

# 极限计算

言午

2020 年 9 月 13 日

1. 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}}$$

2. 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$$

3. 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}$$

4. 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \cdots \sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$$

5. 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \tan x - \sin \sin x}{\tan x - \sin x}$$

6. 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{\sin x} + \sqrt[3]{1 - \cos x}) - \sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1 - \cos x})}$$

7. 计算

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[ t^2 \left( e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}$$

8. 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$$

9. 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left( n \sqrt{4n^2 + 1} \pi \right)$$

10. 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \sqrt{4n^2 + 1} \pi$$

11. 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$$

12. 设  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内可导, 且在  $x=0$  处存在二阶导数, 又设  $f(0) = f'(0) = 0$ ,  $f''(0) \neq 0$ , 求极限

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt}$$

13. 已知  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt}$$

14. 计算

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt[3]{x})(1 - \sqrt[4]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-2}}$$

15. 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$$

16. 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + \frac{2}{n}\right)^k \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^k}$$

17. 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \prod_{i=1}^{2n} (n^2 + i^2)^{\frac{1}{n}}$$

18. 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$$

19. 设函数  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  内有二阶连续导数, 且  $f''(x) \neq 0$ , 证明

(1) 对于  $(-1, 1)$  内任意  $x \neq 0$ , 存在唯一的  $\theta(x) \in (0, 1)$ , 使

$$f(x) = f(0) + x f'(\theta(x)x)$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$$

20. 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right)$$

21. 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[ \frac{1}{x} \right]$$

**22.** 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+\sin x} - 1)}$$

**23.**  $n$  为正整数,  $a$  为某实数  $a \neq 0$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1999}}{x^n - (x-1)^n} = \frac{1}{a}$$

则  $n$ 、 $a$  的值分别为多少。