Métodos de Computación Científica

Departamento de Cs. e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur
Segundo Cuatrimestre de 2016

Trabajo Práctico N° 2

Algebra Lineal

Bibliografia Recomendada.

- *Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists*, Rao. ***Capítulo 3***.

Ejercicio. i.

a) Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x & + & y & = & 7, \\ x & - & 2y & = & 1, \end{cases}$$

Hacer 5 iteraciones del método de Gauss-Seidel.

b) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x & - & 2y & = & 1, \\ 2x & + & y & = & 7, \end{cases}$$

1) ¿Puede aplicar Gauss Seidel?
2) ¿Puede afirmar que el método converge para este sistema?

Ejercicio. ii. Deduzca un criterio, basado en la condición necesaria y suficiente, que asegure la convergencia de la sucesión generada por el método de Gauss-Seidel si se desea resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio. iii. Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Demuestre que los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y SOR convergen.

b) ¿Cuál de estos métodos preferiría usar? Justifique

Ejercicio. iv. El sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

con $a \in \mathbb{R}$, puede ser resuelto bajo ciertas condiciones mediante el método iterativo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega a & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1-\omega & \omega a \\ 0 & 1-\omega \end{bmatrix} \mathbf{x}^{k} + \omega \mathbf{b}$$

a) ¿Para qué valores de a el método es convergente cuando $\omega = 1$?

b) Para $a = 0{,}5$, encuentre el valor de $\omega \in [0{,}8, 0{,}9, 1{,}0, 1{,}1, 1{,}2, 1{,}3]$ que minimiza el radio espectral de la matriz de iteración.

Ejercicio. v. Los problemas de distribución de temperatura requieren la solución de sistemas tales como:

$$\begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}00 & -0{,}25 & -0{,}25 \\ 0{,}00 & 1{,}00 & -0{,}25 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & 1{,}00 & 0{,}00 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}00 & 1{,}00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}24212046 \\ 2{,}49459575 \\ -0{,}61975963 \\ 0{,}39702537 \end{bmatrix}$$

Resuelva el sistema con el método SOR usando $\omega = 0{,}5$ con una tolerancia de $\varepsilon \leq 10^{b}$.

Ejercicio. vi. Dados:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3{,}253 & 4{,}282 \\ 1{,}523 & 2{,}781 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Suponiendo que los elementos de $\mathbf{A}$ están correctamente redondeados, dar una cota de error relativo de la solución $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (Obs: b posee valores exactos).

Ejercicio. vii. Aplique refinamiento iterativo al sistema:

$$\begin{bmatrix} 0{,}20000 & 0{,}16667 & 0{,}14286 \\ 0{,}16667 & 0{,}14286 & 0{,}12500 \\ 0{,}14286 & 0{,}12500 & 0{,}11111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}50953 \\ 0{,}43453 \\ 0{,}37897 \end{bmatrix}$$

Compare los errores con los residuos. Encuentre una estimación para el número de condición.