第 19 卷 第 5 期
2016 年 9 月

高 等 数 学 研 究
STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS

Vol. 19, No. 5
Sep., 2016

doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2016.05.002

利用微分学证明不等式的几种典型证法

赵旭波,李小平
(中国石油大学(华东)理学院 基础数学系,山东 青岛 266580)

摘　要　通过对几道不等式证明题的分析,文中总结了利用微分学证明不等式的常用方法,有助于学生加深对微分学知识的理解,激发学生的学习兴趣,也有利于学生发散思维培养及提高解决问题的能力.

关键词　不等式;单调性;泰勒公式;拉格朗日中值定理

中图分类号　O172.2　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008-1399(2016)05-0005-02

Typical Methods of Proving Inequality by Differential Calculus

ZHAO Xubo, LI Xiaoping
(College of Science, China University of Petroleum(Huadong), Qingdao 266580, PRC)

Abstract　Through several examples of inequality, this paper summarizes the commonly used method of inequality by differential calculus. It helps students deepen their understanding of the content of differential calculus to stimulate students' interest of learning. It also raises the student divergent thinking ability and problem－solving skills to improve.

Keywords　inequality; monotonicity ; Taylor formula; Lagrange mean－value theorem

利用微分学证明不等式是考研中常见、热门的考题,而不等式的证明方法比较杂,学生们常常感到不好把握其证明方法.究其原因,根据笔者多年的教学实践,往往是学生对所学的知识及方法没有进行必要的梳理,总结出证明的规律.本文以几道不等式证明题为例,总结利用微分学证明不等式的一般方法,有助于学生加深对微分学知识的理解.

一　利用单调性

导数是判断函数单调性强有力的工具,用单调性证明不等式的基本思路为,先构造一个辅助函数 $f(x)$,然后在某个区间 (a,b) 内判断导函数 $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$,则函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调递增(递减),最后在此区间内比较函数值的大小.以下题为例.

收稿日期:2015-04-24　　修改日期:2015-10-29
基金项目:中央高校基本科研基金(No. 15CX02060A),中国石油大学(华东)教学改革项目(CG2016023,QN201622)
作者简介:赵旭波(1979－),女,讲师,研究方向:网络编码,Email:zhaoxubo_2003@163.com

例 1　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,在 $(0,+\infty)$ 内二阶可导,且 $f''(x)<0$,并设 $f(0)=0$,试证明对任意 $x_1>0,x_2>0$,恒有

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2).$$

证法一　构造辅助函数

$$\Phi(x)=f(x)+f(x_2)-f(x+x_2),x\geqslant 0,$$

注意到 $\Phi(0)=0$.

$$\Phi'(x)=f'(x)-f'(x+x_2),$$

由于 $x+x_2>x$ 及 $f''(x)<0$,从而 $\Phi'(x)>0$.于是当 $x>0$ 时,有 $\Phi(x)>0$,即得

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2).$$

二　利用拉格朗日中值公式

利用拉格朗日中值公式证明不等式,通常要考查导函数 $f'(x)$ 的单调性,若导函数不具有单调性,往往考查导函数在某个区间内不变号,从而确定函数的单调性,进而证明结论.

证法二　$\forall x_1>0,x_2>0$,不妨设 $x_1\leqslant x_2$,由

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)-f(x_1)+f(0)=$$

$$f'(\xi)x_1-f'(\eta)x_1=$$
$$f''(\tau)(\xi-\eta)x_1<0,$$

其中 $0<\eta<x_1\leqslant x_2<\xi<x_1+x_2$，$\eta<\tau<\xi$. 即结论成立.

注　此题还可构造辅助函数 $\Phi(x)=f(x+x_2)-f(x)$，请自证.

三　利用泰勒公式

如果所给条件为二阶或更高阶可导，往往可考虑泰勒公式，仍以例1分析.

证法三　由于 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内二阶可导，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可以展开为带有拉格朗日余项的一阶泰勒公式，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2. \tag{1}$$

$\forall x_1>0,x_2>0$，不妨设 $x_1\leqslant x_2$，取 $x_0=x_2$，$x=x_1+x_2$，代入式(1)，得

$$f(x_1+x_2)=f(x_2)+f'(x_2)x_1+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_1{}^2, \tag{2}$$

再取 $x_0=x_1$，$x=0$，代入式(1)，得

$$0=f(0)=f(x_1)+f'(x_1)(-x_1)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)x_1{}^2. \tag{3}$$

(2)+(3)式并注意到 $f''(x)<0$，于是有

$$f(x_1+x_2)<$$
$$f(x_1)+f(x_2)+x_1[f'(x_2)-f'(x_1)]=$$
$$f(x_1)+f(x_2)+x_1(x_2-x_1)f''(\xi_3)\leqslant$$
$$f(x_1)+f(x_2),$$

其中 $x_1<\xi_3<x_2$.

注　用泰勒公式时，关键是如何选取 x_0. 应对照欲证之式，哪些要保留，哪些要消失，决定如何取 x_0.

四　利用最值

例2　设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$. 试证明恒有 $f(x)\geqslant x$ 且等号仅在 $x=0$ 时成立.

利用最值证不等式，通常做法为构造一个辅助函数，然后考查该函数在某个区间的最值.

证　令 $\Phi(x)=f(x)-x$，则有

$$\Phi'(x)=f'(x)-1,\Phi''(x)=f''(x)>0.$$

由条件 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，易得 $f(0)=0$，$f'(0)=1$.

注意到 $\Phi(0)=0$，$\Phi'(0)=f'(0)-1=0$.

易知，当 $x<0$ 时，$\Phi'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$\Phi'(x)>0$. 从而 $x=0$ 为 $\Phi(x)$ 的惟一驻点且是极小值点，故 $\Phi(x)$ 的最小值为 $\Phi(0)=0$，即有 $f(x)\geqslant x$ 且等号仅在 $x=0$ 时成立.

注　此题也可用泰勒公式证之，请自证.

五　利用函数凹凸性

例3　证明：当 $x>0,y>0$ 时，$x\ln x+y\ln y\geqslant(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$.

分析　对多元不等式的证明，通常利用函数的凹凸性来证，关键是构造所需的函数，并判断其二阶导数的正负号.

证　令 $f(t)=t\ln t$，则 $f'(t)=\ln t+1$，$f''(t)=\frac{1}{t}$. 注意到当 $t>0$ 时，$f''(t)=\frac{1}{t}>0$，易知函数 $f(t)=t\ln t$，$t>0$ 凹的，由凹函数的定义，得

当 $x>0,y>0$ 时，$\frac{f(x)+f(y)}{2}\geqslant f(\frac{x+y}{2})$，

即
$$x\ln x+y\ln y\geqslant(x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$$

通过几道不等式的证明，注意分析各种解题方法的特点与联系，灵活地将解题方法技巧与所学基本理论结合起来，这不仅可以培养学生的灵活思维能力，达到举一反三、触类旁通的学习效果，也必将会提高分析问题和解决问题的能力.

参考文献

[1] 同济大学应用数学系. 高等数学(上下)[M]. 北京：高等教育出版社，2002.

[2] 赵达夫. 全国硕士研究生入学考试高等数学辅导讲义[M]. 北京：新华出版社，2004.