Übungsserie 2

Abgabe: gemäss Angaben Dozent

Scannen Sie ihre manuellen Lösungen für die Aufgaben 1,3,4 in die Dateien *Name_ Vorname_ Gruppe_ S2_ AufgX.pdf* und fassen Sie diese mit de MATLAB-Datei für Aufgabe 2 zusammen in die ZIP-Datei *Name_ Vorname_ Gruppe_ S2.zip*. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf OLAT hoch. Die einzelnen m-Files müssen ausführbar sein und in den Kommentarzeilen (beginnen mit %) soll bei Funktionen ein Beispiel eines funktionierenden Aufrufs angegeben werden. Verspätete Abgaben können nicht mehr berücksichtigt werden.

Aufgabe 1 (ca. 20 Minuten):

Berechnen Sie mittels MATLAB die Ableitung $D_1 f(x_0,h)$ von $f(x) = \ln(x^2)$ und $x_0 = 2$ mit der Extrapolation durch den h-Algorithmus für $h = 0.1$, 0.05, 0.025, 0.0125. Berechnen Sie für jedes D_{ik} den zugehörigen Diskretisierungsfehler E_{ik}.Geben Sie alle Werte zusammen in einer Tabelle an.

Aufgabe 2 (ca. 40 Minuten):

Implementieren Sie den h^2- Algorithmus als `D = Name_Vorname_Gruppe_S2_Aufg2(f, x0, h0, n)`, wobei f eine beliebige Funktion mit einer Variablen ist, h_0 die Anfangsschrittweite und $n \in \mathbb{N}$ frei wählbar gemäss dem Algorithmus. Das Resultat $D = D_{0n}$ ist der extrapolierte Wert für die Ableitung. Vergleichen Sie Ihr Programm mit den Resultaten aus Aufgabe 1 für $f(x) = \ln(x^2)$ und $x_0 = 2$.

Aufgabe 3 (ca. 20 Minuten):

Zeigen Sie, dass ausgehend von der Trapezregel für ein Intervall $[a, b]$

$$Tf = \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a)$$

die summierte Trapezregel gilt

$$Tf(h) = h\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right),$$

wenn das Intervall $[a, b]$ aufgespalten wird in n Subintervalle, wobei $x_i = a + ih$ und $h = (b-a)/n$ und $i = 0, ..., n$ (also $x_0 = a$ und $x_n = b$)

Aufgabe 4 (ca. 40 Min.):

Ein Teilchen der Masse m, das sich durch eine Flüssigkeit bewegt, wird durch den Widerstand R der Flüssigkeit abgebremst. Der Widerstand ist dabei eine Funktion der Geschwindigkeit, $R = R(v)$, d.h. je grösser die Geschwindigkeit, desto grösser ist der Widerstand und umgekehrt. Die Beziehung zwischen dem Widerstand R und der Zeit t ist durch die folgende Gleichung gegeben:

$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(v)} dv$$

Angenommen, es sei für eine spezielle Flüssigkeit $R(v) = -v\sqrt{v}$, wobei R in [N] (Newton) und v in [m/s] gegeben sind. Approximieren Sie für $m =$10 kg und $v(0) =$20 m/s die Zeit, die das Teilchen benötigt, um seine Geschwindigkeit auf $v =$5 m/s zu verlangsamen.

(a) Verwenden Sie die summierte Rechtecksregel mit $n = 5$

(b) Verwenden Sie die summierte Trapezregel mit $n = 5$

(c - optional) Verwenden Sie die summierte Simpsonregel mit $n = 5$

Geben Sie für (a) - (c) immer auch an, wie gross der tatsächliche absolute Fehler der Näherung ist. Berechnen Sie dazu den exakten Wert des Integrals.