第三次课

2022年9月8日 8:30

§1.2 映射与函数(2)

教学内容：1. 映射与函数的概念（中学已讲，略讲）

2. 单射、满射、复合映射（重点反三角函数）

3. 函数的表示（重点讲分段函数）

4. 函数的性质（重点讲有界与无界）

五. 函数的表示

1. 分段表示

2. 隐式表示、(隐函数)

通过方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数 $y=f(x)$. 如

$x^2+y^2=1$ ， $y=x+\varepsilon\sin y$ $(\varepsilon\in(0,1))$ (Kepler 方程)

3. 参数表示

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in[a,b].$$

如圆周 $\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t, \end{cases} \quad t\in[0,2\pi].$

摆线 $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases} \quad t\in(0,+\infty).$

六. 函数的简单性质

1. 奇偶性（略）

2. 单调性（跟中学里不同之处在于要区分"单调"与"严格单调"。）

$\forall x_1, x_2 \in D$ 当 $x_1 < x_2$ 时，

$\begin{cases} 若 f(x_1) < f(x_2)，称 f 在 D 上严格单调递增; \\ 若 f(x_1) \le f(x_2)，称 f 在 D 上单调递增. \end{cases}$

3. 周期性.

若 $\exists T>0$，对 $\forall x \in D_f$ s.t. $f(x+T)=f(x)$，则称 f 是周期函数，T 为 f 的周期。周期不唯一。若存在满足上述条件的最小 T，称之为最小正周期。

注：但周期函数未必有最小正周期。如下述 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

（每个有理数都是 D(x) 的周期）

注：不是每个函数都能画出其图像。如 D(x).

4. 有界性.

定义：若 $\exists m, M \in \mathbb{R}$，s.t. $\forall x \in D_f$ 满足

$$m \le f(x) \le M$$

则称 $f(x)$ 在 D_f 上有界，m 是其下界，M 是其上界。

注：① 上界和下界并不唯一。也不要求 $m>0$，$M>0$。

② m, M 不能依赖 x.

如不能因为 $\sin x \le \sin x + 1$，就说"$\sin x + 1$"是 $\sin x$ 的一个上界！

有界的等价定义：（作业：自证）

若 $\exists M>0$，对 $\forall x \in D$，s.t. $|f(x)| \le M$，则称 f 在 D 上有界。

注：不能说"$\forall x \in D$，$\exists M>0$，s.t. $|f(x)| \le M$，则称 f 在 D 上有界！"

无界的定义：（会否定！）

Ex1.2.5 证明 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上无界.

分析：关键是什么？

证明：

取 $x_0=$ $\in(0,1)$

注：无界可以是无上界（上方无界）也可以无下界（下方无界）

或上、下方均无界.

七、常用的不等式.

(1) $\forall a,b\in\mathbb{R}$ $\quad ||a|-|b||\leq|a+b|\leq|a|+|b|$.

(2) $\forall a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，则

$$\underbrace{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}_{\text{算术平均值}}\geq\underbrace{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}_{\text{几何平均值}}\geq\underbrace{\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}}_{\text{调和平均值}}$$

证明：(1) 先证左侧不等式成立（采用数学归纳法）

$n=1$ 时 $a_1=a_1$

$n=2$ 时，$\frac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1\cdot a_2}$ 中学里的基本不等式.

假设 $n=k$ 时 左侧不等式成立，

下证 $n=k+1$ 时 依然成立.

(2) 由(1)可知 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} \geq n\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}$

$\therefore \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \geq \dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$. 证毕.

作业 P19 8.9 P20 13. + 上述有界的等价定义.

§2.1 实数系的连续性.

教学内容：1. 实数系的扩充

2. 确界原理（重点与难点）

一. 实数系的扩充

$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$

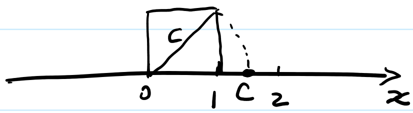
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
对"+, ×"封闭	对"+, −, ×"封闭	对"+, −, ×, ÷"封闭
(离散的)	(离散的)	(稠密的)

1. 有理数 $r=\frac{q}{p}$ ($p\in N^*$, $q\in Z$, p,q互质)（有限小数或无限循环小数）

在数轴上，尺规，有理数都能"被度量"出！

2. 有理数具有"稠密性".

3. 数轴上的点能否被有理数"度量尽"呢？(有理数是否具有"连续性"呢？)



Ex2.1.1 边长为1的等腰直角三角形的斜边为c，证明c不是有理数（即$\sqrt{2}$不是有理数）

反证：

综上，数轴上虽然有理数"密密麻麻"地分布，但依然有"缝隙"，这些"缝隙"就是无理数.

至此，数系扩充至$\mathbb{R}$（除了对四则运算封闭外，还对开方运算封闭）.

⇒ $\mathbb{R}$具有连续性！（下面要从分析学角度阐述——确界原理）

4. 无理数（无限不循环小数）可以被有理数任意逼近.

注：常见的无理数有：非完全平方数，π，e.

证明：

二.最大数与最小数