

Aufgabe 1

$$z(0) = 2$$

$$x_0 = 0$$

$$x_i = 0 + i \cdot h$$

$$z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \\ z_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \sin x + 5 - 11z_1 + 0,1z_3 + 0,3z_4 \end{pmatrix} = f(x, z) \text{ mit } z^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Schritt von Euler Verfahren

$$1. x_1 = x_0 + h = 0 + 0,1 = 0,1$$

$$2. x_1 = x_0 + h = 0,1$$

$$3. x_1 = x_0 + h = 0,1$$

$$4. x_1 = x_0 + h = 0,1$$

Euler:

$$f(x_0, z^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \sin x + 5 - 11 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0 + 0,3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(0) + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z^{(1)} = z^{(0)} + 0,1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

2. Runge Kutta:

$$k_1 = f(x_0, z^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}, z^{(0)} + \frac{h}{2} \cdot k_1) = f(0,05, \begin{pmatrix} 0,1 \\ 2 \\ 0 \\ 0,25 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 2 \\ 0 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = f(x_0 + \frac{h}{2}, z^{(0)} + \frac{h}{2} \cdot k_2) = f(0,05, \begin{pmatrix} 0 + 0,05 \cdot 2 \\ 2 + 0,05 \cdot 0 \\ 0 + 0,05 \cdot 0,25 \\ 0 + 0,05 \cdot 4,805 \end{pmatrix})$$

$$= f(0,05, \begin{pmatrix} 0,1 \\ 2 \\ 0,0125 \\ 0,24025 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0,0125 \\ 0,24025 \\ \sin(0,05) + 5 - 11 \cdot 0,24025 + 0,3 \cdot 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0,0125 \\ 0,24025 \\ 4,8170 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = f(x_0 + h, z^{(0)} + h \cdot k_3) = f(0,1, \begin{pmatrix} 0 + 0,1 \cdot 2 \\ 2 + 0,1 \cdot 0,0125 \\ 0 + 0,1 \cdot 0,24025 \\ 0 + 0,1 \cdot 4,8170 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2,0000 \\ 0,0250 \\ 0,4817 \\ 4,6324 \end{pmatrix}$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,1 \cdot \frac{1}{6} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0,1 \\ 2 \\ 0 \\ 0,25 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0,0125 \\ 0,24025 \\ 4,8170 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,0000 \\ 0,0250 \\ 0,4817 \\ 4,6324 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0,2000 \\ 2,0080 \\ 0,0279 \\ 0,4873 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1

b) $n^2 = 1$, $h = 0,1$

$$z' = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\frac{1}{x} \cdot z_2 - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot z_1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = 1 \quad z^{(0)} = \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ z_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

① Euler: $x_1 = x_0 + h = 1 + 0,1 = 1,1$

$$z^{(1)} = z^{(0)} + h \cdot f(x_0, z^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0,1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{1} \cdot 2 - \left(1 - \frac{1}{1^2}\right) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0,1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,2 \\ 1,8 \end{pmatrix}$$

② Runge Kutta

$$k_1 = f(x_0, z^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = f\left(x_0 + 0,05, \underbrace{z^{(0)} + 0,05 \cdot k_1}_{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0,05 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,1 \\ 1,9 \end{pmatrix}}\right) = \begin{pmatrix} 1,9 \\ -\frac{1}{1,05} \cdot 1,9 - \left(1 - \frac{1}{1,05^2}\right) \cdot 2,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9 \\ -2,0098 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = f\left(x_0 + 0,05, \underbrace{z^{(0)} + 0,05 \cdot k_2}_{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0,05 \cdot \begin{pmatrix} 1,9 \\ -2,0098 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,095 \\ 1,8938 \end{pmatrix}}\right) = \begin{pmatrix} 1,8938 \\ -\frac{1}{1,05} \cdot 1,8938 - \left(1 - \frac{1}{1,05^2}\right) \cdot 2,095 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8938 \\ -2,0041 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = f\left(x_0 + 0,1, \underbrace{z^{(0)} + 0,1 \cdot k_3}_{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0,1 \cdot \begin{pmatrix} 1,8938 \\ -2,0041 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,1938 \\ 1,7956 \end{pmatrix}}\right) = \begin{pmatrix} 1,7956 \\ -\frac{1}{1,1} \cdot 1,7956 - \left(1 - \frac{1}{1,1^2}\right) \cdot 2,19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,7956 \\ -2,0161 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z^{(1)} = \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ z_2^{(0)} \end{pmatrix} + 0,1 \cdot \frac{1}{6} (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2,1900 \\ 1,7957 \end{pmatrix}}}$$