Übungsserie 7

Abgabe: gemäss Angaben Dozent

Fassen Sie Ihre Lösungen zusammen in die ZIP-Datei *Name_ Vorname_ Gruppe_ S7.zip*. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf OLAT hoch. Die einzelnen m-Files müssen ausführbar sein und in den Kommentarzeilen (beginnen mit %) soll bei Funktionen ein Beispiel eines funktionierenden Aufrufs angegeben werden. Verspätete Abgaben können nicht mehr berücksichtigt werden.

Aufgabe 1 (30 Minuten):

Leiten Sie die Adams-Bashforth Methode 4. Ordnung

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=0}^{3} b_j f(x_{i-j}, y_{i-j})$$

her, indem Sie die Koeffizienten b_j gemäss der Formel

$$b_j = \frac{(-1)^j}{j!(s-j)!} \int_0^1 \prod_{k=0,k\neq j}^{3} (u+k)\,du, \quad j = 0,1,2,3$$

bestimmen. Schreiben Sie dazu ein Skript `Name_Vorname_Gruppe_S7_Aufg1.m`. Benutzen Sie für die Bestimmung der Fakultät die MATLAB eigene Funktion `factorial.m` und berechnen Sie die auftretenden Integrale mittels Ihrer Funktion `Name_Vorname_Gruppe_S3_Aufg3.m` aus Serie 3 mit einem selbstgewählten "vernünftigen" Wert für n. Sofern Sie alles richtig machen, erhalten Sie

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3})\right)$$

Aufgabe 2 (30 Minuten):

Schreiben Sie eine Funktion `[x, yab4] = Name_Vorname_Gruppe_S7_Aufg2(f , a, b, n, y0)`, welche Ihnen das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(a) = y_0$ auf dem Intervall $[a, b]$ mit n Schritten gemäss der Adams-Bashforth Methode 4. Ordnung berechnet und in den Vektor `yab4` schreibt. Die fehlenden Startwerte y_i ($i = 0, 1, 2, 3$) berechnen Sie mit dem klassischen Runge-Kutta Verfahren bzw. Ihrer Funktion `Name_Vorname_Gruppe_S6_Aufg1.m` aus Serie 6.

Aufgabe 3 (30 Minuten):

Schreiben Sie ein Skript `Name_Vorname_Gruppe_S7_Aufg3.m.` welches Ihnen die folgenden Aufgaben berechnet:

a) Lösen Sie analog zu Aufgabe 7.4 im Skript und unter Verwendung Ihrer Funktionen `Name_Vorname_ Gruppe_S7_Aufg2.m` und `Name_Vorname_Gruppe_S6_Aufg1.m` das Anfangswertproblem

$$y'(x) = y(x),\ y(0) = 1$$

für $x \in [0, 1]$ mit der Adams-Bashforth.Methode 4. Ordnung sowie dem klassischen Runge-Kutta Verfahren für

$$n \in \{10^1, 10^2, ..., 10^8\}.$$

b) Berechnen Sie jeweils für jedes $n \in \{10^1, 10^2, ..., 10^8\}$ den globalen Fehler

$$| \; y(x_n) - y_n \; |$$

sowohl für die Adams-Bashforth Methode als auch für Runge-Kutta und plotten Sie diesen als Funktion von n ins gleiche Grafikfenster. Messen Sie zusätzlich jeweils für jedes n die Laufzeit Ihrer beiden Funktionen mittels den MATLAB Befehlen `tic` sowie `toc` und plotten Sie diese als Funktion von n zusammen in ein neues Grafikfenster. Achtung: spätestens bei $n = 10^7$ werden Sie etwas warten müssen. Sollte Ihr Computer Probleme haben, hören Sie bei $n = 10^6$ auf.

c) Interpretieren Sie Ihre Resultate und schreiben Sie sie als Kommentar ins Skript.

Aufgabe 4 (30 Minuten):

Entspricht Aufgabe 7.5 im Skript. Führen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen auf ein System erster Ordnung zurück und scannen Sie Ihre Lösung in das File Name_Vorname_Gruppe_S7_Aufg4.pdf.:

a) $y^{(4)} + 1.1y''' - 0.1y'' - 0.3y = \sin x + 5$ mit $y(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ und $y'(0) = 2$

b) $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ mit $y(1) = y'(1) = 2$