Aproximación e interpolación de funciones

Problemas

- **Problema discreto**: Ajustar un conjunto de datos $(x_i, f_i) \subset \mathbb{R}^2,\ i = 0 : n$ con una función suficientemente diferenciable $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- **Problema continuo**: Aproximar una función continua $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con otra función suficientemente diferenciable y más simple $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de manera tal que sea más fácil de evaluar en un computador o bien para derivar o integrar numéricamente.

Observaciones:

- La función g puede ser lineal o no lineal en las componentes de los parámetros de ajuste. Dada una base de funciones $\{\varphi_j\}, j = 1, \ldots, m$, el modelo lineal se expresa como una combinación lineal de las funciones de la base,

$$g(x, c) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_m\varphi_m(x).$$

- La forma más sencilla y simple de g es usar una **base de monomios**.
- Existen diferentes bases de monomios.
- Se deben establecer condiciones para calcular los parámetros de ajuste de g.

Problema discreto

El **problema discreto** puede resolverse de diferentes maneras.

Aproximación

Sean un conjunto de datos $(x_i, f_i) \subset \mathbb{R}^2,\ i = 0 : n$, $x_i < x_{i+1}$ y un modelo de ajuste expresado por $g(x, c)$. Se propone hallar un vector de parámetros $c \in \mathbb{R}^n$ que proporcione **el mejor ajuste en algún sentido.**

Interpolación

Sean un conjunto de datos $(x_i, f_i) \subset \mathbb{R}^2,\ i = 0 : n$, $x_i < x_{i+1}$ y un modelo de ajuste expresado por $g(x, c)$. Se propone hallar un vector de parámetros $c \in \mathbb{R}^n$ de manera que **la función de aproximación** $g(x, c)$ **toma el mismo valor que los datos**, esto es

$$f_i = g(x_i, c).$$

Interpolación por medio de polinomios

Se considera un conjunto de datos $(x_i, f_i) \subset \mathbb{R}^2,\ i = 0 : n,\ x_i < x_{i+1}$ y nos preguntamos

1. ¿Existe un polinomio? ¿Es único?
2. ¿Qué relación hay entre el grado del polinomio y la cantidad de puntos?
3. ¿Cuál es el costo aritmético?
4. ¿Será importante la selección de la base?

Base natural

$$\beta_{\mathcal{C}} = \left\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\right\}.$$

Método de los coeficientes indeterminados

Se plantean las condiciones de interpolación en cada punto-dato y resulta con sistema de $n+1$ ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los $n+1$ coeficientes de ajuste del modelo:

$$\left\{\begin{array}{ccc} c_0 x_0 + c_1 x_0^2 + c_2 x_0^2 + \ldots + c_n x_0^n & = & f_0, \\ c_0 x_1 + c_1 x_1^2 + c_2 x_1^2 + \ldots + c_n x_1^n & = & f_1, \\ c_0 x_2 + c_1 x_2^2 + c_2 x_2^2 + \ldots + c_n x_2^n & = & f_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & = & \vdots \\ c_0 x_0 + c_1 x_n^2 + c_2 x_n^2 + \ldots + c_n x_n^n & = & f_n. \end{array}\right. \tag{1}$$

Para hallar el polinomio de interpolación se debe resolver el sistema lineal (1).

Método de los coeficientes indeterminados

La matriz del sistema es la **Matriz de Van der Monde**,

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_0^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

¿Será esta matriz no singular?

Si la matriz del sistema es no singular el sistema tiene solución única y podría asegurarse que existe un polinomio de grado menor o igual que n que interpola los datos. En ese caso el costo aritmético sería $\mathcal{O}(n^3)$ operaciones. Aunque fuese no singular por su forma la matriz es mal condicionada cuando la cantidad de puntos es grande.

Método de los coeficientes indeterminados

Ejemplo 1

Considera interpolar en $x_0 = 100$, $x_1 = 101$, *y* $x_2 = 102$ *usando la base natural. La matriz del sistema es:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 100 & 10000 \\ 1 & 101 & 10201 \\ 1 & 102 & 10402 \end{bmatrix}$$

El número de condición en norma 2 *usando matlab es aproximadamente* $5.5\ 10^{19}$.

¿Cómo se puede bajar el costo aritmético?

Esta pregunta está vinculada con la elección de la base. Se propone seleccionar una base de manera tal que al plantear las condiciones de interpolación resulte un sistema lineal fácil de resolver, esto es con un menor costo aritmético, y que esté mejor condicionado.

Cambio de variables o desplazamiento

Base desplazada

$$\left\{1, (x-a), (x-a)^2, (x-a)^3, \ldots, (x-a)^n\right\}.$$

La matriz del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & (x_0-x_n) & (x_0-x_n)^2 & (x_0-x_n)^3 & \ldots & (x_0-x_n)^n \\ 1 & (x_1-x_n) & (x_1-x_n)^2 & (x_1-x_n)^3 & \ldots & (x_1-x_n)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Resulta inmediato que $c_0 = f(n)$ y hay que resolver un sistema de dimesión $n-1$.

Cambio de variables o desplazamiento

...continua el ejemplo

Considera interpolar en $x_0 = 100$, $x_1 = 101$, y $x_2 = 102$ usando la base desplazada. La matriz del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El número de condición en norma 2 usando matlab es aproximadamente 6.8, la matriz está bien condicionada. $c_0 = f(2)$ y el sistema resulta:

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 - f_2 \\ f_1 - f_2 \end{bmatrix}$$

Forma de Newton de polinomio interpolante

Base con desplazamientos

$$\{1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \ldots, (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\}.$$

La matriz del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & (x_n - x_0) & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & (x_n - x_0)\ldots(x_n - x_2) & \ldots & (x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Observaciones:

- Como el sistema obtenido es triangular, se pueden agregar nuevos puntos al problema de interpolación sin que los coeficientes ya calculados sean afectados.
- Es sistema es triangular y el costo aritmético está asociado a realizar una sustitución hacia adelante, esto es $\mathcal{O}(n^2)$ operaciones.
- La matriz tiene un comportamiento tan nefasto como la matriz de Van der Monde, cuando n es grande.

Forma de Newton de polinomio interpolante

...continua el ejemplo

Considera interpolar en $x_0 = 100$, $x_1 = 101$, y $x_2 = 102$ usando la forma de Newton. La matriz del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

El número de condición en norma 2 usando matlab es aproximadamente 6.2, la matriz está bien condicionada.

Existe otra manera de calcular los coeficientes usando una **tabla de diferencias divididas.**

Diferencias divididas

Definición 1

Dados $n+1$ puntos $(x_i, f_i) \subset \mathbb{R}^2$, $i = 0 : n$, se definen ***las diferencias divididas*** *de orden k de manera recursiva:*

$$f[x_0] = f_0, \quad f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}, \quad f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

Una manera ordenada de calcular las diferencias divididas es confeccionando una tabla como sigue:

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f_0 = f[x_0] & & & & \\
x_1 & f_1 = f[x_1] & f[x_0, x_1] & & & \\
x_2 & f_2 = f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
x_3 & f_3 = f[x_3] & f[x_2, x_3] & f[x_1, x_2, x_3] & f[x_0, x_1, x_2, x_3] & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots
\end{array}$$

Puede demostrarse que los coeficientes de la forma de Newton del polinomio interpolante satisfacen:

$$\begin{aligned}
c_0 &= f[x_0] = f_0, \\
c_1 &= f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}, \\
&\vdots \\
c_n &= f[x_0, x_1, \ldots, x_n].
\end{aligned}$$

Forma de Newton de polinomio interpolante

Luego

$$g(x,c) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n}\left(f[x_0,x_1,\ldots,x_k]\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i)\right).$$

...continua el ejemplo

Considera interpolar los datos

x	100	101	102
y	1	2	5

usando la forma de Newton. El polinomio es de grado menor o igual que 2.

$$\begin{array}{llll}
100 & 1 & & \\
101 & 2 & \frac{2-1}{101-100} = 1 & \\
102 & 5 & \frac{5-2}{102-101} = 3 & \frac{3-1}{102-100} = 1
\end{array}$$

Luego $g(x) = 1 + (x-100) + (x-100)(x-101)$.

Forma de Newton de polinomio interpolante

Ejemplo 2

Considera agregar un dato más a la tabla

x	100	101	102	103
y	1	2	*5*	*10*

e interpolar usando la forma de Newton. El polinomio es de grado menor o igual que 3*. Se agrega un renglón más a la tabla*

$$
\begin{array}{llllll}
100 & 1 & & & & \\
101 & 2 & \frac{2-1}{101-100}=1 & & & \\
102 & 5 & \frac{5-2}{102-101}=3 & \frac{3-1}{102-100}=1 & & \\
103 & 10 & \frac{10-5}{103-102}=5 & \frac{5-3}{102-100}=1 & 0. &
\end{array}
$$

Luego $g(x) = 1 + (x - 100) + (x - 100)(x - 101)$*. El polinomio es de grado* 2*.*

¿Cómo interpreta este resultado?

Forma de Lagrange de polinomio interpolante

Proposición 1

Dados $n+1$ puntos $(x_i, f_i) \subset \mathbb{R}^2$, $i = 0 : n$, existe un ***único polinomio*** *de* ***grado menor o igual que*** *n que interpola f_i en x_i.*

Demostración: La existencia se demuestra de manera constructiva. Se consideran n polinomios que satisfacen $l_j(x)$ que satisfacen:

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ 1 & si \quad i = j \end{cases} .$$

Entonces el polinomio de interpolación tiene la forma:

$$p(x) = f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x) + \ldots + f_n l_n(x).$$

Por construcción,

$$p(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f_j l_j(x_i) = f_i \underbrace{l_i(x_i)}_{1} + \sum_{j=0, j\neq i}^{n} f_j \underbrace{l_j(x_i)}_{0} = f_i.$$

Forma de Lagrange de polinomio interpolante

Como $l_i(x_j) = 0$, se propone para $l_i(x)$ la siguiente expresión:

$$l_i(x) = c(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n), \tag{2}$$

donde $c \in \mathbb{R}$ no nula. Para determinar c consideramos que $l_i(x_i) = 1$,

$$c(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}. \tag{3}$$

Reemplazando (3) en (2) los $l_i(x)$ se expresan:

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}.$$

Se concluye que existe

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x).$$

Forma de Lagrange de polinomio interpolante

Para probar unicidad supondremos que la tesis es falsa, esto es que existen dos polinomios p y q de grado menor o igual que n que interpola $n+1$ puntos (x_i, f_i). Definamos un nuevo polinomio $r(x) = p(x) - q(x)$ que es de grado menor o igual que n. Si evaluamos r en los datos resulta

$$r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = 0,$$

luego el polinomio r tiene $n+1$ raíces x_i. Pero esto contradice que el polinomio tiene grado menor o igual que n, por lo que $r \equiv 0$ y entonces $q(x) = p(x)$. Se concluye que $p(x)$ es único.

Forma de Lagrange de polinomio interpolante

...continua el ejemplo

Considera interpolar los datos

x	100	101	102
y	1	2	5

usando la base de polinomios de Lagrange. El polinomio es de grado menor o igual que 2.

$$l_1(x) = \frac{(x-101)(x-102)}{(100-101)(100-102)} = \frac{(x-101)(x-102)}{2},$$

$$l_2(x) = \frac{(x-100)(x-102)}{(101-100)(101-102)} = \frac{(x-100)(x-102)}{-1},$$

$$l_3(x) = \frac{(x-100)(x-101)}{(102-100)(102-101)} = \frac{(x-100)(x-101)}{2}.$$

El polinomio es $p(x) = \frac{1}{2}(x-101)(x-102) - 2(x-100)(x-102) + \frac{5}{2}(x-100)(x-101)$.

¿Qué sucede si agregamos más puntos?

Problema continuo

El **problema continuo** puede resolverse usando la aproximación con polinomios de Taylor como ve ha visto en la práctica 1.

Idea

Aproximar f mediante una función g lineal en los coeficientes y con la base de polinomios $\{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}$ Las condiciones para el ajuste son:

$$\begin{gathered} p(a) = f(a), \\ p'(a) = f'(a), \\ p''(a) = f''(a), \\ \vdots \\ p^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \end{gathered}$$

Polinomio de Taylor

Los coeficientes de la función polinómica se determinan como sigue:

$$p(a) = f(a) = c_0,$$

$$p\prime(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1},$$
$$p'(a) = f'(a) = c_1,$$

$$p''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + 12c_4(x-a)^2 + \ldots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2},$$
$$p''(a) = f''(a) = 2c_2,$$

$$p'''(x) = 6c_3 + 24c_4(x-a) + \ldots + n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3},$$
$$p'''(a) = f'''(a) = 6c_3,$$
$$\vdots$$
$$p^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2.c_n,$$
$$p^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2c_n.$$

Polinomio de Taylor

Los coeficientes se expresan como:

$$\begin{aligned}
c_0 &= f(a),\\
c_1 &= f'(a),\\
c_2 &= \tfrac{f''(a)}{2},\\
c_3 &= \tfrac{f'''(a)}{6}\\
&\vdots\\
c_n &= \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}.
\end{aligned}$$

Definición 2

Sea $y = f(x)$ una función derivable en D. La función polinómica

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

es la función polinómica de Taylor que aproxima a f en $a \in D$.

Error en la aproximación

Teorema 1

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números reales distintos en un intervalo $[a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función con $n+1$ derivadas continuas en (a, b) y p el polinomio intepolante de Lagrange, entonces para cada x existe un $c \in (a, b)$ tal que

$$e(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

$e(x)$ es el error en la aproximación.

De manera análoga, para aproximación usando polinomio de Taylor

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

donde $c \in \mathcal{E}(a, \delta)$ y $x \in \mathcal{E}(a, \delta)$.

Error en la aproximación

Teorema 2

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *números reales distintos en un intervalo* $[a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función con* $n + 1$ *derivadas continuas en* (a, b), *entonces existe un* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{n+1}(c)}{(n + 1)!}.$$

...continua ejemplo

Para los datos de la tabla

x	100	101	102	103
y	1	2	5	10

Error en la aproximación

...continua ejemplo

Para los datos de la tabla

La tabla de diferencias divididas resulta

$$\begin{array}{llllll}
100 & 1 & & & \\
101 & 2 & \frac{2-1}{101-100} = 1 & & \\
102 & 5 & \frac{5-2}{102-101} = 3 & \frac{3-1}{102-100} = 1 & \\
103 & 10 & \frac{10-5}{103-102} = 5 & \frac{5-3}{102-100} = 1 & 0.
\end{array}$$

Luego

$$g(x) = 1 + (x - 100) + (x - 100)(x - 101)$$

aproxima los datos de la tabla y el error es 0.

Los 4 puntos pertenecen a la función cuadrática g.