Error en la interpolación de funciones

Teorema 1

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números reales distintos en un intervalo $[a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función con $n + 1$ derivadas continuas en (a, b) y p el polinomio intepolante de Lagrange, entonces para cada x existe un $c \in (a, b)$ tal que el error en la aproximación es

$$|e(x)| = |f(x) - p(x)| = \frac{\left|f^{n+1}(c)\right|}{(n+1)!} \left|\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\right|.$$

Se consideran dos partes para acotar el error:

- $|\omega(x)| = |\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)| < K$ que está vinculada al espaciado de los nodos, y
- $\left|f^{n+1}(c)\right| < M$ que depende de f en $[a, b]$.

Error en la interpolación de funciones

Idea

Una vez que se ha interpolado una función f en ciertos valores $(x_i, f_i), i = 0, \ldots n$ en $[a, b]$, con un polinomio g, se puede obtener un valor aproximado de $f(x)$ cualquiera otro valor de x y estimar una cota de error en la aproximación.

- Si $x \notin [a, b]$, se dice que g extrapola a f y a medida que nos alejamos de $[a, b]$ la aproximación puede ser riesgosa.
- Si $x \in [a, b]$ g interpola a f y se puede obtener una cota para el error en la aproximación.

En el caso continuo podemos preguntarnos

¿cuál será la mejor distribución de los nodos?
¿A medida que la distancia entre los nodos disminuye será mejor el ajuste?

Error en la interpolación de funciones

Cuando los datos están igualmente espaciados se pueden expresar como $x_i = x_0 + ih, i = 0, \ldots n$, donde h es el espaciado.

¿Cúan pequeño tiene que ser h para alcanzar una determinada exactitud?

Ejemplo 1

Se aproxima $f(x) = sen(x)$ usando un modelo lineal g en $[x_0, x_1]$, la expresión del error es:

$$|sen(x) - g(x)| = \left|\frac{sen(c)}{2}\right| |\omega(x)|$$

$|\omega(x)| = |(x - x_0)(x - x_1)|$ *tiene un máximo en* $\frac{x_0+x_1}{2}$ *y es* $\frac{(x_1-x_0)^2}{4}$. *Luego* $|sen(c)| \leq 1$ *y* $|\omega(x)| < \frac{h^2}{4}$.
Si se requiere la aproximación con una exactitud de 10^{-4}, *entonces* $\frac{h^2}{8} < 10^{-4}$ *y* $h \leq 0.01\sqrt{8} \cong 0.0283$

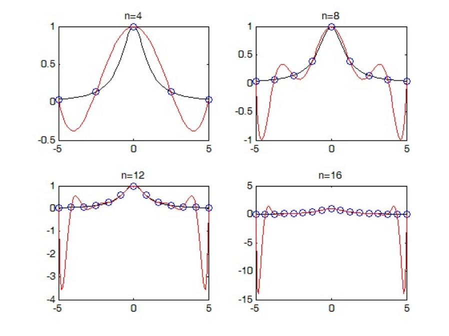
Consideremos polinomios p_n, de grado $n = 0, 1, 2, \ldots$ que interpola a f en $\{x_i\}$ igualmente espaciados,

¿a medida que n aumenta la aproximación a f con polinomios p_n de será cada vez más exacta?

No siempre, veamos un ejemplo.

Ejemplo 2

Se aproxima la función de Runge $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *en el intervalo* $[-5, 5]$ *con datos igualemente espaciados. Se consideran* $n = 4, 8, 12, 16$. *Los resultados se muestran en los gráficos.*



Se observa que a medida que *n* aumenta la aproximación mejora cerca de 0, pero empeora en los extremos del intervalo.

En general, cuando la cantidad de nodos es grande el polinomio puede oscilar demasiado entre dos nodos consecutivos y la aproximación ser muy pobre (efecto de Runge).

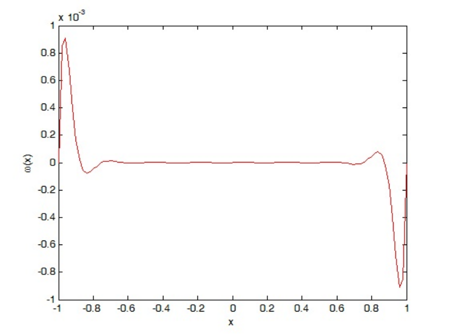
Espaciado uniforme

¿A qué se debe?

El problema está relacionado con el polinomio

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

Si se calcula el valor de $\omega(x)$ para valores de $x \in [-1, 1]$ el gráfico es:



Espaciado no uniforme

¿Cómo lo solucionamos?

Idea

Usar un espaciado no uniforme p, que resulte de minimizar la cota superior de $|\omega(x)|$, esto es

$$K = \min_{p} \max_{x \in [-1,1]} |\omega(x)| . \tag{1}$$

Definición 1

Polinomio de Chebyshev de primera clase
Se definen de manera recursiva como sigue:

$$T_0(x) = 1, \; T_1(x) = x, \, T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}, \; n \geq 1.$$

Puntos de Chebyshev

La forma explícita de algunos polinomio de Chebyshev de primera clase es:

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x, \qquad T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

Propiedades 1

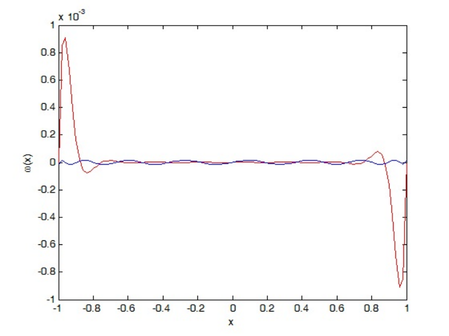
- *Las raíces de los polinomios de Chebyshev de grado n en $[-1, 1]$ son*

$$x_i = cos\left(\frac{2(n-i)+1}{2n+2}\pi\right), i = 0, 1, \dots, n.$$

- *Las raíces se dicen puntos de Chebyshev y es la partición no uniforme que resuelve el problema de optimización (1).*
- *El valor del mínimo de problema (1) es $K = 2^{-n}$.*

Puntos de Chebyshev

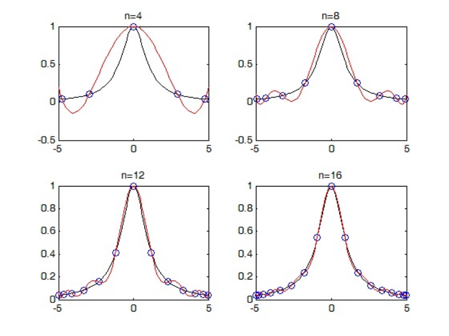
En una misma ventana se comparan gráfico $\omega(x)$ usando los nodos uniformenmente espaciados y los puntos de Chebyshev:



Claramente se observa las ventajas del espaciado no uniforme.

Puntos de Chebyshev

La aproximación de la función de Runge con una selección no uniformes de los nodos es



Se observa que a medida que n aumenta la aproximación mejora notablemente en todo el intervalo, se ha minimizado el efecto de Runge.

Desventajas y otras propuestas

Desventaja de la interpolación polinomial

- Aún utilizando los puntos de Chebyshev la interpolación con polinomios de funciones racionales no es satisfactoria.
- Es costoso evaluar polinomios de alto grado.

Propuestas de mejoras

- Interpolar usando bases de funciones que no sean polinomios.
- Usar interpolación segmentaria, esto es polinomios cúbicos S_i seccionalmente definidos en $[x_{i-1}, x_i], i = 1, \ldots n$.
- Aproximar en el sentido de los cuadrados mínimos, etc.