§3.2 连续函数

教学内容: 1. 连续的定义 (重点)

2. 连续函数的四则运算 (略)

3. 间断点的类型 (难点)

4. 反函数连续性定理

5. 复合函数的连续性

一. 连续函数

定义3.2.1 设 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续. x_0 为 $y=f(x)$ 的连续点.

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

定义3.2.2 若 $\forall x_0\in(a,b)$, $f(x)$ 在 x_0 点连续, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 记 $f\in C(a,b)$.

定义3.2.3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$, 称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续; $\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $x_0\le x<x_0+\delta$ 时 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$, 称 ... 左连续 $\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$, $x_0-\delta<x\le x_0$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

在 x_0 点连续 $\Longleftrightarrow$ 右连续且左连续.

定义3.2.4. 若 $f\in C(a,b)$, 且在 a 点右连续, 在 b 点左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 记 $f\in C[a,b]$.

Ex3.2.1 证明 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内连续.

证明: $\forall x_0\in(0,1)$ $\quad \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x-x_0|}{|x\cdot x_0|} < \frac{|x-x_0|}{\frac{x_0^2}{2}}$

$\Uparrow$

$x>\frac{x_0}{2} \Leftarrow |x-x_0|<\frac{x_0}{2}$

$\forall\varepsilon>0$. 要使 $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$, 只需 $|x-x_0|<\frac{x_0^2}{2}\cdot\varepsilon$.

$\therefore$ 取 $\delta=\min\left\{\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^2}{2}\varepsilon\right\}>0$, $\forall$ $|x-x_0|<\delta$, 有 $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$

即 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}$.

由 x_0 的任意性 可知 $f\in C(0,1)$. 证毕.

Ex3.2.2. 证明 $f(x)=\sqrt{x(1-x)}$ 在 $[0,1]$ 上连续.

证明: (1) 先证 $f(x)$ 在 $\forall x_0\in(0,1)$ 内连续.

$$\left|\sqrt{x(1-x)}-\sqrt{x_0(1-x_0)}\right| = \frac{|(x-x_0)-(x^2-x_0^2)|}{\sqrt{x(1-x)}+\sqrt{x_0(1-x_0)}} \le \frac{|x-x_0|\cdot|1-(x+x_0)|}{\sqrt{x(1-x)}+\sqrt{x_0(1-x_0)}}$$

$|x-x_0|\cdot$

$$|\sqrt{x(1-x)}-\sqrt{x_0(1-x_0)}| = \frac{\cdots}{\sqrt{x(1-x)}+\sqrt{x_0(1-x_0)}} \le \frac{\cdots}{\sqrt{x(1-x)}+\sqrt{x_0(1-x_0)}}$$

$$\underset{0<x<1}{<} \frac{|x-x_0|\cdot}{\sqrt{x_0(1-x_0)}}$$

$$0<x<1 \Uparrow \quad \underline{|x-x_0|<\eta=\min\{x_0,1-x_0\}>0.}$$

$|x-x_0|<x_0$

$\Downarrow$

$-x_0<x-x_0<x_0 \Rightarrow 0<x<2x_0$

$|x-x_0|<1-x_0 \Rightarrow \cdots < x-x_0<1-x_0 \Rightarrow x<1$ $\Big\}$ $0<x<\min\{1,2x_0\}$

$\therefore$ $\forall\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，只需 $\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0(1-x_0)}}<\varepsilon$

即 $|x-x_0|<\underline{\sqrt{x_0(1-x_0)}\cdot\varepsilon}.$

取 $\delta=\min\{\eta,\sqrt{x_0(1-x_0)}\cdot\varepsilon\}>0$. 当 $|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

$\therefore$ $f\in C((0,1))$.

(2) 要证 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处右连续，在 $x_1=1$ 处左连续.

$|f(x)-f(0)| = |\sqrt{x(1-x)}-0| \underset{0\le x<1}{\le} \sqrt{x}$

$\therefore$ $\forall\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$. 只需 $0\le x<\min\{1,\varepsilon^2\}$

当 $0\le x-0<\delta$ 时 有 $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$.

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0=f(0)$. 右连续

同理. $x=1$ 处 左连续.

由(1)(2)可知 $f\in C[0,1]$. 证毕.

Ex3.2.3. 证明: $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续

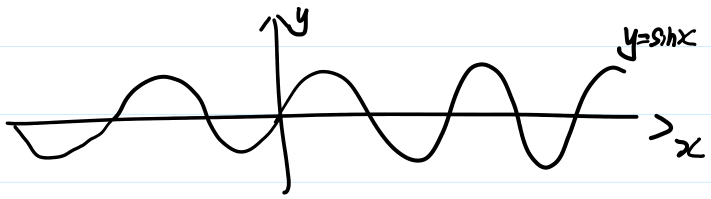
证明: $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$. $|\sin x-\sin x_0| = \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}\right|$

$$\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le 2\times\frac{|x-x_0|}{2}=|x-x_0| \quad ①$$

$\forall\varepsilon>0$. 取 $\delta=\varepsilon>0$ 有 $|x-x_0|<\delta$ 时 由①可知 $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$.

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

$\therefore$ 由 x_0 的任意性可知 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续. 证毕.



同理. $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续. (小作业)

Ex3.2.4 证明 $y=a^x$ ($a>0$且$a\neq1$) 在$(-\infty,+\infty)$内连续.

证明:(1) $y=a^x$ 在$x=0$处连续. 要证 $\lim_{x\to0}a^x=a^0=1$.

① $a>1$时

$\forall\varepsilon\in(0,1)$, 要使得 $|a^x-1|<\varepsilon \Leftrightarrow 1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon$

$\Leftrightarrow \log_a(1-\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon)$

取$\delta=\min\{|\log_a(1-\varepsilon)|, \log_a(1+\varepsilon)\}>0$. 于是当 $|x-0|<\delta$时, 有

$|a^x-1|<\varepsilon$

$\therefore \lim_{x\to0}a^x=a^0$

② $0<a<1$时

法一 可以类似①用定义法证明. √

法二 也可以用极限四则运算, 即

令$b=\frac{1}{a}$, 则 $b>1$.

$$\lim_{x\to0}a^x=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{b}\right)^x=\lim_{x\to0}\frac{1}{b^x}=\frac{1}{\lim_{x\to0}b^x}$$

$$\overset{①}{=}\frac{1}{b^0}=1=a^0.$$

由①②可知 $\lim_{x\to0}a^x=a^0$.

(2). $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$, $|a^x-a^{x_0}|=a^{x_0}|a^{x-x_0}-1|<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow |a^{x-x_0}-1|<\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}<a^{x-x_0}<1+\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}$$

$$\underset{0<\varepsilon<a^{x_0}}{\overset{a>1}{\Longleftrightarrow}} \log_a\left(1-\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}\right)<x-x_0<\log_a\left(1+\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}\right)$$

同(1).

由(1)(2)可知 $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$ 有 $\lim_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$. 证毕.

二. 连续函数的四则运算 (四合) 同极限的四则运算.

Ex3.2.5. 由 $\sin x$. $\cos x$ 的连续性

$\Rightarrow$ $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$ 在各自定义域内连续.

$\Rightarrow$ $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$ 在其定义域内连续.

三、间断点的类型.

第一类间断点：$f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 都存在 $\begin{cases} f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)，可去间断点. \ y=\frac{x^2-1}{x-1}\ (x=1) \\ f(x_0-0)\neq f(x_0+0)，跳跃间断点, \ y=\operatorname{sgn} x. \end{cases}$

第二类间断点：$f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 至少一个不存在. $\begin{cases} 无穷型间断点. \ y=\frac{1}{x}\ (x=0) \\ 振荡型间断点. \ y=\sin\frac{1}{x}\ (x=0) \end{cases}$

EX3.2.6. (1)

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geq 0 \\ x, & x<0. \end{cases}$$

$x=0$:
$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=0^2+1=1$$
$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}x=0$$
$\neq$

$x=0$ 是跳跃间断点.

(2)
$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 2, & x=0. \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\neq 2=f(0)$ 可去间断点.

EX3.2.7. Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q}, \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

证明：$D(x)$ 在 $\forall x\in\mathbb{R}$ 处不连续，且 $\forall x\in\mathbb{R}$ 为第二类间断点.

证明：(1) $\forall x_0\in\mathbb{Q}$. 取两数列 $x_n\in\mathbb{Q}$, $y_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 满足 $x_n>x_0$, $y_n>x_0$.

$x_n\to x_0^+$, $y_n\to x_0^+$ （如 $x_n=x_0+\frac{1}{n}$, $y_n=x_0+\frac{\sqrt{2}}{n}$）

$D(x_n)\equiv 1\to 1\ (n\to\infty)$, $D(y_n)\equiv 0\to 0\ (n\to\infty)$.

$\therefore \lim_{x\to x_0^+}D(x)$ 不存在. （Heine 定理），

$\therefore$ 有理点均为第二类间断点.

(2) $\forall x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. 取两点列 $x_n\in\mathbb{Q}$, $y_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

则 $x_n \to x_0^+$，$y_n \to x_0^+$

$D(x_n) \equiv 1 \to 1 \ (n\to\infty)$.　　$D(y_n) \equiv 0 \to 0 \ (n\to\infty)$

∴ $\lim\limits_{x\to x_0^+} D(x)$ 不存在.

∴ 无理点、均为第二类间断点.　　　证毕.

作业. P83. 2. (4) (5) 4. 6. 8. (2) (4) (5) (6) (9) (10)