Fachbereich Mathematik
L. Margolis

Block 1, Thema 2
WS 2012/2013

Computerpraktikum Mathematik
Teil 3, Computeralgebra

Block 1, Thema 2: Partitionen von Untergruppen

Einführung: Sei G eine endliche Gruppe, welche nicht einfach ist, d.h. es exisitiert ein Normalteiler N von G mit $N \neq G$ und $N \neq 1$. Dann ist G/N ebenfalls eine Gruppe und falls diese wieder nicht einfach ist, kann man diesen Prozess fortsetzen bis man schließlich eine einfache Gruppe erhält. Es gilt sogar dass Untergruppen $N_0 = 1, N_1, ..., N_k = G$ existieren, so dass $N_{i-1} \trianglelefteq N_i$ und N_i/N_{i-1} einfach ist für $1 \leq i \leq k$. In diesem Sinne sind die einfachen Gruppen die "Bausteine"der endlichen Gruppen. Oft erhält man in der Gruppentheorie auch Aussagen der Art: Gilt x für alle endlichen einfachen Gruppen, so gilt x für alle endlichen Gruppen.
Eines der großen algebraischen Projekte des letzten Jahrhunderts war die sogennante Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen (CFSG = Classification of finite simple groups), also das Erstellen einer Liste aller endlichen einfachen Gruppen. Viele Mathematiker leisteten Beiträge zu diesem Projekt, so dass die Klassifikation, so sagt man, 1980 schließlich gelang. Allerdings umfasst der gesamte Beweis mehr als 10.000 Seiten und es gibt angeblich niemanden, der ihn je ganz gelesen und verstanden hat. Zwar wurden und werden Versuche unternommen den Beweis zu kürzen, größere Erfolge sind hier aber bislang nicht zu verzeichnen. In diesem Projekt sollen Sie sich mit einer Eigenschaft von einfachen, aber auch allgemeinen, Gruppen beschäftigen, welche bei der Klassifikation eine Rolle gespielt hat.

Definition: Seien $U_1, ..., U_k$ Untergruppen von G. Dann sagt man $\{U_1, ..., U_k\}$ ist eine **Partition** von G, wenn gilt $U_i \cap U_j = 1$ für $i \neq j$ und $U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_k = G$. G besitzt immer die Partition $\{G\}$, diese heißt die **triviale Partition**.

Beispiel: Betrachte die Gruppe $C_2 \times C_2$, dann exisitieren Elemente $a, b \in G$ mit $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$. Setze $U_1 = \langle a \rangle,\ U_2 = \langle b \rangle,\ U_3 = \langle ab \rangle$. Dann ist $\{U_1, U_2, U_3\}$

eine nicht-triviale Partition von Untergruppen.

Aufgabe 1:

a) Schreiben Sie eine `GAP`-Funktion `FindAllPartitions(G)`, welches für eine gegebene Gruppe G alle nicht-trivialen Partitionen von G bestimmt. Dieses Programm soll nur sehr kleine Gruppen untersuchen und Sie brauchen deshalb nicht auf seine Effizienz zu achten.

b) Schreiben Sie eine `GAP`-Funktion `HasNonTrivialPartition(G)`, welche von einer gegebenen Gruppe G entscheidet, ob diese eine nicht-triviale Partition besitzt. Gestalten Sie diese Funktion möglichst effizient, denn Sie soll in einer vernünftigen Zeitspanne auch größere Gruppen untersuchen können.

Aufgabe 2: Finden Sie mit Hilfe Ihrer in Aufgabe 1 konsturierten Funktionen:

- Die kleinste Gruppe, welche eine eine nicht-triviale Partition besitzt.
- Die kleinste Gruppe, welche eine nicht-triviale Partition besitzt und keine p-Gruppe ist.
- Die kleinste nicht zyklische Gruppe, welche keine nicht-triviale Partition besitzt.
- Die kleinste nicht zyklische Gruppe, welche keine nicht-triviale Partition besitzt und keine p-Gruppe ist.
- Die kleinste Gruppe, welche mehrere nicht-triviale Partitionen besitzt.

Aufgabe 3: (In Zusammenarbeit mit der Kleine-Einfache-Gruppen-Gruppe) Bestimmen Sie, welche der einfachen nicht-abelschen Gruppen bis Ordnung 10.000 eine nicht-triviale Partition von Untergruppen besitzen.
(Bemerkung: Die endlichen einfachen Gruppen, welche eine nicht-triviale Partition von Untergruppen besitzen wurden 1961 von Michio Suzuki klassifiziert.)

Reichen Sie Ihre Programme aus Aufgabe 1 und Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 2 und 3 ein. Falls Sie für Aufgabe 2 Programme geschrieben haben, reichen Sie diese ebenfalls ein, ansonsten genügt ein .log-file. Die Ergebnisse der Aufgabe 3 können gemeinsam mit der Kleine-Einfache-Gruppen-Gruppe eingereicht werden.