Numerik 2, Studiengang Informatik, ZHAW

# Übungsserie 3

**Abgabe: gemäss Angaben Dozent**

Scannen Sie ihre manuellen Lösungen für die Aufgaben 1 und 2 in die Dateien *Name_ Vorname_ Gruppe_ S3_ AufgX.pdf* und fassen Sie diese mit de MATLAB-Dateien für Aufgaben 3 und 4 zusammen in die ZIP-Datei *Name_ Vorname_ Gruppe_ S3.zip*. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf OLAT hoch. Die einzelnen m-Files müssen ausführbar sein und in den Kommentarzeilen (beginnen mit %) soll bei Funktionen ein Beispiel eines funktionierenden Aufrufs angegeben werden. Verspätete Abgaben können nicht mehr berücksichtigt werden.

### Aufgabe 1 (45 Minuten):

Wie gross ist die Schrittweite $h$ bzw. die Anzahl benötigter Subintervalle $n$, um das Integral

$$I = \int_1^2 \ln(x^2)dx$$

auf einen Fehler von maximal $10^{-5}$ genau berechnen zu können für die summierten Rechtecksregel, die summierte Trapezregel und die summierte Simpsonregel ?

### Aufgabe 2 (45 Minuten):

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi \cos(x^2)dx$$

mit der Trapezregel $Tf(h)$ für die Schrittweiten $h = \frac{b-a}{2^i},\ (i = 0, ..., 4)$ (Achtung: die erste Spalte enthält also fünf Werte) und extrapolieren Sie diese mittels Romberg-Extrapolation so weit wie möglich. Schreiben Sie die Summen für die $T_{i0}$ komplett mit allen Summanden auf, also z.B.

$T_{20} = h\left(\frac{\cos(...)+\cos(...)}{2} + \cos(...) + \cos(...) + \cos(...)\right).$

### Aufgabe 3 (30 Minuten):

Implementieren Sie, ausgehend von Ihrem Programm für den $h^2-$Algorithmus aus Serie 2, die Romberg-Extrapolation in einem MATLAB Programm `T = Name_Vorname_Gruppe_S3_Aufg3(f, a, b, m)`, welches Ihnen das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

für eine vorgegebene Funktion $f$ und ein gegebenes $m$ auf dem Intervall $[a, b]$ für die Schrittweiten $h = \frac{b-a}{2^i},\ (i = 0, ..., m)$ berechnet und anschliessend extrapoliert. Der letzte (genaueste) Wert wird als T zurückgegeben. Überprüfen Sie damit Ihre Resultate der Aufgabe 2.

Achtung: $m$ definiert die Anzahl $T_{i0}$ für die erste Spalte des Romberg-Algorithmus, während $n = 2^i$ die Anzahl der Summanden in der summierten Trapezregel bestimmt:

$$T_{i0} = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) \text{ für } h = \frac{b-a}{2^i},\ n = 2^i \text{ und } i = 0, ..., m.$$

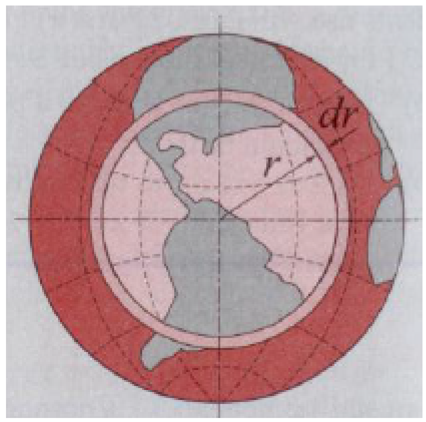
**Aufgabe 4 (30 Minuten):.**

Die Dichte $\rho$ der Erde variiert mit dem Radius $r$ gemäss der folgenden Tabelle, in der die Abstände in $r$ nicht äquidistant sind (aus [9]):

| $r$ (km) | 0 | 800 | 1200 | 1400 | 2000 | 3000 | 3400 | 3600 | 4000 | 5000 | 5500 | 6370 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ (kg/m$^3$) | 13000 | 12900 | 12700 | 12000 | 11650 | 10600 | 9900 | 5500 | 5300 | 4750 | 4500 | 3300 |

Berechnen Sie die Masse $m$ der Erde mit folgendem Integral

$$m = \int_0^{6370} \rho \cdot 4\pi r^2 dr,$$




in dem sie die beiden folgenden Teilaufgaben lösen:

a) Schreiben Sie zuerst eine Funktion `[Tf_neq] = Name_Vorname_Gruppe_S3_Aufg4a(x,y)`, welche Ihnen für eine tabellierte, nicht äquidistante Wertetabelle $(x_i, y_i)_{0\leq i\leq n}$ in den Vektoren `x` und `y` das entsprechende bestimmte Integral `Tf_neq` mittels der summierten Trapezregel für nicht äquidistante $x$-Werte löst gemäss:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx Tf_{neq} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1}-x_i)$$

b) Schreiben Sie ein Skript `Name_Vorname_Gruppe_S3_Aufg4b.m`, welches Ihnen mit Funktion aus a) die Erdmasse berechnet. Beachten sie dabei, dass $r$ im km gegeben ist, $\rho$ aber in $\mathrm{kg/m^3}$. Vergleichen Sie Ihr Resultat für die Erdmasse mit einem Refernzwert aus der Literatur. Berechnen Sie den absoluten und den relativen Fehler Ihrer Integration im Vergleich mit dem Literaturwert.