中值等式的证明

言午

2020 年 9 月 13 日

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}=f'(\xi)$$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，证明存在 $\xi,\eta \in (a,b)$，使得

$$e^{\eta-\xi}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=1$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f'(x)\neq 0$，且 $f(a)=0$，$f(b)=2$，证明在区间 (a,b) 内存在两个不同的点 ξ、η 使得

$$f'(\eta)\left[f(\xi)+\xi f'(\xi)\right]=f'(\xi)\left[bf'(\eta)-1\right]$$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，证明存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=f(b)$，证明在区间 $[a,b]$ 上存在 ξ，使得

$$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{b-a}{2}\right)$$

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导，且 $f(0)=-1$，$f(1)=0$，$f'(0)=0$，证明 $\forall x \in (0,1)$，至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使得

$$f(x)=-1+x^2+\frac{x^2(x-1)}{3!}f'''(\xi)$$

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，又 $F(x)=x^3f(x)$，证明存在 $\xi \in (0,1)$，使 $F'''(\xi)=0$.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，证明至少存在一点 $\xi \in (0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

9. 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，证明对于任意自然数 n，存在 $\xi\in[0,1)$，使得

$$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi)$$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，μ 为介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的实数，则存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=\mu$$

11. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right](b-a)-\frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3$$

12. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，且 $f'(a)=f'(b)$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right](b-a)+\frac{1}{6}f''(\xi)(b-a)^3$$

13. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，且 $f'(a)=f'(b)$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right](b-a)+\frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3$$