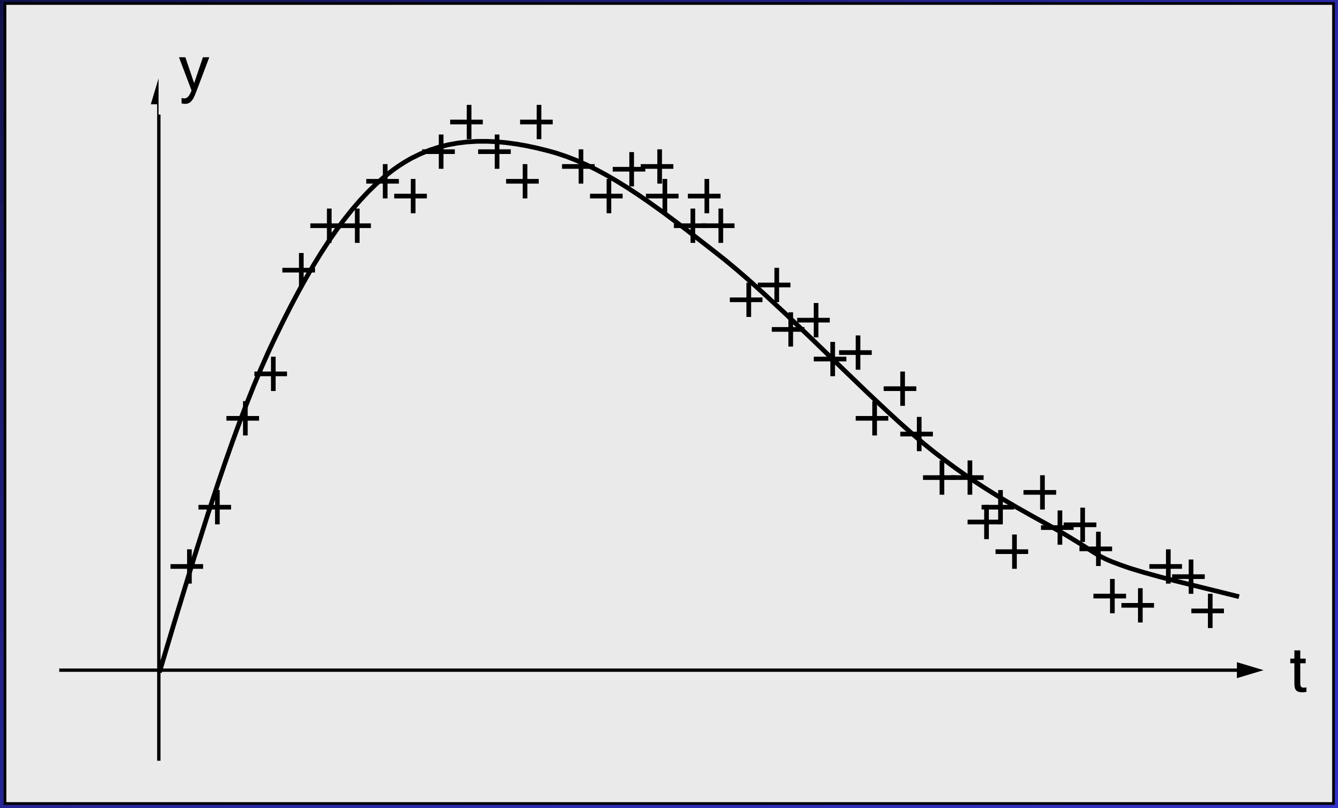
Aproximación de funciones

Cuadrados Mínimos

Dra. Nélida Beatriz Brignole

Data fitting – Ajuste de datos



Cuadrados mínimos

Encontrar x tal que

$$\left\| Ax - y \right\|_2$$

sea tan pequeño como sea posible

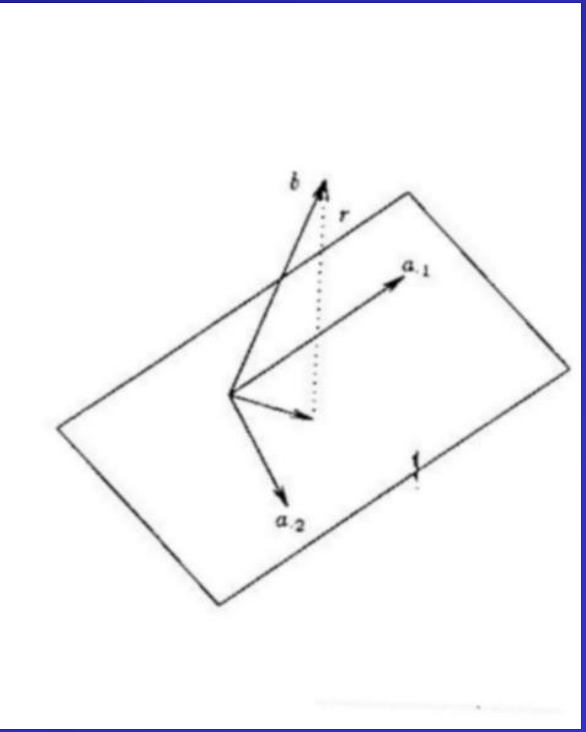
Interpretación geométrica: cuadrados mínimos

En un problema sobredeterminado, encontrar x tal que

$$\left\| b - Ax \right\|_2$$

sea tan pequeño como sea posible.

=> r normal



Cuadrados Mínimos ... Continuación

Se puede elegir la función de aproximación **g(x)**

Objetivo: **minimizar los residuos** δ_i

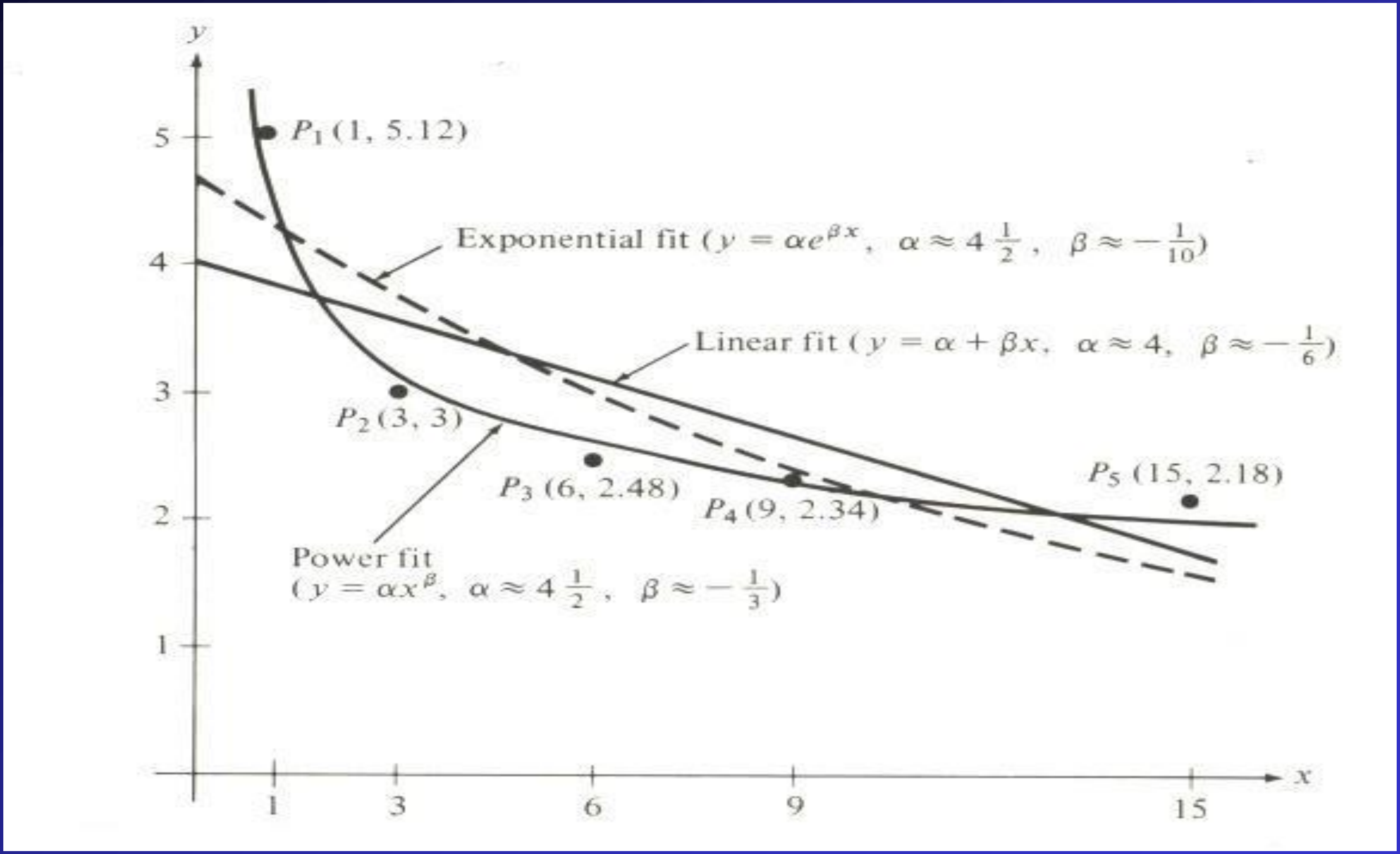
Para **m** puntos experimentales $x_1, x_2, \ldots, x_m$

buscamos g(x) tal que se minimice:

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i^{\,2} = R$$

Donde $\delta_i = f(x_i) - g(x_i)$

Cuadrados Mínimos ... Continuación



Cuadrados Mínimos Lineales

Tomamos:

$$f(x) \approx g(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ \dots + a_n\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x)$$

Si queremos dar distinta importancia a los datos experimentales de acuerdo a su calidad, podemos minimizar la función de error:

$$R = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \left(f(x_i) - g(x_i)\right)^2$$

Aproximación Polinomial (caso particular)

En este caso tenemos:

$$R = \sum_{i=1}^{m} [f(x_i) - p_n(x_i)]^2$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \varphi_1(x) & & \varphi_2(x) & & \varphi_3(x) & & \Phi_{n+1}(x) \\ p_n(x) = & a_0 \cdot & 1 & + a_1 \cdot & x & + a_2 \cdot & x^2 & + \ldots + a_n \cdot & x^n \end{array}$$

Aproximación Polinomial (caso particular)

Minimizar el residuo $\Rightarrow$ encontrar un punto crítico

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial R}{\partial a_0} = \frac{\partial R}{\partial a_1} = \cdots = \frac{\partial R}{\partial a_n} = 0}$$

Sistema de ecuaciones normales

∃n n+1 ecuaciones normales que se resuelven para los n+1 coeficientes incógnitas.

$$R(a_0,\ldots,a_n) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i [\, f(x_i) - (a_0\varphi_0(x_i) + \ldots + a_k\varphi_k(x_i) + \ldots + a_n\varphi_n(x_i))]^2$$

$k=0,\ldots,n$

Aproximación Polinomial (caso particular)

$$\frac{\partial R}{\partial a_k} = -2\sum_{i=1}^{m} \omega_i [f(x_i) - (a_0\varphi_0(x_i) + \ldots + a_k\varphi_k(x_i) + \ldots + a_n\varphi_n(x_i))]\varphi_k(x_i) = 0$$

$$\Downarrow \text{despejando}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i \varphi_k(x_i) f(x_i) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i (a_0\varphi_0(x_i)\varphi_k(x_i)) + a_1\varphi_1(x_i)\varphi_k(x_i) + \ldots$$

$$\ldots + a_k\varphi_k(x_i)\varphi_k(x_i) + \ldots + a_n\varphi_n(x_i)\varphi_k(x_i))$$

Aproximación Polinomial (caso particular)

Separando la sumatoria nos queda:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\omega_i\varphi_k(x_i)f(x_i)}_{b_k}=a_0\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\omega_i\varphi_0(x_i)\varphi_k(x_i)}_{A_{k0}}+a_1\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\omega_i\varphi_1(x_i)\varphi_k(x_i)}_{A_{k1}}+\ldots$$

$$\ldots+a_k\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\omega_i\varphi_k(x_i)\varphi_k(x_i)}_{A_{kk}}+\ldots+a_n\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\omega_i\varphi_n(x_i)\varphi_k(x_i)}_{A_{kn}}$$

con *i=1,…,m* y *k=0,…,n*

Aproximación Polinomial (caso particular)

Esto puede notarse en forma matricial como:

$$\underline{\underline{A}}a = \underline{b}$$

donde

$$A_{kj} = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \varphi_k(x_i) \varphi_j(x_i)$$

sin ponderar $\Rightarrow$ ω_i=1 para i=1,...,m

$$\Rightarrow \quad A_{kj} = \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle \quad \text{y} \quad b_k = \langle \varphi_k, f \rangle$$

Aproximación Polinomial (caso particular)

Notando:

$$\varphi_k^{\,T} = [\varphi_k(x_1), \varphi_k(x_2), \ldots, \varphi_k(x_m)]$$ Para $k = 1,\ldots,n$

$$\underline{f}^{\,T} = [f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m)]$$

$$a^T = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

<u>OBS:</u> si se elige un conjunto $\{\varphi_k\}$ ortogonal:

$$\Rightarrow \quad \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = 0 \qquad \forall \quad i \neq j$$

$\Rightarrow$ *A* es diagonal

Ejemplo

t	y=f(t)
0	2,9
0,5	2,7
1	4,8
1,5	5,3
2	7,1
2,5	7,6
3	7,7
3,5	7,6
4	9,4
4,5	9
5	9,6
5,5	10
6	10,2
6,5	9,7
7	8,3
7,5	8,4
8	9
8,5	8,3
9	6,6
9,5	6,7
10	4,1

$$p(t) = a_1\, 1 + a_2 t + a_3 t^2$$

$$\varphi_1 = 1$$

$$\varphi_2 = t$$

$$\varphi_3 = t^2$$

$$m = 21$$

$$n = 3$$

Desarrollo

Sistema de Ecs. Normales:: $Ca = b$

$$b_k = <\varphi_k, f> = \varphi_k{}^T f \qquad k = 1, \dots, 3$$

$$C_{k,j} = <\varphi_k, \varphi_j> = \varphi_k{}^T \varphi_j \qquad j = 1, \dots, 3$$

$$C = \begin{bmatrix} 21 & 105 & 717.5 \\ 105 & 717.5 & 5512.5 \\ 717.5 & 5512.5 & 45166.625 \end{bmatrix}$$

$$b^T = [155 \quad 830.05 \quad 5511.35]$$

$$\boxed{a^T = [2.1681 \quad 2.6752 \quad -0.2389]}$$

SOLUCIÓN ⇨ $p(t) = 2.17 + 2.68\,\mathrm{t} - 0.239\, t^2$

Aproximación Polinomial (caso particular)

Notemos que:

$$\underline{\underline{A}}a = \underline{b}$$

Sistema no cuadrado

(m,n+1)x(n+1,1)=(m,1)

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{A^T A}a = \underbrace{A^T b}$$

Sist. de ecs. normales

(n+1,n+1)x(n+1,1)=(n+1,1)

Cálculo $A^T A$ para solución de sist. De ecs. } Errores inaceptables

Perturbación en coeficientes → gran error en el resultado

Lectura obligatoria

Gerald C.F., Wheatley P.O. Applied Numerical Analysis, Addison Wesley, 7a Ed., 2004 - págs 199-209