

# Modelando a epidemia de Covid-19

Trabalho de MS211 (Cálculo Numérico), segundo semestre de 2021.

## Grupo X:

Daniel C. Neto RA: 169233

Estevão S. Rodrigues RA: 168030

Nicole M. Baranzano RA: 186201

## Modelo SEIR

O modelo SEIR consiste em resolver as seguintes equações diferenciais [1]:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{r_0}{T_{inf}} S \mathcal{I} \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{r_0}{T_{inf}} S \mathcal{I} - \frac{1}{T_{inc}} \mathcal{E} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{1}{T_{inc}} \mathcal{E} - \frac{1}{T_{inf}} \mathcal{I} \\ \frac{dR}{dt} &= \frac{1}{T_{inf}} \mathcal{I}\end{aligned}$$

Sabendo que, segundo os dados do enunciado, tem-se os seguintes valores:

- Número de reprodução basal:  $r_0 = 2,5$  [2]
- Tempo médio de incubação de infecção:  $T_{inc} = 5$ , 2 dias e  $T_{inf} = 2$ , 9 dias [6]
- Demanda dos leitos de UTI estimava-se que 3% dos doentes precisaram de UTI [3,5]
- Mediana dos tempos de UTI: 7 dias [3,5]
- Disponibilidade de leitos de UTI em SP em 2019: 27 por 100 mil habitantes [4]
- População de São Paulo: 44,04 milhões
- Dados iniciais:

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ E_0 \\ I_0 \\ R_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,999999 \\ 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O primeiro passo é compilar **todas** as células. Após isso, basta alterar os inputs seguindo as instruções de cada um:

- Default:** se estiver **marcado**, vai escolher os **valores padrão** escritos no enunciado do problema. Mesmo se as outras variáveis estiverem diferentes, os gráficos gerados serão os padronizados.
- r\_0:** slider para variar os valores da taxa de reprodução basal ( $r_0$ ). Só funciona se a opção **Default** estiver **desmarcada**. **Importante:** se **Default** estiver **desmarcado**, mas se **Random** estiver **marcado**, então a taxa vai ser aleatória e não vai ser o valor do slider.
- Random:** se **Default** estiver **desmarcado** e se **Random** estiver **marcado**, então a taxa de reprodução basal ( $r_0$ ) será **aleatória** (para mais detalhes, clique neste [link](#)). Esta opção é interessante para simular uma variação na taxa, além de conseguir oscilações nos valores de forma a simular uma possível segunda onda da doença.
- T\_inc:** slider para variar os valores do tempo médio de incubação ( $T_{inc}$ ). Só funciona se a opção **Default** estiver **desmarcada**.
- T\_inf:** slider para variar os valores do tempo médio de infecção ( $T_{inf}$ ). Só funciona se a opção **Default** estiver **desmarcada**.
- Porcentagem\_UTI:** slider para variar os valores da porcentagem média da população de doentes que precisaria de UTI. Os valores vão de 0 a 10, ou seja, de 0% a 10%. Só funciona se a opção **Default** estiver **desmarcada**.
- Tempo\_UTI:** slider para variar os valores da mediana de tempo que os doentes ficariam na UTI. Os valores vão de 0 a 10 dias. Só funciona se a opção **Default** estiver **desmarcada**.

Feito isso, o código vai ser compilado automaticamente com cada mudança nos inputs (sliders e checkbox). O resultado são dois gráficos, um com as mudanças proporcional e outro com as mudanças absolutas junto com o total aproximado de pessoas que ficarão sem UTI. Os gráficos são interativos, pode-se dar zoom, selecionar as curvas e até mesmo exportar em png.

Obs: para visualizar o código usado só clicar no botão "Mostrar código".

```
In [1]: # Ativice visualizar os valores Iniciais ( run: "auto" button: "form" )
Default = True #param type:"checkbox"
r_0=2.5 #param type:"slider", min:0.1, max:10, step:0.5
Random = False #param type:"checkbox"
T_inc=5.2 #param type:"slider", min:0.1, max:10, step:0.1
T_inf=2.9 #param type:"slider", min:0.1, max:10, step:0.1
Porcentagem_UTI=0.03
Tempo_UTI=7 #param type:"slider", min:0, max:10, step:1

##### Dados iniciais #####
import ipywidgets as widgets
from plotly.graph_objs import *
from IPython.display import display
from IPython.display import HTML
import numpy as np

#####
# Dados do número final de dias da simulação
dt=1 # passo (1 dia)
tmax=0.5*len(dt) # vetor com todos os dias até o 498º dia
ntempo_UTI=tmax*dt # número de doentes que ficarão sem UTI
R= np.zeros(n) # vetor preenchido com as condições iniciais de R (recuperados)

def f(t):
    # função que recebe como argumento uma lista com
    # os valores (G, E, I, R, respectivamente) e retorna
    # a matriz f' do método do ponto médio
    a = (r_0/T_inf)*t**[0]*[2]
    b = (1/T_inc)*t**[1]
    c = (1/T_inf)*t**[2]
    S = -a
    E = (a - b)
    I = (b - c)
    R = c
    return [S,E,I,R]

for i in range(1,n):
    # loop para aplicação do método do ponto médio
    if Random == True and Default == False:
        r_0=np.random.uniform(2.5,np.pi*(11/498))+0.5
        y0s=r_0*(1-E(i-1)-I(i-1)-R(i-1)) # chama a função f'
        y0s=y0s*(1+(T_inc-1)*dt/2) # variável auxiliar do ponto médio
        E(i)=y0s*(1+(T_inf-1)*dt/2) # variável auxiliar do ponto médio
        I(i)=y0s*(1+(0.03*T_inf-1)*dt/2) # variável auxiliar recuperados
        R(i)=y0s*(1+(0.03*T_inf+1)*dt/2) # variável auxiliar do ponto médio
        y = [S,E,I,R] # cria a lista para depois jogar na função f'
        S[i]=y[0]+dt**f(y)[0] # método de euler com o ponto médio
        E[i]=y[1]+dt**f(y)[1] # método de euler com o ponto médio
        I[i]=y[2]+dt**f(y)[2] # método de euler com o ponto médio
        R[i]=y[3]+dt**f(y)[3] # método de euler com o ponto médio

##### Transformando em população #####
S0 = np.ones(n)*0.99999 # vetor auxiliar suscetíveis
E0 = np.ones(n)*10**-6 # vetor auxiliar expostos
I0 = np.zeros(n) # vetor auxiliar infectados
R0 = np.zeros(n) # vetor auxiliar recuperados
L0 = np.zeros(n) # vetor auxiliar de leitos totais em SP
F0 = np.zeros(n) # vetor auxiliar do fluxo de infectados para recuperados
N0 = np.zeros(n) # vetor auxiliar da quantidade de necessitados de UTI

for j in range(n):
    # loop para multiplicar a proporção pela população de SP
    S0[j] = int(E(j)*44040000)
    E0[j] = int(E(j)*44040000)
    I0[j] = int(I(j)*44040000)
    R0[j] = int(R(j)*44040000)
    L0[j] = int((27*44040000)/100000)
    if I(j)>L0[j]:
        # calcula o fluxo de infectados para recuperados
        F0[j] = int(abs(R0[j]-L0[j])*Porcentagem_UTI)

for p in range(n):
    # loop para calcular a quantidade de pessoas que precisam de UTI
    # baseado no número de doentes
    s=0
    for l in range(Tempo_UTI):
        if l>p:
            s=s+F0[p-l]
    N0[p]=s

pessoas_sem_utis = [] # lista da quantidade de pessoas que ficariam sem leitos
for l in range(len(L0)):
    # loop para calcular a diferença entre necessitados de leitos
    # e a quantidade total de leitos
    if NO(l)>L0[l]:
        pessoas_sem_utis.append(NO(l)-L0[l])

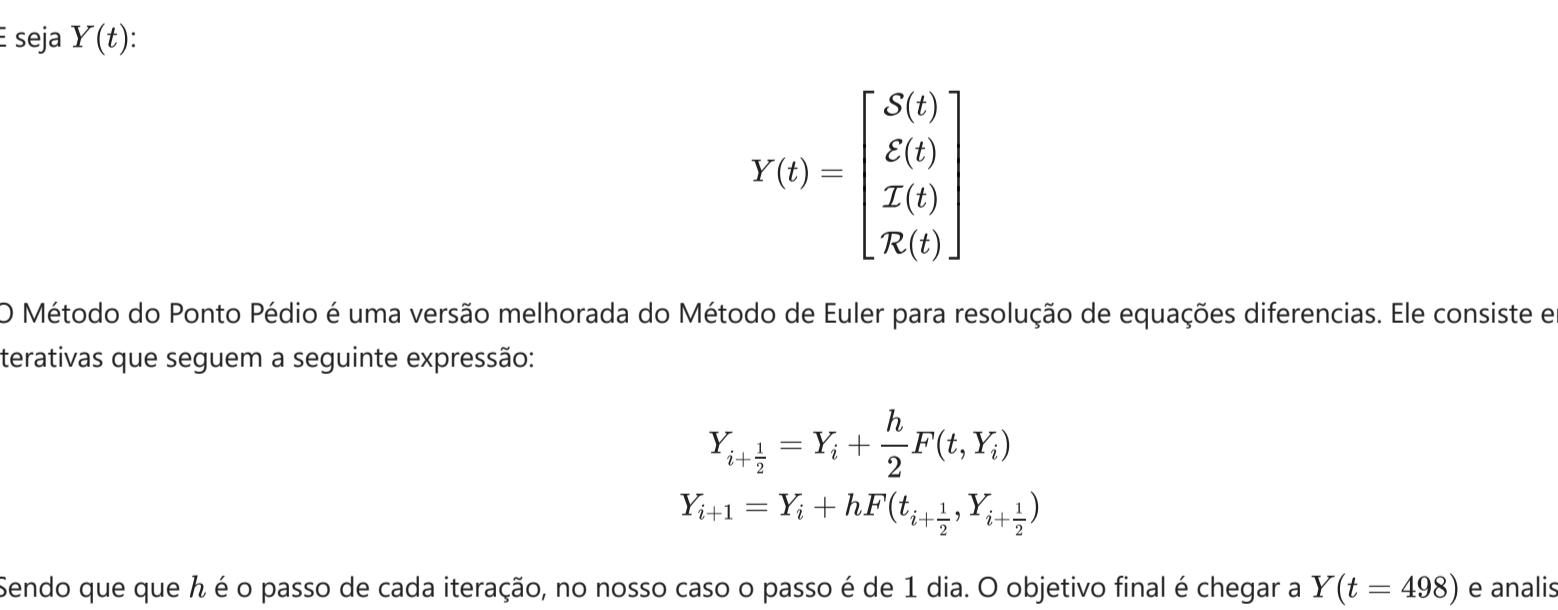
total_sem_utis = sum(pessoas_sem_utis) # quantidade aproximada de pessoas sem leitos

# Layout Gráfico 1
layout1 = go.Layout(
    title="Proporção da população de SP versus tempo",
    title_x=0.5,
    xaxis=dict(
        title="Tempo (dias)"
    ),
    yaxis=dict(
        title="População"
    )
)
annotations=[go.layout.Annotation(
    text="o número aproximado de pessoas que ficarão sem UTI é: <b><input type='text' value='{}'></b>".format(total_sem_utis),
    align="left",
    showarrow=False,
    xref="paper",
    yref="paper",
    x=1.7,
    y=0,
    bordercolor="rgb(42, 63, 126)",
    borderwidth=1
)]
fig1 = go.Figure(layout = layout1)
# Adiciona cada gráfico de linha com marcadores
fig1.add_trace(
    go.Scatter(
        mode="lines+markers",
        x=x,
        y=y,
        name="Suscetíveis",
        marker=dict(
            color="darkturquoise",
            size=6,
            opacity=0.4,
            line=dict(
                color="burlywood",
                width=1
            )
        ),
        showlegend=True
    )
)
fig1.add_trace(
    go.Scatter(
        mode="lines+markers",
        x=x,
        y=y,
        name="Expostos",
        marker=dict(
            color="darkmagenta",
            size=6,
            opacity=0.4,
            line=dict(
                color="burlywood",
                width=1
            )
        ),
        showlegend=True
    )
)
fig1.add_trace(
    go.Scatter(
        mode="lines+markers",
        x=x,
        y=y,
        name="Infectados",
        marker=dict(
            color="red",
            size=6,
            opacity=0.4,
            line=dict(
                color="burlywood",
                width=1
            )
        ),
        showlegend=True
    )
)
fig1.add_trace(
    go.Scatter(
        mode="lines+markers",
        x=x,
        y=y,
        name="Recuperados",
        marker=dict(
            color="yellow",
            size=6,
            opacity=0.4,
            line=dict(
                color="burlywood",
                width=1
            )
        ),
        showlegend=True
    )
)
# Layout Gráfico 2
layout2 = go.Layout(
    title="População de SP versus tempo",
    title_x=0.5,
    xaxis=dict(
        title="Tempo (dias)"
    ),
    yaxis=dict(
        title="População"
    )
)
Annotations=[go.layout.Annotation(
    text="o número aproximado de pessoas que ficarão sem UTI é: <b><input type='text' value='{}'></b>".format(total_sem_utis),
    align="left",
    showarrow=False,
    xref="paper",
    yref="paper",
    x=1.7,
    y=0,
    bordercolor="rgb(42, 63, 126)",
    borderwidth=1
)]
fig2 = go.Figure(layout = layout2)
# Adiciona cada gráfico de linha com marcadores
fig2.add_trace(
    go.Scatter(
        mode="lines+markers",
        x=x,
        y=y,
        name="Leitos",
        marker=dict(
            color="orange",
            size=6,
            opacity=0.4,
            line=dict(
                color="burlywood",
                width=1
            )
        ),
        showlegend=True
    )
)
fig2.add_trace(
    go.Scatter(
        mode="lines+markers",
        x=x,
        y=y,
        name="Necessidade de Leitos",
        marker=dict(
            color="green",
            size=6,
            opacity=0.4,
            line=dict(
                color="burlywood",
                width=1
            )
        ),
        showlegend=True
    )
)
# Plota os gráficos 1 e 2
display(fig1, fig2)
```

## Proporção do modelo SEIR versus tempo



População de SP versus tempo



Número aproximado de pessoas que ficarão sem UTI é: 7,229,088

## Resolução pelo Método do Ponto Médio

Seja  $f(t, Y(t))$  a matriz 4 x 1 tal que:

$$f(t, Y(t)) = \begin{bmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dE}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \\ \frac{dR}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r_0}{T_{inf}} S \mathcal{I} \\ \frac{r_0}{T_{inf}} S \mathcal{I} - \frac{1}{T_{inc}} \mathcal{E} \\ \frac{1}{T_{inc}} \mathcal{E} - \frac{1}{T_{inf}} \mathcal{I} \\ \frac{1}{T_{inf}} \mathcal{I} \end{bmatrix}$$

E seja  $Y(t)$ :

$$Y(t) = \begin{bmatrix} S(t) \\ E(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{bmatrix}$$

O Método do Ponto Pédio é uma versão melhorada do Método do Ponto Médio para resolução de equações diferenciais. Ele consiste em etapas iterativas que seguem a seguinte expressão:

$$Y_{i+\frac{1}{2}} = Y_i + \frac{h}{2} F(t_i, Y_i)$$

$$Y_{i+1} = Y_i + h F(t_{i+\frac{1}{2}}, Y_{i+\frac{1}{2}})$$

Sendo que  $h$  é o passo de cada iteração, no nosso caso o passo é de 1 dia. O objetivo final é chegar a  $Y(t = 498)$  e analisar graficamente os valores.

## Discussões Obrigatórias

1. Qual a maior proporção de pessoas infectadas observadas em um único dia? Considerando que o estado de São Paulo possui 44,04 milhões de habitantes, essa proporção representa quantas pessoas doentes ao mesmo tempo em um estado como o nosso? Quantos dias são necessários para chegar no pico de doentes?

Considerando o primeiro gráfico acima, ao estudar a curva referente às pessoas infectadas, a maior proporção de pessoas doentes observadas em um único dia é de aproximadamente 8,25%, pico que ocorreria no dia 99 da pandemia. Para observar qual seria o equivalente a essa proporção em um estado como São Paulo, percebe-se que 3% das pessoas doentes (44,04 milhões) e 8,25% das pessoas infectadas (44,04 milhões) são doentes infectados. Portanto, 3% de 44,04 milhões é 1,3212 milhão de pessoas infectadas. Dividindo 1,3212 milhão por 8,25% obtemos 161,26 dias. Portanto, é necessário 161,26 dias para que 3% das pessoas doentes de São Paulo se tornem infectadas.

2. Estime o número de leitos de UTI para lidar com o pico. O número de leitos disponíveis é sempre menor que o número de leitos necessários para lidar com o pico da doença? Qual o excesso de leitos?

Pelo segundo gráfico acima, observamos que o número total de leitos disponíveis no estado de São Paulo seria de 11,89 mil (usando as informações de 2019 em que haveria 27 leitos para cada 100 mil habitantes). Enquanto que seriam necessários um total de 258,954 mil leitos para lidar com o pico da doença, que ocorreria no dia 102 da pandemia, apenas alguns dias após o pico de pessoas doentes. Nesse sentido, havia um excesso de 247,064 mil pessoas necessitando de leitos para hospitalizar nesse dia.

3. Você consegue estimar quantas pessoas ao todo iriam ficar sem acesso a UTIs? Justifique a forma que você fez essa estimativa.

Para estimar o número de leitos disponíveis ao todo, devemos integrar a função necessidade de leitos ao longo das estimativas de demanda social, de modo a obter a área sob a curva de necessidade de leitos.

Contudo, considerando que já fizemos os valores por dia de pessoas necessitando de leitos, basta subtrair este valor diário da quantidade de leitos disponíveis ao todo. Dito isso, percebe-se que a área sob a curva de necessidade de leitos é menor que a área sob a curva de leitos disponíveis.

Portanto, a diferença entre a área sob a curva de leitos disponíveis ao todo e a área sob a curva de necessidade de leitos é a área sob a curva de leitos necessários.

Assim, conclui-se que cada variável considerada nos cálculos tem um impacto relevante no desenvolvimento dos casos na pandemia e também na estrutura social, afetando diretamente a capacidade de leitos disponíveis.

Além disso, a doença causada pela Covid-19, por ser imprevisível e sem ter tratamento previamente estudado e consolidado, deve ser avaliada com muita cautela e precaução. Dito isso, para o avanço da pandemia em seu estágio, recomenda-se ao governador do estado restrinquir a circulação de pessoas, limitando a quantidade de pessoas em determinados estabelecimentos e instituições, incentivar o uso de máscaras e distanciamento social, além de destinar mais tempo para pesquisas e busca de vacinas. Sem contar que o número de infectados é altamente dependente da taxa de infecção.

4. Com base nessa simulação o que você diria ao governador do estado no início da doença?

Notamos que a situação causada pela Covid-19 é de causar preocupação, pois o estado de São Paulo não está preparado para atender a demanda hospitalar visto o número alarmante de pessoas necessitando de acesso a UTIs e de cuidados. Isso sem contar que o número de UTIs que o estado tinha não somente para Covid-19, mas também para outras doenças, o que reduziria ainda mais a capacidade de leitos.

Além disso, a doença causada pela Covid-19, por ser imprevisível e sem ter tratamento previamente estudado e consolidado, deve ser avaliada com muita cautela e precaução. Dito isso, para o avanço da pandemia em seu estágio, recomenda-se ao governador do estado restrinquir a circulação de pessoas, limitando a quantidade de pessoas em determinados estabelecimentos e instituições, incentivar o uso de máscaras e distanciamento social, além de destinar mais tempo para pesquisas e busca de vacinas. Sem contar que o número de infectados é altamente dependente da taxa de infecção.

5. Alterando as variáveis

Um ponto interessante de ter essa simulação numérica é o fato de poder alterar os valores iniciais e conseguir prever as mudanças finais devido a certos parâmetros. Começando com a taxa de reprodução basal ( $r_0$ ). Ao aumentar seu valor (do 2,5 para um valor superior) de 2,5 para 2,6, por exemplo, a curva de leitos necessários para lidar com a doença aumenta de 161,26 para 162,16 dias.

Desta forma, constatamos que a diminuição de  $r_0$  proporciona um intervalo de tempo muito maior entre o início da pandemia e o pico da doença, reduzindo a necessidade de leitos.

Continuando esses testes, também fica claro o impacto da mudança da demanda de leitos para lidar com a doença. A curva de leitos necessários para lidar com a doença aumenta de 161,26 para 162,16 dias, quando a taxa de infecção aumenta de 2,5 para 2,6.

Por fim, analisando a variação do tempo médio de uso dos leitos de UTI pelos infectados de Covid-19, caso ocorra o aumento de, por exemplo, 7 para 9 dias, observamos um crescimento assustador de 2 milhões de pacientes que ficarão sem leitos no total, o que é dezenas de vezes maior que o aumento de necessidade de leitos de pacientes.

Assim, conclui-se que cada variável considerada nos cálculos tem um impacto relevante no desenvolvimento dos casos na pandemia e também na estrutura social, afetando diretamente a capacidade de leitos disponíveis.

6. Como é possível chegar a um resultado que varia dependendo da situação da pandemia?

Para isso, é necessário considerar que a taxa de infecção é um valor que varia dependendo da situação da pandemia e do comportamento populacional. Por exemplo, quando a população não realiza deslocamentos e distanciamento social, a taxa de infecção é menor.

7. Qual é a taxa de infecção que resulta em um resultado que varia dependendo da situação da pandemia?

</