Resolución de sistemas de ecuaciones lineales (SL)

¿Qué sistemas son fáciles de resolver?

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz no singular no singular y $1 \leq i,\ j \leq n$. Si:

- A es diagonal, esto es $A_{ii} \neq 0$ y $A_{ij} = 0$ si $i \neq j$,
- A es ortogonal, esto es si $A^{-1} = A^T$,
- A es triangular superior, esto es, $A_{ii} \neq 0$ y $A(i,j) = 0$ si $j < i$,
- A es triangular inferior, esto es, $A_{ii} \neq 0$ y $A(i,j) = 0$ si $j > i$,

el sistema $Ax = b$ es fácil de resolver.

Sistemas fáciles de resolver

- Sea A diagonal y no singular

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Se procede despejando x_i en cada ecuación

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

CANTIDAD DE OPERACIONES: n cocientes, $\mathcal{O}(n)$ operaciones.

- Sea A ortogonal, entonces $x = A^T b$

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} b_k.$$

CANTIDAD DE OPERACIONES: n productos y $n-1$ sumas por cada elemento de x, $\mathcal{O}(n^2)$ operaciones

Sustitución hacia adelante

- Sea A triangular inferior y no singular

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Se procede despejando x_i desde la primera ecuación como sigue

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2)}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_i = \frac{b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \dots$$

Algoritmo 1

Esquema de Sustitución hacia adelante

ENTRADA: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$,

$b(1) = \frac{b(1)}{A(1,1)}$ *1 producto;*

Para $i = 2 : n$

Para $k = 1 : i-1;$

$b(i) = b(i) - A(i,k)x(k);$ $1 + 2 + 3 + ... + (n-1)$ *sumas y productos*

continuar

$b(i) = \frac{b(i)}{A(i,i)}$ $n-1$ *productos*

continuar

SALIDA: x *« es la solución». TERMINAR*

CANTIDAD DE OPERACIONES: $\frac{n(n-1)}{2}$ sumas y $\frac{n(n+1)}{2}$ productos y divisiones , $\mathcal{O}(n^2)$ operaciones.

Sustitución hacia atrás

- Sea A triangular superior y no singular; se procede despejando x_i desde la última ecuación como sigue

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} \\
x_{n-1} &= \frac{b_{n-1} - a_{n-1n}x_n}{a_{n-1n-1}} \\
x_{n-2} &= \frac{b_{n-2} - \left(a_{n-2n}x_n - a_{n-2n-1}x_{n-1}\right)}{a_{n-2n-2}} \\
&\vdots \\
x_i &= \frac{b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \ldots
\end{aligned}
$$

El algoritmo y el costo aritmético son similares a los de sustitución hacia adelante.

Métodos directos para resolver SL

Idea

Sea el problema $\mathcal{P}: \ Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, no singular y $b \in \mathbb{R}^n$ se propone factorizar A como producto de matrices más simples y resolver los sistemas más «fáciles».

Por ejemplo

- $A = LU$ siendo L triangular inferior y U triangular superior.
- Si A es simétrica $A = LDL^T$ siendo D diagonal y L triangular inferior.
- Si A es definida positiva ($x^T Ax > 0$ cualquiera sea $x \neq 0$) $A = MM^T$, donde M es triangular inferior.
- $A = QR$ siendo R triangular superior y Q ortogonal.

Métodos directos para resolver SL

Se analiza cada caso:

- Si $A = LU$, entonces el sistema a resolver es $LUx = b$. Se sustitute $y = Ux$ y se resuelven en orden los dos sistemas con los métodos de sustitución hacia adelante y hacia atrás respectivamente:

$$\begin{aligned} Ly &= b \Rightarrow y, \\ Ux &= y \Rightarrow x. \end{aligned}$$

- Los casos 2 y 3 son casos particulares del primero.
- Si $A = QR$, entonces el sistema a resolver es $QRx = b$. Se premultiplica por Q^T ambos lados y se resuelve el sistema triangular superior $Rx = Q^T b$ con el método de sustitución hacia atrás.

En este curso no se verá en caso 4.

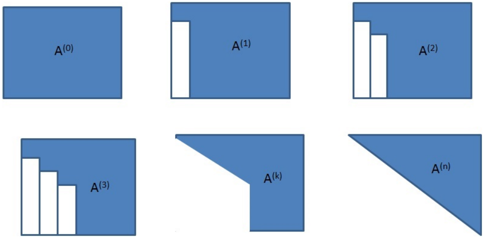
Factorización LU

Nos preguntamos:

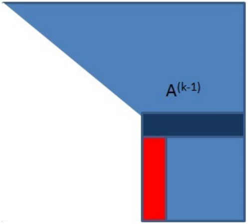
¿Siempre podrá hallarse la factorización LU de una matriz A no singular?
¿Cómo llevar a cabo dicha factorización?

Transformaciones de Gauss

La idea es aplicar transformaciones a A para generar una sucesión de matrices $A^{(k)}$, de manera que los elementos debajo de la diagonal de la k-ésima columna sean cero, esto es $A^{(k)}_{kj} = 0$ si $j > k$, hasta que $A^n = U$.



Factorización LU



$$\begin{bmatrix} a_{k,k} \\ a_{k+1,k} \\ a_{k+2,k} \\ a_{k+3,k} \\ \cdots \\ a_{n,k} \end{bmatrix}^{(k-1)} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{k,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}^{(k)}$$

Para lograr el cero en cada posición (i,k) debajo de la diagonal, esto es si $i > k$, se define el número real $\alpha_{i,k}$ de manera que

$$a_{i,k}^{(k)} = a_{i,k}^{(k-1)} - \alpha_{i,k} a_{k,k}^{(k-1)} = 0 \Rightarrow \alpha_{i,k} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}.$$

Transformaciones de Gauss (EG)

Definición 1

Si los elementos $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$*, los números reales*

$$\alpha_{i,k} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}},$$

se dicen ***multiplicadores*** *y* $a_{kk}^{(k-1)}$ ***pivotes****.*

Luego se aplica la transformación a todas las filas desde $k+1$ hasta n, esto es

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \alpha_{i,k} a_{kj}^{(k-1)}, \quad i,j = k+1, \cdots, n,$$

Es fácil verificar que la matriz triangular inferior L es

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{2,1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \alpha_{n,3} & \alpha_{n,4} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

haciendo $A = LU$.

Transformaciones de Gauss (EG)

¿Cómo hacerlo? Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, *obtener la factorización LU de A.*

Los multiplicadores en la etapa 1 son $\alpha_{2,1} = 2$ y $\alpha_{3,1} = 3$, luego

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Transformaciones de Gauss (EG)

Los multiplicadores en la etapa 2 es $\alpha_{3,2} = 4$, luego

$$U = A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

La matriz L es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Basta con hacer el producto LU para verificar que es una factorización de A.
Consideraciones de implementación: No se utilizan dos matrices L y U, los elementos de U se van guardando sobre las filas de A y lo elementos por debajo de la diagonal de L en las columnas de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Factorización LU

Nos preguntamos ¿Es única la factorización LU de A?
¿Siempre podrá hallarse la factorización LU de una matriz A no singular?
La respuesta está vinculada a la condición $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$.

Teorema 1

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) *Si las submatrices primeras principales, esto es las formadas con las primeras k filas y k columnas, son no singulares, esto es $det\left(A(1:k, 1:k)\right) \neq 0, k = 1:n$, entonces A admite factorización LU.*

b) *Si la factorización LU existe y A es no singular, entonces la factorización LU con $l_{ii} = 1,\ i = 1, \ldots, n$ es única.*

Factorización LU

Las transformaciones de Gauss son operaciones elementales, luego $det(A) = det(U)$. Por inducción, si $a_{11} \neq 0$, entonces puede completarse la transformación de Gauss para obtener $A^{(1)}$. Si se supone que se ha realizado la tranformación de Gauss hasta la etapa $k-1$, entonces $a(0)_{11} = a_{22}^{(1)} = \ldots = A_{k-1,k-1}^{(k-1)} \neq 0$ y el determinante de A^k es

$$det \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & X & X & \cdots & X & X & \cdots & X \\ 0 & a_{22}^{(1)} & X & \cdots & X & X & \cdots & X \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & X & \cdots & X \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k-1)} & X & \cdots & X \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & X & X & \cdots & X \end{bmatrix} = \underbrace{det(U(1:k,:)}_{\neq 0} a_{kk} \neq 0,$$

luego $a_{kk} \neq 0$ y el procedimiento puede continuarse hasta la etapa $n-1$, de manera que la factorización LU se completa. Se observa que si A es no singular $a_{nn}^{n-1} \neq 0$, caso contrario U es singular y de rango $n-1$.

Factorización LU

Dada A, si se plantea la factorización LU como el producto de dos matrices triangulares cualesquiera, resultan

- n^2 ecuaciones de la forma

$$a(i,j) = e_i^T LU e_j,$$

- $n^2 + n$ incógnitas, que corresponden a los $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos de L y $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos de U,
- n grados de libertad.

Hay infinitas formas de fijar estos grados de libertad.

¿Cómo?

Factorización LU

Las factorizaciones más populares son:

- Factorización de Crout, si se seleccionan $u_{ii} = 1$.
- Factorización de Doolitle, si se seleccionan $l_{ii} = 1$.

Observaciones:

- Si A es no singular, una vez que se fijan los n grados de libertad en L o en U, el par de matrices es única.
- Fácilmente se puede relacionar una factorización con la otra. Por ejemplo dada la factorización de Crout, se considera una matriz diagonal $D = diag(l_{11}, l_{22}, \ldots, l_{nn})$,

$$A = L_0 U_0 = L_0 D^{-1} D U_0 = L D U_0 = LU.$$

- La factorización de Doolitle se obtiene con el método de eliminación de Gauss.

Factorización LU

Continuando con el ejemplo 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sea $D = diag\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\right)$, y $D^{-1} = diag\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\right)$, entonces se puede escribir

$$A = LU = LDD^{-1}U = LDU_0 = L_0 U_0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Factorizaciones especiales

¿Cómo es la factorización de matrices simétricas? Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & -16 & 20 \\ 3 & -16 & 62 & -93 \\ 4 & 20 & -93 & 239 \end{bmatrix}$, *obtener una factorización A.*

mediante transformaciones de Gauss se tiene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -10 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Factorizaciones especiales

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -7 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^T}.$$

Propiedades 1

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y satisface las condiciones del teorema de existencia (1), entonces puede A factorizarse como LDL^T con $l_{ii} = 1, i = 1 : n$.

Factorizaciones especiales

Propiedades 2

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es simétrica y definida positiva, entonces*

a) A *es no singular,*

b) *todas las submatrices primeras principales son definidas positivas,*

c) *los elementos de la diagonal de* A *son positivos.*

Demostración:

a) A es definida positiva, luego $v^t A v > 0$ cualquiera sea el vector $v \neq 0$. Por el absurdo, se supone que A es singular, entonces existe $v \neq 0$ tal que $Av = 0$. Luego $v^t \underbrace{Av}_{0} = 0$ y contradice la hipótesis. Se concluye que A es no singular.

Factorizaciones especiales

b) Se particiona A en cuatro bloques:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

con $A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Si se considera el vector v particionado como $v^t = [v_1^t, 0^t]$, $v_1 \in \mathbb{R}^k$, $v_1 \neq 0$, resulta

$$\underbrace{0 < v^t A v}_{def.positiva} = \begin{bmatrix} v_1^t & 0^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} = v_1^t A_{11} v_1 + \underbrace{0^t A_{12} v_1}_{0}.$$

cualquiera sea $k = 1 : n$. Luego toda submatriz primera principal es definida positiva.

c) $a_{ii} = e_i^t A e_i > 0$ y $e_i \neq 0$ para cada $i = 1 : n$.

Factorización de Cholesky

Teorema 2

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica y definida positiva, entonces

a) *A satisface las condiciones del teorema de existencia (1) y la factorización puede completarse.*
b) *A puede factorizarse como MM^T siendo M triangular inferior.*

Demostración:

a) Se aplica la propiedad 2.
b) Por la propiedad 1 $A = LDL^T$. Además, por la propiedad 2

$$0 < det(A^k) = det\left(L^k D^k \left(L^T\right)^k\right) = \underbrace{det\left(L^k\right)}_{1} det\left(D^k\right) \underbrace{det\left(L^k\right)}_{1} = \prod_{i=1}^{k} a_{kk} > 0,$$

luego $d_{kk} > 0$, para $k = 1 : n$. Se define

$$D^{1/2} = diag\left([\sqrt{a_{11}}, \sqrt{a_{22}}, \cdots, \sqrt{a_{nn}})\right]$$

$$A = LD^{1/2}D^{1/2}L^t = \underbrace{\left(LD^{1/2}\right)}_{M}\left(LD^{1/2}\right)^t = MM^t.$$

Factorización de Cholesky

Continuando con el ejemplo 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & -16 & 20 \\ 3 & -16 & 62 & -93 \\ 4 & 20 & -93 & 239 \end{bmatrix}.$$

$$M = LD^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 3 & -5\sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \\ -4 & 6\sqrt{2} & -7\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$

En **Matlab:**

» *[L,U]=**lu**(A);*

» *M=**chol**(A);*