Übungsserie 8

Abgabe: gemäss Angaben Dozent

Fassen Sie Ihre Lösungen zusammen in die ZIP-Datei *Name_ Vorname_ Gruppe_ S8.zip*. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf OLAT hoch. Die einzelnen m-Files müssen ausführbar sein und in den Kommentarzeilen (beginnen mit %) soll bei Funktionen ein Beispiel eines funktionierenden Aufrufs angegeben werden. Verspätete Abgaben können nicht mehr berücksichtigt werden.

Aufgabe 1 (45 Minuten):

Benutzen Sie die Gleichungssysteme der Aufgabe 7.5 aus dem Skript (bzw. Aufgabe 4 aus Serie 7):

a) $y^{(4)} + 1.1y''' - 0.1y'' - 0.3y = \sin x + 5$ mit $y(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ und $y'(0) = 2$

b) $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ mit $y(1) = y'(1) = 2$

und berechnen Sie manuell je den ersten Schritt des Euler-Verfahrens und des klassischen vierstufigen Verfahrens von Runge-Kutta mit $h = 0.1$ (entspricht Aufgabe 7.6). Setzen Sie bei b) $n^2 = 1$. Scannen Sie Ihre Lösung in Name_Vorname_Gruppe_S8_Aufg1.pdf.

Aufgabe 2 (45 Minuten):

Die Differentialgleichung eines Fadenpendels lautet für den Auslenkwinkel $\varphi = \varphi(t)$ unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes

$$\varphi'' + \frac{c}{m}\varphi' + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Dabei ist $c = 0.16$ [Ns/m] der Dämpfungskoeffizient, $m = 1$ [kg] die Masse, $l = 1.2$ [m] die Länge des Fadens und $g = 9.81$ [mkg/s^2] die Erdbeschleunigung. Die Anfangsbedingungen sind $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$, $\varphi'(0) = 0$.

Schreiben Sie ein Skript `Name_Vorname_Gruppe_S8_Aufg2.m`, welches Ihnen die Lösung $\varphi(t)$ mittels des klassischen Runge-Kutta Verfahrens löst für $t \in [0, 60]$ (in Sekunden) und Schrittweite $\Delta t = 0.1$ sowie die Lösungskurve zeichnet. Schreiben Sie dafür die obige Differentialgleichung 2. Ordnung als System von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Tipp: Verwenden Sie Ihre Funktion `Name_Vorname_Gruppe_S6_Aufg1.m` und passen Sie den Programmcode so an, dass er mit Vektoren umgehen kann.

Aufgabe 3 (60 Minuten):

In dieser Aufgabe geht es darum, die Mittelpunktsregel als Verfahren zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen mit einer adaptiven Schrittweitensteuerung auszustatten. Als Modellproblem, an welchem das Verfahren getestet werden soll, verwenden wir dabei das Anfangswertproblem

$$y' = -12y + 30e^{-2t}, \qquad y(0) = y_0 = 0$$

mit der exakten Lösung

$$y(t) = 3\left(1 - \mathrm{e}^{-10t}\right) \cdot \mathrm{e}^{-2t}$$

Schreiben Sie ein Skript `Name_Vorname_Gruppe_S8_Aufg3.m`, welches Ihnen die folgende Aufgaben löst:

a) Lösen Sie das obige Anfangswertproblem für eine vorerst fixe Schrittweite h im Intervall $t \in [0,\, 10]$ einmal nach dem Euler-Verfahren und einmal nach der Mittelpunktsregel.

b) Jetzt soll für die Mittelpunktsregel die Schrittweite h adaptiv an die Verhältnisse angepasst werden, so dass in Bereichen einer starken Krümmung der Kurve eine kleine, und in Bereichen einer schwachen Krümmung eine grössere Schrittweite gewählt wird. Die Schrittweitensteuerung soll dabei wie folgt realisiert werden:

- Wir geben eine Fehlertoleranz `TOL` und eine Anfangsschrittweite h vor.
- In jedem Schritt k wird die Näherungslösung mit der aktuellen Schrittweite einmal nach der Mittelpunktsregel und einmal nach dem Euler-Verfahren berechnet. Wir bezeichnen dabei die entsprechenden y-Werte mit $y_k^{(M)}$ bzw. $y_k^{(E)}$.
- Falls
$$\mid y_k^{(M)} - y_k^{(E)} \mid < \frac{\mathtt{TOL}}{20}$$
gilt, so wird der aktuelle Schritt als gültig akzeptiert und zusätzlich die Schrittweite für den nächsten Schritt verdoppelt.
- Falls
$$\mid y_k^{(M)} - y_k^{(E)} \mid \geq \mathtt{TOL}$$
gilt, so wird die Schrittweite halbiert und dann der aktuelle Schritt wiederholt.
- Sonst wird der aktuelle Schritt als gültig akzeptiert und die Schrittweite für den nächsten Schritt beibehalten.

c) Ergänzen Sie Ihr MATLAB-Skript so, dass in einem Diagramm die exakte und die genäherte Lösungskurve $y(t)$ dargestellt wird. In einem zweiten Diagramm soll die (variable) Schrittweite in Abhängigkeit der Zeit t dargestellt werden.

d) Experimentieren Sie mit verschiedenen Werten für die Toleranz `TOL` und für die Anfangsschrittweite h. Ist das Verhalten des Algorithmus plausibel?