Übungsserie 4

Abgabe: gemäss Angaben Dozent

Fassen Sie die MATLAB-Dateien für Aufgaben 1 und 2 zusammen in die ZIP-Datei *Name_ Vorname_ Gruppe _S4.zip*. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf OLAT hoch. Verspätete Abgaben können nicht mehr berücksichtigt werden.

Aufgabe 1 (60 Minuten):

Die Höhe $h = h(t)$ über Meer sowie die Masse $m = m(t)$ bzw. $m = m(h)$ sind für ein startendes Space Shuttle für die ersten zwei Minuten (entspricht der Brenndauer der beiden abwerfbaren Feststoffbooster), in der folgenden Tabelle gegeben (www.nasa.gov):

t (s)	0	10	20	30	40	50	60
h (m)	2	286	1268	3009	5375	8220	11505
m (kg)	2'051'113	1'935'155	1'799'290	1'681'120	1'567'611	1'475'282	1'376'301
t (s)	70	80	90	100	110	120	
h (m)	15407	20127	25593	31672	38257	44931	
m (kg)	1'277'921	1'177'704	1'075'683	991'872	913'254	880'377	

Die gesamte Energie $E = E(t)$, die das Space Shuttle zum Zeitpunkt t hat, setzt sich zusammen aus seiner kinetischen Energie, $E_{kin}(t)$, und der potentiellen Energie, $E_{pot}(t)$, im Gravitationsfeld der Erde. Es gilt

$$\begin{aligned}
E(t) &= E_{kin}(t) + E_{pot}(t) \\
E_{kin}(t) &= \int_{R_0}^{R_0+h(t)} \frac{dm}{dt} \cdot v\, dh + \int_{R_0}^{R_0+h(t)} m \cdot \frac{dv}{dt}\, dh \\
E_{pot}(t) &= GM \cdot \int_{R_0}^{R_0+h(t)} \frac{m(h)}{h^2}\, dh
\end{aligned}$$

Dabei ist $R_0 = 6'378'137$ (m) der Erdradius, $M = 5.976 \cdot 10^{24}$(kg) die Erdmasse, $G = 6.673 \cdot 10^{-11}(\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2})$ die Gravitationskonstante.

Schreiben Sie ein Skript `Name_Vorname_Gruppe_S4_Aufg2.m` welches Ihnen die folgenden Aufgaben löst:

a) Berechnen sie mit Ihrem Programm `Name_Vorname_Klasse_S1_Aufg3a.m` die Geschwindigkeit $v(t) = \frac{dh}{dt}(t)$, die Beschleunigung $a(t) = \frac{dv}{dt}(t)$, die Massenänderung $\frac{dm}{dt}(t)$ zu jedem Zeitpunkt t sowie die Massenänderung $\frac{dm}{dh}(h)$ für jede Höhe h. Erzeugen Sie sechs Plots, die Ihnen $h(t)$, $v(t)$, $a(t)$, $m(t)$, $\frac{dm}{dt}(t)$ und $\frac{dm}{dh}(h)$ darstellen. Überprüfen Sie, dass $\frac{dm}{dt}(t) = \frac{dm}{dh}(h) \cdot v(t)$ gilt (da gemäss der Kettenregel gilt $\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$), indem Sie beide Seiten der Gleichung in einm siebten Plot darstellen. .

b) Berechnen Sie mit Ihrem Programm `Name_Vorname_Klasse_S3_Aufg4a.m` die potentielle Energie $E_{pot}(t)$ und die kinetische Energie $E_{kin}(t)$ zu jedem Zeitpunkt t. Stellen Sie $E_{kin}(t)$, $E_{pot}(t)$ und die totale Energie $E(t) = E_{kin}(t) + E_{pot}(t)$ in einer gemeinsamen Abbildung als Funktion der Zeit grafisch dar.

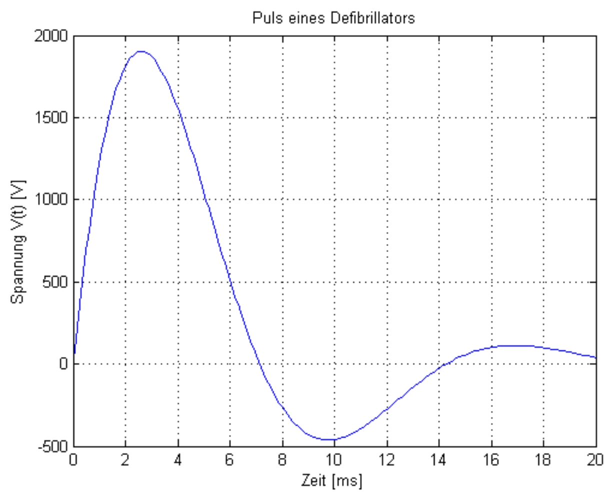
c) Ein durchschnittlicher schweizer Haushalt benötigt im Jahr eine Energie von ca. 10^{10} [J]. Wie viele solcher Haushalte könnten mit der nach $t = 120$s verbrauchten Energie für ein Jahr versorgt werden?

Aufgabe 2 (60 Minuten):

Die folgende Figur zeigt den Spannungspuls $V = V(t)$ (in Volt) eines Defibrillators. Es gilt

$$V(t) = 3500 \cdot \sin(140\pi t) \cdot \mathrm{e}^{-63\pi t}$$

mit t in Sekunden (s). Die untenstehende Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf der Spannung für die ersten 20 Milisekunden.



Die Energie $E = E(t)$ (in Joule), die vom Defibrillator abgegeben wird, berechnet sich zu

$$E(t) = \int_0^t \frac{V^2(t)}{R} dt,$$

dabei ist R der elektrische Widerstand eines Patienten. Erstellen Sie ein Skript `Name_Vorname_Gruppe_S4_Aufg2.m`, welches Ihnen für $R = 50\Omega$ die Zeit t_{max} berechnet, nach der der Puls abgestellt werden soll, sobald 250 Joule erreicht worden sind. Gehen Sie dabei folgendermassen vor:

a) Berechnen Sie die Funktion $E(t)$ mit der Romberg-Extrapolation bzw. mit ihrer Funktion `Name_Vorname_Gruppe_S3_Aufg3` für $n = 3$ und erzeugen Sie eine Grafik von $E(t)$ für $t \in [0, 50]$. Wie man erwartet, nimmt $E(t)$ zuerst monoton steigend zu, erreicht dann ein lokales Maximum und nimmt dann wieder ab, was nicht sein kann (weil das heissen würde, dass je länger der Puls dauert, irgendwie Energie 'vernichtet' würde). Wo liegt der Fehler, und wie kann er umgangen werden? Schreiben Sie Ihre Antwort als Kommentar ins Skript.

b) Lösen Sie das Nullstellenproblem $f(t) = E(t) - 250 = 0$ mit dem Newton-Verfahren $t_{i+1} = t_i - \frac{f(t_i)}{f'(t_i)}$ $(i = 0, 1, 2, 3, ...)$. Berechnen Sie dafür $f'(t_i)$ mit dem h^2-Algorithmus bzw. ihrer Funktion `Name_Vorname_Gruppe_S2_Aufg2` mit $h = 0.01$ und $n = 3$. Verwenden Sie als Abbruchbedingung $f(t_i - \epsilon) \cdot f(t_i + \epsilon) < 0$ mit $\epsilon = 10^{-5}$.