

数学分析（新工科）

第四章 微分与导数

习题课

天津大学数学学院

郭飞

主要知识点:

一. 可微的定义:

若 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$, (注意: A 与 Δx 无关!)

则称 $y = f(x)$ 在 x_0 点可微, 称 $A\Delta x$ 为 $y = f(x)$ 在 x_0 点的微分,

记为 $dy|_{x=x_0}$ 或 $df(x)|_{x=x_0}$.

二、导数的定义:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

注1: $dy = f'(x)dx$.

注2: 可导 \Leftrightarrow 可微, 但导数 \neq 微分!

注3: 可导 \Rightarrow 连续.

注4: $y = f(x)$ 在 x_0 可导 $\Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

注5: $f'(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率.

三. 求导法则:

1. 函数的和、差、积、商的求导法则:

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x),$$

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

2. 反函数的求导法则:

若 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上严格单调、可导且 $f'(x) \neq 0$, 记 $\alpha = \min\{f(a+), f(b-)\}$, $\beta = \max\{f(a+), f(b-)\}$, 则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 (α, β) 上

可导, 且 $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}.$

3. 复合函数的求导法则:

函数 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 处可导, $y = f(u)$ 在点 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处可导,
则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在 x_0 处可导, 且

$$\left. \frac{d}{dx} f(\varphi(x)) \right|_{x=x_0} = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0).$$

四. 隐函数求导、参量函数求导:

1. 隐函数求导:

设方程 $F(x, y) = 0$ 确定了一个可导隐函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$:

视 y 为 $y = y(x)$, 两边对 x 求导, 从中解出 $\frac{dy}{dx}$.

2. 参量函数求导:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}; \quad \begin{cases} x = \varphi(t), \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right)'}{\varphi'(t)}.$$

注意: 二阶导不能理解成 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)dt^2}{\varphi''(t)dt^2} = \frac{\psi''(t)}{\varphi''(t)}$!

五. 高阶导数与高阶微分:

求高阶导数的常用方法:

1. 数学归纳法

2. 莱布尼茨公式: $[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$

3. 下一章讲的Taylor公式

求高阶微分的常用方法:

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n$$

注意: 1. 高阶导数和高阶微分的符号;

2. 一阶微分具有形式不变性, 但高阶微分不具有此性质!

所以需要特别注意复合函数的高阶微分!

典型例题:

导数定义

1. 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+2020)$, 求 $f'(0)$.

$$\begin{aligned}\text{解: } f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+2020)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [(x+1)(x+2)\cdots(x+2020)] \\ &= 2020!\end{aligned}$$

2. 设 $f(x) = (x^{2020} - 1) \cdot g(x)$, 其中 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 求 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的导数. 导数定义

解:
$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{2020} - 1) \cdot g(x)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} [(x^{2019} + x^{2018} + \cdots + x + 1) g(x)]$$

$$= 2020 \cdot g(1)$$

3. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 点处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3$, 求 $f'(2)$.

解: $\because \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3,$ 导数定义

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0.$$

又 $\because f(x)$ 在 $x=2$ 点处连续,

$$\therefore f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0.$$

$$\therefore f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = 3.$$

4. 设 $f(x)$ 可导, 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x+h) - f^2(x)}{h}$.

导数定义

解:
$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x+h) - f^2(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot [f(x+h) + f(x)] \right\} \\ &= 2f'(x)f(x) \end{aligned}$$

5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $f(0) = 1, f'(0) \neq 0, \forall x, y \in (-\infty, +\infty)$, 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x)f(y)$, 试求 $f'(x)$

解:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x} = f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= f(x) \cdot f'(0) \end{aligned}$$

导数定义

6. 证明：设 $f(x)=|x-a|/\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 则 $\varphi(a)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充要条件.

证明: $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$$= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|x-a|/\varphi(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x) = \varphi(a),$$

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|x-a|/\varphi(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{-(x-a)\varphi(x)}{x-a} = -\lim_{x \rightarrow a^-} \varphi(x) = -\varphi(a),$$

$\therefore f(x)$ 在 $x=a$ 处可导 $\Leftrightarrow f'_-(a) = f'_+(a) \Leftrightarrow \varphi(a) = -\varphi(a) \Leftrightarrow \varphi(a) = 0$. 导数定义

7. 求 $f(x) = (x^2 - x - 2)/x^3 - x$ 的不可导点.

解: $f(x) = (x^2 - x - 2)/x(x+1)(x-1) = (x-2)(x+1)/x(x+1)(x-1)$,

显然 $f(x)$ 仅可能在 $x=0, x=-1, x=1$ 处不可导.

判断 $x=0$: $f(x) = 1/x(x-2)(x+1) = 1/[(x+1)(x-1)]$, 利用6题结论,

由 $\varphi(x) = (x-2)(x+1) = (x+1)(x-1)$ 得: $\varphi(0) \neq 0$,

故 $x=0$ 为不可导点;

判断 $x=-1$: $f(x) = 1/(x+1)(x-2) = 1/[(x+1)x(x-1)]$, 利用6题结论,

由 $\varphi(x) = (x-2)x = (x+1)x(x-1)$ 得: $\varphi(-1) = 0$,

故 $x=-1$ 为可导点;

类似地, 可判断 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导. 故 $f(x)$ 有两个不可导点: 0 和 1.

8. 设 $f(x) = (x^3 - 1)/g(x)$, 其中 $g(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 则 $g(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的什么条件?

解: $f(x) = (x-1)/g(x) \cdot (x^2 + x + 1),$

利用6题结论, $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的充要条件, 其中

$$\varphi(x) = g(x) \cdot (x^2 + x + 1),$$

即 $g(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的充要条件.

9. 设 $g(x)$ 可导, $f(x) = g(x)(1 + |\sin x|)$, 则 $g(0) = 0$ 是 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的什么条件?

导数定义

解:
$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)(1 + \sin x) - g(0)}{x}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{g(x) - g(0)}{x} + g(x) \frac{\sin x}{x} \right] = g'(0) + g(0),$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)(1 - \sin x) - g(0)}{x}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{g(x) - g(0)}{x} - g(x) \frac{\sin x}{x} \right] = g'(0) - g(0),$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 处可导} \Leftrightarrow f'_-(0) = f'_+(0) \Leftrightarrow g'(0) + g(0) = g'(0) - g(0) \Leftrightarrow g(0) = 0.$$

10. 设 $f(0)=0$, 以下结果极限存在就能确定 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导的是(B)

$$(A) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos h)}{h^2} \quad (B) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{h} \quad (C) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h}$$

解: $(A) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos h)}{2(1 - \cos h)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{2 \Delta x} = \frac{1}{2} f'_+(0)$

$$(B) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{-(1 - e^h)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{-\Delta x} = -f'(0)$$

$$(C) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(2h) - f(0)}{h} - \frac{f(h) - f(0)}{h} \right) \quad (\infty - \infty?)$$

$$\text{反例: } f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

导数定义

11. 设 $f(x) = \begin{cases} ax+b, & x < 0, \\ e^x - 1, & x \geq 0, \end{cases}$ 确定常数 a, b , 使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

解: \because 可导一定连续, $\therefore b=0$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{x} = a,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则有 $f'_-(0) = f'_+(0)$, $\therefore a=1$

再次强调: 分段函数在分段点处的可导问题要用定义!

导数定义

12. 设 $f(x) = \begin{cases} ax+b, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$, 确定常数 a 和 b , 使得 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

导数定义

解: $\because f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, $\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax+b) = a+b, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1, f(1) = 1,$$

$$\therefore a+b=1,$$

$$\because f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2,$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(ax+b) - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax-a}{x-1} = a,$$

$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导 $\Rightarrow f'_-(1) = f'_+(1)$, 故 $a=2$, 由 $a+b=1$ 得: $b=-1$.

13. 设 $f(x) = \max\{x, x^2\}$, $x \in (0, 2)$, 求 $f'(x)$. 求导函数

解: $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ x^2, & 1 < x < 2, \end{cases}$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) = x$, $f'(x) = 1$;

当 $x \in (1, 2)$ 时, $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$;

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$\therefore f'(1)$ 不存在

则有

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2x, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0. \end{cases} \quad (1) \text{ 求 } f'(x); \quad (2) \text{ } f'(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 是否连续?}$$

解: (1) 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot (-\frac{1}{x^2}) \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$

当 $x < 0$ 时, $f'(x) = 2x,$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

$$\therefore f'(0) = 0, \quad \text{则有 } f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 2x, & x \leq 0. \end{cases}$$

求导函数

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}) \text{ 不存在,}$$

$\therefore f'(x)$ 在 $x = 0$ 不连续.

导函数连续性

$$14. f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0. \end{cases} \quad (1) \text{ 求 } f'(x); \quad (2) \text{ } f'(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 是否连续?}$$

15. 设 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ 分别讨论 α 取什么值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 点

(1) 连续; (2) 可微; (3) 导函数连续.

解: (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \sin \frac{1}{x} = 0, \therefore \alpha > 0.$

(2) $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} \right)$ 存在, $\therefore \alpha > 1.$

(3) 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}$; $x < 0$ 时, $f'(x) = 0$; 且 $f'(0) = 0$,

$f(x)$ 的导函数连续 $\Rightarrow f'(x)$ 在 $x=0$ 连续, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0$,

即 $\lim_{x \rightarrow 0} (\alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}) = 0$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x} = 0, \therefore \alpha > 2.$

16. 已知 $y = \frac{\arccos x}{x} - \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$, 求 $y'|_{x=\frac{1}{2}}$

初等函数求导

解: $y = \frac{\arccos x}{x} - \ln(1 + \sqrt{1 - x^2}) + \ln x$

$$y' = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x - \arccos x}{x^2} - \frac{1}{1 + \sqrt{1-x^2}} \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) + \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arccos x}{x^2} + \frac{(1 - \sqrt{1-x^2})}{x^2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x}$$

整理得:

$$y' = -\frac{\arccos x}{x^2}$$

$$\text{则有 } y'|_{x=\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}\pi.$$

幂指数函数求微分

17. 已知 $y = (\ln x)^{\cos x}$, 其中 $x > 1$, 求 dy .

解: $\ln y = \cos x \cdot \ln(\ln x)$

两边对 x 求导,

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln(\ln x) + \cos x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x},$$

$$\therefore dy = (\ln x)^{\cos x} \left(-\sin x \cdot \ln(\ln x) + \frac{\cos x}{x \ln x} \right) dx.$$

18. 已知 $y = (\ln x)^x \cdot x^{\ln x}$ ($x > 1$), 求 y' .

幂指函数求导

解: $\ln y = x \ln(\ln x) + \ln x \cdot \ln x$,

两边对 x 求导,

$$\frac{y'}{y} = \ln(\ln x) + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} + 2 \ln x \cdot \frac{1}{x},$$

$$\therefore y' = (\ln x)^x \cdot x^{\ln x} \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} + \frac{2}{x} \cdot \ln x \right).$$

19. 已知 $y = (\tan x)^x + x^{\sin \frac{1}{x}}$ ($0 < x < 1$), 求 y' .

幂指函数求导

解: 令 $h = (\tan x)^x$, 令 $g = x^{\sin \frac{1}{x}}$,

两边取对数: $\ln h = x \ln(\tan x)$; $\ln g = \sin \frac{1}{x} \ln x$,

两边对 x 求导: $\frac{h'}{h} = \ln(\tan x) + \frac{x}{\tan x} \sec^2 x$; $\frac{g'}{g} = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$,

$$\therefore y' = (\tan x)^x \left(\ln(\tan x) + \frac{x}{\tan x} \sec^2 x \right) + x^{\sin \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right).$$

对数求导法

20. 已知 $y = (x-5)\sqrt[5]{\frac{(x+1)(x-2)^3}{x^2(x-1)(x+2)^3}}$, 求 y' .

解: $\ln|y| = \ln|x-5| + \frac{1}{5}[\ln|x+1| + 3\ln|x-2| - 2\ln|x| - \ln|x-1| - 3\ln|x+2|],$

两边对 x 求导,

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x-5} + \frac{1}{5(x+1)} + \frac{3}{5(x-2)} - \frac{2}{5x} - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{3}{5(x+2)},$$

$$\therefore y' = (x-5)\sqrt[5]{\frac{(x+1)(x-2)^3}{x^2(x-1)(x+2)^3}} \left[\frac{1}{x-5} + \frac{1}{5(x+1)} + \frac{3}{5(x-2)} - \frac{2}{5x} - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{3}{5(x+2)} \right].$$

21. 已知 $y = f\left(\frac{x}{1+x}\right)$, 而 $f'(x) = \arcsin x$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$.

复合函数求导

$$\begin{aligned}\text{解: } \frac{dy}{dx} &= f'\left(\frac{x}{1+x}\right) \frac{1+x-x}{(1+x)^2} \\ &= \arcsin \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}, \\ \therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} &= \arcsin \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{24}.\end{aligned}$$

22. 设 $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 都是可导函数,
求函数 $y = f(\varphi(x^2) + \psi^2(x))$ 的微分.

求复合函数的一阶微分

解:
$$dy = f'(\varphi(x^2) + \psi^2(x)) \cdot [\varphi'(x^2) \cdot 2x + 2\psi(x)\psi'(x)] dx$$

23. 已知 $f(x)$ 二次可导, 求 $\frac{d^2 f(e^x)}{dx^2}$.

复合函数求导

解: $\frac{df(e^x)}{dx} = f'(e^x)e^x,$

$$\therefore \frac{d^2 f(e^x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} [f'(e^x)e^x]$$

$$= f''(e^x)(e^x)^2 + f'(e^x)e^x = e^{2x}f''(e^x) + e^x f'(e^x).$$

24. 已知 $f(x)$ 二次可导, 求 $f\left(\sin \frac{1}{x}\right)$ 的二阶导数. 复合函数求导

解:
$$\frac{df\left(\sin \frac{1}{x}\right)}{dx} = f'\left(\sin \frac{1}{x}\right) \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d^2 f\left(\sin \frac{1}{x}\right)}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left[f'\left(\sin \frac{1}{x}\right) \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right] \\ &= f''\left(\sin \frac{1}{x}\right) \left(\cos \frac{1}{x}\right)^2 \frac{1}{x^4} + f'\left(\sin \frac{1}{x}\right) \left(-\sin \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^4} \\ &\quad + f'\left(\sin \frac{1}{x}\right) \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

25. 设 $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$, 求 $f^{(n)}(0)$.

求高阶导数

解: $f(x) = -\ln(1-x)$

$$f'(x) = -\frac{1}{1-x}(-1) = (1-x)^{-1}$$

$$f''(x) = \left[(1-x)^{-1}\right]' = (-1)(1-x)^{-2}(-1)$$

$$f'''(x) = \left[(1-x)^{-1}\right]'' = (-1)(-2)(1-x)^{-3}(-1)^2$$

\vdots

$$f^{(n)}(x) = \left[(1-x)^{-1}\right]^{(n)} = (-1)(-2)\cdots[-(n-1)](1-x)^{-n}(-1)^{n-1}$$

$$= (n-1)!(1-x)^{-n},$$

则有 $f^{(n)}(0) = (n-1)!$

26. 设 $y = \frac{1}{2-x-x^2}$, 求 $y^{(10)}$.

求高阶导数

解: $\frac{1}{2-x-x^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{1-x} \right)$

$$\left(\frac{1}{2+x} \right)' = \left[(2+x)^{-1} \right]' = (-1)(2+x)^{-2}$$

$$\left(\frac{1}{2+x} \right)'' = \left[(2+x)^{-1} \right]'' = (-1)(-2)(2+x)^{-3}$$

\vdots

$$\left(\frac{1}{2+x} \right)^{(10)} = \left[(2+x)^{-1} \right]^{(10)} = (-1)^{10} 10! (2+x)^{-11}$$

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)' = \left[(1-x)^{-1} \right]' = (-1)(1-x)^{-2}(-1)$$

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)'' = \left[(1-x)^{-1} \right]'' = (-1)(-2)(1-x)^{-3}(-1)^2$$

\vdots

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)^{(10)} = \left[(1-x)^{-1} \right]^{(10)} = 10! (1-x)^{-11}$$

$$\text{则 } y^{(10)} = \frac{10!}{3} \left(\frac{1}{(2+x)^{11}} + \frac{1}{(1-x)^{11}} \right)$$

27. 设 $y = \ln(3 + 7x - 6x^2)$, 求 $y^{(n)}$

求高阶导数

解: $y = \ln(1 + 3x)(3 - 2x) = \ln|1 + 3x| + \ln|3 - 2x|,$

$$[\ln|1 + 3x|]' = \frac{3}{1 + 3x} = (1 + 3x)^{-1} \cdot 3$$

$$[\ln|2x - 3|]' = \frac{2}{2x - 3} = 2(2x - 3)^{-1}$$

$$[\ln|1 + 3x|]'' = (-1)(1 + 3x)^{-2} \cdot 3^2$$

$$[\ln|2x - 3|]'' = (-1) \times 2^2 (2x - 3)^{-2}$$

$$[\ln|1 + 3x|]''' = (-1)(-2)(1 + 3x)^{-3} \cdot 3^3$$

$$[\ln|2x - 3|]''' = (-1)(-2) \times 2^3 (2x - 3)^{-3}$$

\vdots

\vdots

$$\begin{aligned} & [\ln|1 + 3x|]^{(n)} \\ &= (-1)(-2) \cdots [-(n - 1)](1 + 3x)^{-n} \cdot 3^n \\ &= (-1)^{n-1} (n - 1)! (1 + 3x)^{-n} \cdot 3^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\ln|2x - 3|]^{(n)} \\ &= (-1)(-2) \cdots [-(n - 1)](2x - 3)^{-n} \cdot 2^n \\ &= (-1)^{n-1} (n - 1)! (2x - 3)^{-n} \cdot 2^n \end{aligned}$$

$$\text{则 } y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n - 1)! \left(\frac{3^n}{(1 + 3x)^n} + \frac{2^n}{(2x - 3)^n} \right)$$

28. 设 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$, 求 $f^{(n)}(0)$. 求高阶导数

解: $f^{(n)}(x) = C_n^0 x^2 [\ln(1+x)]^{(n)} + C_n^1 2x [\ln(1+x)]^{(n-1)} + C_n^2 2 [\ln(1+x)]^{(n-2)},$

$$[\ln(1+x)]^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k},$$

$$\begin{aligned} \therefore f^{(n)}(0) &= C_n^2 2 (-1)^{n-3} (n-3)! = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 (-1)^{n-3} (n-3)! \\ &= (-1)^{n-1} n(n-1)(n-3)! \end{aligned}$$

学了Taylor公式后有更简单的做法.

29. 求 $y = (x^2 - 1)\sin x$, $y^{(24)}(0)$.

求高阶导数

解: $y^{(n)} = C_n^0 (x^2 - 1) \sin^{(n)} x + C_n^1 2x \sin^{(n-1)} x + C_n^2 \cdot 2 \sin^{(n-2)} x$

$$= (x^2 - 1) \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n \cdot 2x \sin\left[x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right]$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \sin\left[x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right],$$

$$\therefore y^{(24)}(0) = -\sin(12\pi) + \frac{24(24-1)}{2} \cdot 2 \sin(11\pi) = 0.$$

30. 已知 $y \ln \cos x = x \ln \sin y$, 求 $\frac{dy}{dx}$. 隐函数求导

解: 视 y 为 $y(x)$, 两边对 x 求导:

$$y' \ln \cos x + y \cdot \frac{1}{\cos x} (-\sin x) = \ln \sin y + \frac{x}{\sin y} \cos y \cdot y',$$

$$\therefore y' = \frac{\ln \sin y + y \tan x}{\ln \cos x - x \cot y}.$$

31. 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定, 求 $y''(0)$.

解: 视 y 为 $y(x)$, 两边对 x 求导:

隐函数求二阶导

$$e^y y' + 6y + 6xy' + 2x = 0, \quad (1)$$

(1) 式两边再对 x 求导:

$$e^y y'^2 + e^y y'' + 12y' + 6xy'' + 2 = 0. \quad (2)$$

当 $x = 0$ 时, 由方程解得 $y = 0$, 代入(1)式得 $y'(0) = 0$,
从而由(2)式得 $y''(0) = -2$.

32. 设 $\begin{cases} x = \ln \cos t, \\ y = \sin t - t \cos t, \end{cases}$ 求 $\left. \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{3}}$. 参量函数求导、二阶导

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\cos t - (\cos t - t \sin t)}{\frac{-\sin t}{\cos t}} = -t \cos t,$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-(\cos t - t \sin t)}{\frac{-\sin t}{\cos t}} = \cos t (\cot t - t),$$

$$\therefore \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{6} (\sqrt{3} - \pi).$$

33. 已知方程组 $\begin{cases} x + t(t+1) = 0, \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$ 确定了函数 $y = y(x)$, 求曲线 $y = y(x)$

在 $t = 0$ 对应点处的切线方程和法线方程.

解: 当 $t = 0$ 时, $x(0) = 0, y(0) = -1$,
方程组两边对 t 求导:

$$\begin{cases} x'(t) + 1 + 2t = 0, \\ e^y + te^y y'(t) + y'(t) = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'(0) = -1, \\ y'(0) = -e^{-1}, \end{cases}$$

$$\therefore \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \frac{y'(0)}{x'(0)} = e^{-1},$$

切线方程: $y + 1 = e^{-1}x$,

法线方程: $y + 1 = -ex$.

参量函数求导、隐函数求导

34. 已知函数 $y = y(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3, & (1) \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$ 所确定, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0}$

解: 当 $t = 0$ 时, $x(0) = 3, y(0) = 1$.

由(1)式得: $x'(t) = 6t + 2$,

(2) 式两边对 x 求导, 得

$$e^y y'(t) \sin t + e^y \cos t - y'(t) = 0,$$

$$\Rightarrow y'(t) = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t},$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{e^y \cos t}{(1 - e^y \sin t)(6t + 2)} = \frac{e^y \cos t}{2(3t + 1)(2 - y)},$$

隐函数求导、
参量函数求导

$$\begin{aligned}\therefore \frac{d^2 y}{dx^2} &= \left[\frac{e^y \cos t}{2(3t+1)(2-y)} \right]' / (6t+2) \\ &= \frac{1}{4(3t+1)^3(2-y)^2} \left\{ (3t+1)(2-y)[e^y y'(t) \cos t - e^y \sin t] - e^y \cos t [3(2-y) - (3t+1)y'(t)] \right\}\end{aligned}$$

将 $t=0$, $y(0)=1$ 代入 $y'(t) = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t}$ 得 $y'(0) = e$,

$$\therefore \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \frac{2e^2 - 3e}{4}.$$

隐函数求导、
参量函数求导

35. 函数 $y = f(x)$ 在 x 处的函数增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, 若

$$\Delta y = \frac{x}{1+x} \Delta x + o(\Delta x) (\Delta x \rightarrow 0), \text{ 则 } f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

微分的定义

解: 由微分的定义知: $dy = \frac{x}{1+x} dx$,

由微分和导数的关系知: $f'(x) = \frac{x}{1+x}$,

$$\therefore f'(1) = \frac{1}{2}.$$

36. 设 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, $\Delta y|_{x=x_0} = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y|_{x=x_0} - df(x)|_{x=x_0}}{\Delta x} = (\quad \text{C} \quad).$$

(A) $f'(x_0)$ (B) 1 (C) 0 (D) 不存在

解: 由微分和导数的关系知: $f(x)$ 在 x_0 处可微,

由微分的定义知: $\Delta y|_{x=x_0} = df(x)|_{x=x_0} + o(\Delta x)(\Delta x \rightarrow 0).$

微分的定义

37. 若 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,

该函数在 $x = x_0$ 点处的微分 $dy|_{x=x_0}$ 是(**B**)

(A) 与 Δx 等价的无穷小 (B) 与 Δx 同阶但不是等价的无穷小

(C) 比 Δx 低阶的无穷小 (D) 比 Δx 高阶的无穷小

解: 由微分和导数的关系知: $f(x)$ 在 x_0 处可微,

$$\text{且 } df(x)|_{x=x_0} = \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \Delta x$$

微分的定义

38. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2^{xy} = x + y$ 确定, 求 $dy|_{x=0}$.

解: 视 y 为 $y(x)$, 两边对 x 求导:

$$2^{xy} \ln 2 (y + xy') = 1 + y' \quad (1)$$

将 $x = 0$ 代入方程得 $y = 1$, 代入 (1) 式得

$$y'(0) = \ln 2 - 1,$$

$$\therefore dy|_{x=0} = (\ln 2 - 1)dx.$$

或者在方程两边同时求微分

隐函数的微分

39. 已知 $y = e^{\sqrt{1-x^2}}$, 求 (1) $dy = \underline{\hspace{2cm}} d(x^2)$; (2) $dy = \underline{\hspace{2cm}} d\sqrt{x}$

复合函数的微分

解法一:

$$(1) \quad dy = e^{\sqrt{1-x^2}} d\sqrt{1-x^2} = e^{\sqrt{1-x^2}} \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{e^{\sqrt{1-x^2}}}{2\sqrt{1-x^2}} d(x^2);$$

$$\begin{aligned} (2) \quad dy &= -\frac{e^{\sqrt{1-x^2}}}{2\sqrt{1-x^2}} d(\sqrt{x^4}) = -\frac{4e^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^3}}{2\sqrt{1-x^2}} d\sqrt{x} \\ &= -\frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{1-x^2}} d\sqrt{x}. \end{aligned}$$

39. 已知 $y = e^{\sqrt{1-x^2}}$, 求 (1) $dy = \underline{\hspace{2cm}} d(x^2)$; (2) $dy = \underline{\hspace{2cm}} d\sqrt{x}$

凑

解法二 (不鼓励用此法!) $dy = e^{\sqrt{1-x^2}} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$(1) d(x^2) = 2x dx,$$

$$dy = e^{\sqrt{1-x^2}} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2x dx, \text{ 故 } dy = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{1-x^2}} d(x^2)$$

$$(2) d\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx,$$

$$dy = e^{\sqrt{1-x^2}} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx, \text{ 故 } dy = -\frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{1-x^2}} d\sqrt{x}.$$

40. 已知 $f(x) = e^{-x} \sin x$, 试求其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的二阶导数 $\frac{d^2 x}{dy^2}$.

解: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x},$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{d^2 x}{dy^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{-e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{-e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{e^{-x} \sin x - 2e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x}{(-e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x)^2} \cdot \frac{dx}{dy} \\ &= \frac{2e^{-x} \cos x}{(-e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x)^3}.\end{aligned}$$

反函数求导

41. 设 $y = f(x) = \sin x$, $x = t^2$, 求 d^2y .

高阶微分

解法一

先将 $x = t^2$ 代入 $y = f(x)$, 得 $y = \sin t^2$,

于是 $y' = 2t \cos t^2$, $y'' = 2 \cos t^2 - 4t^2 \sin t^2$.

$$d^2y = (2 \cos t^2 - 4t^2 \sin t^2) dt^2.$$

解法二 $d^2y = d(f'(x)dx)$

$$= f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x \quad (\text{注意: 此时 } x \text{ 不是自变量而是中间变量!})$$

$$= -\sin x dx^2 + \cos x d^2x \quad (\text{注意此时 } d^2x \neq 0!)$$

$$= -\sin t^2 \cdot (2t dt)^2 + \cos t^2 \cdot 2dt^2$$

$$= (2 \cos t^2 - 4t^2 \sin t^2) dt^2.$$

注意: 如果将 $f'(x)d^2x$ 漏掉就会产生错误.

42. 求 $d^2[f(u)g(u)]$. (课后题11(3))

高阶微分

解 $d[f(u)g(u)] = [f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]du$

$$d^2[f(u)g(u)] = [f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]d^2u + [f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]'du^2$$

$$= [f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]d^2u + [f''(u)g(u) + 2f'(u)g'(u) + f(u)g''(u)]du^2$$

43. 求 $d^2 \left(\frac{f(u)}{g(u)} \right)$. (课后题11(5))

高阶微分

解
$$d \left(\frac{f(u)}{g(u)} \right) = \frac{f'(u)g(u) - f(u)g'(u)}{g^2(u)} du$$

$$\begin{aligned} d^2 \left(\frac{f(u)}{g(u)} \right) &= \frac{f'(u)g(u) - f(u)g'(u)}{g^2(u)} d^2 u + \left(\frac{f'(u)g(u) - f(u)g'(u)}{g^2(u)} \right)' du^2 \\ &= \frac{f'(u)g(u) - f(u)g'(u)}{g^2(u)} d^2 u \\ &\quad + \frac{f''(u)g^2(u) - f(u)g(u)g''(u) - 2f'(u)g'(u)g(u) + 2f(u)(g'(u))^2}{g^3(u)} du^2 \end{aligned}$$