p}{\sqrt{np(1 - p)}}$
<u>Curtosis</u>	$\frac{1 - 6p(1 - p)}{np(1 - p)}$
<u>Entropía</u>	$\frac{1}{2} \ln(2\pi nep(1 - p)) + O\left(\frac{1}{n}\right)$
<u>Función generadora de momentos(mgf)</u>	$(1 - p + pe^t)^n$
<u>Función característica</u>	$(1 - p + pe^{it})^n$

Distribución de Poisson

En teoría de probabilidad y estadística, la **distribución de Poisson** es una distribución de probabilidad discreta que expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media, la probabilidad que ocurra un determinado número de eventos durante cierto periodo de tiempo.

PROPIEDADES

La función de masa de la distribución de Poisson es

$$f(k; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!},$$

donde

- k es el número de ocurrencias del evento o fenómeno (la función nos da la probabilidad de que el evento suceda precisamente k veces).
- λ es un parámetro positivo que representa el número de veces que se espera que ocurra el fenómeno durante un intervalo dado. Por ejemplo, si el suceso estudiado tiene lugar en promedio 4 veces por minuto y estamos interesados en la probabilidad

de que ocurra k veces dentro de un intervalo de 10 minutos, usaremos un modelo de distribución de Poisson con $\lambda = 10 \times 4 = 40$.

- e es la base de los logaritmos naturales ($e = 2,71828\dots$)

Tanto el valor esperado como la varianza de una variable aleatoria con distribución de Poisson son iguales a λ . Los momentos de orden superior son polinomios de Touchard en λ cuyos coeficientes tienen una interpretación combinatorio. De hecho, cuando el valor esperado de la distribución de Poisson es 1, entonces según la fórmula de Dobinski, el n -ésimo momento iguala al número de particiones de tamaño n .

La moda de una variable aleatoria de distribución de Poisson con un λ no entero es igual a $\lfloor \lambda \rfloor$, el mayor de los enteros menores que λ (los símbolos $\lfloor \cdot \rfloor$ representan la función parte entera). Cuando λ es un entero positivo, las modas son λ y $\lambda - 1$.

La función generadora de momentos de la distribución de Poisson con valor esperado λ es

$$E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} f(k; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

Las variables aleatorias de Poisson tienen la propiedad de ser infinitamente divisibles.

La divergencia Kullback-Leibler desde una variable aleatoria de Poisson de parámetro λ_0 a otra de parámetro λ es

$$D_{KL}(\lambda || \lambda_0) = \lambda \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} + \frac{\lambda_0}{\lambda} \log \frac{\lambda_0}{\lambda} \right).$$

EJEMPLO

Si el 2% de los libros encuadernados en cierto taller tiene encuadernación defectuosa, para obtener la probabilidad de que 5 de 400 libros encuadernados en este taller tengan encuadernaciones defectuosas usamos la distribución de Poisson. En este caso concreto, k es 5 y λ , el valor esperado de libros defectuosos es el 2% de 400, es decir, 8. Por lo tanto, la probabilidad buscada es

$$P(5; 8) = \frac{8^5 e^{-8}}{5!} = 0,092.$$

Este problema también podría resolverse recurriendo a una distribución binomial de parámetros $k = 5$, $n = 400$ y $\theta = 0,02$.

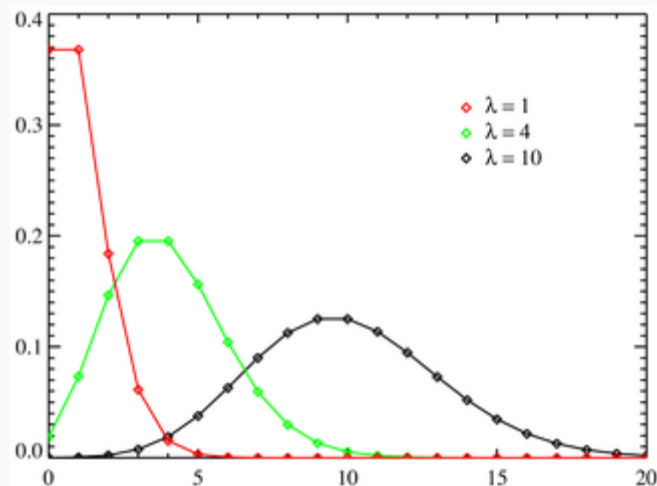
PROCESOS DE POISSON

La distribución de Poisson se aplica a varios fenómenos discretos de la naturaleza (esto es, aquellos fenómenos que ocurren 0, 1, 2, 3,... veces durante un periodo definido de tiempo o en un área determinada) cuando la probabilidad de ocurrencia del fenómeno es constante en el tiempo o el espacio. Ejemplos de estos eventos que pueden ser modelados por la distribución de Poisson incluyen:

- El número de autos que pasan a través de un cierto punto en una ruta (suficientemente distantes de los semáforos) durante un periodo definido de tiempo.
- El número de errores de ortografía que uno comete al escribir una única página.
- El número de llamadas telefónicas en una central telefónica por minuto.
- El número de servidores web accedidos por minuto.
- El número de animales muertos encontrados por unidad de longitud de ruta.

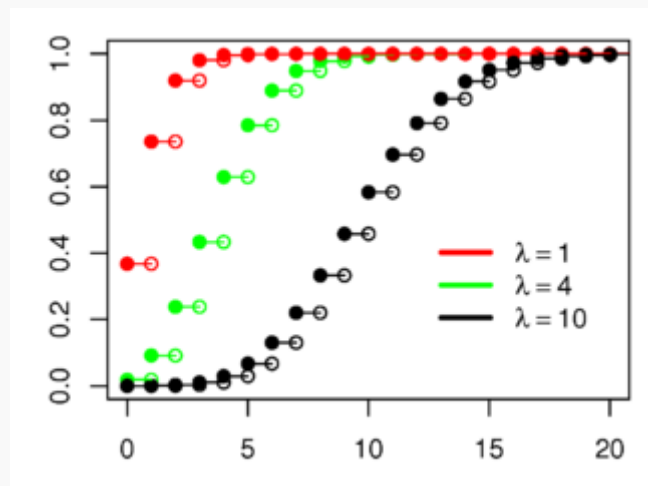
- El número de mutaciones de determinada cadena de ADN después de cierta cantidad de radiación.
- El número de núcleos atómicos inestables que decayeron en un determinado período
- El número de estrellas en un determinado volumen de espacio.
- La distribución de receptores visuales en la retina del ojo humano.
- La inventiva de un inventor a lo largo de su carrera.

Distribución de Poisson



El eje horizontal es el índice k . La función solamente está definida en valores enteros de k . Las líneas que conectan los puntos son solo guías para el ojo y no indican continuidad.

Función de probabilidad



El eje horizontal es el índice k .

Función de distribución de probabilidad

Parámetros

$$\lambda \in (0, \infty)$$

<u>Dominio</u>	$k \in \{0, 1, 2, \dots\}$
<u>Función de probabilidad</u> (fp)	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$
<u>Función de distribución</u> (cdf)	$\frac{\Gamma(\lfloor k + 1 \rfloor, \lambda)}{\lfloor k \rfloor!}$ for $k \geq 0$ (dónde $\Gamma(x, y)$ es la <u>Función gamma incompleta</u>)
<u>Media</u>	λ
<u>Mediana</u>	usualmente cerca de $\lfloor \lambda + 1/3 - 0.02/\lambda \rfloor$
<u>Moda</u>	$\lfloor \lambda \rfloor - 1$
<u>Varianza</u>	λ
<u>Coeficiente de simetría</u>	$\lambda^{-1/2}$
<u>Curtosis</u>	$3 + \lambda^{-1}$
<u>Entropía</u>	$\lambda[1 - \ln(\lambda)] + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \ln(k!)}{k!}$
<u>Función generadora de momentos</u> (mgf)	$\exp(\lambda(e^t - 1))$
<u>Función característica</u>	$\exp(\lambda(e^{it} - 1))$

Distribución geométrica

En teoría de probabilidad y estadística, la **distribución geométrica** es cualquiera de las dos distribuciones de probabilidad discretas siguientes:

- la distribución de probabilidad del número X del ensayo de Bernoulli necesaria para obtener un éxito, contenido en el conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$ o

- la distribución de probabilidad del número $Y = X - 1$ de fallos antes del primer éxito, contenido en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Cual de éstas es la que uno llama "la" distribución geométrica, es una cuestión de convención y conveniencia.

PROPIEDADES

Si la probabilidad de éxito en cada ensayo es p , entonces la probabilidad de que x ensayos sean necesarios para obtener un éxito es

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1}p$$

para $x = 1, 2, 3, \dots$. Equivalentemente, la probabilidad de que haya x fallos antes del primer éxito es

$$P(Y = x) = (1 - p)^x p$$

para $x = 0, 1, 2, 3, \dots$.

En ambos casos, la secuencia de probabilidades es una progresión geométrica.

El valor esperado de una variable aleatoria X distribuida geoméricamente es

$$E(X) = \frac{1}{p}.$$

y dado que $Y = X - 1$,

$$E(Y) = \frac{1 - p}{p}.$$

En ambos casos, la varianza es

$$\text{var}(Y) = \text{var}(X) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

Las funciones generatrices de probabilidad de X y la de Y son, respectivamente,

$$G_X(s) = \frac{sp}{1 - s(1 - p)} \quad \text{y} \quad G_Y(s) = \frac{p}{1 - s(1 - p)}, \quad |s| < (1 - p)^{-1}.$$

Como su análoga continua, la distribución exponencial, la distribución geométrica carece de memoria. Esto significa que si intentamos repetir el experimento hasta el primer éxito, entonces, dado que el primer éxito todavía no ha ocurrido, la distribución de probabilidad condicional del número de ensayos adicionales no depende de cuantos fallos se hayan observado. El dado o la moneda que uno lanza no tiene "memoria" de estos fallos. La distribución geométrica es de hecho la única distribución discreta sin memoria.

De todas estas distribuciones de probabilidad contenidas en $\{1, 2, 3, \dots\}$ con un valor esperado dado μ , la distribución geométrica X con parámetro $p = 1/\mu$ es la de mayor entropía.

La distribución geométrica del número y de fallos antes del primer éxito es infinitamente divisible, esto es, para cualquier entero positivo n , existen variables aleatorias independientes Y_1, \dots, Y_n distribuidas idénticamente la suma de las cuales tiene la misma distribución que tiene Y . Estas no serán geoméricamente distribuidas a menos que $n = 1$.

Distribución de Bernoulli

En teoría de probabilidad y estadística, la **distribución de Bernoulli** (o distribución dicotómica), nombrada así por el matemático y científico suizo Jakob Bernoulli, es una distribución de probabilidad discreta, que toma valor 1 para la probabilidad de éxito (P) y valor 0 para la probabilidad de fracaso ($q = 1 - p$).

Si X es una variable aleatoria que mide "número de éxitos", y se realiza **un único experimento** con **dos posibles resultados** (éxito o fracaso), se dice que la variable aleatoria X se distribuye como una Bernoulli de parámetro P .

$$X \sim Be(p)$$

La fórmula será:

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x} \quad \text{con } x = \{0, 1\}$$

Su función de distribución viene definida por:

$$f(x; p) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1, \\ q & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Un experimento al cual se aplica la distribución de Bernoulli se conoce como Ensayo de Bernoulli o simplemente **ensayo**, y la serie de esos experimentos como **ensayos repetidos**.

PROPIEDADES CARACTERISTICAS

Esperanza matemática:

$$E[X] = p = u$$

Varianza:

$$\text{var}[X] = p(1-p) = pq$$

Función generatriz de momentos:

$$(q + pe^t)$$

Función característica:

$$(q + pe^{it})$$

Moda:

0 si $q > p$ (hay más fracasos que éxitos)

1 si $q < p$ (hay más éxitos que fracasos)

0 y 1 si $q = p$ (los dos valores, pues hay igual número de fracasos que de éxitos)

Asimetría (Sesgo):

$$\gamma_1 = \frac{q - p}{\sqrt{qp}}$$

Curtosis:

$$\gamma_2 = \frac{6p^2 - 6p + 1}{p(1-p)}$$

La Curtosis tiende a infinito para valores de p cercanos a 0 ó a 1, pero para $p = \frac{1}{2}$ la distribución de Bernoulli tiene un valor de curtosis menor que el de cualquier otra distribución, igual a -2.

EJEMPLO

"Lanzar una moneda, probabilidad de conseguir que salga cruz".

Se trata de un solo experimento, con dos resultados posibles: el éxito (p) se considerará sacar cruz. Valdrá 0,5. El fracaso (q) que saliera cara, que vale $(1 - p) = 1 - 0,5 = 0,5$.

La variable aleatoria X medirá "número de cruces que salen en un lanzamiento", y sólo existirán dos resultados posibles: 0 (ninguna cruz, es decir, salir cara) y 1 (una cruz).

Por tanto, la v.a. X se distribuirá como una Bernoulli, ya que cumple todos los requisitos.

$$X \sim Be(0, 5)$$

$$P(X = 0) = f(0) = 0,5^0 0,5^1 = 0,5$$

$$P(X = 1) = f(1) = 0,5^1 0,5^0 = 0,5$$

Distribución uniforme discreta

En teoría de la probabilidad, la **distribución uniforme discreta** es una distribución de probabilidad que asume un número finito de valores con la misma probabilidad.

PROPIEDADES

Si la distribución asume los valores reales $x_1, x_2 \dots x_n$, su función de probabilidad es

$$p(x_i) = \frac{1}{n}$$

y su función de distribución la función escalonada

$$F(x) = \frac{1}{n} \sum_i 1_{(-\infty, x]}(x_i).$$

Su media estadística es

$$\mu = \sum_i x_i / n$$

y su varianza

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 / n$$

EJEMPLOS

- Para un dado perfecto, todos los resultados tienen la misma probabilidad 1/6. Luego, la probabilidad de que al lanzarlo caiga 4 es 1/6.

- Para una moneda perfecta, todos los resultados tienen la misma probabilidad 1/2. Luego, la probabilidad de que al lanzarla caiga cara es 1/2.

Distribuciones de variable continua

Se denomina variable continua a aquella que puede tomar cualquiera de los infinitos valores existentes dentro de un intervalo. En el caso de variable continua la distribución de probabilidad es la integral de la función de densidad, por lo que tenemos entonces que:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Distribución χ^2

En estadística, la **distribución χ^2 (de Pearson)**, llamada Chi cuadrado o Ji cuadrado, es una distribución de probabilidad continua con un parámetro k que representa los grados de libertad de la variable aleatoria

$$X = Z_1^2 + \dots + Z_k^2$$

donde Z_i son variables aleatorias normales independientes de media cero y varianza uno. El que la variable aleatoria X tenga esta distribución se representa habitualmente así: $X \sim \chi_k^2$.

Es conveniente tener en cuenta que la letra griega χ se transcribe al [latín](#) como *chi*¹ y se pronuncia en castellano como *ji*

PROPIEDADES

Su función de densidad es:

$$f(x; k) = \begin{cases} \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{(k/2)-1} e^{-x/2} & \text{para } x \geq 0, \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

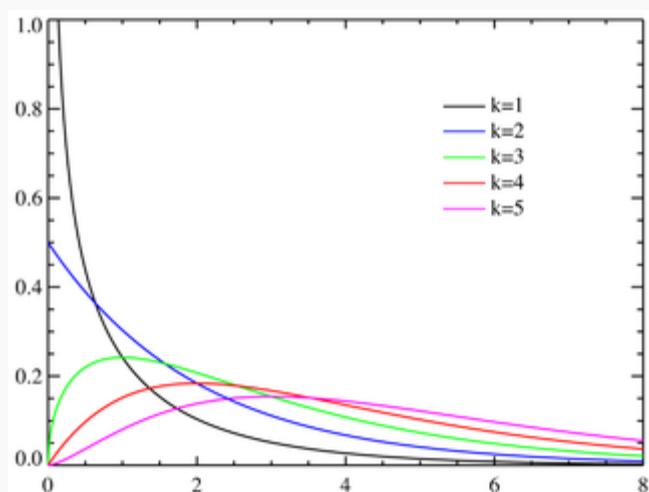
donde Γ es la función gamma.

APLICACIONES

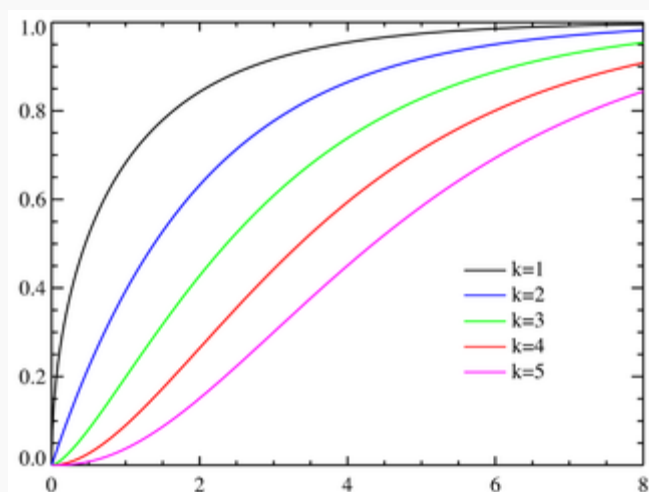
La distribución χ^2 tiene muchas aplicaciones en inferencia estadística. La más conocida es la de la denominada prueba χ^2 utilizada como prueba de independencia y como prueba de bondad de ajuste y en la estimación de varianzas. Pero también está involucrada en el problema de estimar la media de una población normalmente distribuida y en el problema de estimar la pendiente de una recta de regresión lineal, a través de su papel en la distribución t de Student.

Aparece también en todos los problemas de análisis de varianza por su relación con la distribución F de Snedecor, que es la distribución del cociente de dos variables aleatorias independientes con distribución χ^2

Distribución χ^2 (ji-cuadrado)



Función de densidad de probabilidad



Función de distribución de probabilidad

Parámetros $k > 0$ grados de libertad

Dominio $x \in [0; +\infty)$

Función de densidad(pdf) $\frac{(1/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}$

Función de distribución(cdf) $\frac{\Gamma(k/2, x/2)}{\Gamma(k/2)}$

<u>Media</u>	k
<u>Mediana</u>	aproximadamente $k - 2/3$
<u>Moda</u>	$k - 2$ if $k \geq 2$
<u>Varianza</u>	$2k$
<u>Coeficiente de simetría</u>	$\sqrt{8/k}$
<u>Curtosis</u>	$12/k$
<u>Entropía</u>	$\frac{k}{2} + \ln(2\Gamma(k/2)) + (1 - k/2)\psi(k/2)$
<u>Función generadora de momentos(mgf)</u>	$(1 - 2t)^{-k/2}$ for $2t < 1$
<u>Función característica</u>	$(1 - 2it)^{-k/2}$

Distribución exponencial

En estadística la **distribución exponencial** es una distribución de probabilidad continua con un parámetro $\lambda > 0$ cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Su función de distribución es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

Donde e representa el número e.

El valor esperado y la varianza de una variable aleatoria X con distribución exponencial son:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

La distribución exponencial es un caso particular de distribución gamma con $k = 1$. Además la suma de variables aleatorias que siguen una misma distribución exponencial es una variable aleatoria expresable en términos de la distribución gamma.

EJEMPLO

Ejemplos para la distribución exponencial es la distribución de la longitud de los intervalos de variable continua que transcurren entre la ocurrencia de dos sucesos "raros", que se distribuyen según la distribución de Poisson.

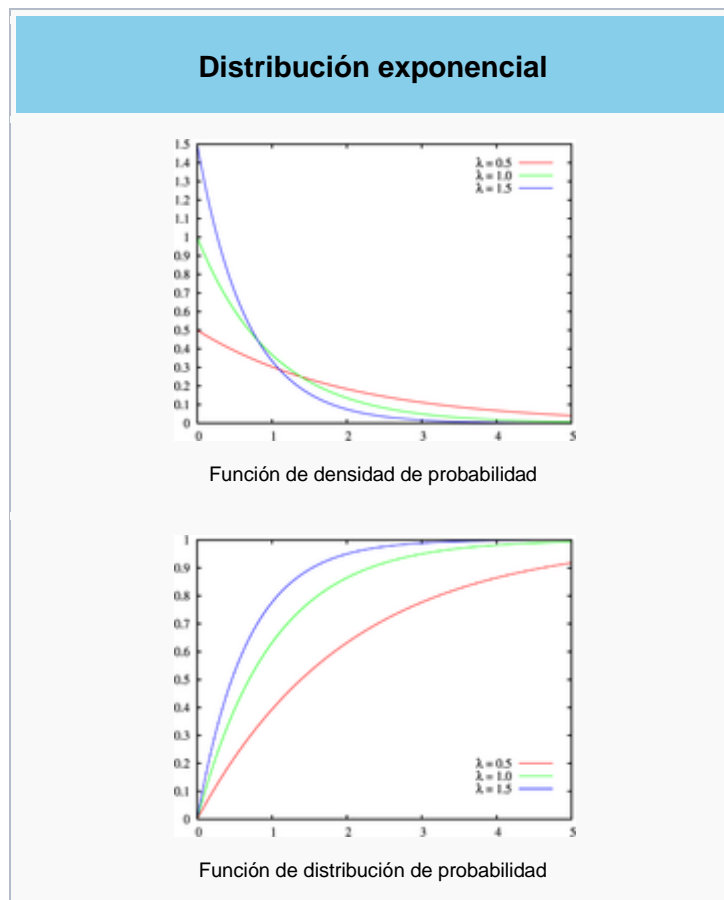
CALCULAR VARIABLES ALEATORIAS

Se pueden calcular una variable aleatoria de distribución exponencial x por medio de una variable aleatoria de distribución uniforme $u = U(0, 1)$:

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u)$$

o, dado que $(1 - u)$ es también una variable aleatoria con distribución $U(0, 1)$, puede utilizarse la versión más eficiente:

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(u)$$



Parámetros	$\lambda > 0$
<u>Dominio</u>	$[0, \infty)$
<u>Función de densidad</u> (pdf)	$\lambda e^{-\lambda x}$
<u>Función de distribución</u>(cdf)	$1 - e^{-\lambda x}$
<u>Media</u>	$1/\lambda$
<u>Mediana</u>	$\ln(2)/\lambda$
<u>Moda</u>	0
<u>Varianza</u>	$1/\lambda^2$
<u>Coefficiente de simetría</u>	2
<u>Curtosis</u>	9
<u>Entropía</u>	$1 - \ln(\lambda)$
<u>Función generadora de momentos</u> (mgf)	$\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$
<u>Función característica</u>	$\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$

Distribución normal

En estadística y probabilidad se llama **distribución normal, distribución de Gauss o distribución gaussiana**, a una de las distribuciones de probabilidad de variable continua que con más frecuencia aparece aproximada en fenómenos reales.

La gráfica de su función de densidad tiene una forma acampanada y es simétrica respecto de un determinado parámetro estadístico. Esta curva se conoce como campana de Gauss y es el gráfico de una función gaussiana.

La importancia de esta distribución radica en que permite modelar numerosos fenómenos naturales, sociales y psicológicos. Mientras que los mecanismos que subyacen a gran parte de este tipo de fenómenos son desconocidos, por la enorme cantidad de variables incontrolables

que en ellos intervienen, el uso del modelo normal puede justificarse asumiendo que cada observación se obtiene como la suma de unas pocas causas independientes.

De hecho, la estadística es un modelo matemático que sólo permite describir un fenómeno, sin explicación alguna. Para la explicación causal es preciso el *diseño experimental*, de ahí que al uso de la estadística en psicología y sociología sea conocido como *método correlacional*.

La distribución normal también es importante por su relación con la estimación por mínimos cuadrados, uno de los métodos de estimación más simples y antiguos.

Algunos ejemplos de variables asociadas a fenómenos naturales que siguen el modelo de la normal son:

- caracteres morfológicos de individuos como la estatura;
- caracteres fisiológicos como el efecto de un fármaco;
- caracteres sociológicos como el consumo de cierto producto por un mismo grupo de individuos;
- caracteres psicológicos como el cociente intelectual;
- nivel de ruido en telecomunicaciones;
- errores cometidos al medir ciertas magnitudes;
- etc.

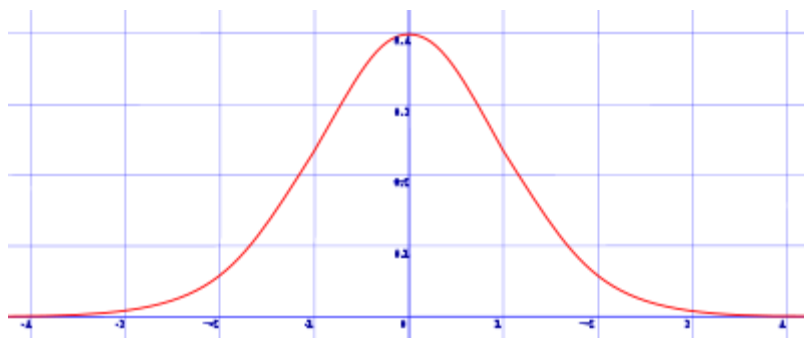
La distribución normal también aparece en muchas áreas de la propia estadística. Por ejemplo, la distribución muestral de las medias muestrales es aproximadamente normal, cuando la distribución de la población de la cual se extrae la muestra no es normal.¹ Además, la distribución normal maximiza la entropía entre todas las distribuciones con media y varianza conocidas, lo cual la convierte en la elección natural de la distribución subyacente a una lista de datos resumidos en términos de media muestral y varianza. La distribución normal es la más extendida en estadística y muchos tests estadísticos están basados en una supuesta "normalidad".

En probabilidad, la distribución normal aparece como el límite de varias distribuciones de probabilidad continuas y discretas.

DEFINICION FORMAL

Hay varios modos de definir formalmente una distribución de probabilidad. La forma más visual es mediante su función de densidad. De forma equivalente, también pueden darse para su definición la función de distribución, los momentos, la función característica y la función generatriz de momentos, entre otros.

Función de densidad



Se dice que una variable aleatoria continua X sigue una distribución normal de parámetros μ y σ y se denota $X \sim N(\mu, \sigma)$ si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

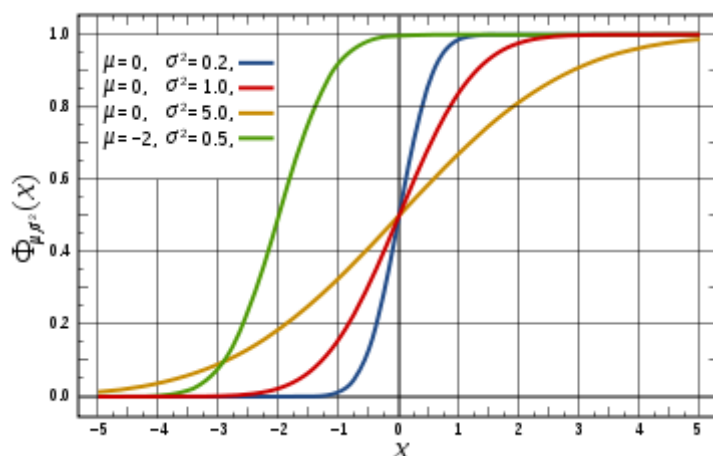
donde μ (mu) es la media y σ (sigma) es la desviación estándar (σ^2 es la varianza).

Se llama **distribución normal "estándar"** a aquella en la que sus parámetros toman los valores $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. En este caso la función de densidad tiene la siguiente expresión:

$$f(x) = f_{0,1}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Su gráfica se muestra a la derecha y con frecuencia se usan [...tablas](#) para el cálculo de los valores de su distribución.

Función de distribución



La función de distribución de la distribución normal está definida como sigue:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mu,\sigma^2}(x) &= \int_{-\infty}^x \varphi_{\mu,\sigma^2}(u) du \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Por tanto, la función de distribución de la normal estándar es:

$$\Phi(x) = \Phi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esta función de distribución puede expresarse en términos de una función especial llamada función error de la siguiente forma:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right], \quad x \in \mathbb{R},$$

y la propia función de distribución puede, por consiguiente, expresarse así:

$$\Phi_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - \mu}{\sigma \sqrt{2}} \right) \right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

El complemento de la función de distribución de la normal estándar, $1 - \Phi(x)$, se denota con frecuencia $Q(x)$, y es referida, a veces, como simplemente **función Q**, especialmente en textos de ingeniería. Esto representa la cola de probabilidad de la distribución gaussiana. También se usan ocasionalmente otras definiciones de la función Q, las cuales son todas ellas transformaciones simples de Φ .⁸

La inversa de la función de distribución de la normal estándar (función cuantil) puede expresarse en términos de la inversa de la función de error:

$$\Phi^{-1}(p) = \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(2p - 1), \quad p \in (0, 1),$$

y la inversa de la función de distribución puede, por consiguiente, expresarse como:

$$\Phi_{\mu, \sigma^2}^{-1}(p) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(p) = \mu + \sigma \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(2p - 1), \quad p \in (0, 1).$$

Esta función cuantil se llama a veces la función probit. No hay una primitiva elemental para la función probit. Esto no quiere decir meramente que no se conoce, sino que se ha probado la inexistencia de tal función. Existen varios métodos exactos para aproximar la función cuantil mediante la distribución normal (véase función cuantil).

Los valores $\Phi(x)$ pueden aproximarse con mucha precisión por distintos métodos, tales como integración numérica, series de Taylor, series asintóticas y fracciones continuas.

Límite inferior y superior estrictos para la función de distribución

Para grandes valores de x la función de distribución de la normal estándar $\Phi(x)$ es muy próxima a 1 y $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ está muy cerca de 0. Los límites elementales

$$\frac{x}{1 + x^2} \varphi(x) < 1 - \Phi(x) < \frac{\varphi(x)}{x}, \quad x > 0,$$

en términos de la densidad φ son útiles.

Usando el cambio de variable $v = u^2/2$, el límite superior se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(x) &= \int_x^\infty \varphi(u) du \\ &< \int_x^\infty \frac{u}{x} \varphi(u) du = \int_{x^2/2}^\infty \frac{e^{-v}}{x\sqrt{2\pi}} dv = -\frac{e^{-v}}{x\sqrt{2\pi}} \Big|_{x^2/2}^\infty = \frac{\varphi(x)}{x}. \end{aligned}$$

De forma similar, usando $\varphi'(u) = -u\varphi(u)$ y la regla del cociente,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)(1 - \Phi(x)) &= \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \int_x^\infty \varphi(u) du \\ &= \int_x^\infty \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \varphi(u) du \\ &> \int_x^\infty \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) \varphi(u) du = -\frac{\varphi(u)}{u} \Big|_x^\infty = \frac{\varphi(x)}{x}. \end{aligned}$$

Resolviendo para $1 - \Phi(x)$ proporciona el límite inferior.

Distribución uniforme continua

En teoría de probabilidad y estadística, la **distribución uniforme continua** es una familia de distribuciones de probabilidad para variables aleatorias continuas, tales que cada miembro de la familia, todos los intervalos de igual longitud en la distribución en su rango son igualmente probables. El dominio está definido por dos parámetros, a y b , que son sus valores mínimo y máximo. La distribución es a menudo escrita en forma abreviada como $U(a,b)$.

CARACTERIZACION

Función de densidad de probabilidad

La función de densidad de probabilidad de la distribución uniforme continua es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{para } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{para } x < a \text{ o } x > b, \end{cases}$$

Los valores en los dos extremos a y b no son por lo general importantes porque no afectan el valor de las integrales de $f(x) dx$ sobre el intervalo, ni de $x f(x) dx$ o expresiones similares. A veces se elige que sean cero, y a veces se los elige con el valor $1/(b-a)$. Este último resulta apropiado en el contexto de estimación por el método de máxima verosimilitud. En el contexto del análisis de Fourier, se puede elegir que el valor de $f(a)$ ó $f(b)$ sean $1/(2(b-a))$, para que entonces la transformada inversa de muchas transformadas integrales de esta función uniforme resulten en la función inicial, de otra forma la función que se obtiene sería igual "en casi todo punto", o sea excepto en un conjunto de puntos con medida nula. También, de esta forma resulta consistente con la función signo que no posee dicha ambigüedad.

Función de distribución de probabilidad

La función de distribución de probabilidad es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{para } a \leq x < b \\ 1 & \text{para } x \geq b \end{cases}$$

Funciones generadoras asociadas

Función generadora de momentos

La función generadora de momentos es

$$M_x = E(e^{tx}) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

a partir de la cual se pueden calcular los momentos m_k

$$m_1 = \frac{a+b}{2},$$
$$m_2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3},$$

y, en general,

$$m_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k a^i b^{k-i}.$$

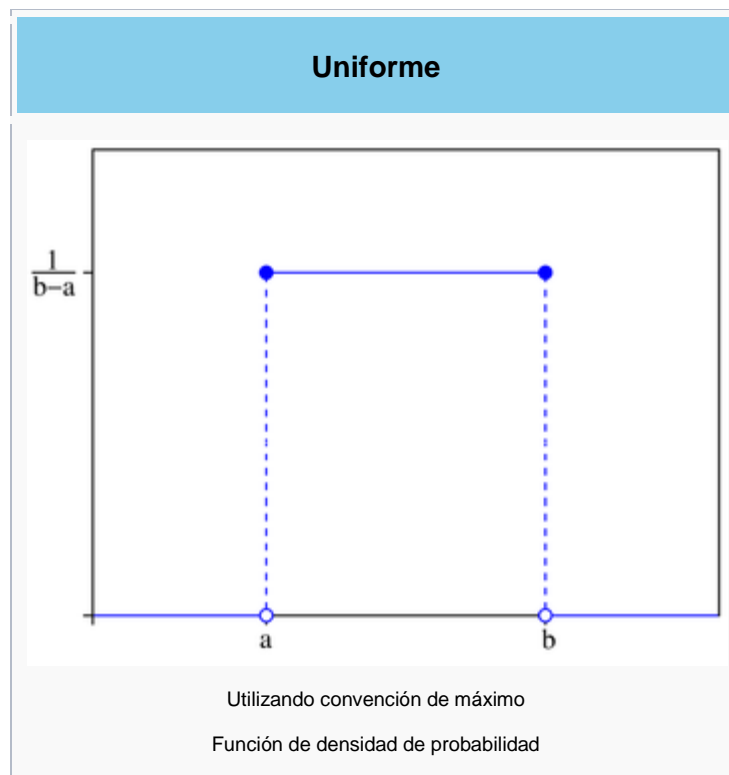
Para una variable aleatoria que satisface esta distribución, la esperanza matemática es entonces $m_1 = (a+b)/2$ y la varianza es $m_2 - m_1^2 = (b-a)^2/12$.

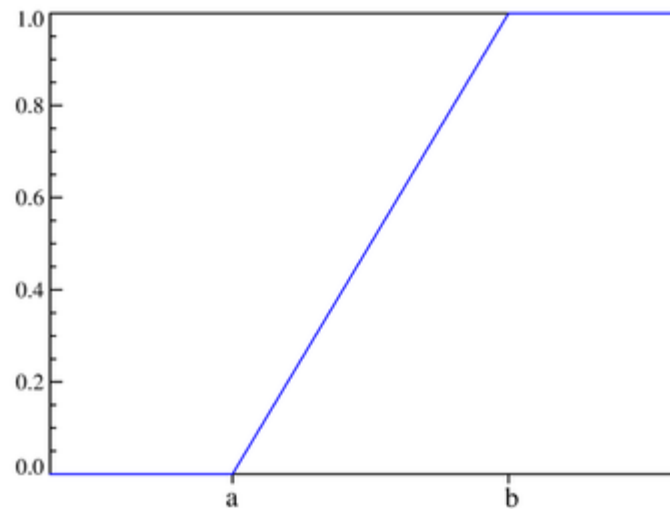
EJEMPLO EN EL INTERVALO [0,1]

Para este caso el intervalo queda definido por $a = 0$ y $b = 1$.

Entonces resulta:

- $f(x) = 1$ para $0 \leq x \leq 1$
- $F(x) = x$ para $0 \leq x \leq 1$
- $E(X) = 0,5$
- $\text{Var}(X) = 1/12$
- $\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{1/12} \approx 0.29$





Función de distribución de probabilidad

Parámetros $a, b \in (-\infty, \infty)$

Dominio $a \leq x \leq b$

Función de densidad(pdf) $\frac{1}{b-a}$ para $a \leq x \leq b$
 0 para $x < a$ o $x > b$

Función de distribución(cdf) 0 para $x < a$
 $\frac{x-a}{b-a}$ para $a \leq x < b$
 1 para $x \geq b$

Media $\frac{a+b}{2}$

Mediana $\frac{a+b}{2}$

Moda cualquier valor en $[a, b]$

Varianza $\frac{(b-a)^2}{12}$

Coeficiente de simetría 0

<u>Curtosis</u>	$-\frac{6}{5}$
<u>Entropía</u>	$\ln(b - a)$
<u>Función generadora de momentos (mgf)</u>	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b - a)}$
<u>Función característica</u>	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b - a)}$

Muestreo

Muestra aleatoria: es aquella en la que cada individuo en la población tiene la misma probabilidad de ser elegido como parte de la muestra.

Proceso físico para extraer una muestra aleatoria

Ejemplo: población de estudiantes en el aula

MÉTODO GRÁFICO

1. Registrar a cada persona en una ficha,
2. Mezclar las fichas
3. Extraer la muestra

Ejemplo: población de estudiantes en el aula

MÉTODO PRÁCTICO

1. Asignar un número a cada persona
2. Extraer una muestra aleatoria de números (consultar tabla)

Muestras con o sin reemplazo

- *Muestras con reemplazo*: muestreo donde cada miembro de una población puede ser elegido más de una vez
- *Muestras sin reemplazo*: muestreo donde cada miembro de una población NO puede ser elegido más de una vez

Muestra aleatoria simple

Una muestra aleatoria simple es aquella cuyas n observaciones

X_1, X_2, \dots, X_n

son independientes

La distribución de cada X_i es la distribución de la población $p(x)$ (con media μ y varianza σ^2)

(ejemplo de población de estaturas de hombres para un millón de hombres- caso discreto subdividido en células con cálculo de media μ y varianza σ^2)

Suma muestral

$$S \equiv X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Se puede inferir el comportamiento de una suma muestral a partir del conocimiento de la población original

Cómo fluctúa la suma muestral?

$$E(S) = n\mu$$

$$\sigma_S = \sqrt{n} \sigma$$

Media muestral

$$\bar{X} \equiv \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

¿Cómo fluctúa?

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Teorema del límite central

- A medida que aumenta el tamaño de la muestra n , la distribución de la media de una muestra aleatoria extraída de prácticamente cualquier población se aproxima a la distribución normal.
- Especifica la distribución en *muestras grandes*. Es la clave para inferencia estadística de grandes muestras.
- *Regla empírica*: cuando el tamaño n de la muestra es 10-20 la distribución de la media es casi normal.

Método simple: variables 0-1

- Ejemplo: población de votantes
- Variable de conteo: X
- X = cantidad de votos demócratas emitidos
- $X=0$ NO es demócrata
- $X=1$ SÍ es demócrata

suma muestral S = número de demócratas

media muestral \bar{X} = proporción de muestra P

Las proporciones son simplemente promedios de variables de conteo.

Cómo fluctúa la proporción de muestra en torno a la proporción de población verdadera π ?

Se introduce una variable aleatoria *binomial*: el nro total de éxitos S en n intentos .

$$E(S) = n\pi$$

$$\sigma_s^2 = n\pi(1-\pi)$$

P = proporción de muestra de demócratas

$$E(P) = \pi$$

$$\text{var}(P) = \frac{\pi(1-\pi)}{n}$$

Muestreo de población pequeña

- Es una excepción porque no se puede asumir que las observaciones son independientes.
- Todas las observaciones tienen la misma media y varianza
- Ejemplo: dos fichas extraídas sin reemplazo de un recipiente que contiene 3 fichas (marcadas con 2, 6 y 7)
- Para una muestra de n observaciones extraída de una población de N individuos, la varianza está reducida en:

$$\text{factor de reducción} = \frac{N-n}{N-1}$$