积分不等式的证明

言午

2020 年 9 月 13 日

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$，证明

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \frac{(b-a)^3}{12}M$$

2. 已知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上一阶可导，$f(0)=f(2)=1$，$|f'(x)|\le 1$，证明

$$1\le \int_0^2 f(x)\,dx \le 3$$

3. 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$f(x)\ne 0\,(x\in(0,1))$，证明

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \ge 4$$

4. 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一阶可导，$f(0)=f(1)=0$，证明

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \le \frac{1}{4}\int_0^1 f'^2(x)\,dx$$

5. 证明

$$0\le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x}\cos x dx \le \sqrt{\frac{\pi^3}{32}}$$

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，证明

$$\int_a^b xf(x)\,dx \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$$

7. 设 $f(x)\in[0,1]$，$f(0)=0$，$0\le f'(x)\le 1$，证明

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \ge \int_0^1 f^3(x)\,dx$$

8. 证明

$$2\le \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^4}dx \le 2\sqrt{2}$$

9. 证明

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^n}} dx \leq \frac{\pi}{6}, (n > 2)$$

10. 证明

$$\frac{61}{330} \leq \int_0^1 x \sin x^3 dx \leq \frac{1}{5}$$

11. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一阶可导，证明

$$|f(x)| \leq \int_0^1 [|f(x)| + |f'(x)|] \, dx$$

12. 证明

$$\frac{2\pi}{9} \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arc}\tan x dx \leq \frac{4\pi}{9}$$

13. 设 (x) 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，函数 $f(x)\,(f(x) > 0)$ 单调减少，证明

$$\frac{\int_0^1 x f^2(x) \, dx}{\int_0^1 x f(x) \, dx} \leq \frac{\int_0^1 f^2(x) \, dx}{\int_0^1 f(x) \, dx}$$

14. 已知 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$f(x) > 0$，证明

$$\int_a^b f(x) \, dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2$$

15. 设 $a > 0$，$b > 0$，$f(x) \geq 0$ 在 $[-a,b]$ 上连续，$\int_{-a}^b x f(x) \, dx = 0$，证明

$$\int_{-a}^b x^2 f(x) \, dx \leq ab \int_{-a}^b f(x) \, dx$$

16. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$0 < m \leq f(x) \leq M$，证明

$$\int_0^1 f(x) \, dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}$$