Interpolación

Forma de *Lagrange* para interpolación polinomial

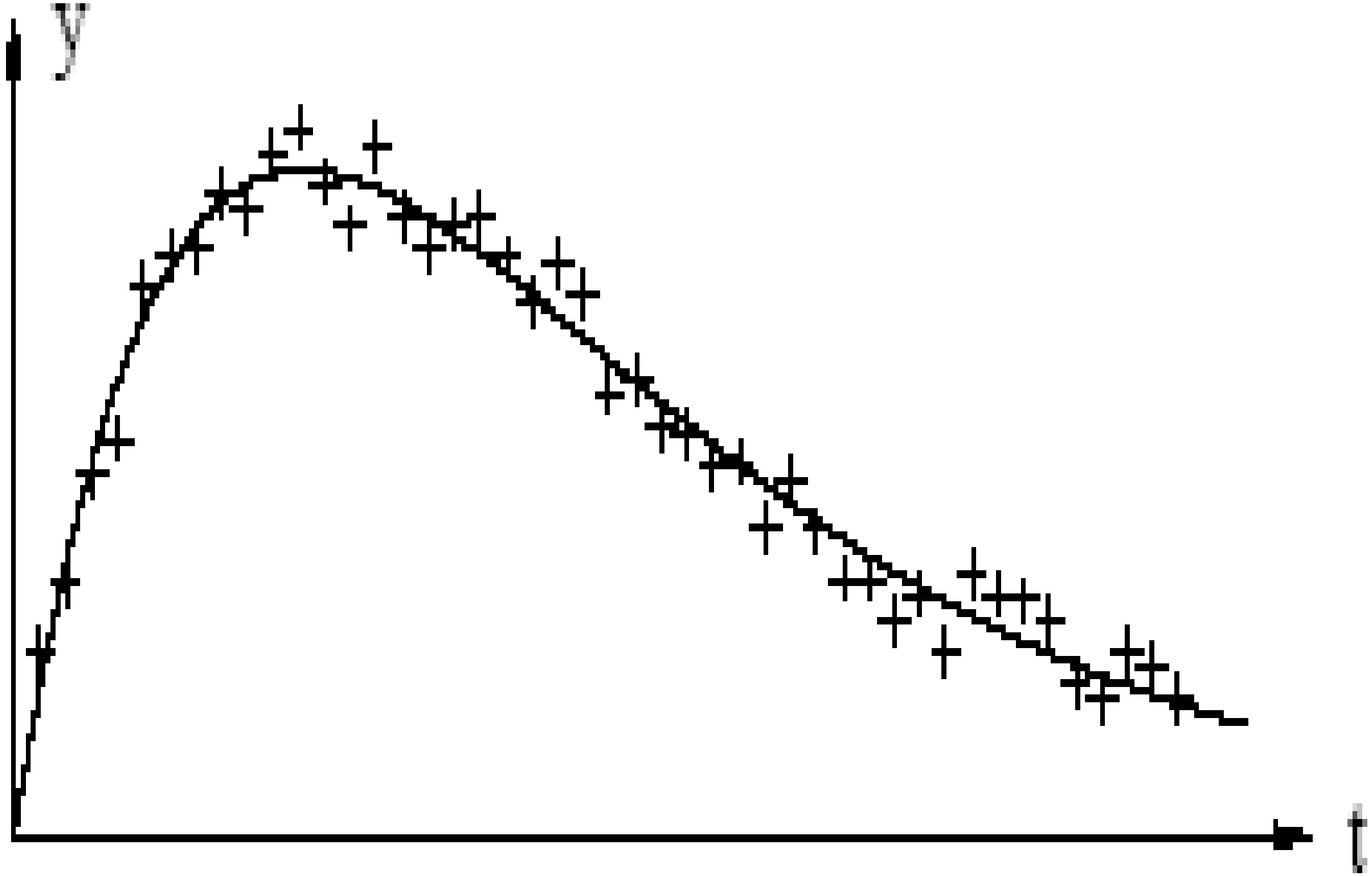
Dra. Nélida Beatriz Brignole

Aproximación de Funciones

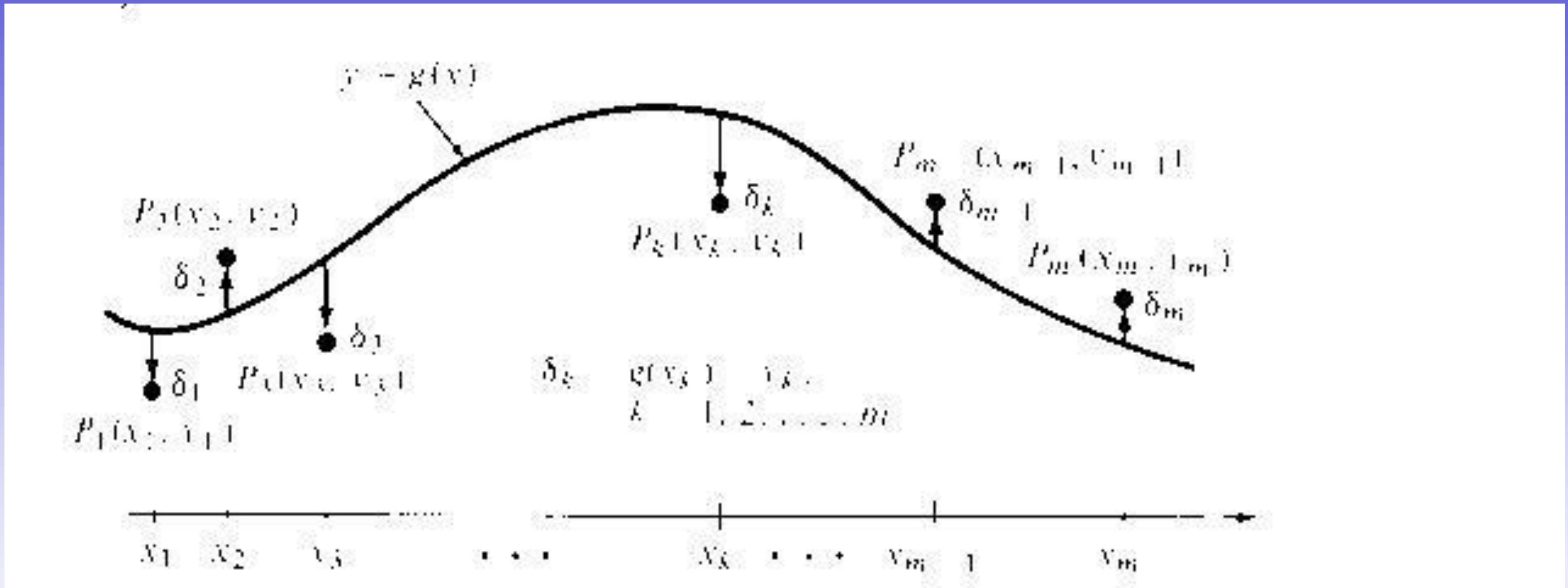
Interpolación

Cuadrados Mínimos

Ajuste de Datos



Cuadrados Mínimos



Interpolación

Dada una tabla de $n+1$ puntos dato (x_i, y_i)

un polinomio que interpola los datos

es un polinomio $p(x)$ de grado mínimo posible tal que:

$$p(x_i) = y_i \qquad 0 \leq i \leq n$$

Teorema (existencia y unicidad)

Si $x_0,\ x_1, \ldots, x_n$ son números reales distintos,
entonces para valores arbitrarios $y_0,\ y_1, \ldots, y_n$
hay un único polinomio p_n de grado a lo sumo n tal que:

$$p_n(x_i) = y_i \qquad 0 \le i \le n$$

Interpolación

Lagrange

Splines

Fórmula de Interpolación

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

$$p(x_i) = y_i \qquad 0 \le i \le n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Características

Matriz de coeficientes: Matriz de Vandermonde

Mal condicionada

Forma de Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad 0 \leq i \leq n$$

$$\text{Observación}: \begin{cases} l_i(x_i) = 1 \\ l_i(x_j) = 0 \end{cases}$$

Forma de *Lagrange*

- $\exists!$ polinomio de interpolación de grado $\leq n$ para una tabla con (n+1) puntos (asumiendo abscisas x_i distintas)
- $\exists$n diferentes formas de construir este polinomio ($\neq$s algoritmos). Una alternativa es *Lagrange*.

El polinomio de *Lagrange* se escribe como:

$$p(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + \ldots + y_n\alpha_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\alpha_i(x)$$

Donde $\alpha_i(x)$ con $0 \leq i \leq n$ son polinomios de grado n con la propiedad:

$$\alpha_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \qquad (1.a) \\ 1 & i = j \qquad (1.b) \end{cases}$$

Delta de Kronecker

Construcción del polinomio

La propiedad anterior asegura que se cumplan las condiciones de interpolación.

$$\alpha_i(x_i) = y_i \qquad 0 \le i \le n$$

Derivemos la forma de los polinomios de *Lagrange*:

- Para satisfacer (1.a) $\alpha_i(x)$ debe tomar la forma:

$$\alpha_i(x) = k_i(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n) \qquad (2)$$

- Para satisfacer (1.b) debe ser:

$$1 = \alpha_i(x_i) = k_i(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)$$

Construcción del polinomio

$$\Rightarrow \quad k_i = \frac{1}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} \qquad (3)$$

Reemplazando (3) en (2):

$$\alpha_i(x) = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (x - x_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (x_i - x_k)}$$

Construcción del polinomio

Puede probarse que:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(x) = 1$$

Lo cual puede utilizarse como chequeo aritmético cuando calculamos a mano.

Representación para abscisas equidistantes

Suele haber tablas matemáticas en las que:

$$x_i = x_0 + ih \qquad i \in Z$$

Se introduce una nueva variable $s \in \Re$, que mide la distancia entre x y x_0 en unidades de h:

$$x = x_0 + sh$$

Si tenemos en cuenta lo siguiente:

$$x - x_k = (s - k)h$$

$$x_i - x_k = (i - k)h$$

Representación para abscisas equidistantes

$$\Rightarrow \quad \alpha_i(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (x - x_k)}{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (x_i - x_k)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{(s-k)}{(i-k)}$$

<u>OBS:</u> La representación es independiente de h