证明积分不等式的几种方法*

刘法贵　左卫兵　（华北水利水电学院　郑州　450011）

摘　要　通过实例介绍证明积分不等式的几种常用方法.

关键词　积分不等式; 证明; 中值定理; 单调性定理.　　中图分类号　O172.2

积分不等式是微积分学中一类重要的不等式,其证明方法多种多样.本文列举证明积分不等式的几种主要方法供大家参考.

1　利用微分中值定理(包括 Taylor 公式)

如果不等式中含有“函数可导”的条件, 一般多用微分中值定理证明之, 尤其是含有“高阶可导”条件并给定某些点函数值, 此时采用 Taylor 公式证明.

例 1　设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上具有二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, $M=\max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$. 证明

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12}M.$$

证明　将 $f(a)$, $f(b)$ 在 $x(\in[a,b])$ 处 Taylor 展开, 并注意题目的条件, 得

$$f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(a-x)^2=f(a)=0\quad(\xi_1\in[a,x]),$$

$$f(x)+f'(x)(b-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-x)^2=f(b)=0\quad(\xi_2\in[x,b]).$$

将以上两式相加, 得

$$f(x)=-\frac{f'(x)}{2}(a+b-2x)-\frac{1}{4}[f''(\xi_1)(x-a)^2+f''(\xi_2)(x-b)^2].$$

对上式在$[a,b]$ 上积分, 注意到$\int_a^b f'(x)(a+b-2x)\mathrm{d}x=2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 即得

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|-\frac{1}{8}\int_a^b[f''(\xi_1)(x-a)^2+f''(\xi_2)(x-b)^2]\,\mathrm{d}x\right|\leqslant$$

$$\frac{M}{8}\int_a^b[(x-a)^2+(x-b)^2]\,\mathrm{d}x=\frac{M}{12}(b-a)^3.$$

由此可知题中结论成立

例 2　已知 $f(x)$ 在$[0,2]$ 上一阶可导, $f(0)=f(2)=1$, $|f'(x)|\leqslant1$. 证明

$$1\leqslant\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant3.$$

证明　由微分中值定理, 存在 $c_1\in(0,x)(x\in[0,1])$, 使得 $f(x)-f(0)=f'(c_1)x$; 同理, 存在 $c_2\in(x,2)(x\in[1,2])$, 使得 $f(x)-f(2)=f'(c_2)(x-2)$. 因此, 得

$$1-x\leqslant f(x)\leqslant1+x\quad(x\in[0,1]),\qquad x-1\leqslant f(x)\leqslant3-x\quad(x\in[1,2]).$$

这样, 利用上两式, 并注意到$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 即可证题中不等式成立.

* 收稿日期: 2006－10－30.

例 3　函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=f(1)=0$, $f(x)\neq 0(x\in(0,1))$. 证明

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant 4. \tag{5}$$

证明　若不等式左端积分发散, 结论显然成立. 以下设不等式左端积分收敛.

不妨设 $f(x)>0(x\in(0,1))$. 由于 $f(0)=f(1)=0$, 因此存在 $x_0\in(0,1)$ 使

$$f(x_0)=\max_{x\in[0,1]}f(x)>0.$$

这样, 由微分中值定理, 存在 $\alpha\in(0,x_0)$, $\beta\in(x_0,1)$ 使

$$f'(\alpha)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0},\qquad f'(\beta)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}.$$

因此

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{f(x_0)}\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{f(x_0)}\int_\alpha^\beta|f''(x)|\mathrm{d}x\geqslant$$

$$\frac{1}{f(x_0)}\left|\int_\alpha^\beta f''(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{f(x_0)}|f'(\beta)-f'(\alpha)|=\frac{1}{x_0(1-x_0)}\geqslant 4.$$

于是题中不等式成立.

2　利用 Cauchy 不等式

已知 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$.

例 4　函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一阶可导, $f(0)=f(1)=0$. 证明

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x.$$

证明　由 $f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+f(0)$, $f(x)=-\int_x^1 f'(t)\mathrm{d}t+f(1)$ 即得

$$f^2(x)=\left(\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\int_0^x 1^2\mathrm{d}t\int_0^x f'^2(t)\mathrm{d}t\leqslant x\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x\quad\left(x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\right),$$

$$f^2(x)=\left(\int_x^1 f'(t)\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\int_x^1 1^2\mathrm{d}t\int_x^1 f'^2(t)\mathrm{d}t\leqslant(1-x)\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x\quad\left(x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\right).$$

因此,

$$\int_0^{\frac{1}{2}}f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{8}\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x,\qquad\int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{8}\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x.$$

将上两式相加即得题中不等式成立.

例 5　证明 $0\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x}\cos x\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{\frac{\pi^3}{32}}$.

证明　不等式左端是显然的, 下面证明不等式的右端. 由 Cauchy 不等式, 得

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x}\cos x\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{32}.$$

因此右端得证.

3　利用单调性

如果题目中含"单调性"或隐含"单调性"的条件, 利用函数单调性证明较简单些.

例 6　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且单调增加. 证明

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明　设 $F(x)=\int_a^x xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(x)\mathrm{d}x\ (x\in[a,b])$. 由于 $f(x)$ 单调增加, 因此

$$F'(x)=\frac{1}{2}\left[(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{2}\int_a^x[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t\geqslant 0,$$

即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加, 因此由 $F(a)=0$ 即得 $F(b)\geqslant 0$.

例 7　设 $f(x)\in C([0,1])$, $f(0)=0$, $0\leqslant f'(x)\leqslant 1$. 证明

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x.$$

提示　设 $F(x)=\left(\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^x f^3(x)\mathrm{d}x\ (x\in[0,1])$ 即证.

4　利用命题"如果 $m\leqslant f(x)\leqslant M(x\in[a,b])$, 则 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$."

例 8　证明 $2\leqslant\int_{-1}^1\sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x\leqslant 2\sqrt{2}$.

提示　设 $f(x)=\sqrt{1+x^4}\ (x\in[-1,1])$. 易知 $f_{\min}=1$, $f_{\max}=\sqrt{2}$. 即证.

5　利用命题"若 $f(x)\leqslant g(x)(x\in[a,b])$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$."

例 9　证明 $\dfrac{1}{2}\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^n}}\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\ (n>2)$.

提示　设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^n}}\left(x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right], n>2\right)$. 易知 $1\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 即证.

例 10　证明 $\dfrac{61}{330}\leqslant\int_0^1 x\sin x^3\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{1}{5}$.

提示　注意到 $x-\dfrac{x^3}{3!}\leqslant\sin x\leqslant x\ (x\geqslant 0)$. 即证.

6　利用积分中值定理

例 11　已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一阶可导. 证明 $|f(x)|\leqslant\int_0^1[|f(x)|+|f'(x)|]\mathrm{d}x$.

证明　由积分中值定理, 存在 $c\in[0,1]$ 使 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(c)$. 注意到

$$f(x)=\int_c^x f'(t)\mathrm{d}t+f(c)\ (x\in[0,1]),$$

即得

$$|f(x)|\leqslant|f(c)|+\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1[|f(x)|+|f'(x)|]\mathrm{d}x.$$

例 12　证明 $\dfrac{2\pi}{9}\leqslant\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{4\pi}{9}$.

提示　由积分中值定理, 存在 $c\in\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right]$, 使

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\mathrm{d}x=\arctan c\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\arctan c.$$

注意到 $\dfrac{\pi}{6}\leqslant\arctan c\leqslant\dfrac{\pi}{3}$ 即证.

7　利用二重积分

注意到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_D f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_D f(y)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b\}$. 因此, 由等式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_D[f(x)g(y)+f(y)g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

可证明含双积分号的不等式.

例 13 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,函数 $f(x)(f(x)>0)$ 单调减少. 证明

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}.$$

证明 由题设所给条件知,证明题中不等式即证

$$\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

而

$$\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_D F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,

$$F(x,y)=[xf^2(x)f(y)+yf^2(y)f(x)]-[f^2(x)yf(y)+f^2(y)xf(x)].$$

化简 $F(x,y)$ 得

$$F(x,y)=f(x)f(y)(x-y)(f(x)-f(y)).$$

由 $f(x)$ 单调减少,易知 $F(x,y)\leqslant 0((x,y)\in D)$. 由此, $\int_D F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 0$. 从而结论成立.

例 14 已知 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, $f(x)>0$. 证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2.$$

提示

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b\}$,由此,利用 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 即可证明.

8 其他方法

以下方法相对较困难些,需要一定的技巧,请读者仔细体会.

例 15 设 $a>0,b>0,f(x)(\geqslant 0)$ 在 $[-a,b]$ 上连续, $\int_{-a}^b xf(x)\mathrm{d}x=0$. 证明

$$\int_{-a}^b x^2f(x)\mathrm{d}x\leqslant ab\int_{-a}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 注意到 $(b-x)(x+a)\geqslant 0$, 因此,有

$$\int_{-a}^b(b-x)(a+x)f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

由此,利用题目中的条件即证.

例 16 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$. 证明

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{(M+m)^2}{4Mm}.$$

提示 注意到 $(f(x)-m)(f(x)-M)\leqslant 0(x\in[0,1])$ 及 $f(x)>0$,得

$$f(x)+\frac{Mm}{f(x)}\leqslant M+m.$$

因此,

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+Mm\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2\leqslant(M+m)^2,$$

由此,利用 $2ab\leqslant a^2+b^2$ 即证.

参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析(上)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.