1 Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων Εργασία 2.

Στέφανος Μπακλαβάς 1115201700093

Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας υλοποιήθηκαν και οι δυο ασκήσεις.

1 Άσκηση 1

Στην συγκεκριμένη άσκηση επιχειρήθηκε φιλτράρισμα Wiener ενός ενθόρυβου σήματος εισόδου x[n] με σκοπό να λάβουμε ως έξοδο το αρχικό σήμα d[n]. Παρακάτω παρουσιάζεται μία σχηματική αναπαράσταση:

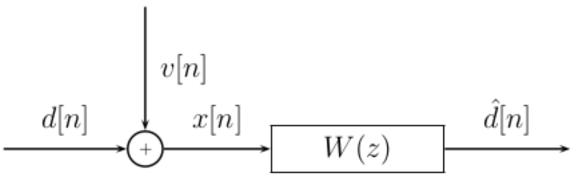

Figure 1

Βλέπουμε λοιπόν πως έχουμε ένα αρχικό σήμα d[n] στο οποίο πριστίθεται Γκαουσιανός θόρυβος u[n] και αφού περάσει μέσα από το φίλτρο Wiener W[z] έχουμε μία έξοδο d'[n] η οποία ιδανικά θα θέλαμε να είναι ακριβώς ίδια με την d[n].

1.1 Το πρόβλημα του Wienner φιλτραρίσματος

Υποθέτουμε ότι οι x[n] και d[n] είναι από κοινού WSS με γνωστές αυτοσυσχετίσεις, $r_x(k)$, $r_d(k)$, και γνωστή ετεροσυσχέτιση $r_{dx}(k)$. Αν w[n] είναι η κρουστική απόκριση του Wiener φίλτρου, και υποθέτοντας ότι το φίλτρο είναι (p − 1) τάξης, τότε η συνάρτηση μεταφοράς του δίνεται ως:

$$W(z) = \sum_{n=0}^{p-1} w[n]z^{-n} \tag{1}$$

Η έξοδος του φίλτρου d'[n] θα είναι αποτέλεσμα της συνέλιξής:

$$d'[n] = \sum_{l=0}^{p-1} w[l]x[n-l] \tag{2}$$

Για να λάβουμε την αρχική ακολουθία d[n] στην ουσία θα πρέπει να βρούμε τους συντελεστές Wiener του φίλτρου έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται κάποια μετρική .Στην συγκεκριμένη περίπτωση η μετρική που επιλέγουμε είναι το ελάχιστο τετραγωνικό σφάλμα:

$$\xi = E[e^2] = E[|d[n] - d'[n]|] \tag{3}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω τελικά αποδεικνύεται από την βιβλιογραφία ότι οι συντελεστές του Wiener φίλτρου βρίσκονται από την σχέση:

$$\sum_{l=0}^{p-1} w[l]r_x[k-l] = r_{dx}(k), \quad k = 0, 1, ..., p-1 \tag{4}$$

Το οποίο είναι γνωστό και ως ένα σύνολο p γραμμικών εξισώσεων με p αγνωστους w[k] γνωστό και ως Εξισώσεις Wiener- Hopf . Γράφοντας το παραπάνω σύστημα υπό μορφή πινάκων, και χρησιμοποιώντας τη συζυγική συμ- μετρία της $r_x(k) = r_x^*(-k)$, εκφράζεται:

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & ... & r_x^*(p-1) \\ r_x(1) & r_x^*(0) & ... & r_x^*(p-2) \\ . & . & ... & . \\ r_x(p-1) & r_x(p-2) & ... & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ . \\ w[p-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}(0) \\ r_{dx}(1) \\ . \\ r_{dx}(p-1) \end{bmatrix} \tag{5}$$

Η υπό μορφή διανυσμάτων:

$$R_x w = r_{dx} \tag{6}$$

Όπου R_x είναι ένας Toeplitz και Ερμητιανός πίνακας:

$$R_X = Toeplitz\{r_x(0), r_x(1), ..., r_x(p)\} \tag{7}$$

1.2 Wiener φίλτρο για αφαίρεση Gaussian θορύβου

Μία σχηματική αναπαράσταση του φιλτραρίσματος θορύβου παρουσιάζεται στο figure1 στην αρχή της ενότητας. Έχουμε ότι:

$$x[n] = u[n] + d[n] \tag{8}$$

Όπου d[n] η ακολουθία εισόδου και u[n] Gaussian θόρυβος με μηδενική μέση τιμή.Επίσης ο u[n] είναι ασυσχέτιστος με την d[n]. Λόγω αυτών των δύο ιδιοτήτων έχουμε:

$$r_{dx}(k) = r_d(k) \tag{9}$$

$$r_x(k) = r_d(k) + r_u(k) \tag{10}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (9) και (10) και τις αντικαταστήσουμε στην βασική σχέση (6) τότε οι εξισώσεις Wiener-Hopf απλοποιούνται στη μορφή:

$$[R_d + R_u]w = r_d \tag{11}$$

1.3 Υλοποίηση

Λόγω του ότι το αρχείο 1.mat που δόθηκε περιέχει τις ακολουθίες x[n] = u[n] + d[n] και d[n] η σχέση (11) θα πρέπει να μετατραπεί σε:

$$R_x w = r_d \tag{12}$$

όπου ο R_x ως Toeplitz πίνακας είναι και αντιστρέψιμος. Άρα για να βρούμε τους συντελεστές του Wiener φίλτρου χρησιμοποιήσαμε την σχέση:

$$w = R_x^{-1} r_d \tag{13}$$

Στην συνέχεια μέσω της πράξης της συνέλιξης μπορούμε να πάρουμε την φιλτραρισμένη ακολουθία d'[n]:

$$d'[n] = \sum_{l=0}^{p-1} w[l]x[n-l] \tag{14}$$

Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τις διάφορες τιμές του p:

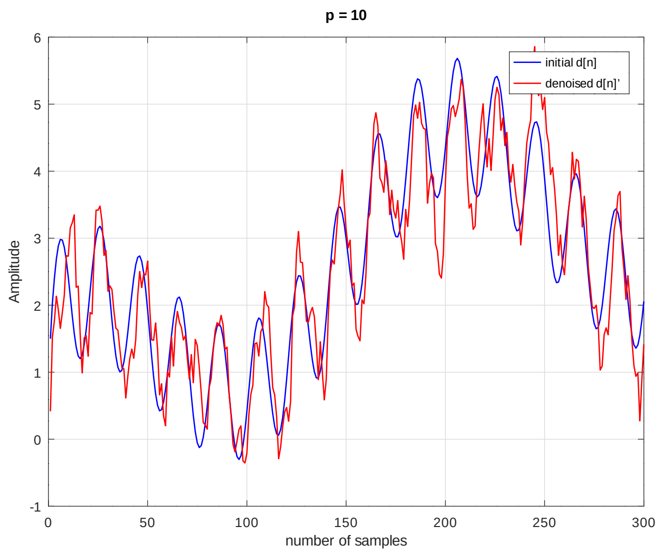

Figure 2

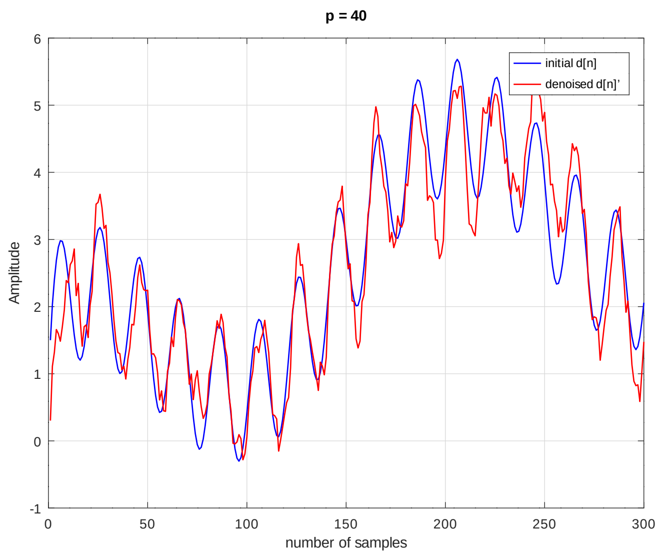

Figure 3

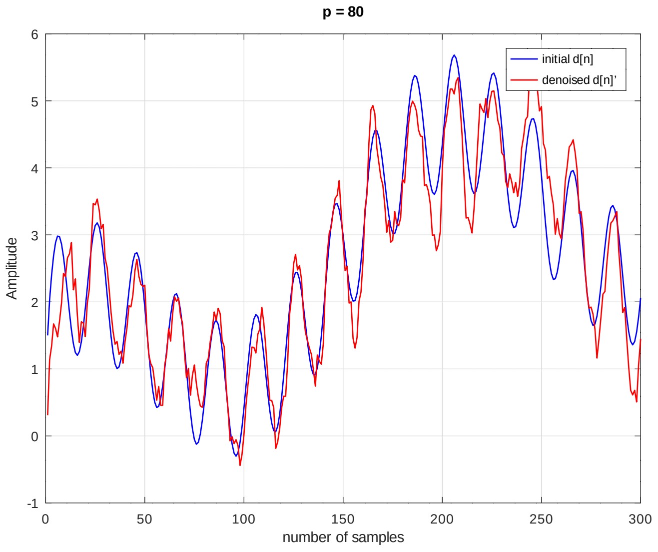

Figure 4

Ενώ οι αρχικές ακολουθίες x[n] και u[n] φαίνονται στο Figure 5

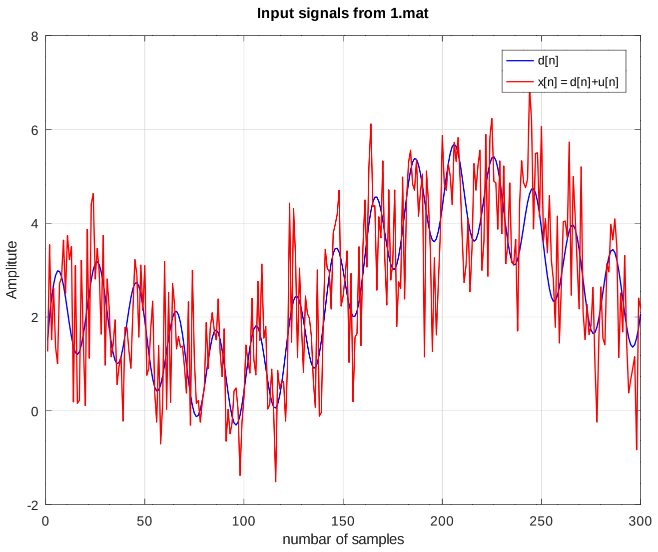

Figure 5

Παρατηρούμε πως από το p = 10 μέχρι το p = 40 υπάρχει κάποια βελτίωση στο ανακατσκευασμένο σήμα d'[n] ,όμως όταν το p αυξάνεται σε 80 έχουμε την ίδια ανακατασκευή με το p = 40. Συνεπώς αν είχαμε να επιλέξουμε αριθμό συντελεστών για το φίλτρο θα διαλέγαμε p = 40 καθώς μετά από αυτό το κόστος υλοποίησης αυξλανεται πολύ χωρίς να υπάρχει κάποια βελτίωση στο αποτέλεσμα.

2 Άσκηση 2

2.1 Προσαρμοστικό Φιλτράρισμα

Το συγκεκριμένο πρόβλημα αφορά την εκτίμηση μιας διαδικασίας η οποία δεν είναι WSS, δηλαδή μεταβάλεται στο χρόνο. Για τον λόγο αυτό για κάθε χρονική στιγμή θα πρέπει να υπολογίσουμε εκ νέου τους συντελεστές του Wiener φίλτρου. Στην παρακάτω σχέση φαίνεται ένα FIR προσαρμοστικό φίλτρο για την εκτίμηση ενός επιθυμητού σήματος d[n] από ένα σχετικό σήμα x[n],όπου οι x[n] και d[n] δεν είναι στάσιμες.

$$d'[n] = \sum_{l=0}^{p} w_n[k]x[n-k] = w_n^T x[n] \tag{15}$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε το διάνυσμα των συντελεστών w_n τη χρονική στιγμή n, που ελαχιστοποιούν το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

$$\xi[n] = E[|e[n]|^2] \tag{16}$$

όπου

$$e[n] = d[n] - d'[n] = d[n] - w_n^T x[n] \tag{17}$$

Μετά από ελαχιστποίηση του σφάλματος καταλήγουμε στην σχέση (17) όπου μοιάζει με την σχέση (6), ενώ η διαφορά τους βρλισκεται στο ότι στο προσαρμοστικό φιλτράρισμα χρειάζεται να κρατάμε πληροφορία για κάθε χρονική στιγμή.

$$R_x[n]w_n = r_{dx}[n] \tag{18}$$

όπου ο $R_x[n]$είναι ένας (p + 1) × (p + 1) Ερμιτιανός πίνακας αυτοσυσχετίσεων και το $r_{dx}[n]$ είναι το διάνυσμα της ετεροσυσχέτισης ανάμεσα στις d[n] και x[n].

2.2 Ο αλγόριθμος LMS

Το κύριο χαρακτηριστικό του αλγορίθμου LMS βρίσκεται στην εξίσωση ανανέωσης που χρησιμοποιείται για την εύρεση των συντελεστών την επόμενη χρονική στιγμή. Η εξίσωση αυτή είναι η:

$$w_{n+1} = w_n + e[n]x * [n] \tag{19}$$

Για παράδειγμα αν θέλαμε να ανανεώσουμε τον k-οστό συντελεστή θα γράφαμε:

$$w_{n+1}[k] = w_n[k] + e[n]x * [k - n] \tag{19}$$

Παρακάτω παρουσιάζεται ο αλγόριθμος LMS όπως υλοποιήθηκε για τις ανάγκες της εργασίας, ώστε οι πίνακες που πολλαπλασιάζονται να έχουν τις σωστές διαστάσεις.

Algorithm 1 LMS algorithm

Parameters:
p = τάξη φίλτρου
μ = βήμα
y = διάνυσμα από το 2.mat
u = διάνυσμα εισόδου από το 2.mat
Initialization:
w[0] = $zeros(p)^T$
Computation:
$x[n] = [u[n], u[n-1], ..., u[n-p+1]]^T$
$e[n] = y[n] - w[n] * x[n]$
$w[n+1] = w[n] + (\mu e^* x[n])^T$

Οι τιμές της παραμέτου μ έπρεπε να δοθούν με βάση τον τύπο:

$$0 < \ < \frac{2}{\lambda_{max}} \tag{20}$$

όπου

$$\lambda_{max} \leq \sum_{k=0}^{p} \lambda_k = Tr\{R_x\} \tag{21}$$

οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$0 < \ < \frac{2}{(p+1)r_x(0)} \tag{22}$$

Επομένως τα μ1 και μ2 για τα διαγράμματα των συντελεστών w επιλέχθηκαν ως εξής. Στο μ1 δόθηκε μία πολύ μικρή τιμή κοντά στο 0 ενώ στο μ2 δόθηκε τιμή ανάλογα με την τάξη του κάθε φίλτρου ώστε μα είναι κοντά στο $2/(\lambda_{max})$.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των συντελεστών των φίλτρων που βρέθηκαν με βάση τον αλγόριθμο LMS.

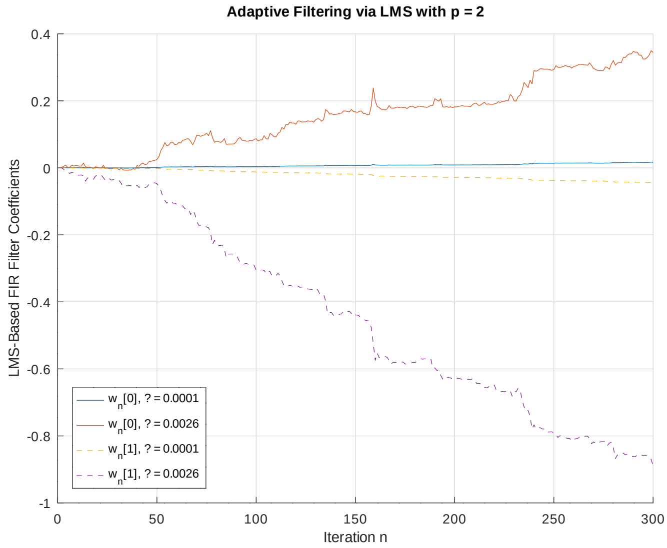

Figure 6

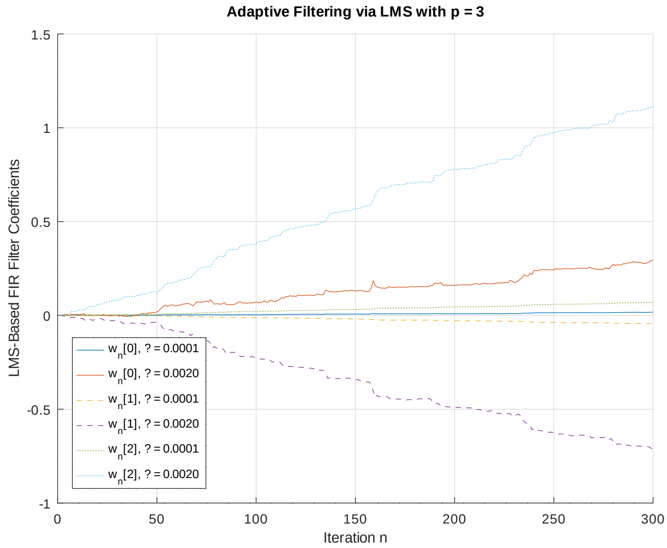

Figure 7

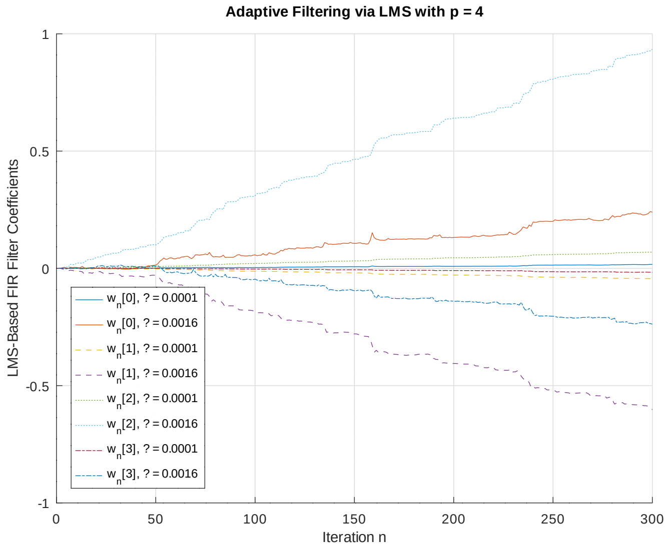

Figure 8

Παρατηρούμε ότι λόγω της σωστής επιλογής του m έχουμε καλή σύγκλιση των συντελεστών στην μέση τιμή.

Παρακάτω φαίνεται ως αντιπαράδειγμα η λανθασμένη επιλογή ενός μ = 0,1 το οποίο δεν ικανοποιεί την συνθήκη (22).

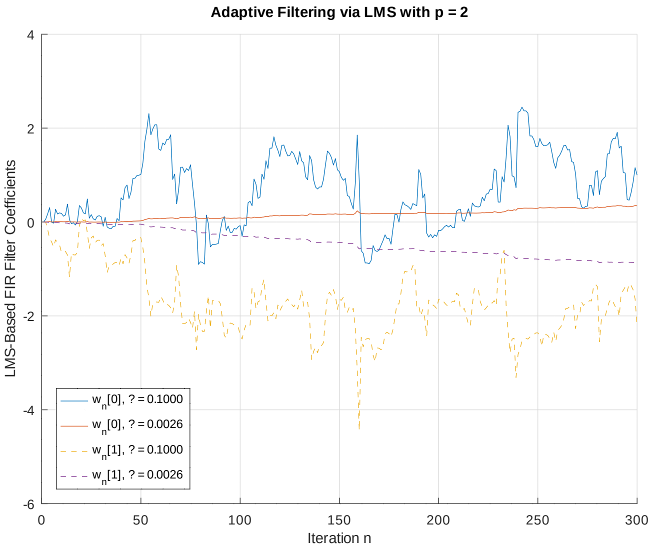

Figure 9

Βλέπουμε ότι δεν υπάρχει σύγκλιση στους συντελεστές με μ = 0.1 ενώ έχουν και μεγάλες διακυμάνσεις.