nesMétodos en Computación Científica 2º Cuatrimestre de 2013

Práctico nº6: Métodos Iterativos para resolver Sistemas Lineales – Refinamiento iterativo

Ejercicio nº1:

Deduzca un criterio, basado en la condición necesaria y suficiente, que asegure la convergencia de la sucesión generada por el método de Gauss-Seidel si se desea resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio nº2:

Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

Deduzca para que valores de *a* el método de Jacobi converge.

Ejercicio nº3:

a) Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

hacer 5 iteraciones del método de Gauss-Seidel.

b) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

i. ¿Puede aplicar Gauss Seidel?
ii. ¿Puede afirmar que el método converge para este sistema?

Ejercicio nº4:

Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Demuestre que los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y SOR convergen.
b) ¿Cuál de estos métodos preferiría usar? Justifique

Ejercicio nº5:

El sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} .x = b$$

con a∈ 3, puede ser resuelto bajo ciertas condiciones mediante el método iterativo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega a & 1 \end{bmatrix} x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1-\omega & \omega a \\ 0 & 1-\omega \end{bmatrix} x^k + \omega b$$

a) ¿Para qué valores de a es el método convergente cuando ω = 1?
b) Para a = 0.5, encuentre el valor de $\omega \in \{0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3\}$ que minimiza el radio espectral de la matriz de iteración.

Ejercicio nº6:

Problemas de distribución de temperatura requieren la solución de sistemas tales como:

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & -0.25 & -0.25 \\ 0.00 & 1.00 & -0.25 & -0.25 \\ -0.25 & -0.25 & 1.00 & 0.00 \\ -0.25 & -0.25 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.24212046 \\ 2.49459575 \\ -0.61975963 \\ 0.39702537 \end{bmatrix}$$

Resuelva el sistema con el método SOR usando ω=0.5 con una tolerancia de $\varepsilon \le 10^{-6}$.

Ejercicio nº7: Dados:

$$A = \begin{bmatrix} 3.253 & 4.282 \\ 1.523 & 2.781 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Suponiendo que los elementos de *A* están correctamente redondeados, dar una cota de error relativo de la solución $Ax = b$ (Obs: *b* posee valores exactos).

Ejercicio nº8: Aplique refinamiento iterativo al sistema:

$$\begin{bmatrix} 0.20000 & 0.16667 & 0.14286 \\ 0.16667 & 0.14286 & 0.12500 \\ 0.14286 & 0.12500 & 0.11111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.50953 \\ 0.43453 \\ 0.37897 \end{bmatrix}$$

Compare los errores con los residuos. Encuentre una estimación para el número de condición.