Sistemas Lineales

Análisis de error

Prof.: Dra. Nélida Beatriz Brignole

Errores

- Errores de redondeo
- Errores en los valores de A y b
- Incertidumbre en la solución calculada x

Residuo

$$Ax_* = b$$

$$e = x_* - A^{-1}b$$

$$r(x) = b - Ax$$

$$r(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = A^{-1}b$$

$\|r(x)\|$ es medida de $\|e(x)\| = \|x - x_*\|$

Sistema mal condicionado

$$A=\begin{bmatrix}1.2969 & 0.8648\\ 0.2161 & 0.1441\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}0.8642\\ 0.1440\end{bmatrix}\quad x=\begin{bmatrix}0.9911\\ -0.4870\end{bmatrix}$$

$$r=\begin{bmatrix}-10^{-8}\\ 10^{-8}\end{bmatrix}\quad \textit{sin embargo el V.V. es}:\ x_*=\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}$$

$$\|r\|\ \textit{pequeño}\ \|e\|\ \textit{grande}$$

$$\begin{bmatrix}1.2969 & 0.8648 & 0.8642\\ 0 & \underbrace{0.1441-\dfrac{0.2161}{1.2969}0.8648}_{0.1440999923} & X\end{bmatrix}$$

$$\det A=0.1868832-0.1868832=0$$

Relación entre residuo y error

$$Ax_* = b$$

$$Ax - Ax_* = Ax - b$$

$$A(x - x_*) = -r(x)$$

$$A\,e(x) = -r(x)$$

$$e(x) = -A^{-1}r(x)$$

$$\|e(x)\| = \|A^{-1}r(x)\| \le \|A^{-1}\|\,\|r(x)\|$$

Relación entre residuo y error

$$\|e(x)\| \le \left\|A^{-1}\right\| \, \|r(x)\|$$

$$\frac{\|e(x)\|}{\|x_*\|} \le \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|r(x)\|}{\|x_*\|}$$

$$\|Ax_*\| = \|b\| \le \|A\| \, \|x_*\| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\|x_*\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

$$\frac{\|e(x)\|}{\|x_*\|} \le \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|r(x)\|}{\|x_*\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|} \left\|A^{-1}\right\| \|r(x)\| = K(A) \frac{\|r(x)\|}{\|b\|}$$

Número de condición

$$K(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|I\| \geq \rho(I) = 1$$

$$=> K(A) \geq 1$$

$$K(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \geq \rho(A)\rho(A^{-1}) \quad porque \quad \rho(A) \leq \|A\|$$

$$\rho(A^{-1}) \leq \|A^{-1}\|$$

$$\rho(A)\rho(A^{-1}) \leq \|A\|\|A^{-1}\|$$

$$K(A) \geq \frac{\max\limits_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|}{\underset{1 \leq i \leq n}{mín} |\lambda_i|} \quad porque$$

$$K(A) \geq \rho(A)\rho(A^{-1}) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \quad \frac{1}{\min\limits_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|}$$

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \ \ y \ \ \rho(A^{-1}) = \frac{1}{\min\limits_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|}$$

Cotas de error

$$A(x_* + \delta x) = b + \delta b$$

$$A\delta x = \delta b$$

$$\delta x = A^{-1}\delta b$$

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\| \qquad \text{(consistencia)}$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x_*\|} \leq \|A^{-1}\|\frac{\|\delta b\|}{\|x_*\|}$$

$$\|A^{-1}\|\frac{\|\delta b\|}{\|x_*\|} = \|A^{-1}\|\frac{\|A\|}{\|A\|}\frac{\|\delta b\|}{\|x_*\|} \leq \underbrace{\|A^{-1}\|\|A\|}_{K(A)}\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Cotas de error

$$(A+\delta A)(x_* + \delta x) = b$$

$$A\delta x + \delta A x_* + \delta A \delta x = 0$$

$$A\delta x + \delta A(x_* + \delta x) = 0$$

$$\delta x = A^{-1}\delta A(x_* + \delta x)$$

$$\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta A(x_* + \delta x)\| \leq \|A^{-1}\delta A\|\|x_* + \delta x\|$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x_* + \delta x\|} \leq \|A^{-1}\delta A\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta A\|\frac{\|A\|}{\|A\|}$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x_* + \delta x\|} \leq K(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

Resolución de Sistemas Lineales

Métodos directos:

Refinamiento iterativo

Refinamiento iterativo

$$r = b - A\bar{x}$$

$$r = Ax - A\bar{x} = A(x - \bar{x})$$

$$A\delta x = r$$

Algoritmo: Refinamiento Iterativo

$Dado: \; x_0 \; solución \; aproximada \; de \; Ax = b$

$1) \, Calcular \; en \; doble \; precisión \quad r_0 = b - Ax_0$

$2) \; para \; i = 1 \; hasta \; convergencia \; hacer:$

$\quad a) \, Resolver \; por \; descomposición \; LU \;\; A\delta x_{i-1} = r_{i-1}$

$\quad b) \;\; x_i = x_{i-1} - \delta x_{i-1}$

$\quad c) \, Calcular \; en \; doble \; precisión \quad r_i = b - Ax_i$

$\quad d) Test \; de \; convergencia$

$Si \;\; \|r_i\| > \|r_{i-1}\| \quad \Rightarrow PARAR \; (no \; se \; puede \; refinar \; más)$

$Si \; \frac{\|r_i\|}{\|b\|} > \varepsilon \quad \Rightarrow PARAR \; (\; x_i \; es \; la \; solución)$

$Si \; i \geq \max it \quad \Rightarrow PARAR \; (no \; se \; alcanzó \; el \; error \; deseado)$

$fin \; lazo$

Resolución de Sistemas Lineales

Métodos iterativos

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

Métodos iterativos

- **Ventajas?**
  - **Espacio:** **convenientes para matrices ralas (sparse)**
  - **Tiempo:** **menor número de operaciones**
- **Desventajas?**
  - **Velocidad:** **convergencia lenta**
  - **Convergencia:** **no siempre se obtiene la solución en un número finito de pasos**

Diseño general

$$Ax = b$$

$$(B + C)x = b$$

$$Bx + Cx = b$$

$$x = B^{-1}b - B^{-1}Cx$$

$$x_{k+1} = B^{-1}b - B^{-1}Cx_k$$

Cuándo tiene sentido esto?

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_*$$

$$x_* = B^{-1}b - B^{-1}Cx_*$$

$$x_{k+1} = B^{-1}b - B^{-1}Cx_k$$

$$x_{k+1} - x_* = -B^{-1}C(x_k - x_*)$$

$$e_{k+1} = -B^{-1}C \quad e_k$$

Análisis de error

$$\left\|e_{k+1}\right\| = \left\|B^{-1}Ce_k\right\| \leq \left\|B^{-1}C\right\| \left\|e_k\right\|$$

$$\left\|e_{k+1}\right\| \leq \left\|B^{-1}C\right\|^2 \left\|e_{k-1}\right\| \leq \ldots \leq \left\|B^{-1}C\right\|^{k+1} \left\|e_0\right\|$$

condición suficiente de convergencia :

$$\left\|B^{-1}C\right\| < 1$$

Condición necesaria y suficiente de convergencia

$$x_{k+1} = Mx_k + b$$

$$\rho(M) < 1$$

$$x_{k+1} - x_* = M^{k+1}(x_0 - x_*)$$

Demostración

$$x_0 - x_* = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$

$$x_1 - x_* = M(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n)$$

$$x_1 - x_* = \alpha_1 M u_1 + \alpha_2 M u_2 + \ldots + \alpha_n M u_n$$

$$x_1 - x_* = \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n u_n$$

$$x_2 - x_* = M(x_1 - x_*) = \alpha_1 \lambda_1 M u_1 + \alpha_2 \lambda_2 M u_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n M u_n$$

$$\underbrace{x_k - x_*}_{\to 0} = \alpha_1 \lambda_1^k u_1 + \alpha_2 \lambda_2^k u_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n^k u_n$$

$$\Leftrightarrow |\lambda_i| < 1 \qquad \forall i \quad \Rightarrow \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i| < 1$$

$$\Rightarrow \rho(M) < 1$$

Principales Métodos Iterativos

- **Jacobi**
- **Gauss Seidel**
- **SOR: Sobrerelajación sucesiva**

Métodos Iterativos: Jacobi

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}} \qquad P_1$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}} \qquad P_2$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}} \qquad P_n$$

Métodos Iterativos: Gauss Seidel

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}}$$

Método de Jacobi

$$A = L + D + U$$

$$Ax = b$$

$$\left(L + D + U\right)x = b$$

$$Dx_{k+1} = -\left(L + U\right)x_k + b$$

$$x_{k+1} = \underbrace{-D^{-1}\left(L + U\right)}_{M_J} x_k + D^{-1}b$$

Método de Gauss Seidel

$$A = L + D + U$$

$$Ax = b$$

$$(L + D + U)x = b$$

$$(L + D)x_{k+1} = -Ux_k + b$$

$$x_{k+1} = \underbrace{-(L + D)^{-1}U}_{M_{GS}} x_k + (L + D)^{-1} b$$

Condiciones de convergencia

- **Si A es simétrica, definida positiva, entonces Gauss-Seidel converge**
- **Si A es estrictamente diagonal dominante por filas,**

entonces Gauss-Seidel y Jacobi convergen

Diagonal dominancia

Def : se dice que $A \in \Re^{nxn}$ es

diagonal dominante por filas si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i = 1, n$$

Def : se dice que $A \in \Re^{nxn}$ es

diagonal dominante por columnas si

$$|a_{jj}| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i = 1, n$$

Diagonal dominancia estricta

Def : se dice que $A \in \Re^{nxn}$ es

estrictamente diagonal dominante por filas si

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i = 1, n$$

Def : se dice que $A \in \Re^{nxn}$ es

estrictamente diagonal dominante por columnas si

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i = 1, n$$

Teorema

- **Si A es estrictamente diagonal dominante por filas , entonces A puede ser factorizada usando EG sin pivoteo por columnas**
- **Si A es estrictamente diagonal dominante por columnas , entonces A puede ser factorizada usando EG sin pivoteo por filas**

Método SOR

$$p_{GS} = x_{k+1}^{GS} - x_k$$

$$Dx_{k+1}^{GS} = b - Lx_{k+1} - Ux_k$$

$$x_{k+1} = x_k + \underbrace{wp_{GS}}_{pasoSOR} \qquad w > 1\,(\text{aceleración - amplificación})$$

$$x_{k+1} = x_k + wx_{k+1}^{GS} - wx_k = \overbrace{(1-w)x_k}^{\hookleftarrow} + wx_{k+1}^{GS}$$

$$wDx_{k+1}^{GS} = Dx_{k+1} - D(1-w)x_k$$

$$w(b - Lx_{k+1} - Ux_k) = Dx_{k+1} - D(1-w)x_k$$

$$wb - wUx_k + D(1-w)x_k = Dx_{k+1} + wLx_{k+1}$$

$$x_{k+1} = \underbrace{(D+wL)^{-1}[-wU + D(1-w)]}_{M_{SOR}}x_k + w(D+wL)^{-1}b$$

Condición necesaria de convergencia

$$0 < w < 2$$

Observaciones

- **w=1 Método de Gauss-Seidel**
- **w<1 Subrelajación**

(paso más corto que el de GS)

- **w>1 Sobrerelajación**

(paso más largo que el de GS)

Bibliografía sugerida

- **Rao "Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists", Prentice Hall, 2002**
- **Págs 152-188**