方法与技巧

一类特殊函数极限的计算*

龚东山[1]　刘岳巍[1]　李春鸣[2]
(1. 兰州大学数学与统计学院　兰州　730000; 2 西北民族大学生命科学与工程学院　兰州　730030)

摘　要　本文基于高等数学中极限计算方法, 利用定积分定义法和 Taylor 中值定理法, 求解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f[k]$ 这类特殊极限

关键词　高等数学; 特殊函数; Taylor 中值定理; 极限　　中图分类号　O171

高等数学是以函数为对象, 以微分和积分及其应用为内容, 以极限为手段的一门学科, 换句话说, 高等数学是用极限来研究函数的微分和积分的理论[1]. 由于极限贯穿于整个高等数学, 故极限的计算就显得尤为重要. 具体计算方法包括: 定义证明法、利用两个重要极限法、利用判定极限存在的两个准则法、利用等价无穷小替换法、利用函数的连续性法、利用导数求极限法 —— 洛必塔法则、利用 Taylor 中值定理法、利用定积分定义法等[2]. 在具体的计算过程中, 往往还需要先观察函数的结构, 再利用适当方法, 得以解决.

本文讨论下面一类特殊极限的计算:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f[k] \tag{1}$$

一般情况下, 若上式中 $f[k]$ 能表达成 $g\left(\frac{k}{n}\right)$ 的形式时, 可采用定积分定义法[3] 计算极限值. 此时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$, 再计算定积分值即可.

例 1　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

例 2　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}$, 其中, $p>0$

对于有些情况下, 若 $f[k]$ 不能表达成 $g\left(\frac{k}{n}\right)$ 时, 也就不能转化成定积分的形式来计算极限值. 这里我们将提出另一种思路.

例 3　$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} \tag{2}$$

为了求解此题, 先介绍一个定理:

定理　对于数列 $\{b_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}b_k=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$.　(3)

证明　令 $y_n=n$, $x_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$, 由 Stolz 定理[4], 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n)-(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}b_n=b$$

* 收稿日期: 2008－03－31

于是，式(2)的计算，就转化为：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

再令 $z_k=\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$，显然$\{z_k\}$ 单调增加且有上界[3]，故有 $z_k<\mathrm{e}$，且$\lim\limits_{k\to\infty}z_k=\mathrm{e}$. 因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\mathrm{e}}{3}\right]^n=0$$

进一步，有如下结论：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}=\begin{cases}\infty, & 0<a<\mathrm{e}\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, & a=\mathrm{e}\\ 0, & a>\mathrm{e}\end{cases}\tag{4}$$

证明　由定理知，$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n\tag{5}$$

① 当 $0<a<\mathrm{e}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{\mathrm{e}}{a}>1$. 故

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\mathrm{e}}{a}\right]^n=\infty$$

② 当 $a=\mathrm{e}$ 时，令 $w_x=\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x$，两边取对数得：$\ln w_x=x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]$

下面计算$\lim\limits_{x\to\infty}\ln w_x$ 的值：

由 Taylor 中值定理得，$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left[\left(\frac{1}{x}\right)^3\right]$，其中，$-1<\frac{1}{x}<1$. 于是

$$\lim_{x\to\infty}\ln w_x=\lim_{x\to\infty}x\left\{x\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x}\right)^3\right]-1\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}x\left\{-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left[\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]\right\}=\lim_{x\to\infty}\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=-\frac{1}{2}$$

这样，$\lim\limits_{x\to\infty}w_x=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\ln w_x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln w_x}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

考虑到数列$\{w_n\}$ 是一个特殊的函数 w_x，则有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

③ 当 $a>\mathrm{e}$ 时，$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=\frac{\mathrm{e}}{a}$，显然 $0<\frac{\mathrm{e}}{a}<1$，故

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\mathrm{e}}{a}\right]^n=0.$$

结论：本文给出了一类特殊极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f[k]$ 的具体分析与计算. 对求解这类特殊的极限，一般可采用定积分定义法. 即将 $f[k]$ 表达成$g\left(\frac{k}{n}\right)$，再利用$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}g\left[\frac{k}{n}\right]=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$. 而当该法不适用时，可利用本文介绍的定理，将问题转化为$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 的计算.

作者认为，在高等数学求解极限问题中，如能把握以下几点，则能起到事半功倍的效果：

1. 掌握极限常规的计算方法，有利于特殊极限问题的求解； (下转第 14 页)

定理说明, 只要在同一极限过程中, $B(x)$ 是 $A(x)$ 的 k 阶或比 $A(x)$ 更高阶的无穷小, 则该极限过程中, 函数 $A(x)^{B(x)}$ 的极限是 1. 例如求极限 $\lim\limits_{x\to1^+}(\ln x)^{(x-1)}$, 由于 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{1/x}=1$, 于是原式 $=1$.

推论 1 若 $x\to x_0$ 时, $A(x)$ 与 $B(x)$ ($A(x)>0$) 均为无穷小, 且 $A(x):A(x-x_0)^{\alpha}$, $B(x):B(x-x_0)^{\beta}$, (A, B, α, β 均为常数, $\alpha>0$, $\beta>0$), 则 $\lim\limits_{x\to x_0}A(x)^{B(x)}=1$.

例如利用定理 2 及推论 1, 容易看出下列各式的极限均为 1:

$$\lim_{x\to0^+}x^{\sin x}、\quad \lim_{x\to0}(1-\cos x)^{\sin 2x}、\quad \lim_{x\to0}(\tan x-x)^{x\sin x}、\quad \cdots.$$

对于 ∞^0 型的未定式, 可先变形成 $\dfrac{1}{0^0}$ 型, 然后利用定理 2 和推论 1 求解, 也可利用下面的推论 2 直接判定.

推论 2 若在同一极限过程中, 可导函数 $A(x)$ 是正无穷大, $B(x)$ 是无穷小, 且存在正常数 α、β 及非零常数 C, 使 $\lim[A(x)]^{\alpha}[B(x)]^{\beta}=C$ 成立, 则有 $\lim A(x)^{B(x)}=1$.

证明 由条件 $\lim[A(x)]^{\alpha}[B(x)]^{\beta}=C$ 知 $B(x)$ 是 $\dfrac{1}{A(x)}$ 的 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ 阶无穷小, 由定理 1 得, $\lim\left(\dfrac{1}{A(x)}\right)^{B(x)}=1$, 从而 $\lim A(x)^{B(x)}=1$, 结论成立.

上述方法的综合运用, 可以极大地简化计算, 例如求极限 $\lim\limits_{x\to0}(-\ln\sin^2x)^{\frac{1}{\ln\tan x^2}}$, 若直接化成 e 的指数的极限, 计算将十分复杂; 根据定理 1, $\sin^2x$ 与 $\tan x^2$ 是同阶无穷小, 于是 $\dfrac{1}{\ln\sin^2x}$ 与 $\dfrac{1}{\ln\tan x^2}$ 是等价无穷小, 推出 $\lim\limits_{x\to0}(-\ln\sin^2x)\circ\dfrac{1}{\ln\tan x^2}=-1$, 再根据推论 2 得原极限为 1.

参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析上册(第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997: 165－172.
[2] 同济大学应用数学系. 高等数学上册(第五版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 133－136.

(上接第 12 页)

2 求解极限前, 对题型结构的观察和适当变形, 是解决问题的必要步骤;

3 等价无穷小的替代, 需要根据具体情况而定, 因为等价并不意味着完全相等.

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

解 依 Taylor 中值定理, 知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\left(x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.

此例若利用等价无穷小替代方法将 $\sin x$ 替代, 将会得到不同结果, 因此, 当“$\dfrac{0}{0}$”型极限的分子或分母是和、差的形式时, 不可盲目使用等价无穷小替代求极限.

参考文献

[1] 翟忠信, 龚东山. 高等数学的教与学[J]. 高等理科教育, 2004(6): 29－34
[2] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 1－49
[3] 同济大学数学教研室主编. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 68－70
[4] 陈纪修等. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999: 48－50