递推式极限

言午

2020 年 9 月 13 日

1. 设 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}\,(n\in N_+)$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2}$$

2. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=2$，$x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}$，$n\in N_+$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限值。

3. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n\,(3-x_n)}$，$n\in N_+$，证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求其极限值。

4. 证明数列 $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$ 极限存在，并求其极限值。

5. 设 $a_1>0$，$\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\ln(1+a_n)$，$n\in N_+$。

（1）证明数列 $\{a_n\}$ 极限存在，并求其极限值；

（2）计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}$$

6. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\cos x_n$，$n\in N_+$，$x_1=\cos x$，证明该数列极限存在且其极限值为 $\cos x-x=0$ 的根。

7.

（1）证明方程 $\tan x=x$ 在 $\left(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内存在实根 ξ_n，$n\in N_+$；

（2）计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\xi_{n+1}-\xi_n\right)$$

8.

（1）证明方程 $e^x+x^{2n+1}=0$ 在 $(-1,0)$ 有唯一实根 x_n，且 $n\in N_+$；

（2）证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求其值 a；

（3）计算

$$\lim_{n\to\infty}n\left(x_n-a\right)$$

9. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_0=a$，$x_1=b,x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+x_{n-1}\right)$，$n\in N_+$，证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求其极限。

10.

（1）证明方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1\,(n > 1, n \in Z)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内有且仅有一个实根；

（2）记（1）中的实根为 x_n，证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求其极限。