微分不等式的证明

言午

2020 年 9 月 13 日

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f''(x)<0$，并设 $f(0)=0$，试证明对 $\forall x_1>0, x_2>0$，恒有

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$

2. 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f''(x)>0, \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，试证明恒有

$$f(x)\geq x$$

且等号仅在 $x=0$ 时成立。

3. 证明当 $x>0, y>0$ 时，

$$x\ln x+y\ln y\geq(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$$

4. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，满足 $f(0)=1$，$f'(0)=0$，且对任意的 $x\geq 0$，有 $f''(x)-5f'(x)+6f(x)\geq 0$，证明对任意的 $x\geq 0$，有

$$f(x)\geq 3e^{2x}-2e^{3x}$$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f'(a)=f'(b)=0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

6. 证明当 $x>0$ 时，有

$$\left(x^2-1\right)\ln x\geq(x-1)^2$$

7. 设 $0<|x|\leq\frac{\pi}{2}$，证明

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\cos x$$

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，证明

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\leq\frac{1}{8}(b-a)^2\cdot\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$