

第 38 届全国中学生物理竞赛决赛试题

一、一个不透明薄片上的小圆孔如图 1a 中黑色之间的部分所示，半径 OM 为 1.00 mm 。用波长 $\lambda = 632.8\text{ nm}$ 的氦氖激光作为光源从小孔左侧平行正入射。在垂直于小孔的对称轴上右侧有某个点 P ；相对于 P 点，小孔处的波面可视为半波带的组合：以 P 点为球心， P 点到小孔中心 O 的距离为 r_0 ($r_0 \gg \lambda$)，分别以 $r_0 + \frac{\lambda}{2}$ 、

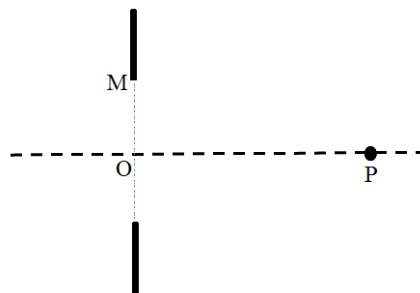


图 1a

$r_0 + 2 \times \frac{\lambda}{2}$ 、 $r_0 + 3 \times \frac{\lambda}{2}$ 、 \dots 为半径做球面，将小孔所在

平面的波面划分成 N 个环带 (N 为自然数)， P 点到小孔边缘 M 的距离为 $r_0 + N \frac{\lambda}{2}$ ，半径最小的环带则是一个圆面，这样划分出的环带称为半波带 (因为相邻环带的相应边缘到 P 点的光程差为 $\frac{\lambda}{2}$)。显然，环带的数目 N 决定了 P 点的位置。在需要将原有半波带重新划分或合并时，只考虑将已有的每个半波带重新划分为若干个新的半波带，或者将已有的若干个半波带重新合并为一个新的半波带。

(1) 若 $N = 2n + 1$ ，试分别求相应于 $n = 0$ 和 $n = 1$ 时 P 点的位置 P_0 (P_0 为轴上最右侧的亮点，称为主焦点) 和 P_1 (P_1 也为亮点，称为次焦点)。

(2) 若 $N = 4$ (4 级波带片)，且在第 1、3 半波带放置透明材料 (图 1b 中灰色部分)，使通过该透明

材料的光增加 $\frac{\lambda}{2}$ 光程。求

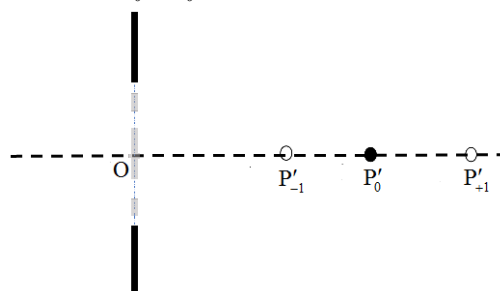


图 1b

- (i) 此 4 级波带片的主焦点 P'_0 的位置；
- (ii) 紧邻主焦点 P'_0 左侧暗点 P'_{-1} 的位置；
- (iii) 紧邻主焦点 P'_0 右侧暗点 P'_{+1} 的位置。

(3) 波带片不仅可以实现平行光的聚焦，还可以成像。以上的 4 级波带片平行光的聚焦过程，相当于物距无穷远、像距等于焦距的情形。将一个点光源 (物) 置于轴上 O 点左侧 3 m 处的 S 点，其像点为 S' ，如图 1c 所示。

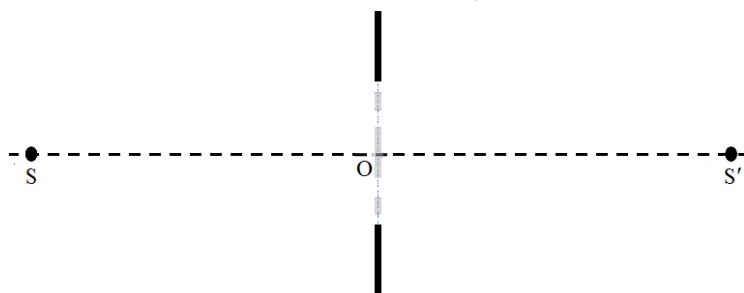


图 1c

(i) 4 级波带片主焦点对应的像距 OS' 是多少？并验证成像公式是否满足。

(ii) 如果该波带片所成的像不是唯一的，轴上还有其他像点，那么距离第 (3) (i) 问所得到的像点最近的另一个像点在哪里？与此成像过程对应的次焦点的焦距是多少？ (不能应用成像公式)

(iii) 如果将物放置于此波带片左侧，与 O 点距离为 $OP'_0/2$ ，求分别将 4 级波带片的主焦点和 (3) (ii) 所述的次焦点作为焦点而成的像的类型 (虚像或实像) 与位置。 (不能应用成像公式)

二、2021 年 6 月神州 12 载人火箭与天宫太空站成功对接，这里涉及到追击者（神州 12 火箭）与目标（太空站）在绕地轨道相遇的问题。本题采用霍尔曼变轨方案来探究追击者如何改变速度（速率和方向）与固定轨道上的目标实现对接（相遇）。

如图 2a，目标 A 和追击者 c 都在以半径为 r_0 的圆轨道上以速率 v_0 逆时针运动。在 0 时刻两者的位置分别为

$$\theta_{A,i} = \theta_0, \theta_{c,i} = 0, r_{A,i} = r_{c,i} = r_0$$

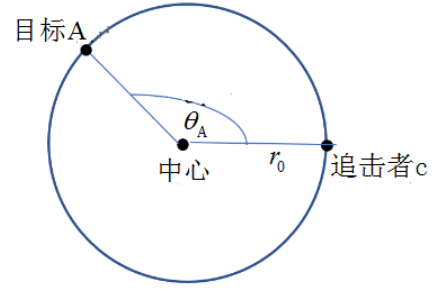


图 2a.

在此时刻，追击者 c 瞬间点火，速度瞬间改变 Δv (如图 2b 所示); c 的轨道也从半径为 r_0 的圆轨道瞬间变为图 2c 所示的椭圆轨道，椭圆轨道的长轴与极轴方向（中心到点火时 c 的位置的连线）之间的夹角为 ϕ (ϕ 是沿顺时针方向测量的)。c 的运动方向与极轴方向之间的夹角记为 θ_c (θ_c 正方向为逆时针方向), c 与中心相距 $r_c(\theta_c)$ 。

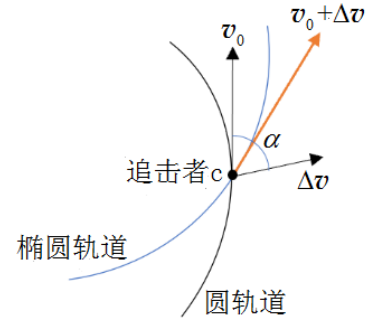


图 2b

(1) 若飞行物的质量 m 、能量 E （实际为飞行物和地球组成系统的总机械能）和角动量 L 均为已知量，试用 E 、 L 、 m 和题给的已知参量 r_0 、 v_0 等来表示轨道参量 R 、 ε 。已知：正椭圆轨道（长轴沿极轴方向）在极坐标下的形式（原点取为右焦点）为

$$r(\theta) = \frac{R}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

其中， R 是轨道尺寸参量， ε 是轨道偏心率，统称为轨道参量。

(2) 写出点火（见图 2c）后追击者 c 的轨道 $r_c(\theta_c)$ 的表达式，用 r_0 、偏心率 ε 和 ϕ 表示。

(3) 写出点火后追击者 c 的轨道周期 T_c 与目标 A 的周期 T_A 之比 T_c / T_A ，用 ε 和 ϕ 表示。

(4) 定义两个点火参数（见图 2b）：无量纲的速度改变率 $\delta = \left| \frac{\Delta v}{v_0} \right|$ ， Δv 与 v_0 之间的夹角 α （重合时 $\alpha = 0$ ，

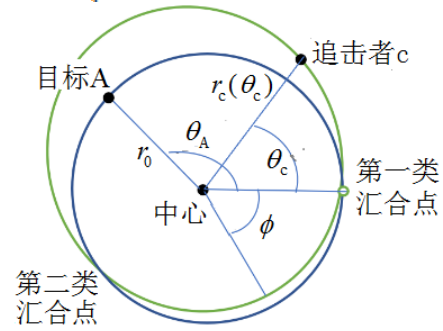


图 2c

顺时针方向取为正方向)。试用点火参数 δ 和 α 来表示追击者 c 的轨道的偏心率 ε 和 $\varepsilon \cos \phi$ 。

(5) 考虑追击者 c 和目标 A 在第一类轨道汇合点（见图 2c）相遇的情形。设自 0 时刻起目标 A 经过第一类轨道汇合点的次数为 n_A ，追击者 c 经过第一类轨道汇合点的次数（起始时不计在内）为 n_c 。在 0 时刻， $\theta_{A,i} = \theta_0$ ， $\theta_{c,i} = 0$ 。求 n_A ，用 n_c 、 θ_0 、 ε 和 ϕ 表示。

(6) 将 n_A 用 δ 、 α 表出，固定 δ ，试求函数 $n_A(\alpha)$ 相对于 α 变化的两个简单、明显的极值点 α_0 （以便即使喷火时角度 α 相对于 α_0 有一些偏差，但解依然近似成立，便于成功对接）。

(7) 如果取上述两个 α_0 值之一，

(i) δ 值有一个上限 δ_{\max} （即若 $\delta > \delta_{\max}$ ，追击者 c 和目标 A 不会相遇），求 δ_{\max} ；

(ii) 令 θ_A 的初始值为 θ_0 ，试写出 δ 与 θ_0 、 n_A 、 n_c 的关系式；并求当 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ 、 $n_A = 2$ 、 $n_c = 1$ 时 δ 的值。

三、宇宙中可能有四分之一的物质是以暗物质的形式存在的。暗物质可能是由一种新的基本粒子构成的。人们一直在寻找暗物质粒子和已知的粒子之间的相互作用，其中一类重要的实验是寻找暗物质粒子和原子核之间的相互作用。这类实验一般是以某种材料作为靶物质，当暗物质粒子飞入探测器时会和靶物质的原子核发生碰撞。在这个过程中原本几乎静止的原子核会从暗物质粒子得到一部分动能，从而在靶物质中运动，产生光信号和电信号。暗物质探测器可以探测到这些信号从而对暗物质进行观测。

(1) 选取靶物质为氙同位素原子核 ^{132}Xe ，假设暗物质粒子 X 和 ^{132}Xe 核的质量都是质子质量 m_p 的 132 倍；在粒子 X 和 ^{132}Xe 核的质心系中，散射是各向同性的（出射粒子在各个方向上出现的概率相等）。设有一个暗物质粒子 X 以大小为 200 km/s 的速度沿 z 方向进入探测器，与静止的靶核 ^{132}Xe 碰撞。试推导实验室系（碰撞前相对于靶核 ^{132}Xe 静止的参考系）中碰撞后，

- (i) ^{132}Xe 核的动量与其出射角的关系；
- (ii) ^{132}Xe 核的角分布（按其出射角的概率分布）；
- (iii) ^{132}Xe 核动能的分布。

(2) 人们常常用散射截面来表示两个粒子之间相互作用的大小，散射截面类似于某种横截面积，而横截面积可理解为两个粒子之间发生碰撞时的有效面积。例如，两个半径分别为 r_1 和 r_2 的刚性小球之间碰撞的横截面积为 $\pi(r_1 + r_2)^2$ ，这就是两小球碰撞的散射截面。现在探测器中有 1.0 t 氙原子，暗物质粒子 X 和 ^{132}Xe 核之间碰撞的散射截面为 $1.0 \times 10^{-38} \text{ cm}^2$ ；假设所有的暗物质粒子 X 的速度大小都是 200 km/s，假设在地球附近的暗物质的密度为 $0.40 m_p / \text{cm}^3$ 。试求这个探测器里每年能发生多少次暗物质粒子 X 和 ^{132}Xe 核之间的碰撞？阿佛加德罗常数 $N_A = 6.023 \times 10^{23}$ 。为简化起见，假设质子静质量为 1.0 g/mol。

(3) 探测器探测到的信号是由 ^{132}Xe 核在碰撞过程中所得到的动能产生的。然而，只有当该动能超出探测器的阈值时这个信号才能被记录下来。假设这个阈值为 10 keV，试估算这个探测器每年可以探测到多少个暗物质粒子 X 与 ^{132}Xe 核发生了碰撞？质子的静质量为 $0.94 \text{ GeV}/c^2$ ， c 是真空中光速。

(4) 银河系中的暗物质粒子的速率服从一定的分布 $f(v)$ ，暗物质粒子的速率有一个上限， v_{\max} ，即当 $v > v_{\max}$ 时， $f(v) = 0$ 。请回答这个上限是由什么造成的？

(5) 对于地球上的实验室参考系，暗物质粒子速度分布的上限是真空中光速的 0.002 倍。另外，我们实际上也不知道暗物质粒子的质量是多少。请问当暗物质粒子的质量小于多少时，上面的探测器将不可能探测到暗物质的信号？

四、在生物体中电相互作用起着很重要的作用。将一个类 DNA 的酸性分子放入水中，分子上一些松散附着的原子可能解离，正离子漂走，留下一些电子，使这个大分子带负电。类似地，水中的细胞膜也会因此而带上负电，它们之间的静电排斥作用可使这些大分子或细胞避免“结块”。由于物质本身是电中性的，溶液中漂浮着的大量正离子，会使这些大分子之间的静电力随距离衰减。在常温 T 下考察以下问题：

(1) (i) 考虑带负电的细胞膜外侧（朝向正离子漂浮的区域）附近靠近其表面的区域。此时细胞膜可视为无限大平面。取 x 轴垂直于细胞膜外表面，方向指向膜外侧，原点在膜外表面上。膜周围溶液的介电常量为 ε ，膜外表面上均匀分布的面电荷密度为 $-\sigma$ ($\sigma > 0$)。系统与环境保持热平衡。由于静电作用，溶液中各处正离子的密度并不均匀，但可认为各局域部分都是平衡态。此时正离子的行为与地面上大气分子的行为类似，只是这里正离子受到静电场作用，而大气分子受到重力场作用。取紧靠膜外表面处正离子数密度 n_0 为待定常量。试写出膜外表面附近电势 φ 满足的微分方程。已知电子电量为 $-e$ ，正离子电量为 $+e$ ，玻尔兹曼常量为 k ；忽略重力和水的浮力。提示：玻尔兹曼统计认为，粒子处于能量为 E 的状态的几率正比于 $\exp(-\frac{E}{kT})$ ， T 为粒子所处平衡态的绝对温度。

(ii) 细胞膜表面内的液状组织可认为是导电的；选取膜表面上的电势为零。试写出在膜外表面上电势 φ 满足的边界条件。

(iii) 在给定的边界条件下，取对数函数 $\varphi(x) = A \ln(1+Bx)$ 作为第 (1) (i) 问中得到的微分方程的试探解。试定出常量 n_0 、 A 、 B 的值，并将 $\varphi(x)$ 和 $n(x)$ （在 x 处的正离子数密度）用 σ 、 ε 、 T 、 e 、 k 表出；

(iv) 试验证，所求得的 $n(x)$ 保证了整个系统是电中性的。

(v) 求以带电的膜外表面单位面积为底的足够高的柱形体积内的静电场能 U_f ，以及同一体积中的所有正离子在静电场中的总电势能 U_e 。

(2) 考虑两个细胞彼此靠近的情形。两个细胞膜外侧及它们之间的这个系统，可用这样的简化模型研究：已知两个均匀带负电的无限大平行平板各带面电荷密度 $-\sigma$ ，相互之间距离为 $2D$ 。两板正中间处选为坐标原点， x 轴垂直于平板，原点电势选为零，原点处的正离子数密度 n_0 作为待定参量。取函数 $\varphi(x) = A \ln[\cos(Bx)]$ 作为微分方程的试探解。

(i) 由 $\varphi(x)$ 满足的微分方程定出常量 A 、 B ，用 T 、 ε 、 e 、 k 、 n_0 表出。

(ii) 求 n_0 ，用 D 、 σ 、 ε 、 T 、 e 、 k 、 θ （若遇到超越方程，不必求解，该方程在物理区域的解记为 θ ）表出。

(iii) 给出正离子在细胞外表面处与两膜中心处的粒子数密度之差 $\Delta n \equiv n(\pm D) - n_0$ ，用 σ 、 ε 、 T 、 k 表出。

(iv) 试验证，所求得的 $n(x)$ 保证了整个系统是电中性的。

(v) 试给出带电平面（细胞膜）单位面积上所受的作用力的合力。已知细胞膜内外都充满了密度相同的水。提示：正离子在水中的行为与理想气体类似，且局域地处于热平衡。

(vi) 如果其它条件不变，在两平板仍可视无限大的前提下，试讨论在近距离和远距离两种不同的极限情形下，带电平面单位面积上所受的作用力的合力大小如何随距离 D 而改变？

五、(1) 一个电子的自旋磁矩为

$$\mu = \frac{-e}{m} S$$

式中 $-e$ ($e > 0$) 是电子电荷, m 是电子质量, $\frac{-e}{m}$ 是电子的荷质比; S 是自旋角动量, 其 z 分量 S_z 只能取两个值, 自旋向上时 $S_z = \frac{1}{2}\hbar$, 向下时 $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$, 其中 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h 是普朗克常量。假设一个分子或原子的磁矩等于一个电子的自旋磁矩。

(i) 将顺磁体置于外磁场中, 由于其分子的磁矩平行或反平行于磁场方向排列的几率发生变化而产生磁化; 磁化程度用单位体积内的磁矩 (磁化强度) M 描述, $M = \chi H$, 其中 χ 为磁化率, $H \equiv \frac{B}{\mu_0} - M$ 为磁场强度, B 为磁感应强度, μ_0 为真空磁导率。在通常温度 T (绝对温度) 下, $\chi \ll 1$, $kT \gg \frac{e\hbar}{2m} B$ (k 为玻尔兹曼常量); 设磁感应强度 B 是均匀的, 顺磁体的分子数密度为 n , 试利用玻尔兹曼统计导出顺磁体的磁化率满足 $\chi = \frac{C}{T}$, 并给出 C 的表

达式。已知: 玻尔兹曼统计认为, 粒子处在某个能量状态的几率正比于 $e^{-\frac{E}{kT}}$, 其中 E 为该状态的能量, T 为粒子所处平衡态的绝对温度。

(ii) 铁磁体不同于顺磁体: 在居里温度以下, 铁磁体可以在没有外磁场的环境中产生并保持比较强的磁性, 此称为自发磁化; 自发磁化产生“磁畴”, 每个“磁畴”中分子磁矩均沿着同一方向排列 (顺排), 此时铁磁体处于铁磁相。磁矩发生顺排的原因是因为量子效应, 也可以认为里面有很强的等效磁场, 外斯称其为“分子场”。“分子场”比一个自旋磁矩在原子间距上产生的磁场大 3 个量级左右。在居里温度以上, 铁磁体转变为顺磁体, 它的磁化率遵从居里-外斯定律 $\chi = \frac{C}{T - \theta}$ (其中 θ 为居里温度), 与通常的顺磁体有差异, 其差异来自于

铁磁体内部的“分子场” H_m , H_m 可表示为 $H_m = \gamma M$ 。假设铁磁体的分子数密度亦为 n , 试给出 γ 的表达式 (居里温度 θ 可视为已知量); 并导出在所有磁矩都是顺排的情形下分子场 H_m 的表达式。

(2) 在铁磁晶体中原子是在周期性的格点上排列的。每个原子所感受到的磁场可理解为其最近邻格点上的原子提供的“分子场”的平均值。

(i) 考察如图 5a 所示的一维晶格自旋系统, 所有格点上的磁矩都是顺排的。这个系统的居里温度为 θ 。假设上一问中导出的 H_m 与 θ 之间的关系

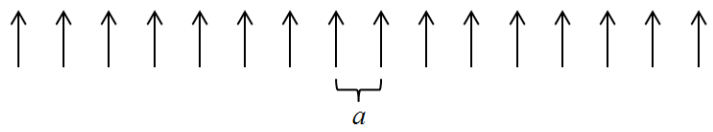


图 5a

仍然成立, 且此系统包含 N ($N \gg 1$) 个格点, 每个格点上有一个原子; 当发生自发磁化后, 原子的自旋平行排列, 这样的排列会使系统能量最低。试给出此时一个自旋在其最近邻格点上产生的等效磁场、以及整个系统的磁能。

(ii) 假设这个一维晶格自旋系统中的某一个非端点晶格上的自旋发生翻转, 变为反平行排列, 如图 5b 所示。相比于图 5a 的情形, 系统的能量增加了多少?

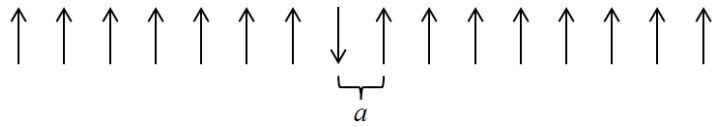


图 5b

(3) 若原子自旋交替反向排列, 则称为反铁磁体。反铁磁体具有特殊的晶格结构: 该结构由 A 位晶格和 B 位晶格组成, 如图 5c 所示。A 位的最

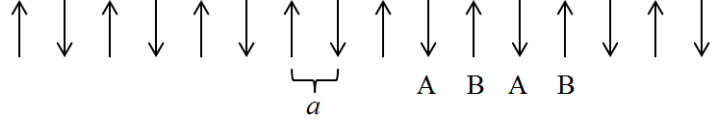


图 5c

近邻都是 B, 次近邻才是 A; B 位类似。反铁磁体的最近邻“分子场”与铁磁体的方向相反, 而且除了最近邻自旋之外, 次近邻自旋对“分子场”也有贡献。此时, A、B 位的“分子场”可分别表示为

$$\mathbf{H}_{mA} = -\alpha_{AB}\boldsymbol{\mu}_B - \alpha_{AA}\boldsymbol{\mu}_A, \quad \mathbf{H}_{mB} = -\alpha_{AB}\boldsymbol{\mu}_A - \alpha_{BB}\boldsymbol{\mu}_B,$$

式中, $\boldsymbol{\mu}_A$ 、 $\boldsymbol{\mu}_B$ 分别是 A、B 位上自旋磁矩。设所有 A 位原子都是相同的, 所有 B 位原子也都是相同的, 则 $\alpha_{AA} = \alpha_{BB} = \alpha$, $\alpha_{AB} = \alpha_{BA} = \beta$, $\beta > |\alpha|$ 。

(i) 试给出具有 N 个格点 (A、B 各有 $N/2$ 个格点) 的反铁磁体的磁能;

(ii) 奈尔温度是指高出这个温度时, 反铁磁相消失, 反铁磁体呈顺磁性。这时, A 位晶格和 B 位晶格的磁化强度和磁场分别满足

$$M_A = \frac{C}{2T} H_A, \quad M_B = \frac{C}{2T} H_B,$$

这里系数 C 与第 (1) (i) 问中的类同。试给出一维反铁磁体的奈尔温度。

(4) 下面考虑另一种情境: 原子分布在晶格常数为 a 的二维 x - y 平面内的正方点阵上, 原子的磁矩可在平面内转动。如图 5d, 在尺寸为 L ($L \gg a$) 的平面区域内, 磁矩分布由各点上的箭头所示。由于“分子场”效应, 磁矩之间具有比较强的相互作用, 这种作用只明显存在于最近邻分子之间。设此平面内第 i 个格点上的自旋角动量 \mathbf{S}_i 与 x 轴的夹角为 $\theta_i \in [0, 2\pi]$, 系统磁能可表示为

$$\begin{aligned} E(\{\theta_i\}) &= -J' \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \\ &= -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \end{aligned}$$

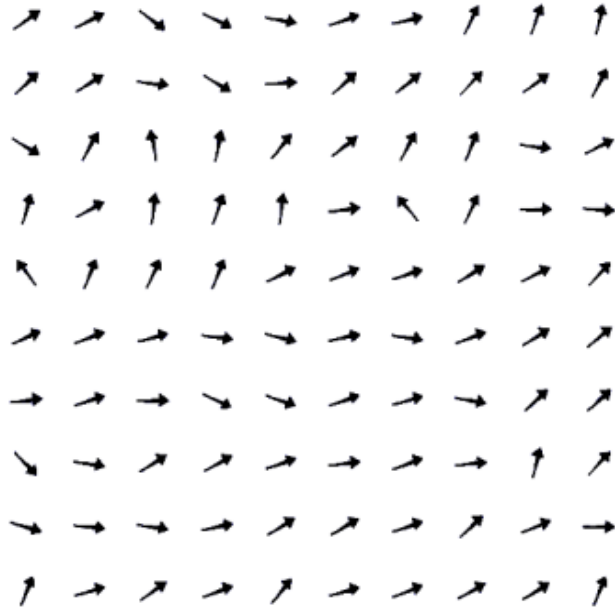


图 5d

其中 J' 、 J (J' 、 $J > 0$) 为常量, $\langle i, j \rangle$ 代表所有最近邻 (一个格点一般有四个最近邻的格点) 的格点 i 和 j , 系统构型由 $\{\theta_i\}$ 给出。假设系统与环境达到热平衡, 系统体积不变, 此时亥姆赫兹自由能为 $F = E - TS$, 其中 E 为系统内能, S 为系统熵。

(i) 系统中可能存在的涡旋构型如图 5e 所示。沿着围绕涡旋中心的闭合回路走一圈，该闭合回路上最近邻格点 $\langle i, j \rangle$ 的磁矩取向角之差的和为

$$\sum_{\langle i, j \rangle} (\theta_i - \theta_j) = 2\pi l$$

这里， l 是与涡旋结构有关的一个正整数， $l=1$ 的情形如图 5e 所示。为方便起见，考虑以涡旋中心为圆心、较大半径为 r 的闭合回路（圆），试求圆上相邻格点取向角之差的平均值 $\langle \theta_i - \theta_j \rangle$ 。

(ii) 当围绕涡旋中心的回路半径 r 比较大时，可近似认为磁矩依次排列成半径差为 a 的一系列同心圆，相邻同心圆上最近邻磁矩之间的夹角可认为是零。半径小的区域也作同样近似，对总能量影响不大。由此估算图 5e 所示的一个涡旋系统的能量。

(iii) 如果涡旋的中心放在不同的位置，则可以认为系统处于不同的状态。假设在尺寸为 L 、晶格常数为 a 的正方点阵上只有一个涡旋，试估算可能的状态数 Ω ，进而计算系统的熵 $S \equiv k \ln \Omega$ 。

(iv) 若系统存在某个温度，高于或低于此温度，系统性质有明显不同，则可能发生了相变。对于一个涡旋系统，找出可能的相变温度，并加以说明。

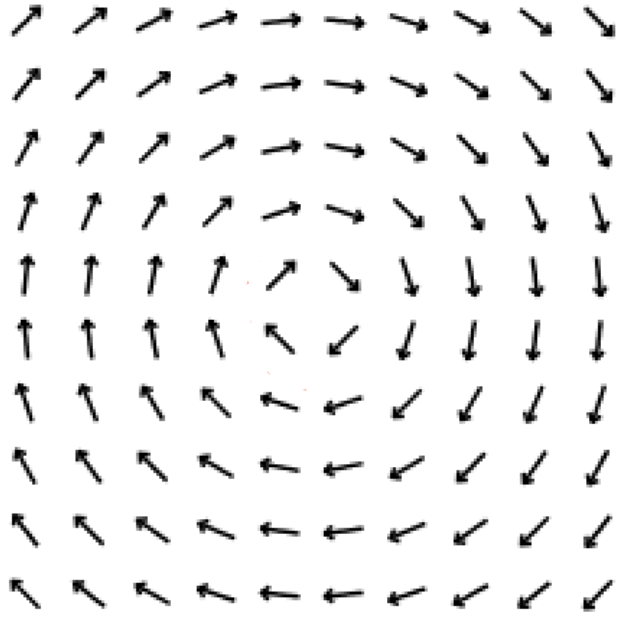


图 5e