第38届全国中学生物理竞赛复赛试题

一、（1）一宽束平行光正入射到折射率为 n 的平凸透镜左侧平面上，会聚于透镜主轴上的点 F，系统过主轴的截面如图 1a 所示。已知凸透镜顶点 O 到 F 点的距离为 r_0 。试在极坐标系中求所示平凸透镜的凸面形状，并表示成直角坐标系中的标准形式。

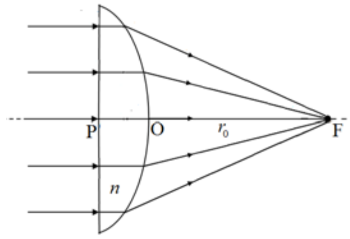

图 1a

（2）在如图 1a 所示的光学系统中，共轴地插入一个折射率为 n' 的平凹透镜（平凹透镜的平面在凹面的右侧，顶点在 O、F 点之间的光轴上，到 F 的距离为 r_0'，$r_0' < r_0$），使原来汇聚到 F 点的光线经平凹透镜的凹面折射后平行向右射出。

（i）在极坐标系中求所插入的平凹透镜的凹面形状，并表示成直角坐标系中的标准形式；

（ii）已知通过平凸透镜后的汇聚光线与主轴的夹角 θ 的最大值为 $\theta_{\max}$，求入射平行圆光束与出射平行圆光束的横截面半径之比。

二、如图 2a，一端开口的薄壁玻璃管竖直放置，开口朝上，玻璃管总长 $l = 75.0\ \mathrm{cm}$，横截面积 $S = 10.0\ \mathrm{cm}^2$，玻璃管内用水银封闭一段理想气体，水银和理想气体之间有一薄而轻的绝热光滑活塞，气柱高度与水银柱高度均为 $h = 25.0\ \mathrm{cm}$ 。已知该理想气体初始温度 $T_0 = 400\ \mathrm{K}$，定体摩尔热容 $C_V = \frac{5}{2}R$，其中 $R = 8.31\ \mathrm{J/(mol \cdot K)}$ 为普适气体常量；水银密度 $\rho = 13.6 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$，大气压强 $p_0 = 75.0\ \mathrm{cmHg}$，重力加速度大小 $g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$ 。

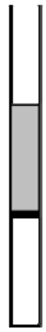
图 2a

（1）过程 A：对封闭的气体缓慢加热，使水银上液面恰好到达玻璃管开口处，求过程 A 中封闭气体对外所做的功；

（2）过程 B：继续对封闭气体缓慢加热，直至水银恰好全部流出为止（薄活塞恰好与玻璃管开口平齐），通过计算说明过程 B 能否缓慢稳定地发生？计算过程 B 中封闭气体所吸收的热量。

忽略玻璃管和水银的热膨胀效应。计算结果保留三位有效数字。

三、如图 3a，一个半径为 r 的均质超球向上、下两个固定的平行硬板之间发射，与两板接连碰撞 3 次后，几乎返回原处；取 x 轴水平向右，y 轴竖直向下，z 轴正向按右手螺旋确定。开始时球心速度的水平分量为 v_{0x}，z 方向的分量为 0，球绕过球心的轴（平行于 z 轴）的角速度大小为 ω_{0z}（$\omega_{0z} < v_{0x}/r$）。不考虑重力。

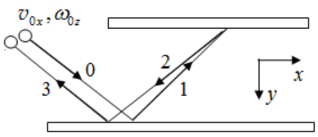

图 3a

（1）求超球与板碰撞第 1 次后球心速度的水平分量 v_{1x} 和球转动的角速度 ω_{1z}；

（2）求超球与板碰撞第 2 次后球心速度的水平分量 v_{2x} 和球转动的角速度 ω_{2z}；

（3）求超球与板碰撞第 3 次后球心速度的水平分量 v_{3x} 和球转动的角速度 ω_{3z} 。

提示：已知一质量为 m、半径为 r 的均质球体绕过球心的轴的转动惯量为 $J = 2mr^2/5$；超球是一种硬质橡皮球体，它在硬板面上的反跳可视为是完全弹性的，换言之，在接触点无滑动，它在接触点受到静摩擦力与正压力时产生的切向形变和法向形变可视为是弹性的，为简化起见，假设这两种形变是彼此无关的（因而相应的弹力各自均为保守力）。

四、一枚小的永磁针可视为一个半径很小的电流环，其磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 的大小为 $\mu = IS$（I 为固有不变的环电流强度，$S = \pi R^2$，R 为电流环的半径），方向与电流环所在的平面垂直，且与电流方向成右手螺旋关系，如图 4a 所示。两枚小磁针 A 和 B 的磁矩大小保持不变均为 μ，质量均为 m 。取竖直向下的方向为 z 轴正方向建立坐标系。将 A 固定在坐标系的原点 O 上，其磁矩方向沿 x 轴正方向；将 B 置于 A 的正下方。已知真空的磁导率为 μ_0，重力加速度大小为 g 。

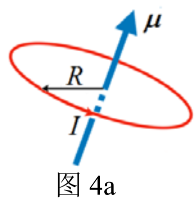

图 4a

（1）假设 B 的磁矩方向与 x 轴成 θ 角，其质心坐标为 $(0,0,z)$（$z >> R$），求 A、B 之间的相互作用势能。

（2）假设 z 不变，求 B 可以处于稳定平衡时与 x 轴所成的角 $\theta_{稳}$（所谓稳定平衡是指：在小扰动下，B 的磁矩指向

若偏离了 $\theta_{稳}$，则仍有回到原来指向的趋势）。

（3）现假设 z 可以变化，但 B 的磁矩与 x 轴所成的角 $\theta=\theta_{稳}$，求 B 的受力平衡位置，并说明此平衡位置是否为稳定平衡位置（所谓不稳定平衡是指：在小的扰动下，B 在重力的作用下掉落，或者被 A 吸附过去）。

五、原子激光制冷是一种利用激光使原子减速、降低原子温度的技术。冷原子实验中减速原子束流的塞曼减速装置如图 5a 所示：一束与准直后的原子束流反向传播的单频激光与原子发生散射，以达到使原子减速的目的。原子和光子的散射过程可理解为原子吸收光子、随即各向同性地发射相同能量光子的过程。单位时间内一个原子散射光子的数目称为散射速率。当原子的能级与激光频率共振时，原子散射光子的散射速率最大，减速效果最好。然而，在正常情况下，当原子速度改变（被减速）后，由于多普勒效应，原子与激光不再共振，造成减速暂停。塞曼减速装置利用原子跃迁频率会受磁场影响的特性（塞曼效应：原子的能级会受到外磁场影响，从而能级间跃迁所吸收的光的频率也会受到外磁场的影响），利用随空间变化的磁场来补偿多普勒效应的影响，使原子在减速管中处处与激光共振，直至将原子减速至接近静止。

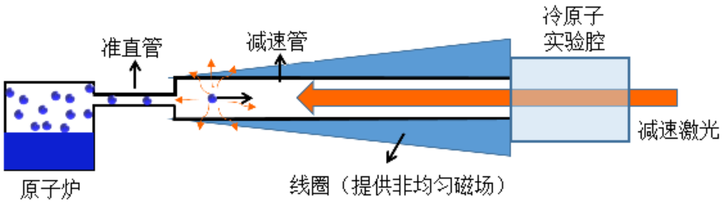

图 5a

（1）考虑被加热到350°C 的 ^{40}K 原子气体，问准直后（假设准直后原子只有一个方向的自由度）的原子的方均根速率 v_0 是多少？

（2）激光与对应的原子跃迁共振时，原子对光子的散射速率为 $\Gamma=5.00\times10^{6}\,\mathrm{s}^{-1}$。已知用于减速原子的激光波长是 670 nm，问原子做减速运动时的加速度 a 为多少？将具有方均根速率 v_0 的 ^{40}K 原子一直被激光共振减速至静止所需的距离是多少？

（3）不考虑磁场的影响，试计算激光频率应该比原子静止时的激光共振频率减小多少才能与以方均根速率 v_0（向着光源方向）运动的原子发生共振跃迁？

（4）已知在磁场的作用下，原子对应的跃迁的频率随磁感应强度变大而线性变小（塞曼效应）

$$f_0(B)=f_0(B=0)+\beta B$$

式中，系数 $\beta=-1.00\times10^{10}$ Hz/T。假设在准直管出口处（$z=0$）^{40}K 原子以均方根速率 v_0 朝激光射来的方向运动，同时假设在准直管出口处（$z=0$）的磁感应强度 B 为 0。为了使原子在减速管中（直至原子减速至接近静止）处处被激光共振减速，需要加上随着离准直管出口处距离 z 而变化的磁场来补偿多普勒效应的影响。试求需要加上的磁场的磁感应强度 $B(z)$ 与 z 的关系。

已知普朗克常量 $h=6.626\times10^{-34}$ Js，玻尔兹曼常量 $k_B=1.38\times10^{-23}$ J / K，单位原子质量 $1\ \mathrm{u}=1.66\times10^{-27}$ kg。

六、如图 6a，在真空中两个同轴放置的无限长均匀带电的薄壁圆筒，圆筒的半径分别为r_1和r_2；在平行于筒轴方向上，单位长度内、外圆筒的质量均为m，单位长度内、外圆筒分别带有q（$q>0$）、$-q$的电荷。两个圆筒均可以各自绕其中心轴自由旋转。已知真空的介电常量（电容率）和磁导率分别为ε_0和μ_0。

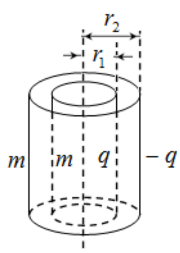

图 6a

（1）计算在距离轴r处的电场强度；

（2）当内外圆筒以相同的角速度ω同向旋转时，求空间中的磁感应强度分布。

（3）若在内圆筒处（$r=r_1$），从静止释放一个质量为μ，电荷量为Q（Q与q同号）的点电荷，试分析当ω满足什么条件时，此点电荷能够在电磁场的作用下到达外圆筒处（$r=r_2$）。

（4）若初始时内、外圆筒均静止，现对外圆筒施加一力矩使其开始旋转，当外圆筒的角速度达到Ω时，试计算

（i）内圆筒转动的角速度ω；

（ii）在从初始时直至外圆筒的角速度达到Ω的整个过程中，沿轴向单位长度的外圆筒所受到的外力矩（不包括两圆筒感应电磁场作用力的力矩）M的总冲量矩J；

（iii）沿轴向单位长度的内、外圆筒的总的机械角动量L。

七、一简化的汽车力学模型如图 7a 所示：半径为r、质量均为m的前轮（两个前轮视为一个物体m）和后轮（两个后轮视为一个物体m）分别视为均质圆柱刚体，前后轮轴相距L；刚体车身质量为M，质心位于前后轮轴正中，且与两轮轴所在平面相距h。车轮与地面之间的滑动摩擦因数为μ（假定最大静摩擦力等于滑动摩擦力）。忽略空气阻力；忽略车轮转动过程中转轴受到的摩擦力矩。重力加速度大小为g。任一半径为r、质量为m的均质圆柱相对于中心轴的转动惯量为$J=mr^2/2$。

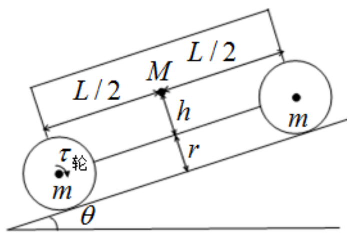

图 7a

（1）假定某时刻汽车在倾角为θ的斜坡（斜面）上无滑动地向上加速运动，车身的加速度为a；前后轮与地面的正压力均大于零，分别求出前轮和后轮与地面的正压力$N_{前}$和$N_{后}$。据此确定为了使前轮不离开地面，加速度的最大安全值$a_{安全}$（此后始终假定$a<a_{安全}$）。

（2）假定汽车在倾角为θ的斜坡上做加速运动。在时刻t，车身上的发动机向后轮提供的顺时针的力矩为$\tau_{轮}$。忽略车轮旋转时与车身之间的摩擦，并假定车轮与地面摩擦系数μ足够大使得车轮与地面之间不发生滑动。求车身此时的加速度a。

（3）发动机和车轮通过变速器连接，假定变速器的机械效率为 100%，发动机转速ω是车轮转速$\omega_{轮}$的r_i倍（变速比）。根据前面结论分别计算 A 型电动汽车在水平地面（$\theta=0$）和 30 度上坡（$\theta=30°$）的最大加速度$a(0°)$和$a(30°)$。计算为了使这两种情况下车轮与地面不发生滑动，摩擦系数μ需要的最小值$\mu_{\min}$。本问可利用的数据：A 型电动汽车的参数$M=1.8\times10^3\ \mathrm{kg}$，$h=0.1\ \mathrm{m}$，$r=0.40\ \mathrm{m}$，$L=2.9\ \mathrm{m}$，发动机最大输出力矩$\tau=4.0\times10^2\ \mathrm{N\cdot m}$，变速比$r_i=10$，车轮质量$m$相对于车身质量可忽略；$g=9.8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$。

数值结果保留两位有效数字。

八、一简化电动汽车模型如图 8a 所示，半径为r、质量均为m的前轮（两个前轮视为一个物体m）和后轮（两个后轮视为一个物体m）分别视为均质圆柱刚体；刚体车身质量为M，质心位于前后轮轴正中。忽略空气阻力；忽略车轮转动过程中转轴受到的摩擦力矩。

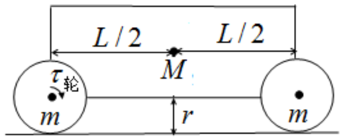

图 8a

（1）很多电动汽车的发动机是永磁直流电机。在简化模型中，电机动子线圈始终在匀强恒定磁场B中运动并垂直切割磁力线，切割磁力线的线圈导线总长度为l，转动轨迹的半径为$r_{线圈}$，线圈总电阻为$R_{线圈}$，线圈自感可忽略。为线圈提供电流的电池的开路电压为V，内阻为$R_{内}$。若电机运动部分之间摩擦可忽略，求电机的输出力矩τ与电机转速ω之间的关系$\tau(\omega)$，最大输出力矩$\tau_{\max}$，输出力矩为零时的最大转速$\omega_{\max}$，以及最大输出功率$P_{\max}$。为方便此后的计算，将$\tau(\omega)$中涉及的常量用$\tau_{\max}$、$\omega_{\max}$和$P_{\max}$表示。

（2）考虑水平地面上汽车从 $t=0$ 时刻的静止状态开始加速的过程，已知在车轮与地面之间不发生滑动的情形下，车身质心在时刻 t 的加速度大小 a 满足

$$a=\frac{\tau_{轮}/r}{M+3m}$$

式中，$\tau_{轮}$ 是此时车身上的电机向后轮提供的顺时针的力矩。电机和车轮通过变速器连接，假定变速器的机械效率为 100%，电机转速与车轮转速之比（变速比）为 r_i。求车速 $v(t)$ 与时间 t 之间的关系。

（3）利用 A 型汽车的参数数值，以及电机的最大输出功率 $P_{\max}=2.0\times10^2\,\mathrm{kW}$，根据（2）的结果，计算车速从零增加到 $v_f=100\ \mathrm{km/h}$ 所需的时间。计算这个加速过程消耗的电池能量（以 kWh 为单位），以及电池能量转化为机械能的效率。本问可利用的数据和结果：A 型电动汽车的参数 $M=1.8\times10^3\ \mathrm{kg}$，$r=0.40\ \mathrm{m}$，$L=2.9\ \mathrm{m}$，电机最大输出力矩 $\tau=4.0\times10^2\ \mathrm{N\cdot m}$，电机转速与车轮转速之比（变速比）$r_i=10$，车轮质量 m 相对于车身质量可忽略；任一半径为 r、质量为 m 的均质圆柱相对于中心轴的转动惯量为 $J=mr^2/2$。

数值结果保留两位有效数字。