第二十次课（2）

2022年10月24日 9:00

第四章 微分

引言： 微积分的发展历程

- 十七世纪，整个科学界最重要的课题就是研究物理学，尤其是天文学，微积分的概念也是由此诞生的。

- 十七世纪下半叶，在前人工作的基础上，英国科学家牛顿（Newton）和德国数学家Leibnitz（莱布尼茨）分别在自己的国度里独自研究和完成了微积分的创立工作，虽然这只是十分初步的工作。他们的最大功绩是把两个貌似毫不相关的问题联系在一起，一个是切线问题（微分学的中心问题），一个是求积问题（积分学的中心问题）。牛顿和莱布尼茨建立微积分的出发点是直观的无穷小量，因此这门学科早期也称为无穷小分析，这正是现时数学中分析学这一大分支名称的来源。牛顿研究微积分着重于从运动学来考虑，莱布尼茨却是侧重于几何学来考虑的。

- 1665年，Newton发明正流数术（微分），次年发明反流数术。之后将流数术总结一起，写出了《流数简述》，这标志着微积分的诞生。

- 同一时期，德国数学家Leibnitz也独立创立了微积分学。1684年，他发表了现在世界上认为是最早的微积分文献，这篇文章有一个很长而且很古怪的名字《一种求极大极小和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算》。就是这样一篇说理也颇含糊的文章，却有划时代的意义。它已含有现代的微分符号和基本微分法则。

- 1686年Leibnitz又发表了积分论文，讨论了微分与积分，使用了积分符号∫，符号的发明使得微积分的表达更加简便。此外他还发现了求高级导数的莱布尼茨公式，还有牛顿莱布尼茨公式，将微分与积分运算联系在一起，他在微积分方面的贡献与牛顿旗鼓相当。莱布尼茨所创设的微积分符号，远远优于牛顿的符号，这对微积分的发展有极大的影响。现今我们使用的微积分通用符号就是当时莱布尼茨精心选用的。

- 微积分诞生之后，数学迎来了一次空前繁荣的时期，对18世纪的数学产生了重要而深远的影响。但是牛顿和莱布尼茨的微积分都缺乏清晰的、严谨的逻辑基础，虽然这在初创时期几乎是不可避免的。由于早期微积分学的建立的不严谨性，许多不安分子就找漏洞攻击微积分学，其中最著名的是英国主教贝克莱针对求导过程中的无穷小（Δx既是0，又不是0）展开对微积分学的进攻，由此第二次数学危机便拉开了序幕。

- 到了19世纪，出现了一批杰出的数学家，他们积极为微积分的奠基工作而努力，其中包括了捷克的哲学家Bolzano（波尔查诺），他曾著有《无穷的悖论》，明确地提出了级数收敛的概念，并对极限、连续和变量有了较深入的了解。分析学的奠基人，法国数学家Cauchy（柯西）在1821—1823年间出版的《分析教程》和《无穷小计算讲义》是数学史上划时代的著作。在那里他给出了数学分析一系列的基本概念和精确定义，建立了接近现代形式的极限，把无穷小定义为趋近于0的变量，从而结束了百年的争论，并定义

了函数的连续性、导数、连续函数的积分和级数的收敛性（与波尔查诺同期进行）。

- 对分析基础做更深一步的理解的要求发生在1874年。那时的德国数学家Weierstrass（维尔斯特拉斯）构造了一个没有导数的连续函数，即构造了一条没有切线的连续曲线，这与直观概念是矛盾的。它使人们认识到极限概念、连续性、可微性和收敛性对实数系的依赖比人们想象的要深奥得多。后续又有人发现了处处不连续但处处可积的函数，使人们重新认识了连续与可微可积的关系，他在连续闭区间内提出了第一、第二定理，并引进了极限的ε～δ定义，基本上实现了分析的算术化，使分析从几何直观的极限中得到了“解放”，从而驱散了17——18世纪笼罩在微积分外面的神秘云雾。

- 后来，Riemann（黎曼）发现，柯西没有必要把他的定积分限制于连续函数。黎曼证明了，被积函数不连续，其定积分也可能存在。也就是将柯西积分改进为黎曼积分。

- 至此，整个微积分学的理论和方法完全建立在牢固的基础上，基本上形成了一个完整的体系。

- 1859年，微积分开始在中国传播， 它的第一部译著者是清代的李善兰，发表过《方园阐幽》，介绍了“尖锥术”，这是以中国传统思维方式阐发微积分的初步理论。

- 微积分对于物理学的意义极大，例如，每个运动的物体在它运动的每一时刻必有速度，但是因为在给定的瞬间，物体移动的距离和所用的时间是0 ，而0/0是无意义的，这就要靠微积分来解决。此外，由于研究天文的需要，光学是十七世纪的一门较重要的科学研究，透镜的设计者要研究光线通过透镜的通道，必须知道光线入射透镜的角度以便应用反射定律，这里重要的是光线与曲线的法线间的夹角，而法线是垂直于切线的，所以总是就在于求出法线或切线；另一个涉及到曲线的切线的科学问题出现于运动的研究中，求运动物体在它的轨迹上任一点上的运动方向，即轨迹的切线方向，这也要靠微积分来解决。此后，实变函数论和泛论分析也开始与微积分等学科相互交叉与渗透。

- 到此，整个微积分历程得到了前所未有的发展，微积分的诞生对于近代数学和物理学的发展起到了决定性的作用。可以说，微积分是近现代科学的开端。

4.1和4.2节　微分和导数

教学内容：1. 微分概念的导出背景（了解）

1. 微分的产生背景.

2. 微分的定义（重点和难点）

微分的原始思想在于找一种方法，当函数的自变量很微小的时候

3. 导数（重点）

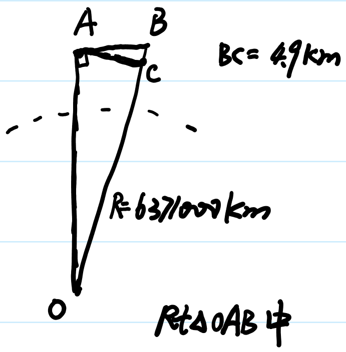
4. 微分的几何意义（理解）

能够使用又比较精确地估计出函数的改变量.

5. 可微与可导的关系（理解）

$y=f(x)$.　　$x \longmapsto x+\Delta x$

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ 的近似值



Rt△OAB 中

OA = 6371000 = OC

BC = 4.9

$$AB^2 = OB^2 - OA^2$$
$$= (6371000+4.9)^2 - 6371000^2$$
$$= 2\times 6371000\times 4.9 + 4.9^2$$
$$\approx 2\times 6371000\times 4.9$$

$dy\big|_{x=6371000} \quad \Delta x = 4.9$

AB^2 是 $y=x^2$ 在 $x=6371000$ 处当取得微小改变量 4.9 时的相应增量.

二. 微分的定义.

定义4.1.1. 设 x_0 是函数 $y=f(x)$ 定义域内一点. 若存在线性函数 $A(x_0)\cdot(x-x_0)$ (Δx)

s.t. 对 x_0 的邻域中的点 x, 有

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = A(x_0)\cdot(x-x_0) + o(x-x_0) \quad (x\to x_0) \quad ①$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 点可微. $A(x_0)(x-x_0)$ 称为 $y=f(x)$ 在 x_0 点处的微分

记作 $df(x)\big|_{x=x_0}$ 或 $dy\big|_{x=x_0}$.

$$dy\big|_{x=x_0} = A(x_0)\Delta x = A(x_0)dx$$

EX4.1.1 $y=x^2 \Rightarrow dy = 2x\,dx$

解: $(x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2 = 2x\cdot\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x\to 0)$

EX4.1.2. $y=\sqrt[3]{x^2}$ $x=0$ 处.

$\Delta y = \sqrt[3]{\Delta x^2} - 0 = (\Delta x)^{2/3} \neq ?\cdot\Delta x$

∴ 不可微

可微与连续函数

可微 $\Rightarrow$ 连续. 反之未必. 如 $\begin{cases} y=|x|, & (x=0\text{处}) \\ y=x^{2/3} & (x=0\text{处}) \end{cases}$

证明: $y=f(x)$ 在 x_0 点可微.

$\Rightarrow \quad f(x)-f(x_0)=A(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0) \quad (x\to x_0)$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \lim\limits_{x\to x_0}(A(x_0)(x-x_0))+0$

$= 0$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

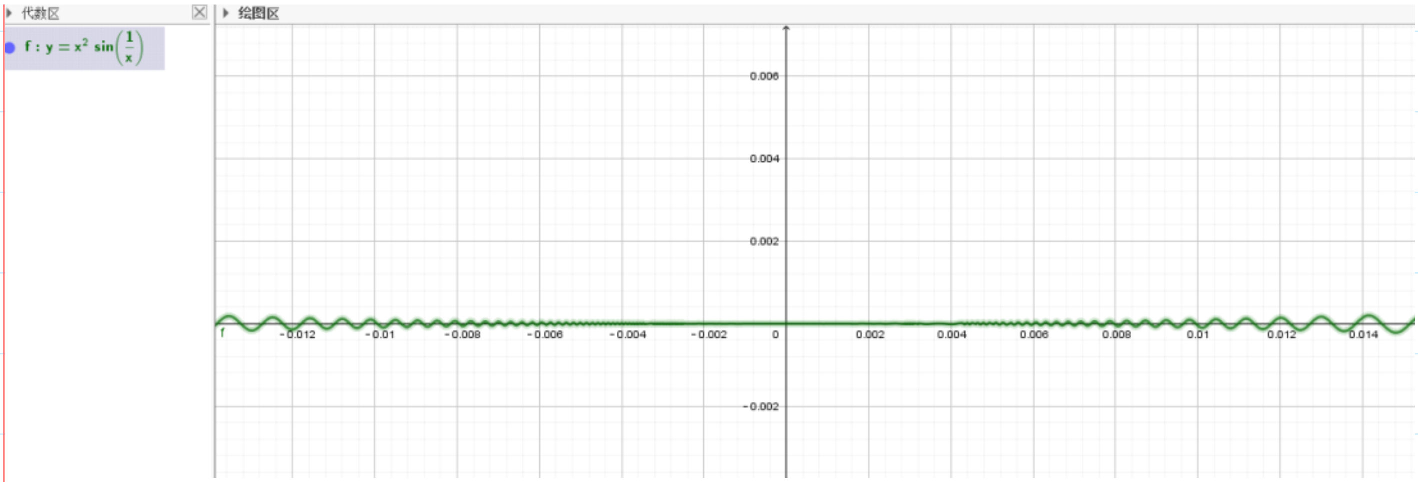
$\therefore$ 连续. 证毕.

三. 导数 (中学学过)

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}. \quad 或 \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

作业: P_{104}. 2. P_{110}. 4.


代数区
$f: y = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
绘图区
0.006
0.004
0.002
-0.002
f
-0.012
-0.01
-0.008
-0.006
-0.004
-0.002
0
0.002
0.004
0.006
0.008
0.01
0.012
0.014