1 Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων Εργασία 1.

Στέφανος Μπακλαβάς 1115201700093

Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας υλοποιήθηκαν όλες οι ασκήσεις εκτός από το διάγραμμα της 5 ενώ υπάρχουν και τα αρχεία της matlab στον σχετικό φάκελο.

1 Άσκηση 1

Έχουμε τις ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητλες $x_i \sim \mathcal{N}(0,\ \sigma^2 m^{-1})$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{m}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}m} \tag{1}$$

ενώ έχουμε και την μιγαδική τυχαία μεταβλητή h για την οποία ισχύει:

$$h = \sqrt{\sum_{i=1}^{2m} x_i^2 e^{-j\phi}} \tag{2}$$

Για το συγκεκριμένο ερώτημα ζητείται το $|h|^2$.

$$|h|^2 = \left|\sqrt{\sum_{i=1}^{2m} x_i^2 e^{-j\phi}}\right|^2 = \left|\sqrt{\sum_{i=1}^{2m} x_i^2}\right|^2 = \sum_{i=1}^{2m} x_i^2 \tag{3}$$

Στην συνέχεια θα βρούμε την Mgf της X^2

$$M_x = E[e^{tx^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{tx^2}\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}m} e^{tx^2}\ dx =$$

$$\frac{\sqrt{m}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}m} e^{tx^2}\ dx = \frac{\sqrt{m}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2\left(\frac{m}{\sigma^2}-2t\right)}\ dx =$$

$$\frac{\sqrt{m}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\frac{m}{\sigma^2-2t}}} = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{m}{\frac{m}{\sigma^2}-2t}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

Άρα για να βρούμε την Mgf του αθροίσματος της σχέσης (3) θα έχουμε για $y = |h|^2$:

$$\left[M_y = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{m}{\frac{m}{\sigma^2}-2t}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2m} = \frac{1}{\sigma^{2m}}\left(\frac{m}{\frac{m}{\sigma^2}-2t}\right)^{m} =$$

$$\left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^m \frac{1}{\left(\frac{m}{\sigma^2}-2t\right)^m} \tag{5}$$

Στην συνέχεια με εφαρμογή αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace στην (5) θα πάρουμε την pdf της $f_{|h|^2}(a)$ η οποία θα ισούται με:

$$f_{|h|^2}(a) = \left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^m \frac{2^{-m} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{\sigma^2}a\right)} a^{m-1}}{\Gamma(m)} = \left(\frac{m}{2\sigma^2}\right)^m \frac{e^{-\left(\frac{m}{2\sigma^2}a\right)} a^{m-1}}{\Gamma(m)} \tag{6}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η σχέση (6) είναι μία κατανομή Γάμμα με $b = \frac{m}{2\sigma^2}$ και a = m , δηλαδή η τελική της μορφή θα είναι:

$$f_{|h|^2}(a) = \frac{1}{\Gamma(m)} b^m a^{m-1} e^{-ba} \tag{7}$$

Εδώ μπορούμε να δούμε την απεικόνιση της (7) για m = 2.5 και $\sigma^2 = 0,5$:

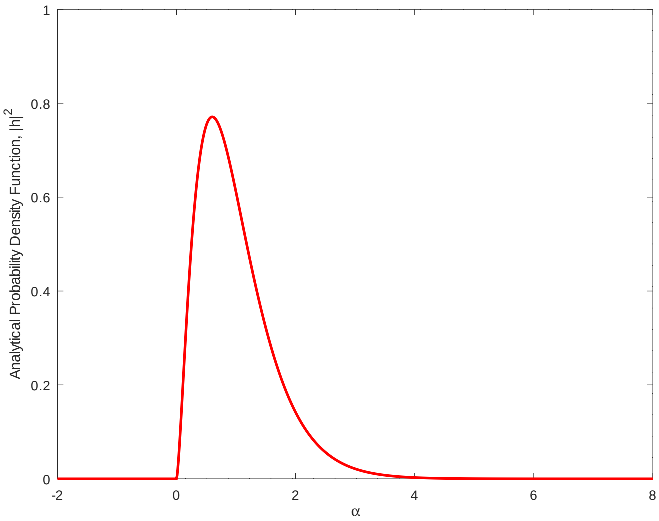

Figure 1

2 Άσκηση 2

Για την άσκηση αυτή δημιουργήθηκαν 10^6δείγματα της εμπειρικής$|h|^2$η οποία δημιουργήθηκε με την βοήθεια της συνάρτησης randn() και το αποτέλεσμα συγκρίθηκε με αυτό που υπολογίσαμε στην σχέση (7)

Εδώ βλέπουμε με μπλε τα δείγματα που δημιουργήθηκαν με την randn και το πως ταυτίζονται με την αναλυτική έκφραση (7)

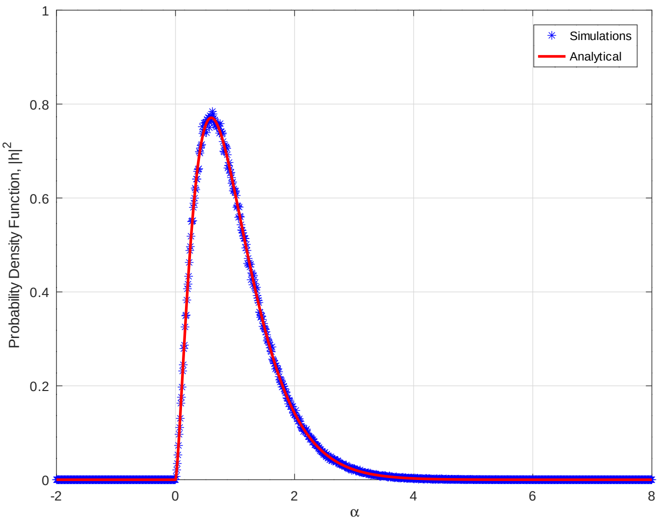

Figure 2

3 Άσκηση 3

Για να βρούμε την pdf της |h| θα πραγματοποιήσουμε μετασχηματισμό τυχαίας μεταβλητής στην $f_{|h|^2}(a)$:

$$f_{|h|}(a) = f_{|h|^2}(a)\left|\frac{da^2}{da}\right| = \frac{1}{\Gamma(m)}b^m a^{2(m-1)}e^{-ba^2}2a =>$$

$$f_{|h|}(a) = \frac{2a^{2m-1}}{\Gamma(m)}b^m e^{-ba^2} \tag{8}$$

Αντικαθιστώντας στην (8) το $b = \frac{m}{2\sigma^2}$ έχουμε:

$$f_{|h|}(a) = \frac{2a^{2m-1}}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{2\sigma^2}\right)^m e^{-\frac{m}{2\sigma^2}a^2} \tag{9}$$

Παρακάτω βλέπουμε την ταύτιση της αναλυτικής έκφρασης για την pdf της |h| με αυτήν που δημιουργήσαμε με την randn

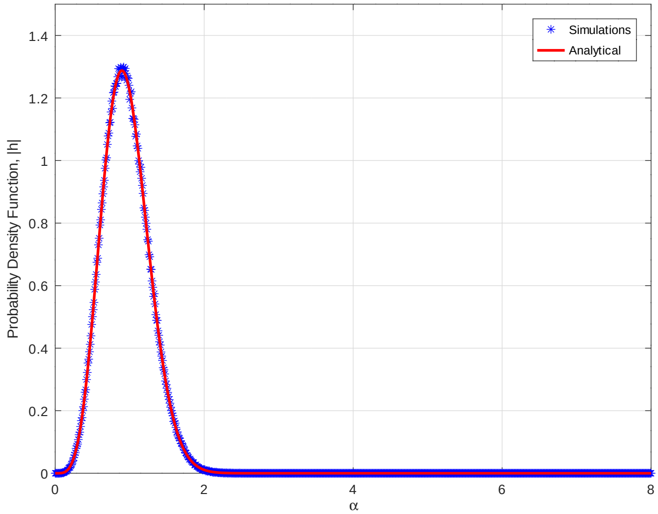

Figure 3

Αντικαθιστώντας στην (9) για m = 1 και Γ(1) = 1 έχουμε:

$$f_{|h|}(a) = 2a\frac{1}{2\sigma^2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}a^2} \tag{10}$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση (10) είναι η κατανομή Rayleigh με $\Omega = 2\sigma^2$

$$f_{|h|}(a) = 2a\frac{1}{\Omega}e^{-\frac{1}{\Omega}a^2} \tag{11}$$

Παρακάτω βλέπουμε με m =1 και μπλε χρώμα την κατανομή Rayleigh , ενώ με κόκκινο έχουμε την σχέση (9) .Παρατηρούμε ότι για μεγαλύτερο m η σχέση 9 μοιάζει πιο πολύ με την κανονική κατανομή παρά με μία κατανομή Γάμμα.

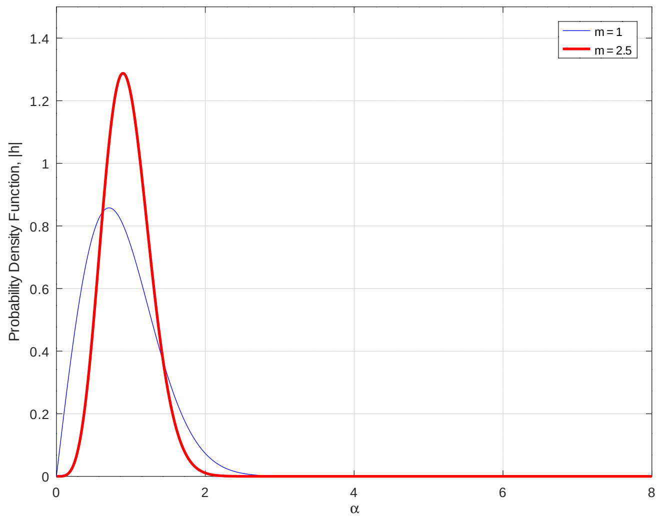

Figure 4

4 Άσκηση 4

Έχουμε ότι για μοντέλο ληφθέντος σήματος y = hx +w για ένα ασύρματο σύστημα επικοινωνίας σε περιβάλλον επίπεδων διαλείψεων το στιγμιάιο και το μέσο SNR ορίζονται ως:

$$g = |h|^2 \frac{E_s}{N_0}, \bar{g} = E[|h|^2] \frac{E_s}{N_0}$$

Έχουμε μοναδιαίο πλάτος για τα μιγαδικά σήματα πληροφορίας x και για το μέσο τετραγωνικό πλάτος του προσθετικού μιγαδικού θορύβου w. Άρα ισχύει:

$$E_s = N_0 = 1$$

Επομένως ο λόγος του στιγμιαίου προς το μέσο SNR για $x = |h|^2$ θα ισουται με:

$$\frac{g}{\bar{g}} = \frac{x}{E[x]} => g = \frac{x\bar{g}}{E[x]} => x = [x]\frac{g}{\bar{g}} \tag{12}$$

Στην συνέχεια για να βρούμε την f_g θα πραγματοποιήσουμε μετασχηματισμό τυχαίας μεταβλητής στην $f_{|h|^2}$της (7) για $x = |h|^2$
Άρα έχουμε:

$$f_g(a) = f_x\left(\frac{aE[x]}{\bar{g}}\right)\left|d\left(\frac{aE[x]}{\bar{g}}\right)\right| =$$

$$= f_x\left(\frac{aE[x]}{\bar{g}}\right)\frac{E[x]}{\bar{g}} =>$$

$$f_g(a) = \frac{E[x]}{\bar{g}}\frac{1}{\Gamma(m)}b^m\left(\frac{aE[x]}{\bar{g}}\right)^{m-1} e^{-b\left(\frac{aE[x]}{\bar{g}}\right)} \tag{13}$$

Ισχύει ότι για την κατανομή Γάμμα:

$$E[x] = E[|h|^2 = \frac{m}{b} = \frac{m}{\frac{m}{2\sigma^2}} = 2\sigma^2$$

Επίσης:

$$b = \frac{m}{2\sigma^2}$$

Επομένως έχουμε βρει στην σχέση 13 την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του στιγμιαίου SNR με μόνη παράμετρο το μέσο $\overline{SNR}$

5 Άσκηση 5

Στην άσκηση 5 υλοποιείται σε περιβάλλον matlab το ασύρματο σύστημα της σχέσης (13) για m = 1 . Έτσι αν αντικαταστήσουμε m = 1 στην (13) προκύπτει:

$$f_g(a) = \frac{E[x]}{\overline{g}} \frac{1}{\Gamma(1)} b^1 \left(\frac{aE[x]}{\overline{g}}\right)^0 e^{-b\left(\frac{aE[x]}{\overline{g}}\right)} =$$

Αντικαθιστώντας και το $b = \frac{m}{2\sigma^2}$:

$$f_g(a) = \frac{E[x]}{\overline{g}} \frac{1}{\Gamma(1)} \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{aE[x]}{\overline{g}}\right)} =$$

Αντικαθιστώντας και το $E[x] = 2\sigma^2$:

$$f_g(a) = \frac{2\sigma^2}{\overline{g}} \frac{1}{\Gamma(1)} \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{2a\sigma^2}{\overline{g}}\right)} =>$$

$$f_g(a) = \frac{1}{\overline{g}} e^{-\frac{a}{\overline{g}}}$$

Επομένως θα υπολογίσουμε τη μέση χωρητικότητα καναλιού από τον τύπο:

$$\overline{C} = \int_{-\infty}^{\infty} log_2(1+x) f_g(x)\ dx$$

Δυστυχώς λόγω του ότι χρησιμοποιώ gnu-octave αντί για matlab είχα ένα πρόβλημα με τον υπολογισμό του συγκεκριμένου ολοκληρώματος που δεν πρόλαβα να λύσω ώστε να φανεί το διάγραμμα.