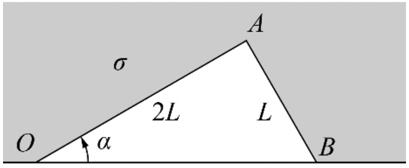


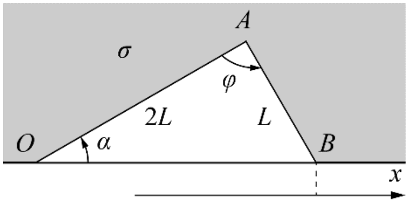
11.1. Треугольник и плёнка. Лёгкие стержни OA и AB соединены шарнирно между собой. Конец O стержня OA закреплён шарнирно на гладкой спице, а на конце B стержня AB прикреплено с помощью шарнира маленькое колечко массы m, которое может скользить по спице. Длины стержней различаются в два раза: $|AB| = L$, $|OA| = 2L$, все шарниры невесомы. Система снаружи (до закреплённой внешней границы) окружена двусторонней плёнкой с коэффициентом поверхностного натяжения σ. В области между спицей и стержнями плёнки нет. Силу тяжести не учитывайте.

1) Найдите величину угла α в положении равновесия.

2) Найдите период малых колебаний системы вблизи положения равновесия.

11.1. Возможное решение. Способ 1 (энергетика).

1) В состоянии равновесия энергия системы должна быть минимальна. В данном случае энергия системы – это энергия натянутой плёнки, которая пропорциональна площади плёнки: с учётом того, что плёнка двусторонняя, $E_{пл} = 2\sigma S_{пл}$. Ясно, что минимум этой энергии отвечает положению стержней, в котором максимальна площадь треугольника OAB. Её удобно вычислять по двум сторонам (OA и AB) и углу φ между ними:



$$S_{OAB} = \frac{1}{2}L \cdot 2L \cdot \sin(\varphi) = L^2 \sin(\varphi).$$

Эта площадь максимальна при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то есть когда стержни перпендикулярны друг другу, и поэтому в прямоугольном треугольнике OAB $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{1}{2}$. Итак, в состоянии равновесия

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 26{,}6°.$$

2) Потенциальная энергия определена с точностью до константы, поэтому мы можем считать энергию системы в положении равновесия равной нулю. Тогда энергия системы в положении, в котором колечко сдвинулось вдоль стержня в точку с координатой x, отсчитываемой от положения равновесия (см. рисунок), равна

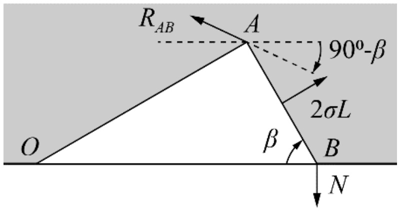
$$E(x) = 2\sigma[L^2 - S_{OAB}(x)] = 2\sigma L^2\{1 - \sin[\varphi(x)]\}.$$

Длина стороны OB в этом положении $|OB| = L\sqrt{5} + x$, и, в соответствии с теоремой косинусов, $(L\sqrt{5} + x)^2 = L^2 + 4L^2 - 4L^2\cos[\varphi(x)] \Rightarrow \cos[\varphi(x)] \approx -\frac{\sqrt{5}}{2L}x$.

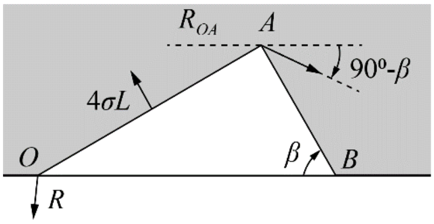
Отметим, что в этом выражении мы пренебрегли слагаемым порядка $\frac{x^2}{L^2}$ (колебания малые). В том же приближении $\sin[\varphi(x)] \approx \sqrt{1 - \frac{5x^2}{4L^2}} \approx 1 - \frac{5x^2}{8L^2}$. Значит, $E(x) \approx \frac{5\sigma x^2}{4} = \frac{kx^2}{2}$. Здесь введено обозначение $k = \frac{5\sigma}{2}$. Мы получили в точности такое же выражение, как для груза на пружине – малые колебания колечка будут происходить по гармоническому закону с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{5\sigma}}$.

Ответы: $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 26{,}6°$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{5\sigma}}$.

11.1. Возможное решение задачи. Способ 2 (статика и динамика).



1) Рассмотрим равновесие стержня AB, на который действуют три силы. Это равнодействующая сил поверхностного натяжения, которая перпендикулярна стержню и приложена к его середине. Поскольку стержень невесом, из условия равенства моментов относительно колечка находим проекцию силы реакции шарнира на направление, перпендикулярное стержню: $2\sigma L\frac{L}{2} - R_{\text{AB}\perp}L = 0 \Rightarrow R_{\text{AB}\perp} = \sigma L$. Наконец, из условия баланса проекций сил на стержень, находим параллельную стержню составляющую силы реакции шарнира $R_{\text{AB}\,||} = N\sin(\beta) = \sigma L\text{tg}(\beta)$. Таким образом, величина этой силы $R_{\text{AB}} = \frac{\sigma L}{\cos(\beta)}$, и она направлена под углом $(2\beta - 90°)$ к стержню, и под углом $(90° - \beta)$ к горизонтали. Сила, действующая на шарнир А со стороны стержня АВ, в соответствии с III законом Ньютона, равна по величине и противоположна по направлению найденной силе $\vec{R}_{\text{AB}}$, а также и силе, действующей на шарнир А со стороны стержня ОА (шарнир А находится в равновесии под действием этих двух сил). И, конечно, сила $\vec{R}_{\text{OA}}$, действующая со стороны шарнира А на стержень ОА, оказывается равна по величине и противоположна по направлению найденной нами силе: $\vec{R}_{\text{OA}} = -\vec{R}_{\text{AB}}$.



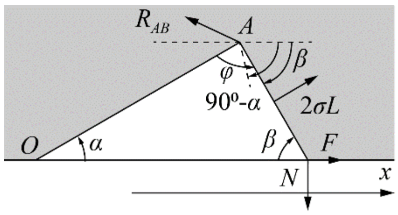
Теперь мы можем рассмотреть равновесие стержня ОА под действием $\vec{R}_{\text{OA}}$, равнодействующей сил поверхностного натяжения и силы реакции шарнира О. Записав условие равновесия моментов относительно О, находим перпендикулярную стержню компоненту $\vec{R}_{\text{OA}}$: $$4\sigma L\frac{L}{2} - R_{\text{OA}\perp}L = 0 \Rightarrow R_{\text{OA}\perp} = 2\sigma L.$$

Но из найденного ранее получаем другое выражение для этой величины:

$$R_{\text{OA}\perp} = \frac{\sigma L}{\cos(\beta)}\cos(90° - \beta) = \sigma L \cdot \text{tg}(\beta).$$

Из сопоставления этих выражений видим, что в состоянии равновесия $\text{tg}(\beta) = 2$. Из теоремы синусов $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, и поэтому $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 26{,}6°$.

Отметим, что из полученных углов ($\sin(\alpha) = \cos(\beta)$) видно, что третий угол в треугольнике OAB – прямой!



2) Рассмотрим теперь неравновесное положение колечка, в котором оно имеет координату x, отсчитываемую от положения равновесия (см. рис.). Далее будем считать, что обозначения всех углов относятся именно к смещённому положению колечка. Поскольку нам нужно описывать малые гармонические колебания, то все силы нужно вычислять с точностью до первого порядка по x/L. Например, длина OB в этом положении $|OB| = L\sqrt{5} + x$, и, в соответствии с теоремой косинусов,

$$(L\sqrt{5} + x)^2 = L^2 + 4L^2 - 4L^2\cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) \approx -\frac{\sqrt{5}}{2L}x.$$

Соответственно, с этой точностью $\sin(\varphi) \approx \sqrt{1 - \frac{5x^2}{4L^2}} \approx 1$. По теореме синусов

$$\sin(\beta) = \frac{2L}{L\sqrt{5}+x}\sin(\varphi) \approx \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{5L}x \Rightarrow \cos(\beta) \approx \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5L}x.$$

Поскольку стержни и шарниры невесомые, то сумма приложенных к каждому из них сил и моментов сил равна нулю. Шайба в положении покоя просто передавала действующую на неё силу нормальной реакции спицы на стержень AB. Поскольку шайба массивная, и теперь движется с ускорением, то действующая с её стороны на стержень AB сила имеет компоненту F вдоль спицы. Повторим рассуждения о стержне AB для новой ситуации. Условие равновесия моментов сил относительно шарнира A даёт уравнение (1):

$$2\sigma L\frac{L}{2}-NL\cos(\beta)+FL\sin(\beta)=0\Rightarrow NL\cos(\beta)-FL\sin(\beta)=\sigma L.$$

Условие равновесия моментов относительно колечка прежнее: $2\sigma L\frac{L}{2}-R_{\mathrm{AB}\perp}L=0\Rightarrow R_{\mathrm{AB}\perp}=\sigma L$. Условие баланса сил в проекции на стержень AB теперь превратилось в

$$R_{\mathrm{AB}\,||}=N\sin(\beta)+F\cos(\beta).$$

Условие равновесия моментов сил, действующих на стержень OA относительно O, тоже не изменилось: $4\sigma L\frac{L}{2}-R_{\mathrm{OA}\perp}L=0\Rightarrow R_{\mathrm{OA}\perp}=2\sigma L$. С учётом $\vec{R}_{\mathrm{OA}}=-\vec{R}_{\mathrm{AB}}$ можно вычислить эту компоненту через силы, действующие на AB (важно обратить внимание на то, что направление, перпендикулярное OA, составляет с горизонталью угол $(90°-\alpha)$, а стержень AB – угол β):

$$R_{\mathrm{OA}\perp}=2\sigma L=R_{\mathrm{AB}\,||}\cos(90°-\alpha-\beta)+R_{\mathrm{AB}\perp}\cos(180°-\alpha-\beta).$$

С учётом того, что $(180°-\alpha-\beta=\varphi)$, и выражений для сил, получаем уравнение (2):

$$N\sin(\beta)+F\cos(\beta)=\sigma L\frac{2-\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}\approx\sigma L\left(2+\frac{\sqrt{5}}{2L}x\right).$$

Исключая из (1) и (2) силу N, и используя полученные выше приближённые формулы для углов, находим, что

$$F\approx\sigma L\left[\left(2+\frac{\sqrt{5}}{2L}x\right)\cos(\beta)-\sin(\beta)\right]\approx\frac{5}{2}\sigma\cdot x.$$

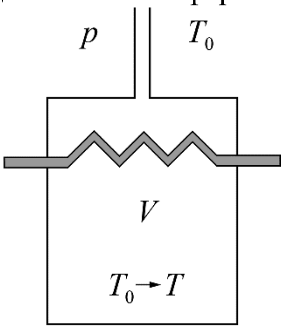
Соответствующая компонента силы, действующей со стороны стержня AB на колечко, имеет противоположный знак. Таким образом, уравнение движения колечка при $x\ll L$ имеет вид:

$$m\ddot{x}\approx-\frac{5}{2}\sigma\cdot x.$$

Это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega=\sqrt{\frac{5\sigma}{2m}}$. Период колебаний $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2m}{5\sigma}}$.

Ответы: $\alpha=\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\approx 26{,}6°$, $T=2\pi\sqrt{\frac{2m}{5\sigma}}$.

11.2. Охлаждение. Сосуд объёмом V с теплообменником внутри сообщается с атмосферой через тонкую длинную трубку. Исходно температура в нём T_o равна температуре атмосферного воздуха. По теплообменнику прокачивают охлаждающую жидкость до тех пор, пока температура воздуха во всём сосуде не уменьшится до T ($T < T_o$). Сколько тепла от воздуха передано теплообменнику? Атмосферное давление P. Потоком тепла через стенки сосуда и трубку можно пренебречь. Внутренняя энергия воздуха $U = (5/2)\nu RT$, где ν – число молей, T – температура, а R – газовая постоянная.



11.2. Возможное решение. При включении теплообменника температура вблизи него падает, остывший воздух сжимается, становится тяжелее и опускается вниз, а на его место входит более тёплый атмосферный воздух. При вхождении воздуха совершается положительная работа атмосферного давления.

Из уравнения состояния идеального газа находим, что число молей воздуха в сосуде увеличится от начального $\nu_o = PV/RT_o$ до $\nu = PV/RT$ при конечной температуре T.

Если ΔV объём атмосферного воздуха, вошедшего в сосуд, то начальный объём ν молей воздуха при заданных внешних условиях:

$$V + \Delta V = \nu RT_o/P = VT_o/T, \text{ а } \Delta V = V(T_o/T - 1).$$

Тогда работа атмосферного давления при вхождении воздуха в сосуд:

$$A = P\Delta V = PV(T_o/T - 1).$$

По первому началу термодинамики работа идёт на изменение внутренней энергии и передачу теплоты (в данном случае теплообменнику):

$$A = \Delta U + Q \text{ или } Q = A - \Delta U.$$

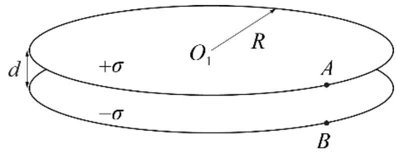
Используем выражения для работы и изменения внутренней энергии:

$$Q = A - \Delta U = PV(T_o/T - 1) - (5/2)\nu R(T - T_o).$$

Используя выражение $\nu = PV/RT$, окончательно найдём искомое тепло

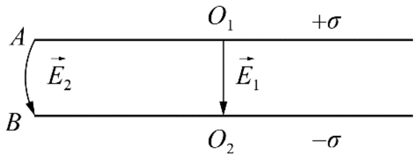
$$Q = (7/2)PV(T_o/T - 1).$$

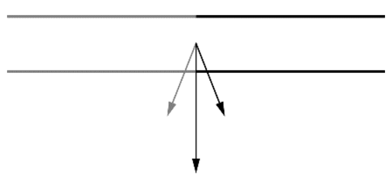
11.3. Плоский конденсатор. Две круглые непроводящие пластины радиуса R располагаются параллельно на малом расстоянии $d \ll R$ друг от друга, образуя плоский конденсатор. Пластины заряжены равномерно с поверхностными плотностями заряда $+\sigma$ и $-\sigma$. Точки O_1 и O_2 — центры пластин. Точки A и B находятся на краях пластин. Отрезки O_1O_2 и AB перпендикулярны плоскостям пластин. Найдите разности потенциалов между парами точек: 1) O_1 и O_2; 2) A и B; 3) O_1 и A.



11.3. Решение задачи. 1. Напряжённость электрического поля в зазоре между центрами пластин соответствует напряжённости между двумя бесконечными плоскостями $E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Тогда разность потенциалов между центрами пластин $\varphi_{O_1} - \varphi_{O_2} = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$.

2. Рассмотрим поле $\overrightarrow{E_2}$ в зазоре на границе пластин.





Так как зазор мал, пластины можно считать полуплоскостями. Для нахождения поля $\overrightarrow{E_2}$ между ними мысленно добавим ещё две полуплоскости. Они будут создавать напряжённость поля, имеющую такую же нормальную (т. е. перпендикулярную плоскостям) компоненту, а суммарная напряжённость поля от всех четырёх полуплоскостей будет равна E_1. Таким образом получаем, что нормальная компонента напряжённости электрического поля двух полуплоскостей равна половине E_1, или

$$E_{2n} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Приведённое рассуждение применимо для любой точки отрезка AB, отсюда разность потенциалов между краями пластин:

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}.$$

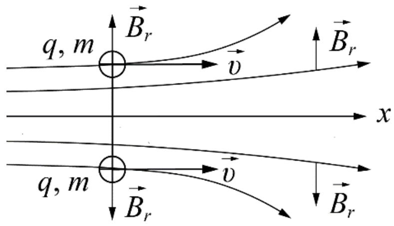
3. Из потенциальности электрического поля следует:

$$\varphi_{O_1} - \varphi_A = \varphi_B - \varphi_A + \varphi_{O_2} - \varphi_B + \varphi_{O_1} - \varphi_{O_2}$$

Из соображений симметрии $\varphi_{O_1} - \varphi_A = \varphi_B - \varphi_{O_2}$. Комбинируя эти выражения, получаем

$$\varphi_{O_1} - \varphi_A = \frac{1}{2}\Big(\big(\varphi_{O_1} - \varphi_{O_2}\big) - (\varphi_A - \varphi_B)\Big) = \frac{\sigma d}{4\varepsilon_0}.$$

11.4. Гантель в магнитном поле. В аксиально-симметричном магнитном поле находится гантель – лёгкий непроводящий стержень с заряженными шариками на концах. Массы и заряды шариков одинаковы и равны m и q. Гантель перпендикулярна оси симметрии (оси x), а её центр находится на этой оси (см. рис.). Проекция магнитного поля на радиальное (перпендикулярное оси) направление на расстоянии равном радиусу гантели везде одинакова и равна B_r. Осевая компонента поля изменяется вдоль оси. В момент времени t_0 гантели сообщают скорость υ_0 вдоль оси x. Силу тяжести не учитывайте.



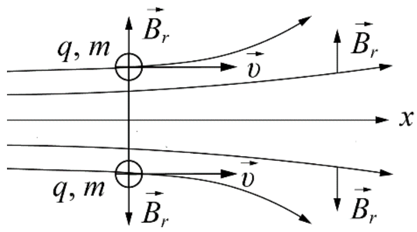
1) На какое наибольшее расстояние $L_{\max}$ от начального положения удаляется центр гантели?

2) Чему равна максимальная окружная (перпендикулярная оси симметрии) скорость вращения шариков гантели в процессе движения?

3) Через какое время после t_0 угловая скорость вращения гантели окажется наибольшей?

11.4. Возможное решение. Вызываемые осевой проекцией магнитного поля силы направлены вдоль стержня, равны по величине и противоположно направлены и не сказываются на движении гантели.

В начальный момент силы, связанные с радиальной проекцией магнитного поля, оказываются тангенциальными, то есть перпендикулярными оси и радиальному направлению. Это приводит к росту угловой скорости вращения вокруг оси симметрии, но при этом нет сил, смещающих центр гантели поперёк оси или вызывающих поворот плоскости вращения. В самом деле, при скорости υ шариков вдоль оси и окружной скорости u возникающие из-за радиальной проекции магнитного поля B_r силы перпендикулярны скорости шариков и имеют осевую составляющую $F_x = -quB_r$ и тангенциальную (окружную) $F_\tau = qVB_r$. Соответственно



$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -quB_r; \quad m\frac{du}{dt} = qVB_r.$$

Пока υ не уменьшится до нуля, окружная и угловая скорости растут. Поскольку работа магнитной силы равна нулю, то кинетическая энергия остаётся неизменной и максимальная окружная скорость $u_{max} = \upsilon_0$.

При смещении центра гантели на x от начальной точки

$$m\frac{du}{dt} = q\upsilon B_r = qB_r\frac{dx}{dt},$$

откуда $mu = qB_r x$. Для максимального смещения $L_{\max}$ имеем:

$$mu_{max} = qB_r L_{max} \quad \text{и} \quad L_{max} = \frac{m\upsilon_0}{qB_r}.$$

После подстановки $u = \frac{qB_r x}{m}$ в выражение $m\frac{d\upsilon}{dt} = -quB_r$ получим уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{qB_r}{m}\right)^2 x$$

с круговой частотой $\omega = \frac{qB_r}{m}$ и периодом $T = \frac{2\pi m}{qB_r}$. Первый раз от момента начала движения максимальная скорость вращения будет достигнута через четверть периода $t_1 = \frac{\pi m}{2qB_r}$. Затем максимальное значение скорости вращения будет достигаться через каждые полпериода. Таким образом, для моментов времени, в которые достигается максимальная скорость вращения, справедлива формула

$$t_n = \frac{\pi m}{2qB_r}(2n - 1),$$

где n - натуральное число.

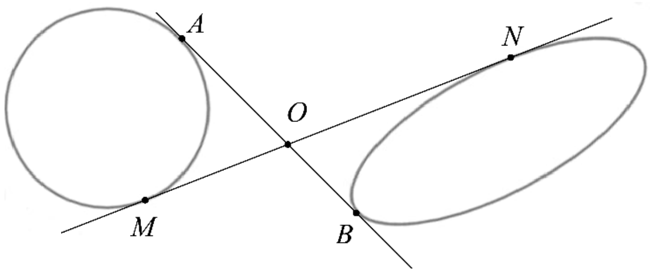
11.5. Круг Снелла. Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертёж оптической схемы, на которой были изображены тонкая собирающая линза, круг и его изображение в линзе. От времени чернила выцвели, и на чертеже остались видны лишь круг и его изображение, но известно, что круг целиком располагался в плоскости, проходящей через главную оптическую ось линзы, и что круг и его изображение располагались по разные стороны от плоскости линзы.

Пользуясь только циркулем и линейкой без делений, восстановите положения:

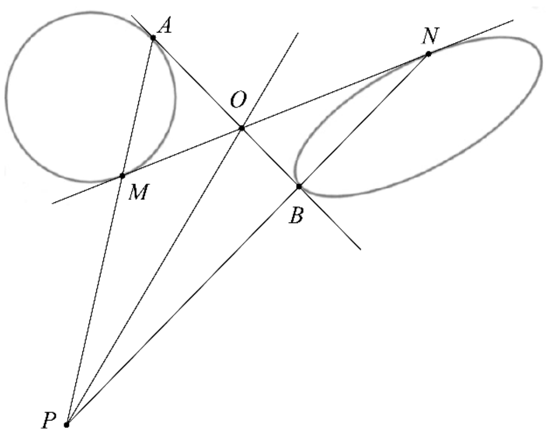
1) оптического центра O линзы;
2) плоскости линзы;
3) фокусов F_1 и F_2 линзы.

11.5. Возможное решение. Поскольку плоскость линзы находится между источником и его изображением, то изображение является действительным, причём фокальные плоскости линзы также находятся между ними – в противном случае изображение оказалось бы «разорванным» на действительную и мнимую часть.

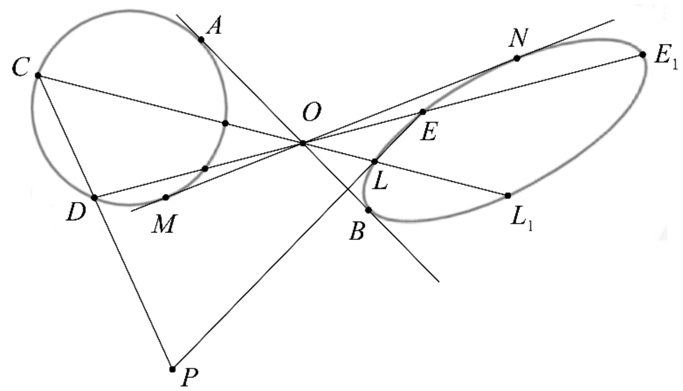
Точечный источник и его изображение в линзе лежат на прямой, проходящей через оптический центр O. Если прямая, проходящая через оптический центр, касается круга, то на этой прямой находится изображение лишь одной его точки. Это означает, что данная прямая касается и изображения круга. Из этого следует, что оптический центр линзы O находится в точке пересечения общих внутренних касательных AB и MN к кругу и его изображению.



Рассмотрим луч, проходящий через точки A и M. После преломления в линзе он проходит через точки пересечения касательных к изображению круга B и N. Поэтому в точке пересечения линий, проходящих через точки круга и его изображения, находится точка P, принадлежащая плоскости линзы. Проведя прямую OP, найдём положение плоскости линзы.



Отметим, что для построения плоскости линзы можно провести через O любые две прямые, пересекающие круг и его изображение (например, CL и DE), выбрать на этих прямых точки, принадлежащие кругу, используя найденный центр линзы определить изображения этих точек (L и E), а затем провести через эти пары точек прямые до пересечения, чтобы определить положение точки в плоскости линзы.



Однако при таком подходе важно не перепутать изображения этих точек с другими точками пересечения прямых CO, DO с линией изображения («ложные точки» E_1 и L_1). Для правильного выбора достаточно заметить, что для действительных изображений в собирающей линзе увеличение расстояние от предмета до линзы приводит к уменьшению расстояния от линзы до изображения. Поэтому изображениям «дальних» от O точек пересечения круга с прямыми (C и D) отвечают «ближние» к O точки пересечения этих прямых с эллипсом-изображением.

Закачивая наше построение, определим главную оптической ось линзы O_1O_2 как прямую, проходящую через точку O перпендикулярно OP. Наконец, для определения положения фокусов линзы рассмотрим лучи, идущие параллельно главной оптической оси через точку M и её изображение N. По другую сторону от линзы эти лучи проходят через точки N и M соответственно, пересекая оптическую ось в точках фокусов F_1 и F_2. Как видно, фокальные плоскости действительно оказались между кругом и его изображением.