第七节

空间曲线及其方程

主讲：郭飞

§7.7 空间曲线及其方程

一、空间曲线的方程

二、空间曲线在坐标面上的投影

三、向量值函数

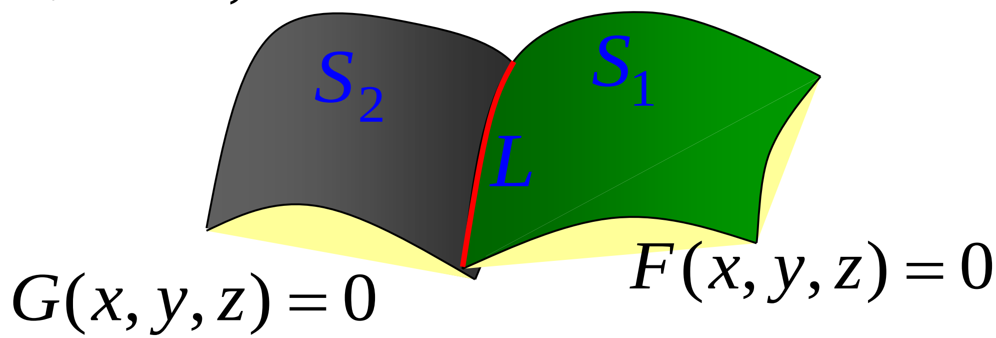
四、空间曲线的切线和法平面

一、空间曲线的方程

1、空间曲线的一般方程

空间曲线可视为两曲面的交线, 其一般方程为方程组

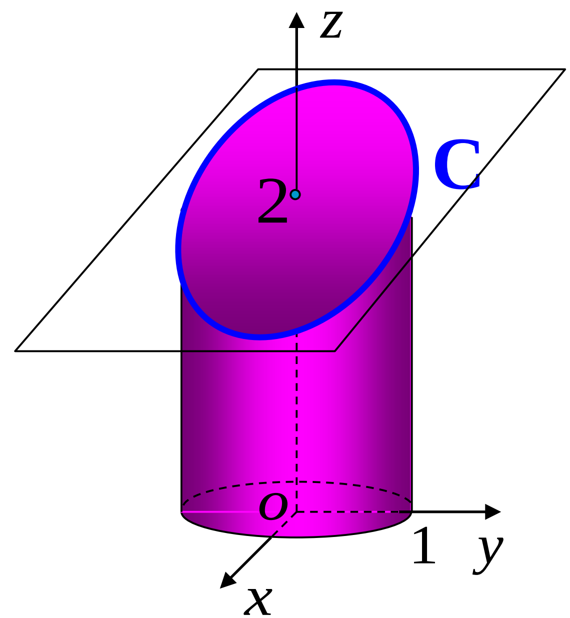
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



例如,方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$$

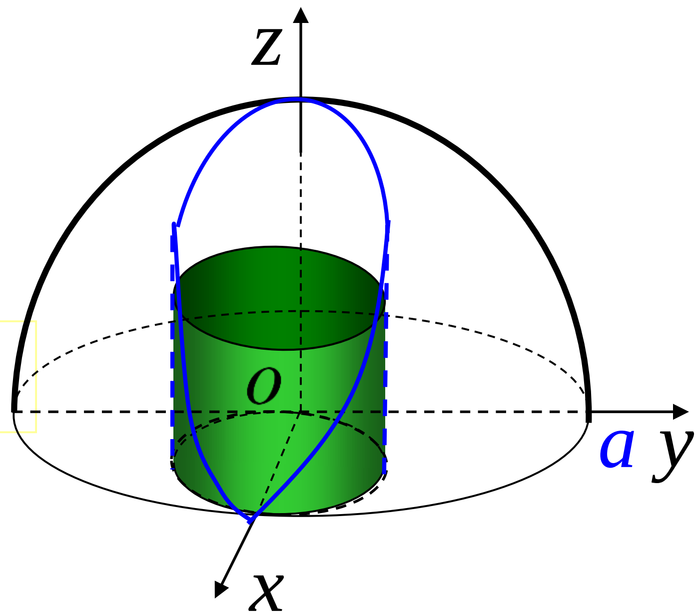
表示圆柱面与平面的交线 C.

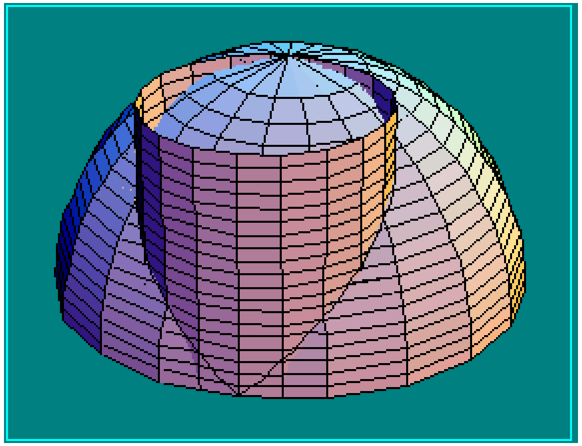


又如,方程组

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$$

表示上半球面与圆柱面的交线C.



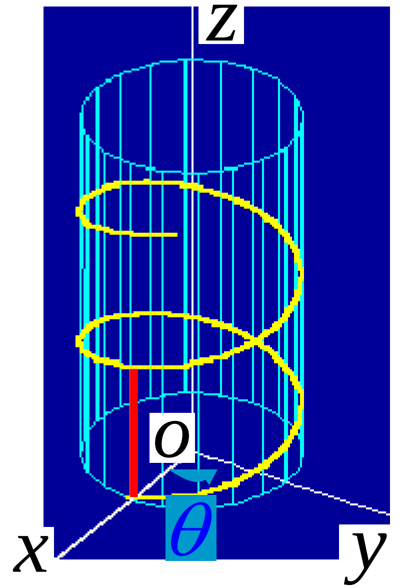


2、空间曲线的参数方程

将曲线C上的动点坐标x, y, z表示成参数t 的函数:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

称它为空间曲线的**参数方程.**



例如,**圆柱螺旋线** 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt \end{cases} \xrightarrow{\text{令}\ \theta = \omega t,\ b = \frac{v}{\omega}} \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$$

当$\theta = 2\pi$时, 上升高度 $h = 2\pi b$, 称为**螺距** .

例1. 将下列曲线化为参数方程表示:

$$(1)\ \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$$

解: (1)根据第一方程引入参数 ,得所求为

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=\frac{1}{3}(6-2\cos t) \end{cases} \qquad (0\le t\le 2\pi)$$

(2) 将第二方程变形为 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$, 故所求为

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t \\ y=\frac{a}{2}\sin t \\ z=a\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t} \end{cases} \qquad (0\le t\le 2\pi)$$

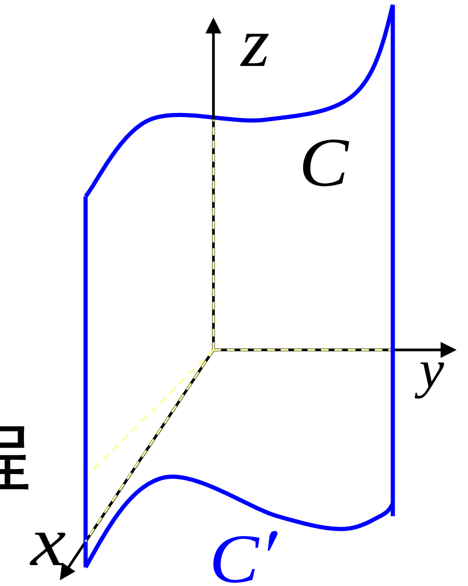
二、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

消去 z 得投影柱面 $H(x,y)=0$,

则 C 在 xoy 面上的投影曲线 C' 为

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$



消去 x 得 C 在 yoz 面上的投影曲线方程

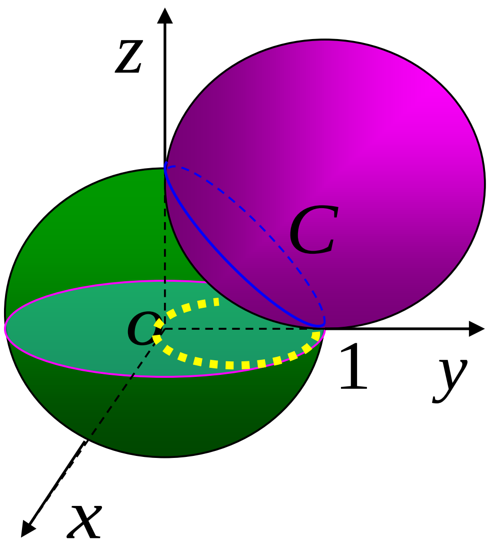
$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

消去 y 得 C 在 zox 面上的投影曲线方程 $\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$

例如,

$$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 & ① \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 & ② \end{cases}$$

求C在xoy 面上的投影曲线方程:



(1)(2)两式相减得到$z=1-y$,代入(1)得到

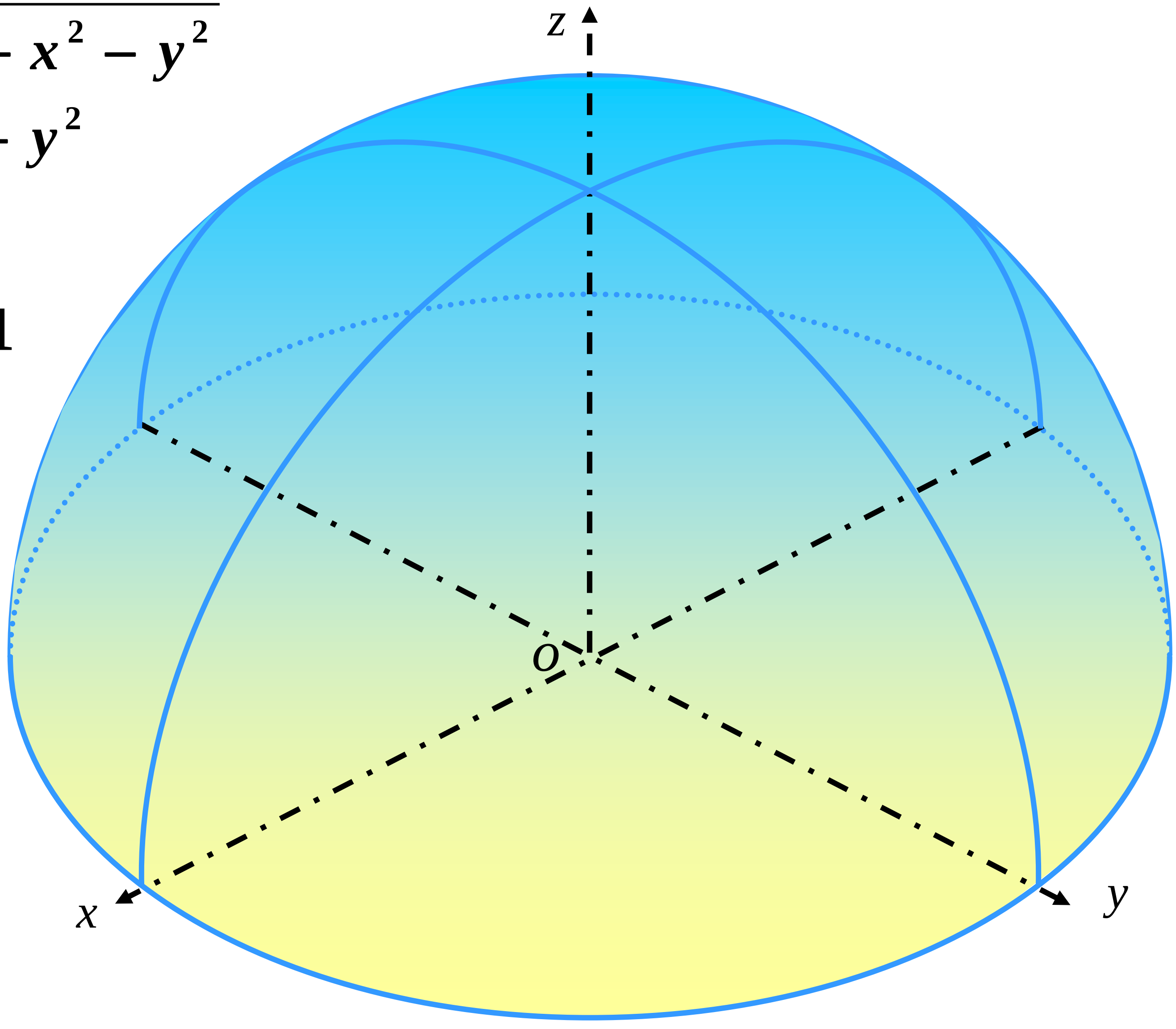
投影曲线方程 $\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$

求曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 的交线 L 在 xoy 平面的投影。

解 由 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$

得交线L:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$$

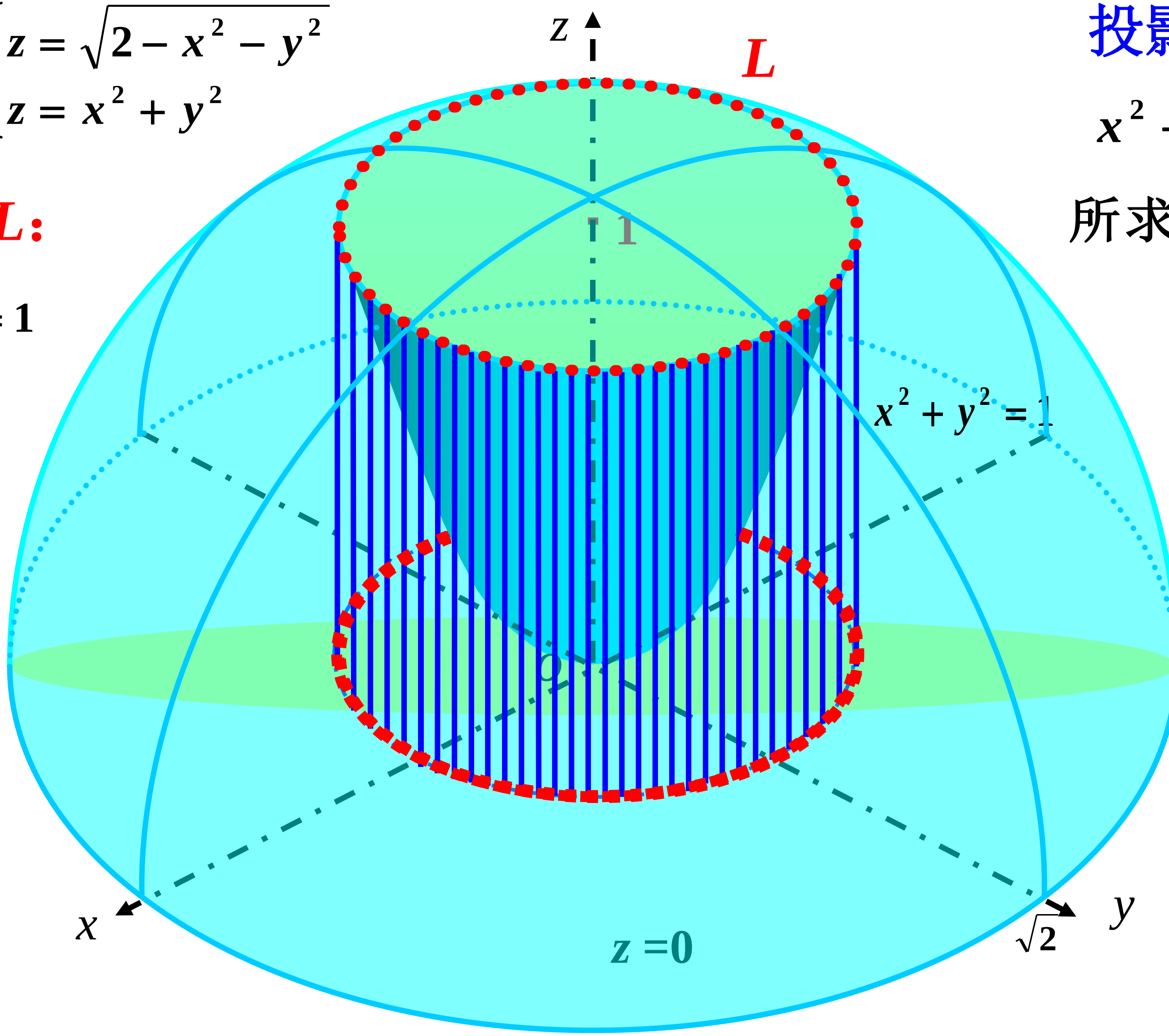


求曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 的交线 L在 xoy 平面的投影。

解　由 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$

得交线L:

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$



投影柱面

$x^2+y^2=1$

所求投影曲线为

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

三、向量值函数

1.定义 给定数集 $D \subset \mathbf{R}$，称映射 $\boldsymbol{r}: D \to \mathrm{R}^n$ 为**一元向量值函数**（简称**向量值函数**），记为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad t \in D.$$

因变量

定义域

自变量

连续和导数密切相关，因此下面仅以 $n = 3$ 的情形为代表进行讨论.

设 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\ t\in D$, 则

极限： $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=(\lim\limits_{t\to t_0}x(t),\lim\limits_{t\to t_0}y(t),\lim\limits_{t\to t_0}z(t))$.

连续： $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t_0)$.

导数： $\boldsymbol{r}'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$,

$$\boldsymbol{r}'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

简单曲线和简单闭曲线定义见课本：

2. 向量值函数的导数运算法则

设$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$是可导向量值函数, $\boldsymbol{C}$ 是常向量, c 是任一常数, $\varphi(t)$是可导函数, 则

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{C}=0$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[c\,\boldsymbol{u}(t)]=c\,\boldsymbol{u}'(t)$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\pm\boldsymbol{v}'(t)$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varphi(t)\boldsymbol{u}(t)]=\varphi'(t)\boldsymbol{u}(t)+\varphi(t)\boldsymbol{u}'(t)$;

$$(5)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}'(t)\,;$$

$$(6)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\times\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}'(t)\,;$$

$$(7)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}\big[\varphi(t)\big]=\varphi'(t)\boldsymbol{u}'\big[\varphi(t)\big].$$

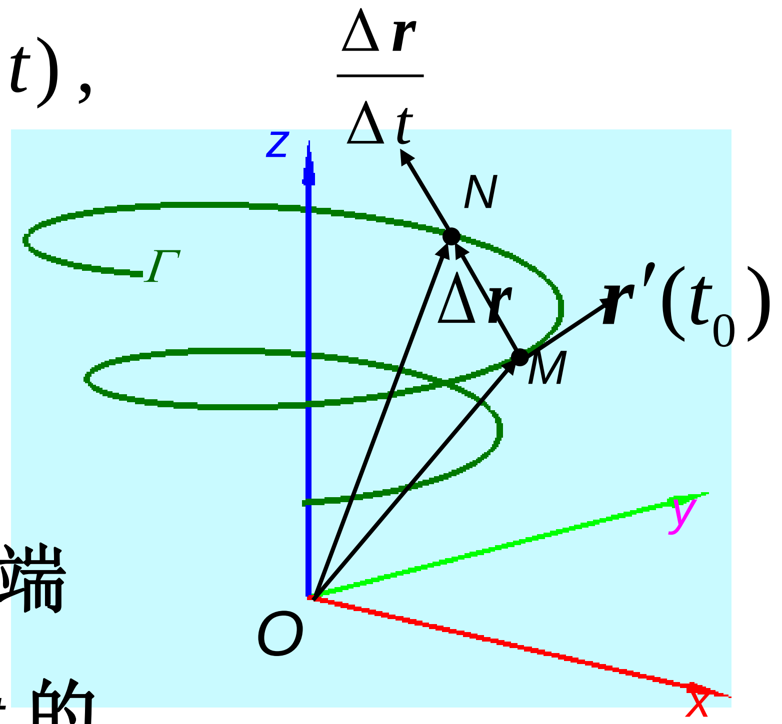
3. 向量值函数的导向量的几何意义

在 $\mathbb{R}^3$中, 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t), t\in D$的终端曲线为$\Gamma$,

$$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}(t_0),\quad \overrightarrow{ON}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t),$$

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0),$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\boldsymbol{r}'(t_0).$$



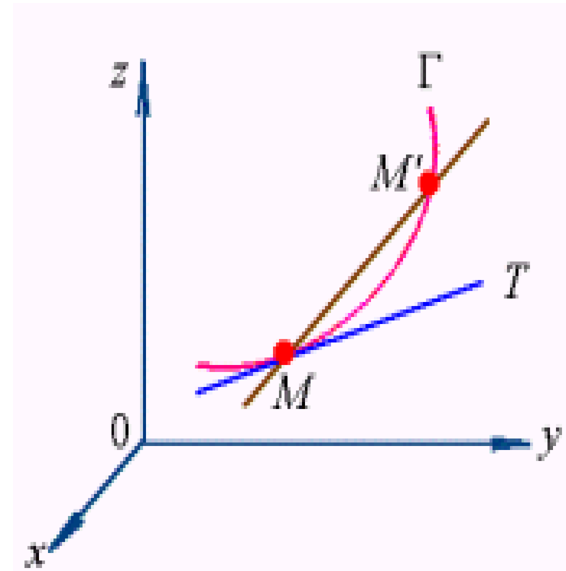
设$\boldsymbol{r}'(t_0)\neq 0$, 则 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 表示终端曲线在t_0处的切向量，其指向与 t 的增长方向一致.（课本P56）

四、空间曲线（参数式）的切线与法平面

设空间曲线Γ的参数方程为

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t),$$

这里假定$\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$都在$[\alpha, \beta]$上可导.



设$t=t_0$和$t=t_0+\Delta t$分别对应于曲线上的点$M(x_0, y_0, z_0)$和$M'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$.

作曲线的割线MM', 其方程为

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}, \quad \text{或} \frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

当$M\to M_0$, 即$\Delta t\to 0$时, 得曲线在点M_0处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$

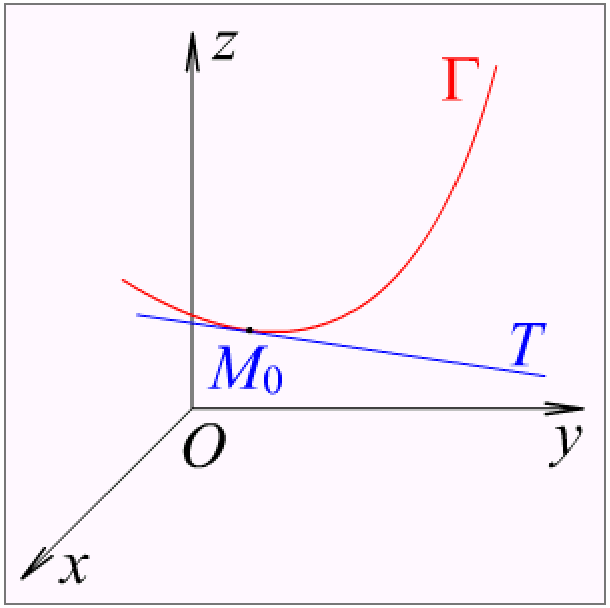
设空间曲线Γ的参数方程为

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t),$$

这里假定$\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$都在$[\alpha, \beta]$上可导.

过曲线Γ上$t=t_0$所对应的点M_0切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$



向量$\boldsymbol{T}=(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$称为曲线Γ在点$M_0$的切向量.

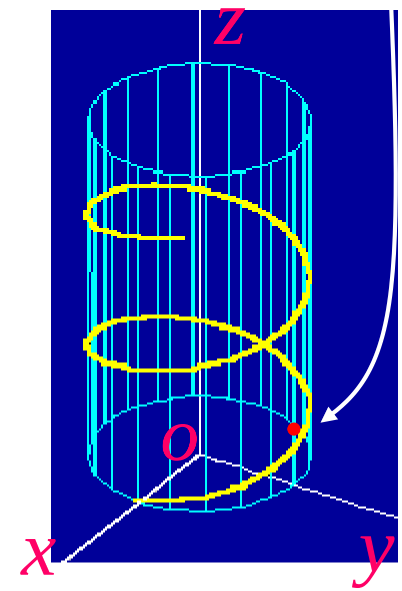
通过点M_0而与切线垂直的平面称为曲线Γ在点M_0处的法平面, 其法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0.$$

例1. 求圆柱螺旋线 $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ z = k\varphi$ 在 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程和法平面方程.

解: 由于 $x' = -R\sin\varphi,\ y' = R\cos\varphi,\ z' = k,$ 当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, 对应的切向量为 $\overrightarrow{T} = (-R, 0, k)$, 故

$M_0(0, R, \frac{\pi}{2}k)$



切线方程 $$\frac{x}{-R} = \frac{y-R}{0} = \frac{z-\frac{\pi}{2}k}{k}$$

即 $$\begin{cases} kx + Rz - \frac{\pi}{2}Rk = 0 \\ y - R = 0 \end{cases}$$

法平面方程 $$-Rx + k(z - \frac{\pi}{2}k) = 0$$

即 $$Rx - kz + \frac{\pi}{2}k^2 = 0$$

曲线$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\omega(t)$在$t=t_0$所对应的点M_0的切向量为$\boldsymbol{T}=(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$.

讨论:

1. 若曲线的方程为$y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$, 则切向量$\boldsymbol{T}=$?

提示:

1. 曲线的参数方程可视为: $x=x$, $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$, 切向量为$\boldsymbol{T}=(1, \varphi'(x), \psi'(x))$.

切线方程

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\psi'(t_0)}.$$

法平面方程

$$(x-x_0)+\varphi'(t_0)(y-y_0)+\psi'(t_0)(z-z_0)=0.$$

内容小结

- 空间曲线 $\longleftrightarrow$ 三元方程组
  或参数方程 (如, 圆柱螺线)

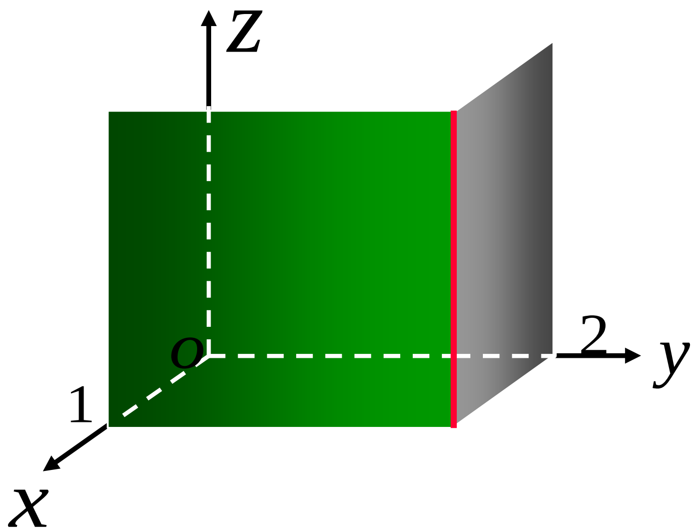
- 会求投影曲线，会画交线

•会求空间曲线（参数式）的切线和法平面

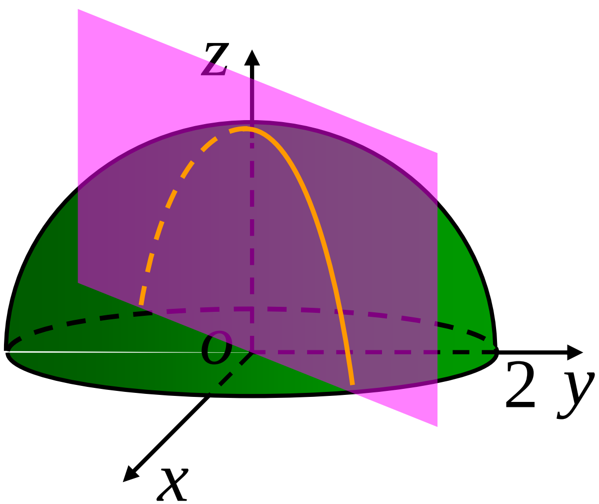
空间曲线（一般式）的切线和法平面在第八章第5节讲

思考与练习

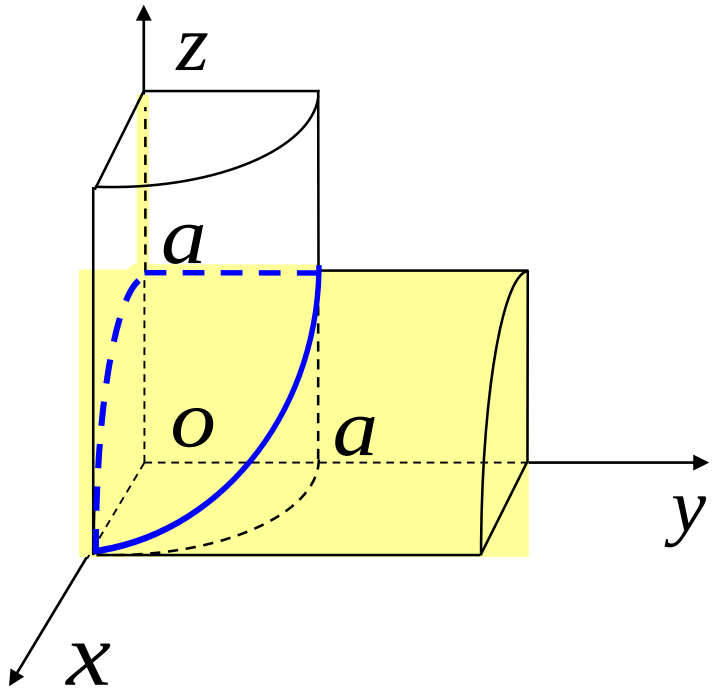
(1) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$



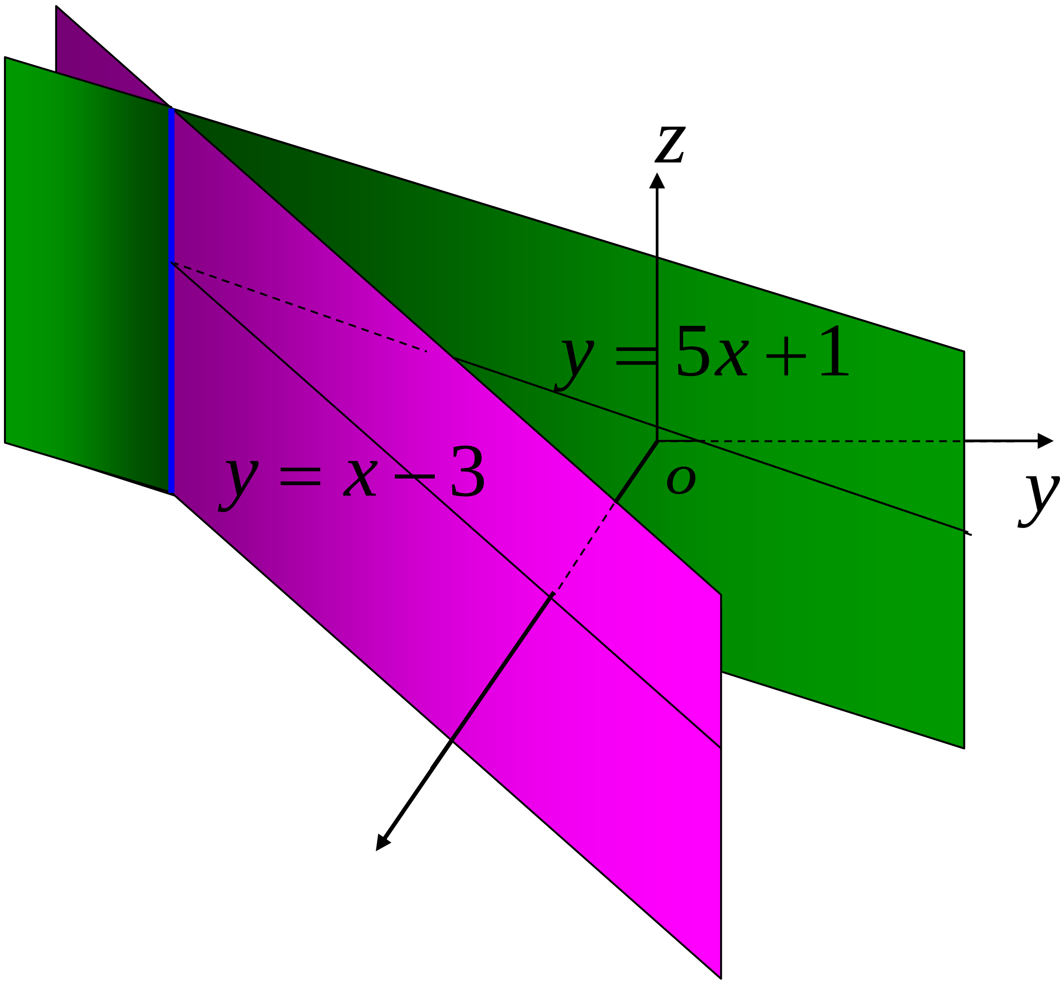
(2) $\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ y - x = 0 \end{cases}$



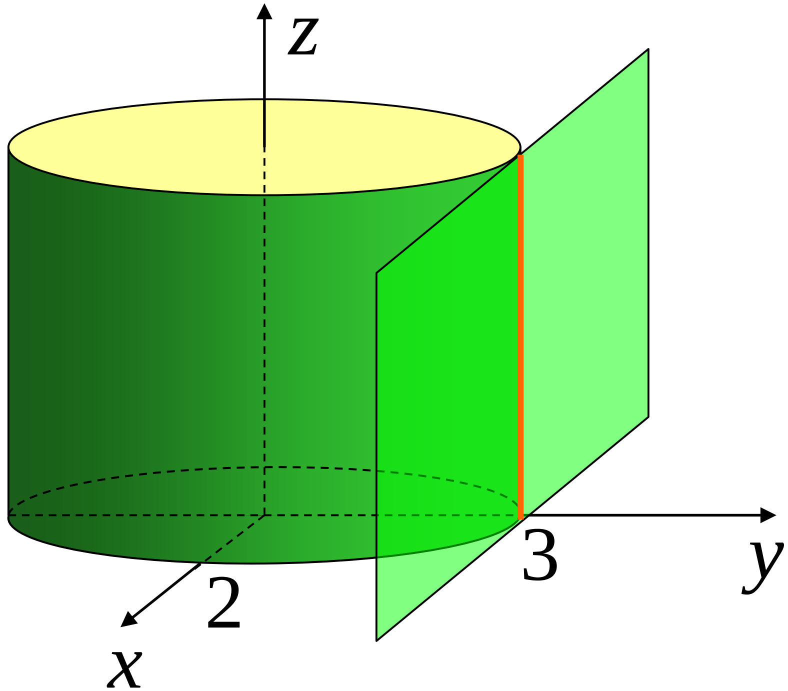
(3) $\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$



$$\begin{cases} y = 5x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

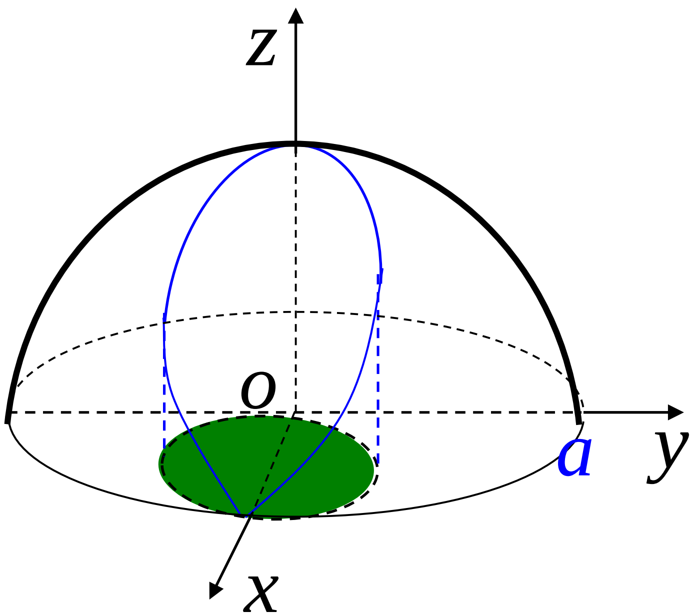


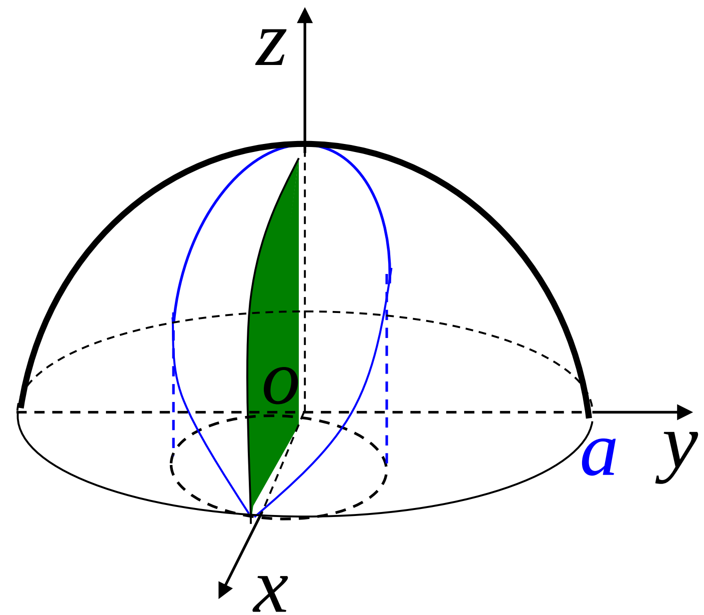
思考: 对平面 $\boldsymbol{y = b}$

当 $|\boldsymbol{b}| < 3$ 时,交线情况如何?

当 $|\boldsymbol{b}| > 3$ 时,交线情况如何?

求曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$ 分别在xoy和 xoz平面的投影





$$\begin{cases} x^2+y^2=ax \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+z^2=a^2 \quad (x\geq 0,\ z\geq 0) \\ y=0 \end{cases}$$

备用例2. 求空间曲线 $\Gamma: \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$ 绕 z 轴旋转时的旋转曲面的参数方程 .

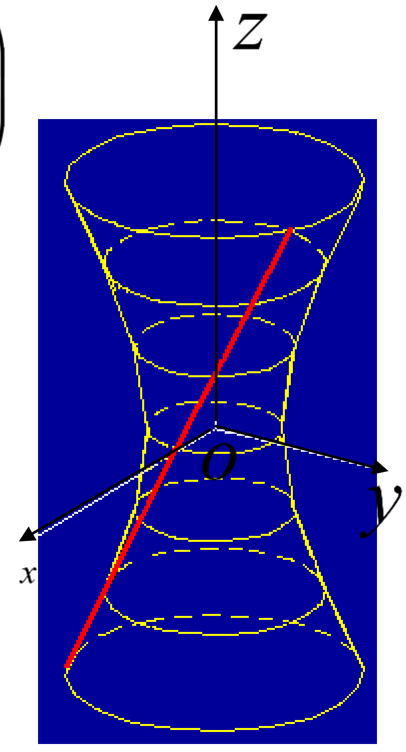
解: 任取点 $M_1(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)) \in \Gamma$, 点 M_1 绕 z 轴旋转, 转过角度 θ 后到点 $M(x,y,z)$, 则

$$\begin{cases} x=\sqrt{\varphi^2(t)+\psi^2(t)}\cos\theta \\ y=\sqrt{\varphi^2(t)+\psi^2(t)}\sin\theta \\ z=\omega(t) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \alpha \le t \le \beta \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{pmatrix}$$

这就是旋转曲面满足的参数方程 .

例如, 直线*l*: $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得旋转曲面方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2}\cos\theta \\ y = \sqrt{1+t^2}\sin\theta \\ z = 2t \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -\infty < t < +\infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{pmatrix}$$



消去 t 和 θ, 得旋转曲面方程为

$$4(x^2 + y^2) - z^2 = 4$$

注意：这里直线l与z轴异面，否则会形成一个锥面

又如, ***xoz*** 面上的半圆周 $\begin{cases} x = a\sin\varphi \\ y = 0 \\ z = a\cos\varphi \end{cases} \quad (0 \le \varphi \le \pi)$

绕 z 轴旋转所得旋转曲面(即球面)方程为

(第九章使用!)

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta \\ y = a\sin\varphi\sin\theta \\ z = a\cos\varphi \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{pmatrix}$$

说明: 一般曲面的参数方程含两个参数,形如

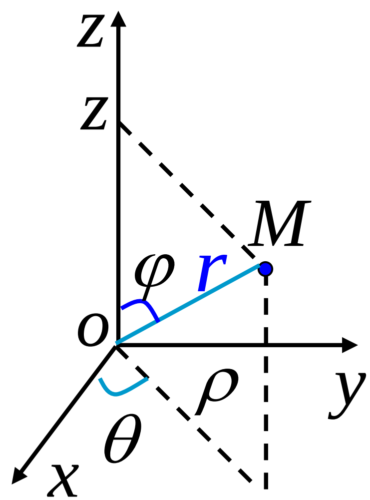
$$\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases}$$

球面坐标表示

设 $\boldsymbol{M(x,y,z)} \in \mathrm{S}^2$，令 $|\overrightarrow{OM}| = r$，$\angle \boldsymbol{ZOM} = \boldsymbol{\varphi}$，
则$\boldsymbol{(r,\theta,\varphi)}$就称为点$M$ 的球坐标.

直角坐标与球面坐标的关系

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = r\sin\varphi\cos\theta} \\ \boldsymbol{y = r\sin\varphi\sin\theta} \\ \boldsymbol{z = r\cos\varphi} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \le \boldsymbol{\theta} \le 2\boldsymbol{\pi} \\ 0 \le \boldsymbol{\varphi} \le \boldsymbol{\pi} \end{pmatrix}$$



$\boldsymbol{r}$ = 常数 ⟶ 半径为r的球面

$$\rho = r\sin\varphi$$
$$z = r\cos\varphi$$

例2. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 $M\,(1,-2,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解. 方程组两边对 x 求导, 得 $\begin{cases} y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1 \end{cases}$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\begin{vmatrix} -x & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{z-x}{y-z},\quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\begin{vmatrix} y & -x \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{x-y}{y-z}$

曲线在点 $M(1,-2,1)$ 处有:

切向量 $\vec{T}=\left(1,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_M,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\bigg|_M\right)=(1,0,-1)$

点 $M\,(1,-2,1)$ 处的切向量

$$\vec{T}=(1,0,-1)$$

切线方程

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$$

即

$$\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+2=0 \end{cases}$$

法平面方程

$$1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0$$

即

$$x-z=0$$