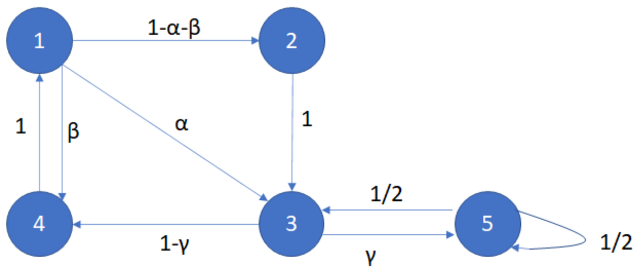
Άσκηση 4: Νευροασαφής Έλεγχος και Εφαρμογές 2023-2024

Εισαγωγή:

Στο πρώτο θέμα θα ασχοληθούμε τη δομή των αλυσίδων Markov και στο δεύτερο με το δυναμικό προγραμματισμό.

Θέμα 1: Θεωρήστε την αλυσίδα Markov:

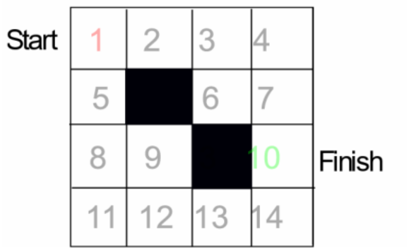


Α. Για τις διάφορες τιμές των α,β,γ, ποιες αναδρομικές κλάσεις έχει και ποια περιοδικότητα;

Β. Υποθέστε ότι α=γ=0, β=0.1. Υπολογίστε την πιθανότητα η κατάσταση τις χρονικές στιγμές 1000, 1001, 1002 και 1003 να είναι καθεμία από τις 1 έως 5 ως συνάρτηση της αρχικής κατάστασης. Επαναλάβετε για α=β=γ=0.1.

Γ. Υποθέστε ότι α=β=γ=0.1 και ότι η αρχική κατάσταση είναι 1. Προσομοιώστε μια τροχιά της αλυσίδας Markov. Εξετάστε το ποσοστό του χρόνου που παραμένει η κατάσταση σε κάθε μια από τις θέσεις 1,..,5 στις πρώτες 10.000 χρονικές στιγμές. Συγκρίνετε με τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα μετάβασης. Τι παρατηρείτε;

Θέμα 2: Θεωρήστε τον παρακάτω λαβύρινθο:



Υποθέστε ότι σε κάθε βήμα ένα ρομποτάκι βρίσκεται σε ένα τετράγωνο και κινείται με ίση πιθανότητα σε καθεμία από τις διαθέσιμες γειτονικές θέσεις (πάνω, κάτω, δεξιά και αριστερά). Αρχικά το ρομπότ είναι στη θέση 1. Η θέση 10 είναι απορροφητική.

Α. Υπολογίστε το μέσο χρόνο απορρόφησης.

Β. Προσομοιώστε τη στοχαστική δυναμική πολλές φορές (π.χ. 1000), και φτιάξτε ένα ιστόγραμμα των χρόνων απορρόφησης.

Θέμα 3: (Πρόβλημα parking Example 1.3.3 Bertsekas) Ένας οδηγός ψάχνει για θέση στάθμευσης στην πορεία προς τον προορισμό του. Υπάρχουν στη σειρά N πιθανές θέσεις parking πριν από το garage. Κάθε θέση στάθμευσης k πριν το garage έχει μια τιμή c(k) ενώ είναι κενή με πιθανότητα p(k). Αν φτάσει στο garage τότε υποχρεωτικά παρκάρει εκεί και πληρώνει μια υψηλότερη τιμή C. Υπολογίστε τη βέλτιστη στρατηγική αν N=200, c(k) = N-k, C=100, και p(k)=0.05.

Θέμα 4: (Τυχαίος Περίπατος με έλεγχο) Θεωρήστε ένα στοχαστικό σύστημα (controlled Markov chain) του οποίου η κατάσταση μπορεί να πάρει τις τιμές 1,..,10. Ο έλεγχος παίρνει δύο τιμές +1 και -1. Για u=+1, η κατάσταση μεταβαίνει μια θέση δεξιότερα με πιθανότητα 50% και παραμένει η ίδια με πιθανότητα 50%. Αντίστοιχα για u=-1 η κατάσταση μεταβαίνει μια θέση αριστερότερα με πιθανότητα 50% και παραμένει η ίδια με πιθανότητα 50%. Υπολογίστε τον ελεγκτή που ελαχιστοποιεί το:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k g\left(x_k\right),$$

για τις διάφορες τιμές του α. Το g περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g(x)	1	2	3	4	5	4	2	0	1	2