Fachbereich Mathematik
L. Margolis

Computerpraktikum Mathematik
Teil 3, Computeralgebra

Block 1, Thema 1: Kleine einfache Gruppen

Einführung: Sei G eine endliche Gruppe, welche nicht einfach ist, d.h. es exisitiert ein Normalteiler N von G mit $N \neq G$ und $N \neq 1$. Dann ist G/N ebenfalls eine Gruppe und falls diese wieder nicht einfach ist, kann man diesen Prozess fortsetzen bis man schließlich eine einfache Gruppe erhält. Es gilt sogar dass Untergruppen $N_0 = 1, N_1, ..., N_k = G$ existieren, so dass $N_{i-1} \trianglelefteq N_i$ und N_i/N_{i-1} einfach ist für $1 \leq i \leq k$. In diesem Sinne sind die einfachen Gruppen die "Bausteine"der endlichen Gruppen. Oft erhält man in der Gruppentheorie auch Aussagen der Art: Gilt x für alle endlichen einfachen Gruppen, so gilt x für alle endlichen Gruppen.
Eines der großen algebraischen Projekte des letzten Jahrhunderts war die sogennante Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen (CFSG = Classification of finite simple groups), also das Erstellen einer Liste aller endlichen einfachen Gruppen. Viele Mathematiker leisteten Beiträge zu diesem Projekt, so dass die Klassifikation, so sagt man, 1980 schließlich gelang. Allerdings umfasst der gesamte Beweis mehr als 10.000 Seiten und es gibt angeblich niemanden, der ihn je ganz gelesen und verstanden hat. Zwar wurden und werden Versuche unternommen den Beweis zu kürzen, größere Erfolge sind hier aber bislang nicht zu verzeichnen.
In diesem Projekt sollen Sie sich mit den kleinen einfachen Gruppen beschäftigen und diese auf einige Eigenschaften untersuchen, die bei der Klassifikation eine Rolle gespielt haben. Sie benötigen hierfür:

Definition: Eine einfache Gruppe G heißt **minimal einfach**, wenn alle echten Untergruppen von G auflösbar sind.

Definition: Seien $U_1, ..., U_k$ Untergruppen von G. Dann sagt man $\{U_1, ..., U_k\}$ ist eine **Partition** von G, wenn gilt $U_i \cap U_j = 1$ für $i \neq j$ und $U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_k = G$.

Definition: Sei $U \leq G$. Dann heißt die Untergruppe $C_G(U) = \{g \in G \mid g^{-1}ug = u \ \forall u \in U\}$ der **Zentralisator** von U in G. Die Untergruppe $N_G(U) = \{g \in G \mid g^{-1}Ug = U\}$ heißt **Normalisator** von U in G. Die Untergruppe $Z(G) = \{g \in G \mid g^{-1}hg = h \ \forall h \in G\}$ heißt **Zentrum** von G.

Definition: Sei G eine endliche Gruppe. Eine Untergruppe U von G heißt **lokal**, wenn eine Primzahl p und eine p-Untergruppe P von G existiert mit $N_G(P) = U$. Man nennt G eine **N-Gruppe**, wenn alle lokalen Untergruppen von G auflösbar sind.

Beispiel: Einige endliche einfache Gruppen:

a) Die endlichen einfachen abelschen Gruppen sind zyklisch von Primzahlordnung. Im weiteren reicht es also nicht-abelsche einfache Gruppen zu betrachten.

b) Die alternierenden Gruppen A_n sind einfach für $n \geq 5$.

c) Sei K ein endlicher Körper und sei $G = \mathrm{SL}(n, K)$ die Gruppe der $n \times n$-Matrizen mit Determinante 1 über diesem Körper. Dann ist $G/Z(G)$ eine einfache Gruppe, geschrieben $\mathrm{PSL}(n, K)$ oder auch $\mathrm{PSL}(n, q)$, wenn $|K| = q$ gilt.

Nutzen Sie zur Ausführung der Aufgaben `GAP`.

Aufgabe 1: Fertigen Sie eine Liste der endlichen einfachen nicht-abelschen Gruppen bis Ordnung 10.000 an. Sie dürfen verweden, dass diese Gruppen in folgender Liste enthalten sind: A_n, $\mathrm{PSL}(2, q)$, $\mathrm{PSL}(3, 3)$, $\mathrm{PSU}(3, 3)$ und M_{11}. (Die $\mathrm{PSU}(3, 3)$ ist eine sogenannte projektive, spezielle unitäre Gruppe, sie entsteht analog zur PSL aus unitären Matrizen. Die M_{11} ist die sogenannte Mathieu-Gruppe vom Grad 11. (`GAP`-Schreibweise: `MathieuGroup(11)`.) Sie ist eine sporadische Gruppe, also in keiner Serie von einfachen Gruppen enthalten.) Verweden Sie, dass die Ordnung eines endlichen Körpers eine Primzahlpotenz ist. Achten Sie darauf, dass Ihre Liste nicht zwei isomorphe Gruppen enthält.
Welche der von Ihnen gefundenen Gruppen sind minimal einfach?

(Bemerkung: Die minimalen einfachen Gruppen wurden 1968 von John G. Thompson klassifiziert.)

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass A_8 und $\mathrm{PSL}(3,4)$ nicht isomorph sind. (Tipp: Betrachten Sie Gruppeninvarianten wie in Aufgabe 4.)

Aufgabe 3: (In Zusammenarbeit mit der Partitionen-Gruppe) Bestimmen Sie, welche der von Ihnen bestimmten Gruppen eine nicht-triviale Partition von Untergruppen besitzt.
(Bemerkung: Die endlichen einfachen Gruppen, welche eine nicht-triviale Partition von Untergruppen besitzen wurden 1961 von Michio Suzuki klassifiziert.)

Aufgabe 4: (In Zusammenarbeit mit Sylowgruppen-Gruppe) Bestimmen Sie, welche der von Ihnen gefundenen Gruppen N-Gruppen sind. Geben Sie außerdem für $P \in Syl_2(G)$ und $P \in Syl_3(G)$ die Isomorphietypen von P, $Z(P)$, $C_G(P)$ und $N_G(P)$ an, wobei G eine Gruppe aus Ihrer Liste ist.
(Bemerkung: Die einfachen Gruppen, welche N-Gruppen sind wurden von John G. Thompson in einer Serie von Veröffentlichungen (1968-1974) bestimmt. Die 2-Sylowgruppen und ihre Zentralisatoren spielen die wohl entscheidende Rolle im Beweis der Klassifikation.)

Stellen Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.