



Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Mecânica



# EM 423 – Resistência dos Materiais

## Prof. Thales Freitas Peixoto

### Primeira Atividade Computacional (C1)

Estevão S. Rodrigues      168030

# Sumário

<b>1</b>	<b>Apresentação do Problema</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Desenvolvimento Teórico e Discussões</b>	<b>3</b>
2.1	Letra A . . . . .	3
2.2	Letra B . . . . .	5
2.3	Letra C . . . . .	8
2.4	Letra D . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Solução Computacional</b>	<b>11</b>

# 1 Apresentação do Problema

1. Considere o problema geral da viga composta, conectada por uma rótula em B, localizada a uma distância  $a$  medida a partir do engaste A. A viga pode ser carregada de diversas maneiras (a-f). Em todos os casos, o carregamento distribuído na viga AB é diferente do carregamento na viga BC.
  - (a) Elabore um programa computacional que receba como parâmetros de entrada os comprimentos  $a$  e  $b$  (em m) das vigas AB e BC e a intensidade  $q_0$  (em kN/m) dos carregamentos e retorne um diagrama dos esforços internos agindo ao longo do comprimento  $L$  da viga e as reações do sistema, a partir da solução do problema. A partir dos diagramas de esforços internos, determine as reações no engaste em A e no apoio deslizante C e a intensidade da força cortante na rótula em B.
  - (b) Modifique seu programa para que somente as vigas AB ou BC estejam sujeitas ao carregamento mostrado. Compare os esforços internos da viga composta ABC com os esforços determinados no item anterior. Verifique, para a determinação das reações desse sistema, se o princípio da superposição é válido, isto é, determine as reações para os casos em que somente a viga AB ou BC estejam carregadas e compare as reações dos apoios em A e C com as reações determinadas no item anterior.
  - (c) Modifique seu programa para incluir uma força pontual vertical para cima de intensidade  $q_0 L$  onde a rótula está localizada. Recalcule os diagramas de esforços internos e compare com os diagramas obtidos no item a. Existe algum valor da intensidade dessa força para o qual a força de reação no engaste seja nula? E para que o momento de reação do engaste seja nulo? Se sim, qual?
  - (d) Modifique seu programa para que a localização da rótula possa variar no intervalo  $\frac{L}{8} < a < \frac{7L}{8}$ . Admitindo que, com a alteração da posição da rótula, altera-se também o ponto onde os carregamentos externos variam, determine o máximo e mínimo momento fletor para uma posição arbitrária  $a$  da rótula. Apresente um gráfico com a variação do máximo/mínimo momento fletor em função da posição  $a$  da rótula. Qual a posição da rótula para que o módulo do máximo momento fletor seja o menor possível?

## 2 Desenvolvimento Teórico e Discussões

### 2.1 Letra A

Os dados fornecidos para este RA são:

$$a = 3.2 \text{ m} \quad b = 4.1 \text{ m} \quad q_0 = 77 \text{ kN/m}$$

E a forma do carregamento é dado pelo diagrama a:

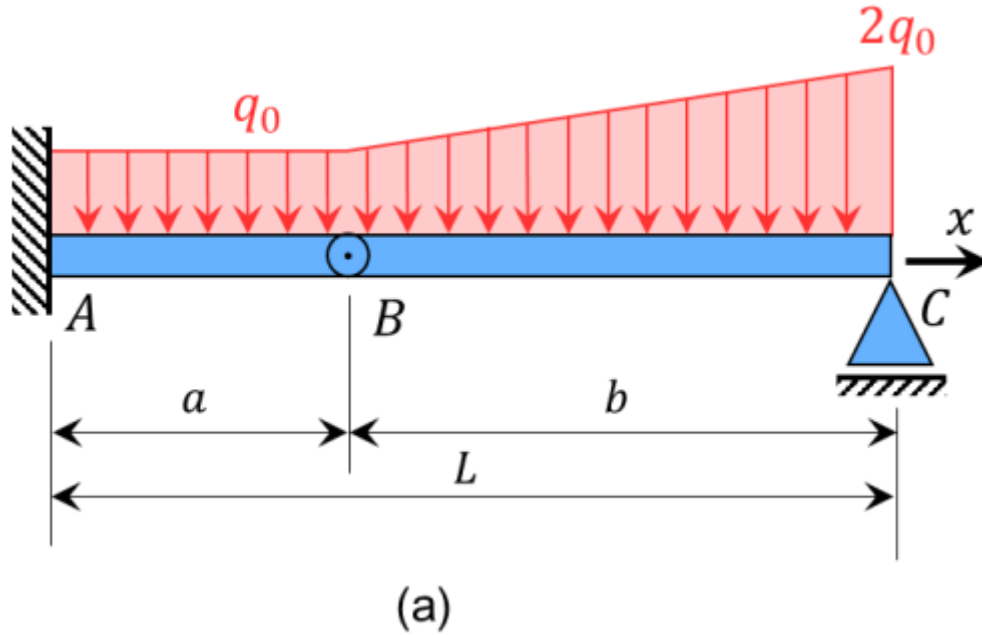


Figura 1: Diagrama a do enunciado do problema

O carregamento em função de  $x$  é dado pela soma de um carregamento constante e de um carregamento triangular. De forma que a expressão é dada por:

$$q(x) = -q_0 < x - 0 >^0 - \frac{q_0}{b} < x - a >^1 \quad \forall \quad 0 \leq x \leq L$$

De forma que, pode-se usar as equações diferenciais do equilíbrio:

$$\begin{cases} \frac{dV_y(x)}{dx} = q(x) \\ \frac{dM_z(x)}{dx} = V_y(x) \end{cases} \rightarrow \frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} = q(x)$$

Sendo assim, integrando o carregamento  $q(x)$  em função de  $x$ , é possível calcular  $V_y(x)$ :

$$V_y(x) = \int q(x) dx = -q_0 < x - 0 >^1 - \frac{q_0}{2b} < x - a >^2 + C_1 \quad \forall \quad 0 \leq x \leq L$$

Integrando novamente, obtemos  $M_z(x)$ :

$$M_z(x) = \int V_y(x) dx = -\frac{q_0}{2} < x - 0 >^2 - \frac{q_0}{6b} < x - a >^3 + C_1 x + C_2 \quad \forall \quad 0 \leq x \leq L$$

Para descobrir  $C_1$  e  $C_2$ , é necessário analisar as condições de contorno que são:  $M_z(L) = 0$  e  $M_z(a) = 0$  (por conta da rótula). Sendo assim e sabendo que  $L = a + b$ , temos:

$$\begin{aligned} M_z(L) &= -\frac{q_0}{2} \langle L - 0 \rangle^2 - \frac{q_0}{6b} \langle L - a \rangle^3 + C_1 L + C_2 \\ 0 &= -\frac{q_0}{2} \langle a + b \rangle^2 - \frac{q_0}{6b} \langle a + b - a \rangle^3 + C_1(a + b) + C_2 \\ (a + b)C_1 + C_2 &= \frac{q_0}{6} [3(a + b)^2 + b^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_z(a) &= -\frac{q_0}{2} \langle a - 0 \rangle^2 - \frac{q_0}{6b} \langle a - a \rangle^3 + C_1 a + C_2 \\ 0 &= -\frac{q_0}{2} a^2 + aC_1 + C_2 \\ aC_1 + C_2 &= \frac{q_0}{2} a^2 \end{aligned}$$

Isso resulta num sistema de duas equações de forma que:

$$\begin{cases} (a + b)C_1 + C_2 = \frac{q_0}{6} [3(a + b)^2 + b^2] \\ aC_1 + C_2 = \frac{q_0}{2} a^2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$C_1 = q_0 \left( a + \frac{2b}{3} \right) \quad \text{e} \quad C_2 = -q_0 \left( \frac{a^2}{2} + \frac{2ab}{3} \right)$$

Sendo assim, as expressões para  $V_y(x)$  e  $M_z(x)$  são:

$$\boxed{V_y(x) = -q_0 \langle x \rangle^1 - \frac{q_0}{2b} \langle x - a \rangle^2 + q_0 \left( a + \frac{2b}{3} \right) \quad \forall \quad 0 \leq x \leq L}$$

$$\boxed{M_z(x) = -\frac{q_0}{2} \langle x \rangle^2 - \frac{q_0}{6b} \langle x - a \rangle^3 + q_0 \left( a + \frac{2b}{3} \right) x - q_0 \left( \frac{a^2}{2} + \frac{2ab}{3} \right) \quad \forall \quad 0 \leq x \leq L}$$

Usando o programa computacional da seção 3, ou seja, substituindo-se os valores numéricos, obteve-se os seguintes diagramas de esforços internos:

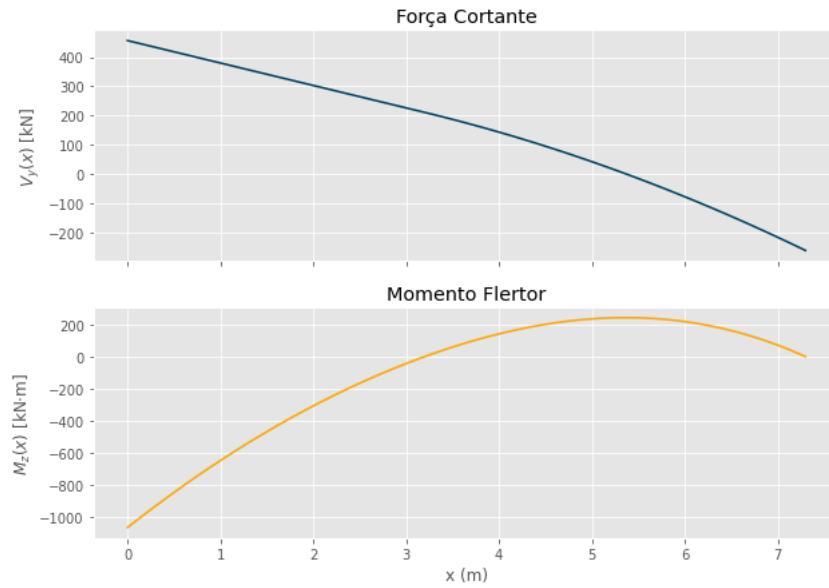


Figura 2: Diagramas de Esforços Internos

Visualizando os diagramas, é possível determinar as reações no engaste, no apoio deslizando e a força cortante na rótula. Para isso, basta observar os valores de  $M_z(x)$ ,  $V_y(x)$  para quando  $x = 0$ ,  $x = a$  e  $x = L = a + b$ . Desta forma, obtém-se:

- **Engaste:**

$$V_y(0) = 456,9 \text{ kN}$$

$$M_z(0) = -1067,7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- **Rótula:**

$$V_y(a) = 210,5 \text{ kN}$$

$$M_z(a) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- **Apoio Deslizante:**

$$V_y(a + b) = -263,1 \text{ kN}$$

$$M_z(a + b) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

## 2.2 Letra B

- **Carregamento de AB:** Neste caso, a expressão do carregamento é:

$$q(x) = -q_0 < x - 0 >^0 + q_0 < x - a >^0$$

De forma semelhante à Letra A, é necessário integrar  $q(x)$  em relação à  $x$  para encontrar  $V_y(x)$ . Após, integra-se novamente para encontrar a expressão de  $M_z(x)$ . Desta forma:

$$V_y(x) = \int q(x) dx = -q_0 < x - 0 >^1 + q_0 < x - a >^1 + C_1$$

$$M_z(x) = \int V_y(x) dx = -\frac{q_0}{2} < x - 0 >^2 + \frac{q_0}{2} < x - a >^2 + C_1 x + C_2$$

Sendo que as condições de contorno são as mesmas:  $M_z(L) = 0$  e  $M_z(a) = 0$ . Sendo assim:

$$\begin{aligned} M_z(L) &= -\frac{q_0}{2} \langle L - 0 \rangle^2 + \frac{q_0}{2} \langle L - a \rangle^2 + C_1 L + C_2 \\ 0 &= -\frac{q_0}{2} \langle a + b \rangle^2 + \frac{q_0}{2} \langle a + b - a \rangle^2 + C_1(a + b) + C_2 \\ (a + b)C_1 + C_2 &= \frac{q_0}{2}(a^2 + 2ab) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_z(a) &= -\frac{q_0}{2} \langle a - 0 \rangle^2 + \frac{q_0}{2} \langle a - a \rangle^2 + C_1 a + C_2 \\ 0 &= -\frac{q_0}{2} \langle a \rangle^2 + C_1(a) + C_2 \\ aC_1 + C_2 &= \frac{q_0}{2}a^2 \end{aligned}$$

O que resulta num sistema de equações da forma:

$$\begin{cases} (a + b)C_1 + C_2 = \frac{q_0}{2}(a^2 + 2ab) \\ aC_1 + C_2 = \frac{q_0}{2}a^2 \end{cases}$$

Cuja solução é a seguinte:

$$C_1 = q_0 a \quad \text{e} \quad C_2 = -\frac{q_0}{2}a^2$$

Desta forma:

$$\begin{aligned} V_y(x) &= -q_0 \langle x - 0 \rangle^1 + q_0 \langle x - a \rangle^1 + q_0 a \\ M_z(x) &= -\frac{q_0}{2} \langle x - 0 \rangle^2 + \frac{q_0}{2} \langle x - a \rangle^2 + q_0 a x - \frac{q_0}{2}a^2 \end{aligned}$$

Com as expressões do carregamento, substituindo os valores, é possível calcular as reações no engaste, no apoio deslizando e a força cortante na rótula. Assim:

– **Engaste:**

$$\begin{aligned} V_y(0) &= 246,4 \text{ kN} \\ M_z(0) &= -394,2 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

– **Rótula:**

$$\begin{aligned} V_y(a) &= 0 \text{ kN} \\ M_z(a) &= 0 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

– **Apoio Deslizante:**

$$\begin{aligned} V_y(a + b) &= 0 \text{ kN} \\ M_z(a + b) &= 0 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

- **Carregamento de BC:** Neste caso, a expressão do carregamento é:

$$q(x) = -q_0 < x - a >^0 - \frac{q_0}{b} < x - a >^1$$

De forma semelhante à Letra A, é necessário integrar  $q(x)$  em relação à  $x$  para encontrar  $V_y(x)$ . Após, integra-se novamente para encontrar a expressão de  $M_z(x)$ . Desta forma:

$$V_y(x) = \int q(x) dx = -q_0 < x - a >^1 - \frac{q_0}{2b} < x - a >^2 + C_1$$

$$M_z(x) = \int V_y(x) dx = -\frac{q_0}{2} < x - a >^2 - \frac{q_0}{6b} < x - a >^3 + C_1 x + C_2$$

Sendo que as condições de contorno são as mesmas:  $M_z(L) = 0$  e  $M_z(a) = 0$ . Sendo assim:

$$M_z(L) = -\frac{q_0}{2} < L - a >^2 - \frac{q_0}{6b} < L - a >^3 + C_1 L + C_2$$

$$0 = -\frac{q_0}{2} < a + b - a >^2 - \frac{q_0}{6b} < a + b - a >^3 + C_1(a + b) + C_2$$

$$(a + b)C_1 + C_2 = \frac{q_0}{3}(2b^2)$$

$$M_z(a) = -\frac{q_0}{2} < a - a >^2 - \frac{q_0}{6b} < a - a >^3 + C_1 a + C_2$$

$$0 = C_1 a + C_2$$

O que resulta num sistema de equações da forma:

$$\begin{cases} (a + b)C_1 + C_2 = \frac{q_0}{3}(2b^2) \\ aC_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

Cuja solução é a seguinte:

$$C_1 = \frac{q_0}{3}2b \quad \text{e} \quad C_2 = -\frac{q_0}{3}2ab$$

Desta forma:

$$V_y(x) = -q_0 < x - a >^1 - \frac{q_0}{2b} < x - a >^2 + \frac{q_0}{3}2b$$

$$M_z(x) = -\frac{q_0}{2} < x - a >^2 - \frac{q_0}{6b} < x - a >^3 + \frac{q_0}{3}2bx - \frac{q_0}{3}2ab$$

Com as expressões do carregamento, substituindo os valores, é possível calcular as reações no engaste, no apoio deslizante e a força cortante na rótula. Assim:

– **Engaste:**

$$V_y(0) = 210,5 \text{ kN}$$

$$M_z(0) = -673,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



– **Rótula:**

$$V_y(a) = 210,5 \text{ kN}$$

$$M_z(a) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

– **Apoio Deslizante:**

$$V_y(a+b) = -263,1 \text{ kN}$$

$$M_z(a+b) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Comparando as expressões de  $q(x)$ ,  $V_y(x)$  e  $M_z(x)$  para os dois carregamentos, pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned} q^{AC}(x) &= q^{AB}(x) + q^{BC}(x) \\ V_y^{AC}(x) &= V_y^{AB}(x) + V_y^{BC}(x) \\ M_z^{AC}(x) &= M_z^{AB}(x) + M_z^{BC}(x) \end{aligned}$$

O que está em total acordo com o princípio da superposição. Isso pode até ser visto numericamente com as reações no engaste, no apoio deslizante e a força cortante na rótula.

## 2.3 Letra C

A adição de uma força pontual na mesma posição da rótula afeta diretamente a expressão do carregamento, de forma que é necessário adicionar o termo  $q_0 L < x - a >^{-1}$ . Sendo assim:

$$q(x) = -q_0 < x - 0 >^0 - \frac{q_0}{b} < x - a >^1 + q_0 L < x - a >^{-1} \quad \forall \quad 0 \leq x \leq L$$

Desta forma, como visto na Letra A, integrando  $q(x)$ , encontra-se  $V_y(x)$ . Integrando novamente, encontra-se  $M_z(x)$ . Por fim, falta avaliar as condições de contorno:

$$\begin{aligned} V_y(x) &= \int q(x) dx = -q_0 < x - 0 >^1 - \frac{q_0}{2b} < x - a >^2 + q_0 L < x - a >^0 + C_1 \\ M_z(x) &= \int V_y(x) dx = -\frac{q_0}{2} < x - 0 >^2 - \frac{q_0}{6b} < x - a >^3 + q_0 L < x - a >^1 + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

Considerando as mesmas condições de contorno:  $M_z(L) = 0$  e  $M_z(a) = 0$ .

$$\begin{aligned} M_z(L) &= -\frac{q_0}{2} < L - 0 >^2 - \frac{q_0}{6b} < L - a >^3 + q_0 L < L - a >^1 + C_1 L + C_2 \\ 0 &= -\frac{q_0}{2} < a + b >^2 - \frac{q_0}{6b} < a + b - a >^3 + q_0(a+b) < a + b - a >^1 + C_1(a+b) + C_2 \\ &\quad (a+b)C_1 + C_2 = \frac{q_0}{6} (3a^2 - 2b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_z(a) &= -\frac{q_0}{2} < a - 0 >^2 - \frac{q_0}{6b} < a - a >^3 + q_0 L < a - a >^1 + C_1 a + C_2 \\ 0 &= -\frac{q_0}{2} < a >^2 + C_1 a + C_2 \\ &\quad aC_1 + C_2 = \frac{q_0}{2} a^2 \end{aligned}$$

Isso resulta num sistema de equações:

$$\begin{cases} (a+b)C_1 + C_2 = \frac{q_0}{6}(3a^2 - 2b^2) \\ aC_1 + C_2 = \frac{q_0}{2}a^2 \end{cases}$$

Chegando a novos valores das constantes de integração:

$$C_1 = -\frac{q_0 b}{3} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{q_0}{6}(3a^2 + 2ab)$$

Deste modo, as novas expressões de  $V_y(x)$  e  $M_z(x)$  são:

$$V_y(x) = -q_0 \langle x \rangle^1 - \frac{q_0}{2b} \langle x-a \rangle^2 + q_0(a+b) \langle x-a \rangle^0 - \frac{q_0 b}{3}$$

$$M_z(x) = -\frac{q_0}{2} \langle x \rangle^2 - \frac{q_0}{6b} \langle x-a \rangle^3 + q_0(a+b) \langle x-a \rangle^1 - \frac{q_0 b}{3} x + \frac{q_0}{6}(3a^2 + 2ab)$$

Com o programa computacional, os novos diagramas são:

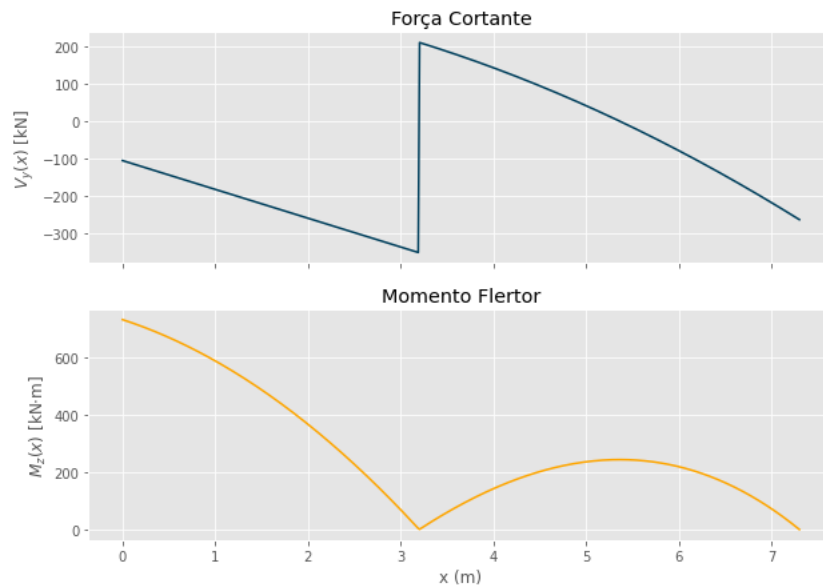


Figura 3: Diagramas de Esforços Internos

Comparando-se os diagramas com a Letra A, percebe-se que a inclusão de uma força pontual muda os valores de  $V_y(x)$  e de  $M_z(x)$  para as posições anteriores à rótula (local onde a força é aplicada). Além disso, é possível perceber que a expressão de  $V_y(x)$  da Letra C é deslocada em relação à Letra A para  $0 \leq x \leq a$ , sendo que a diferença entre os dois é justamente igual ao módulo da força aplicada. Já  $M_z(x)$  também é deslocado, mas com uma diferença proporcional  $q_0 L \cdot a$  (módulo da força aplicada vezes a posição da rótula). O que faz sentido, já que a aplicação da força num sentido diferente ao carregamento aplicado acaba alterando na adição desta força e também na adição do momento relacionado à força (momento este que é calculado pela multiplicação do módulo da força pelo braço da força).

Seguindo esta lógica, é possível encontrar o valor de intensidade da força aplicada na rótula

de forma que a força de reação do engaste seja nula (assim como o momento). O valor da intensidade é justamente igual ao valor da intensidade da força no engaste calculado na Letra A:

$$F = -V_y(0)$$

$$F = -(456,9) = -456,9 \text{ kN}$$

Já o valor da intensidade da força que deve ser aplicada para que o momento seja nulo no engaste é:

$$F = \frac{-M_z(0)}{a}$$

$$F = \frac{-(-1067,7)}{3,2} = 333,7 \text{ kN}$$

## 2.4 Letra D

Dadas a expressão de  $M_z(x)$  calculada na Letra A:

$$M_z(x) = -\frac{q_0}{2} \langle x \rangle^2 - \frac{q_0}{6b} \langle x - a \rangle^3 + q_0 \left( a + \frac{2b}{3} \right) x - q_0 \left( \frac{a^2}{2} + \frac{2ab}{3} \right) \quad \forall \quad 0 \leq x \leq L$$

Mantendo a largura  $L$  da viga constante e igual a  $L = 7,3 \text{ m}$ , então pode-se encontrar uma relação entre  $a$  e  $b$ :  $b = 7,3 - a$ . Feito isso,  $M_z(x)$  fica pode ser expresso em termos de  $x$  e de  $a \quad \forall \quad 0,9125 \leq a \leq 6,3875$ . Uma forma de se visualizar isso é por meio da ferramenta Desmos, em que é possível plotar o gráfico de  $M_z(x)$  por  $x$ , mas variando dinamicamente  $a$  através de um play. Esta visualização está no programa computacional e também pode ser visto neste [link](#).

Através do programa computacional, é possível, dentro da faixa de  $a$ , variar a posição de  $x$  e calcular o valor de  $M_z(x)$ . Feito isso, seleciona-se o máximo e o mínimo dos momentos para cada  $a$ . O resultado é o seguinte gráfico:

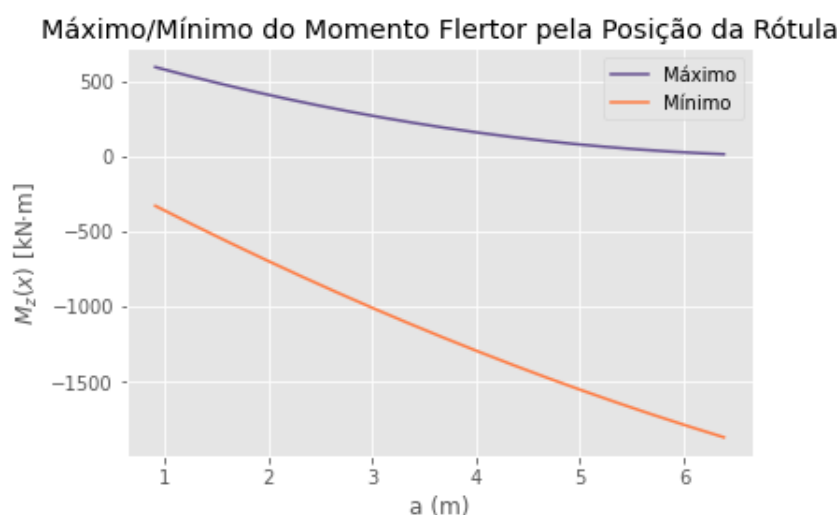


Figura 4: máximo e mínimo de  $M_z(x)$  por  $a$ .

Através do programa, é possível encontrar a posição da rótula que oferece mínimo do módulo do máximo momento fleitor. Isso acontece com  $a = 1,41 \text{ m}$ .

### 3 Solução Computacional

Para resolução do problema, usou-se um programa em Python que pode ser acessado usando o Google Colab através deste [link Colab](#) ou através do GitHub pelo [link GitHub](#).

Recomenda-se que o programa seja compilado usando o próprio Google Colab de forma que não é necessário baixar algum programa. Para isso, basta acessar os links dados.

Em resumo, o programa recebe os valores de entrada e acaba calculando os gráficos e outputs com base nas expressões de  $V_y(x)$  e de  $M_z(x)$  deduzidas nos itens anteriores. Desta forma, primeiro definiu-se as funções de singularidade. Após, para cada item, definiu-se as funções deduzidas e em seguida foi a avaliação dos valores para que se fosse criado os gráficos.