以下为课程的补充内容的教材。
未能及时在线上课的同学请跟随雨课堂或spoc我录制的上课视频学习，可以看此教材内容，也可以看我提前发过的PPT内容。不管花多少时间，请自学完毕。补充的这些知识咱们这门课用不到，你们其他课程要用。红框遮挡的内容不做学习要求。
寒假里请自学完毕《解析几何》内容，这部分内容我们下学期学习多重积分和曲线曲面积分会用。电子版教材我也会提前发到QQ群文件。

第六章　微分方程

在研究科学技术与工程中的许多问题时, 需要寻找变量之间的函数关系.但要直接找到所需的函数关系往往是困难的, 不过有的时候根据问题的属性及所提供的条件, 可以找到待求函数的导数或微分所满足的关系式, 由此能间接求出所需的函数. 这些就是本章要涉及的微分方程问题.

第一节　微分方程的基本概念

含有未知函数的导数或微分的方程称为**微分方程**.

微分方程有时也简称为**方程**. 本课程中所讨论的微分方程, 其中的未知函数都只是一个自变量的函数, 这类方程又称为**常微分方程**.

例如

$$2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+3x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y-\sin x=0, \tag{1}$$

$$2y^2(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2-x=0, \tag{2}$$

$$(4x+3y+1)\,\mathrm{d}x+(x+y+1)\,\mathrm{d}y=0 \tag{3}$$

都是常微分方程.

微分方程中出现的未知函数导数的最高阶数称为方程的**阶**. 上面列举的微分方程中, 方程(1)是2阶的, 而方程(2)和(3)都是1阶的.

n阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \tag{4}$$

其中$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$是联系着$x,y,y',\cdots,y^{(n)}$的一个关系式, 式中$x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$可以不全出现甚至全不出现, 但$y^{(n)}$必须出现.

设函数$y=\varphi(x)$在区间I上有定义, 且存在n阶导数. 若将$y=\varphi(x)$, $y'=\varphi'(x)$, $\cdots$, $y^{(n)}=\varphi^{(n)}(x)$代入方程(4), 方程成为恒等式, 即对任意$x\in I$, 有

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0,$$

则称$y=\varphi(x)$为方程(4)在区间I上的**解**. 求微分方程解的过程称为**解微分方程**.

例1 质量为m的物体只受重力作用以初速度v_0自由下落, 求其下落的路程函数

解 以物体开始下落的位置为原点, 建立坐标系如图6–1. 设物体的下落距离s与下落时间t的关系为$s=s(t)$. 由牛顿第二定律得$m\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=mg$, 即有

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=g. \tag{5}$$

根据题意可知, $s(t)$还满足条件

$$s|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v_0. \tag{6}$$

将(5)式两端关于t积分得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=gt+C_1.$$

再积分一次得

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{7}$$

其中C_1,C_2为任意常数. 将条件(6)代入(7)式得$C_1=v_0,C_2=0$. 所求自由落体的路程函数为

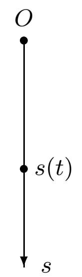

图6–1

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t.$$

在例1中, 对任意常数C_1和C_2, 由(7)式所确定的函数都是方程(5)的解.

一般地, 任何一个微分方程都不止有一个或几个解, 而是有为数无穷的一族解. 在实际应用中, 常常需要求出其中满足某些特定条件的解. 这些特定条件称为**定解条件**. 求满足定解条件解的问题称为**定解问题**. n阶方程形如

$$y\,|_{x=x_0}=y_0\,,\quad y'\,|_{x=x_0}=y_0'\,,\quad \cdots,\quad \left.y^{(n-1)}\right|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}$$

的定解条件称为**初始条件**或**初值条件**, 其中$y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}$为已知常数. 求方程满足初始条件解的定解问题称为**初值问题**.

设$y=\varphi(x, C_1, \cdots, C_n)$是$n$阶方程的一个含有$n$个任意常数$C_1, \cdots, C_n$的解. 如果至少对于在一定范围内给定的初始条件都能确定出任意常数$C_1, \cdots, C_n$的特定值, 使相应的解满足此初始条件, 则称$y=\varphi(x, C_1, \cdots, C_n)$为方程的**通解**.

对于n阶方程, 其初始条件是由彼此无关的n个独立条件构成的. 利用这n个条件确定出通解中的任意常数便得到方程满足初始条件的解. 为了保证能由这n个独立的条件确定出通解中n个常数, 这n个常数也必须是彼此无关相互独立的. 因此, 为了简单, 也把n阶方程的通解说成是方程含有n个独立任意常数的解.

一阶微分方程的通解含有一个任意常数, 二阶方程的通解含有两个独立的任意常数, n阶方程的通解含有n个独立的任意常数.

取定了通解中的任意常数, 便得到方程的一个具体的解, 称其为方程的**特解**.

在例1中, 函数$s=\dfrac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$是方程(5)的通解, 而函数$s=\dfrac{1}{2}gt^2+v_0t$是取通解中的任意常数$C_1=v_0, C_2=0$得到的特解.

有时方程的解是以隐函数形式出现, 称其为**隐式解**. 隐函数形式的通解称为**隐式通解**.

微分方程的解$y=\varphi(x)$的图形是一条曲线,称为微分方程的**积分曲线**.

定解问题的几何意义就是求微分方程满足定解条件的那条积分曲线.

例2 验证由$Cx^2-y^2=1$(C为任意常数)所确定的函数$y=y(x)$是方程$xyy'-1-y^2=0$ 的通解, 并求其满足初始条件$y|_{x=1}=0$的特解.

解 根据隐函数求导法则, 由$Cx^2-y^2=1$有

$$2Cx-2yy'=0.$$

由此得到$yy'=Cx$. 将其与$y^2=Cx^2-1$代入方程得

$$Cx^2-1-(Cx^2-1)\equiv 0.$$

因此$Cx^2-y^2=1$是方程的隐式解. 又因解中含有一个任意常数, 故它是方程的通解. 将初始条件代入得到$C=1$, 故所求的特解为

$$x^2-y^2=1.$$

习　题 6－1

1. 判断下列微分方程的阶数:

(1) $x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x\mathrm{e}^x=0$; (2) $xy\,\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y=0$;

(3) $(y'')^4-5y'-4y=\mathrm{e}^x\sin x$; (4) $x^2y'''+y'y''=1+x$.

2. 验证下列各函数是否为相应微分方程的解, 若是解, 指出它是否为通解:

(1) $xy'-2y=0,\ \ y=5x^2$; (2) $y''-y^2=x^2,\ \ y=\dfrac{1}{x}$;

(3) $(x-2y)y'=2x-y,\ \ x^2-xy+y^2=C$.

3. 验证函数$y=\dfrac{C}{x}$是微分方程$xy'+y=0$的通解, 并求满足$y(1)=1$的特解.

4. 设曲线过点$A(\mathrm{e},2)$, 且曲线上任意点处的切线斜率等于该点横坐标的倒数, 求该曲线的方程.

5. 确定函数关系式中所含的参数, 使函数满足所给的初始条件:

(1) $x^2-y^2=C,\ \ y|_{x=0}=5$;

(2) $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x},\ \ y\big|_{x=0}=0,\ \ y'\big|_{x=0}=1$.

第二节　一阶微分方程

本节讨论几种常见的一阶微分方程的解法.

一　可分离变量方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \tag{1}$$

的一阶微分方程称为**可分离变量方程**. 现在讨论方程(1)的求解方法.

若$g(y)\neq 0$, 则方程(1)可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

此时变量x和y被分离在等号两边.

假设函数$g(y)$和$f(x)$都是连续函数, $y=\varphi(x)$是方程的解. 将$y=\varphi(x)$代入方程得恒等式

$$\frac{\varphi'(x)\,\mathrm{d}x}{g(\varphi(x))}=f(x)\,\mathrm{d}x.$$

两边积分得

$$\int\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))}\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

设$G(y)$和$F(x)$分别是$\dfrac{1}{g(y)}$和$f(x)$的原函数, 则由上式有

$$G(\varphi(x))=F(x)+C.$$

因此, 如果$y=\varphi(x)$是微分方程(2)的解, 则$y=\varphi(x)$是由方程

$$G(y)=F(x)+C \tag{3}$$

确定的隐函数. 反之, 如果$G(y)$和$F(x)$分别是$\dfrac{1}{g(y)}$和$f(x)$的原函数, $y=\varphi(x)$是由方程(3)确定的可导隐函数, 则

$$G(\varphi(x))=F(x)+C.$$

两边微分得

$$G'(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=F'(x)\,\mathrm{d}x.$$

由此得到

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{g(\varphi(x))}=f(x)\,\mathrm{d}x.$$

这表明$y=\varphi(x)$是微分方程(2)的解.

根据以上讨论, 为了求微分方程(2)解, 只需在其两边积分得到(3)式, 由(3)式确定的可导隐函数便是(2) 的解. 因为(3)中含有一个任意常数, 所以由它所确定的解是方程的通解. 这种求可分离变量方程解的方法称为**分离变量法**.

例1 求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$的通解.

解 这是可分离变量方程. 当$y\neq 0$时, 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\,\mathrm{d}x.$$

两端积分得

$$\ln|y|=x^2+C_1,$$

由此解得

$$y=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2}.$$

记$C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$, 它可取为任意非零常数. 容易看出函数$y=0$也是方程的解. 于是对任意常数C, 函数

$$y=Ce^{x^2}$$

都是方程的解, 从而它是方程的通解.

例2 求初值问题

$$\begin{cases}(x+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\mathrm{e}^{-y}-1,\\ y\,|_{x=1}=0\end{cases}$$

的解.

解 分离变量得

$$\frac{\mathrm{e}^y}{2-\mathrm{e}^y}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

两边积分得

$$-\ln|2-\mathrm{e}^y|=\ln|x+1|+C_1.$$

由此得到通解

$$y=\ln\Big(2-\frac{C}{x+1}\Big).$$

代入初始条件$y|_{x=1}=0$得$C=2$. 于是得到所求的初值问题的解

$$y=\ln\Big(2-\frac{2}{x+1}\Big).$$

例3 (冷却问题) 牛顿冷却定律指出, 物体的温度对时间的变化率正比于该物体同外界温度之差. 现将一个50°C的物体, 放在20°C的恒温室中冷却, 求物体温度的变化规律.

解 设物体被放入恒温室初始时间为$t=0$, 物体在时间$t\geq 0$时的温度为$T^\circ(t)$. 按照冷却定律及所给条件, 有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-20),\\ T|_{t=0}=50,\end{cases}$$

其中$k>0$为比例系数. 对微分方程分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}T}{T-20}=-k\,\mathrm{d}t.$$

两边积分得

$$\ln(T-20)=-kt+\ln C.$$

于是得到方程通解

$$T=20+C\mathrm{e}^{-kt}.$$

由初始条件$T|_{t=0}=50$, 得$C=30$. 因此, 物体温度的变化规律为

$$T=20+30\mathrm{e}^{-kt}.$$

二 齐次方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(\frac{y}{x})$$

的方程称为**齐次方程**.

齐次方程可通过变量替换化为可分离变量方程.

令$u=\frac{y}{x}$. 因为y是x的函数, 所以u也是x的函数. 由$y=xu$得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

代入方程得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{f(u)-u}{x}.$$

这是可分离变量方程. 如果求出它的解$u=u(x)$, 则原方程的解就是$y=xu(x)$.

例4 求方程$y^2+(x^2-xy)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$的通解.

解 原方程经整理得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}-1},$$

这是一个齐次方程. 令$\frac{y}{x}=u$, 则$y=ux$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 代入原方程得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2}{u-1},$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{u-1}.$$

分离变量得

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两端积分得

$$u-\ln|u|=\ln|x|+C_1,$$

即有

$$\ln|xu|=u-C_1.$$

以$u=\frac{y}{x}$回代, 得到

$$\ln|y|=\frac{y}{x}-C_1.$$

于是得到方程的通解

$$y=C\mathrm{e}^{\frac{y}{x}},$$

其中$C=\mathrm{e}^{-C_1}$.

有些方程虽不是齐次方程, 但可化为齐次方程.

例如, 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}.$$

当$c_1=c_2=0$时是齐次方程. 当c_1与c_2不同时为零时, 不是齐次方程.

如果$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, 则方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2=0,\end{cases}$$

有唯一解(x_0,y_0). 作变换

$$\begin{cases}x=t+x_0,\\ y=u+y_0,\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}&=\frac{a_1t+b_1u+a_1x_0+b_1y_0+c_1}{a_2t+b_2u+a_2x_0+b_2y_0+c_2}\\ &=\frac{a_1t+b_1u}{a_2t+b_2u}.\end{aligned}$$

方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{a_1t+b_1u}{a_2t+b_2u},$$

此为齐次方程.

如果$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$, 则令$\frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{\lambda}$, 作变换$u=a_1x+b_1y$, 得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a_1+b_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

代入方程得

$$\frac{1}{b_1}\Big(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-a_1\Big)=\frac{u+c_1}{\lambda u+c_2},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a_1+b_1\frac{u+c_1}{\lambda u+c_2}.$$

这是可分离变量方程.

更一般地, 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\Big(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\Big)$$

的方程都可按上述方法来处理.

例5 求方程$(2x+y-4)\,\mathrm{d}x+(x+y-1)\,\mathrm{d}y=0$的通解.

解 解方程组

$$\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$$

得$x_0=3, y_0=-2$. 作变换$x=t+3, y=u-2$. 代入方程得

$$(2t+u)\,\mathrm{d}t+(t+u)\,\mathrm{d}u=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\frac{2t+u}{t+u},$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\frac{2+\frac{u}{t}}{1+\frac{u}{t}}.$$

令$v=\frac{u}{t}$, 则$u=vt$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=v+t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. 代入上面方程, 整理并分离变量可得

$$\frac{v+1}{v^2+2v+2}\,\mathrm{d}v=-\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

积分得

$$\frac{1}{2}\ln(v^2+2v+2)=-\ln|t|+C_1.$$

化简得

$$v^2+2v+2=\frac{C_2}{t^2},$$

其中$C_2=\mathrm{e}^{2C_1}$. 代回$v=\frac{u}{t}$得

$$u^2+2ut+2t^2=C_2.$$

再代回$u=y+2$, $t=x-3$得到原方程通解

$$2x^2+2xy+y^2-8x-2y=C,$$

其中$C=C_2-10$.

三 一阶线性微分方程

一阶线性方程的一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x). \tag{4}$$

当$Q(x)\equiv 0$时, 方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0, \tag{5}$$

称其为**一阶线性齐次方程**，否则称(4)为**一阶线性非齐次方程**.

方程(5)是可分离变量方程. 分离变量得

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=-P(x)\,\mathrm{d}x.$$

积分得

$$\ln|y|=-\int P(x)\,\mathrm{d}x+C_1.$$

由此得到(5)的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{6}$$

在这里，为了特别显现出这是方程含有任意常数的通解，我们把不定积分中的任意常数写在不定积分之外，而不定积分$\int P(x)\,\mathrm{d}x$则只表示函数$P(x)$的一个原函数.

对于非齐次方程(4)，借助于对应的齐次方程(5)的通解，用如下的参数变易法求出它的通解. 设(4)的解为

$$y=u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}.$$

代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}=Q(x),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}.$$

由此得到

$$u=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C.$$

于是方程(4)的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\Big(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\Big). \tag{7}$$

与一阶线性齐次方程通解公式(6)一样，一阶线性非齐次方程通解公式(7)中的各个不定积分也都只表示其被积函数的一个原函数.

记

$$\begin{aligned}&\overline{y}=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x},\\&y^*=\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

则$\overline{y}$是一阶线性齐次方程(5)的通解, 而y^*可看成是在公式(7)中取任意常数$C=0$得到的一阶线性非齐次方程(4)的特解. 于是, 方程(4)的通解可表示为

$$y=\overline{y}+y^*.$$

这表明, 一阶线性非齐次方程(4)的通解等于它所对应的一阶线性齐次方程(5)的通解$\overline{y}$与它自己的一个特解y^*之和. 稍后将会看到, 这是一般线性非齐次方程的通解结构上的共同性质.

例6 求方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}-(x+1)^{\frac{5}{2}}=0$的通解.

解 利用通解公式(7)得

$$\begin{aligned}
y&=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x}\Big(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\Big)\\
&=\mathrm{e}^{2\ln(x+1)}\Big(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}\mathrm{e}^{-2\ln(x+1)}\,\mathrm{d}x+C\Big)\\
&=(x+1)^2\Big(\int(x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x+C\Big)\\
&=(x+1)^2\Big(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\Big).
\end{aligned}$$

例7 求方程$y\,\mathrm{d}x-(2x-y^3\cos y)\,\mathrm{d}y=0$的通解.

解 若将变量x看成变量y的函数, 则原方程为一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{2}{y}x=-y^2\cos y.$$

利用通解公式得通解为

$$\begin{aligned}
x&=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{y}\,\mathrm{d}y}\left[\int(-y^2\cos y)\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{y}\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y+C\right]\\
&=y^2\left[\int(-\cos y)\,\mathrm{d}y+C\right]\\
&=y^2(C-\sin y).
\end{aligned}$$

例8 放射性元素会不断地有原子放射出某种粒子而转变成另一种元素, 这种转变过程称为**衰变**. 已知某种放射性元素的衰变速度与当时未衰变的元素含量M成正比, 在$t=t_0$时, 该元素含量为M_0, 求在衰变过程中该元素的含量随时间t变化的规律$M(t)$.

解 衰变速度是$M(t)$对t的导数$\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$. 因衰变速度与其含量成正比, 故有

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-\lambda M,$$

其中$\lambda>0$为衰变系数. 因$M(t)$是严格单调减函数, 从而应有$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}<0$. 等号右端的负号就是为此而添加的. 此外, 由题意知$M|_{t=t_0}=M_0$. 于是问题即为求初值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-\lambda M \\ M|_{t=t_0}=M_0 \end{cases}$$

的解. 由一阶线性齐次方程通解公式(6)得

$$M(t)=C\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

代入初始条件$M|_{t=t_0}=M_0$得$C=M_0\mathrm{e}^{\lambda t_0}$, 所以

$$M(t)=M_0\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}.$$

四 伯努利方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n, \quad (n\neq 0,1) \tag{8}$$

的方程称为**伯努利**(Bernoulli)**方程**. 伯努利方程不是线性的, 但可通过变量代换将其化为线性方程. 方程(8)两端同时乘以y^{-n}得

$$y^{-n}\frac{dy}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x).$$

注意到$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1-n}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^{1-n}$,则上式可化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^{1-n}+(1-n)P(x)y^{1-n}=(1-n)Q(x).$$

引入新的未知函数$z=y^{1-n}$, 则方程化为关于z的一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x).$$

求出此方程的通解后将z换成y^{1-n}即可得到伯努利方程的通解.

例9 求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=2y^2\ln x$的通解.

解 这是一个伯努利方程. 用y^2除方程两端得

$$y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y^{-1}=2\ln x,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}(y^{-1})}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}y^{-1}=-2\ln x.$$

利用公式(7)得通解为

$$
\begin{aligned}
y^{-1} &= \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\Big[\int(-2\ln x)\mathrm{e}^{\int \frac{-1}{x}dx}\,\mathrm{d}x + C\Big] \\
&= x(C-\ln^2 x).
\end{aligned}
$$

也可写成

$$yx(C-\ln^2 x)=1.$$

显然$y(x)\equiv 0$是方程的解, 但它未包含在通解中. n阶方程的通解是含有n个独立的任意常数的解. 通解未必包含方程全部的解.

习　题　6−2

1. 求下列可分离变量微分方程的通解:

(1) $y'=\mathrm{e}^{x-y}$;　(2) $xy\,\mathrm{d}x+(x+1)\,\mathrm{d}y=0$;

(3) $y-xy'=a(y^2+y')$, ($a\neq 0$,常数) ;　(4) $3\mathrm{e}^x\tan y\,\mathrm{d}x+(1-\mathrm{e}^x)\sec^2 y\,\mathrm{d}y=0$;

(5) $x(1+y)+y'(y-xy)=0$;　(6) $(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y=0$.

2. 求下列方程满足初始条件的特解:

(1) $yy'=3xy^2-x,\ y|_{x=0}=1$;　(2) $\mathrm{d}y=(1-x+y^2-xy^2)\,\mathrm{d}x,\ y(0)=1$;

(3) $(x^2-1)y'+2xy^2=0,\ y|_{x=0}=1$;　(4) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}y-\sin x\,\mathrm{d}x=0,\ y(0)=0$.

3. 求通过点$M(3,4)$且其上任意一点处切线斜率为该点横坐标两倍的曲线方程.

4. 求下列齐次方程的通解:

(1) $y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$;　(2) $(2x\tan\frac{y}{x}+y)\,\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y$;

(3) $xy'+y=2\sqrt{xy}$;　(4) $x\,\mathrm{d}y=y(1+\ln y-\ln x)\,\mathrm{d}x$.

5. 化下列方程为齐次方程, 并求出通解:

(1) $y'=\dfrac{x+2y+1}{2x-3}$;　(2) $y'=\dfrac{2y-x-5}{2x-y+4}$;

(3) $(x+4y)\,\mathrm{d}y=(2x+3y+5)\,\mathrm{d}x$;　(4) $(x-y-1)\,\mathrm{d}x+(4y+x-1)\,\mathrm{d}y=0$.

6. 求下列一阶线性方程的通解:

(1) $y'+2xy=x\mathrm{e}^{-x^2}$;　(2) $xy'-3y=x^2$;

(3) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$;　(4) $\tan t\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-x=5$;

(5) $y'+\dfrac{y}{x\ln x}=1$;　(6) $y'+y\cos x=\mathrm{e}^{-\sin x}$.

7. 求下列方程满足初始条件的特解:

(1) $y'-y\tan x=\sec x,\ y(0)=0$;　(2) $xy'+y=\sin x,\ y(\pi)=1$;

(3) $y'+\dfrac{1-2x}{x^2}y=1,\ y(1)=0$;　(4) $y'-2y=\mathrm{e}^x-x,\ y(0)=\dfrac{5}{4}$.

8. 求下列伯努利方程的通解:

(1) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=xy^2$;　　　　(2) $y'+y-x\sqrt{y}=0$;

(3) $y'+\frac{2}{x}y=3x^2y^{\frac{4}{3}}$.

9. 设曲线上任意一点$M(x,y)$处的切线与连接点原点O和M的直线垂直, 求这条曲线的方程.

10.一曲线过点$(2,3)$,其在两坐标轴间任意切线段均被切点平分, 求该曲线的方程.

第三节　可降阶的高阶方程

二阶及二阶以上的微分方程称为**高阶微分方程**. 某些高阶方程可通过适当变量代换化为较低阶的方程来求解. 本节介绍三种容易降阶的高阶微分方程的求解方法.

一 $y^{(n)}=f(x)$型微分方程

方程

$$y^{(n)}=f(x) \tag{1}$$

的右端是仅含有自变量x的函数. 将方程改写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^{(n-1)}=f(x).$$

如果$f(x)$是连续函数, 两边积分得到

$$y^{(n-1)}=\int f(x)\,\mathrm{d}x+C_1.$$

再积分又得

$$y^{(n-2)}=\int\Big[\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}x+C_1x+C_2.$$

依此连续积分n次, 得到方程(1)的含有n个独立任意常数的通解.

例1　求方程$y'''=\mathrm{e}^{2x}-\cos x$的通解.

解　连续积分3次得

$$\begin{aligned}y''&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\sin x+C_1,\\ y'&=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\cos x+C_1x+C_2,\\ y&=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x}+\sin x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3.\end{aligned}$$

二 $y''=f(x,y')$型微分方程

方程

$$y''=f(x,y') \tag{2}$$

的右端是一个含有x和y'的式子, 方程中不含y. 作变量代换$y' = p(x)$, 则$y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. 代入方程(2), 得到关于函数$p(x)$的一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f(x, p).$$

设其通解为$p = \varphi(x, C_1)$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(x, C_1).$$

两边积分, 得方程(2)的通解

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2.$$

例2 求方程$(1 + x^2)y'' = 2xy'$满足条件$y(0) = 1, y'(0) = 3$的特解.

解 令$y' = p$, 则$y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. 代入方程并整理得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{2x}{1 + x^2}p.$$

这是一阶线性齐次方程, 其通解为

$$p = C_1\mathrm{e}^{\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x} = C_1(1 + x^2).$$

因此有

$$y' = C_1(1 + x^2).$$

由条件$y'(0) = 3$, 得$C_1 = 3$. 从而有

$$y' = 3(1 + x^2).$$

再积分得

$$y = x^3 + 3x + C_2.$$

又由条件$y(0) = 1$, 得$C_2 = 1$. 于是所求特解为

$$y = x^3 + 3x + 1.$$

一般地, 对于形如

$$y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)}),$$

的方程, 都可采取上述类似的方法进行降阶求解. 令$p = y^{(n-1)}$, 得$p' = f(x, p)$. 解出$p(x)$, 再积分$n - 1$次求得y.

例3 求$y''' - \frac{1}{x}y'' = 0$的通解.

解 令$p = y''$, 则$y''' = p'$. 代入方程得

$$p' = \frac{1}{x}p.$$

解得

$$p = C_1 \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = C_1 x.$$

从而有

$$y'' = C_1 x.$$

由此得到

$$y' = \int C_1 x\,\mathrm{d}x + C_2 = \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2.$$

$$\begin{aligned} y &= \int (\frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2)\,\mathrm{d}x + C_3 \\ &= \frac{1}{6}C_1 x^3 + C_2 x + C_3 \\ &= C_1' x^3 + C_2 x + C_3. \end{aligned}$$

三 $\boldsymbol{y''=f(y,y')}$型微分方程

方程

$$y''=f(y,y') \tag{3}$$

不显含自变量x. 令$y' = p(y)$, 则有$y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 代入方程(3), 得到关于变量$p$与$y$的一阶微分方程

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y,p).$$

求出此方程的通解$p(y)$, 其中含有一个任意常数. 再解$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y)$得到原方程的通解.

例5 求微分方程$yy'' + y'^2 = 0$满足初始条件$y\,|_{x=0} = 1, y'\,|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$的特解.

解 令$y' = p(y)$, 则$y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 代入方程得

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p^2 = 0.$$

由此得到

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{y}p = 0 \text{ 或 } p = 0.$$

由初始条件$y'\,|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$知$p = y' \neq 0$. 解前一个方程得

$$p = C_1\mathrm{e}^{-\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y} = \frac{C_1}{y}.$$

因此

$$y' = \frac{C_1}{y}.$$

分离变量得

$$y\,\mathrm{d}y = C_1\,\mathrm{d}x.$$

两边积分得到原方程的通解

$$\frac{1}{2}y^2 = C_1x + C_2.$$

由初始条件$y\,|_{x=0} = 1$得$C_2 = \dfrac{1}{2}$. 再把$x = 0$时$y = 1, y' = \dfrac{1}{2}$代入$y' = \dfrac{C_1}{y}$得$C_1 = \dfrac{1}{2}$. 于是所求特解为

$$y^2 = x + 1.$$

例6 设函数$y(x)(x \geq 0)$二阶可导, 且$y'(x) > 0, y(0) = 1$. 过曲线$y = y(x)$上任意一点$P(x, y)$作该曲线的切线及x轴的垂线(见图6–3). 上述两直线与x轴所围成的三角形的面积记为S_1. 区间$[0, x]$上以$y = y(x)$为曲边的曲边梯形面积记为S_2. 假设$2S_1 - S_2$恒为1. 求曲线$y = y(x)$的方程.

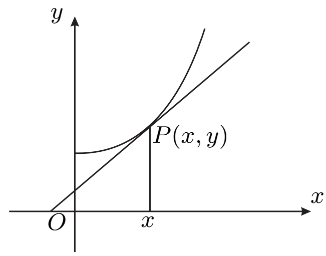

图6–3

解 因为$y(0) = 1, y'(x) > 0$, 所以当$x \geq 0$时$y(x) > 0$. 曲线$y = y(x)$在点$P(x, y)$处切线上点的坐标(X, Y)满足方程

$$Y - y = y'(x)(X - x),$$

切线与x轴的交点为$(x - \dfrac{y}{y'}, 0)$. 于是

$$S_1 = \frac{y^2}{2y'}, \qquad S_2 = \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t.$$

由$2S_1 - S_2 = 1$得

$$\frac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

由此得到$y'(0) = 1$. 上式两边求导得

$$\frac{2yy'^2 - y^2y''}{y'^2} - y = 0.$$

化简得

$$yy'' = y'^2.$$

令$y' = p(y)$, 则$y'' = p'(y)p$. 代入以上方程得

$$ypp' = p^2.$$

因为$p = y' \neq 0$, 所以由上式得

$$p' = \frac{1}{y}p.$$

这是一阶线性齐次方程, 通解为

$$p = C_1 y.$$

于是有

$$y' = C_1 y.$$

这也是一阶线性齐次方程, 通解为

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

由$y(0)=1$得$C_2=1$. 再由$y'(0)=1$得$C_1=1$. 于是所求曲线的方程为

$$y = e^x.$$

习 题 6-3

1. 求下列各微分方程的通解:

(1) $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$; (2) $y'''=xe^x$;

(3) $xy''=y'$; (4) $y''=1+y'^2$;

(5) $y''+y'^2=2e^{-y}$; (6) $1+yy''+y'^2=0$;

(7) $y^3y''-1=0$; (8) $y''=y'^3+y'$;

(9) $xy'''+y''=1+x$; (10) $xy''-y'\ln y'+y'=0$.

2. 求下列初值问题的解:

(1) $\begin{cases} y''=x+\sin x, \\ y(0)=1,\ y'(0)=-1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (1+x^2)y''=2xy', \\ y(0)=1,\ y'(0)=3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2y'^2-(y-1)y''=0, \\ y(1)=2,\ y'(1)=-1; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} y'''=\sqrt{y''}, \\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0. \end{cases}$

3. 对任意的$x>0$, 曲线$y=f(x)$上的点$(x,f(x))$处的切线在y轴上的截距等于$\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, 求$f(x)$ 的表达式.

4. 设$y=y(x)$是通过点$M_0(0,1)$的连续凸曲线, 其上任意点(x,y)处的曲率为$\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, 且曲线在点M_0处的切线方程为$y=x+1$. 求该曲线的方程.

第四节 线性微分方程解的结构

形如

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x) \tag{1}$$

的微分方程称为n阶**线性方程**, 其中$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x)$和$f(x)$都是已知函数, $f(x)$称为方程的**自由项**. 如果方程(1)中的$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x)$都是常数, 则称其为$n$阶**常系数线性方程**. 如果$f(x)\equiv 0$, 则称方程(1)为$n$阶**线性齐次方程**, 否则称其为$n$ 阶**线性非齐次方程**.

在本节和下节中, 我们将始终假设$p_1(x), p_2(x), \cdots, p_n(x)$和$f(x)$都是连续函数.

一 线性齐次微分方程解的结构

定理6.1 设$y_1(x)$和$y_2(x)$是线性齐次方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{2}$$

的两个解, 则对任意常数C_1和C_2, 函数

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

也是方程(2)的解.

证 因$y_1(x)$和$y_2(x)$是方程(2)的解, 故有

$$\begin{aligned}
&y_1^{(n)}(x) + p_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + p_{n-1}(x)y_1'(x) + p_n(x)y_1(x) = 0,\\
&y_2^{(n)}(x) + p_1(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + p_{n-1}(x)y_2'(x) + p_n(x)y_2(x) = 0.
\end{aligned}$$

两式分别乘以C_1和C_2后相加得

$$\begin{aligned}
&[C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)}(x)] + p_1(x)[C_1y_1^{(n-1)}(x) + C_2y_2^{(n-1)}(x)]\\
&\quad + \cdots + p_{n-1}(x)[C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x)] + p_n(x)[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)] = 0,
\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)] + p_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)]\\
&\quad + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)] + p_n(x)[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)] = 0.
\end{aligned}$$

这表明$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$是方程(2)的解. □

定理6.1很容易推广到更多个解的情况. 值得注意的是, 不能由此就认为只要找出方程(2)的n个解, 然后各自乘以一个任意常数之后再相加得到的便是方程(2)的通解.

例如, 对于方程

$$y'' + 2y' - 3y = 0,$$

容易验证$y_1 = \mathrm{e}^x$和$y_2 = 2\mathrm{e}^x$都是方程的解, 而

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2 2\mathrm{e}^x = (C_1 + 2C_2)\mathrm{e}^x$$

虽然是方程的解, 但因$C_1 + 2C_2$实际是只是一个任意常数, 因此不是方程的通解.

为了进一步分析线性齐次方程通解的结构, 我们引入函数的线性相关与线性无关的概念.

定义6.1 设$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$是定义在区间$I$上的函数, 如果存在不全为零的常数$k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得对任意$x \in I$都有

$$k_1y_1(x) + k_2y_2(x) + \cdots + k_ny_n(x) = 0,$$

则称函数$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$在$I$上**线性相关**, 否则称它们在$I$上**线性无关**.

例1 证明函数$y_1 = 2x - x^2$, $y_2 = x + x^2$, $y_3 = x$, $y_4 = \mathrm{e}^x$在$(-\infty, +\infty)$上线性相关.

证 因为在$(-\infty, +\infty)$内

$$y_1 + y_2 - 3y_3 + 0 \cdot y_4 = 0,$$

所以在$(-\infty, +\infty)$内y_1, y_2, y_3, y_4线性相关.

例2 设在区间I上$y_1(x) \equiv 0$, 证明它与定义在I上的任何函数$y_2(x)$都线性相关.

证 取$k_1 = 1, k_2 = 0$, 则对任意$x \in I$都有

$$k_1y_1(x) + k_2y_2(x) = 0.$$

因此$y_1(x)$与$y_2(x)$在I上线性相关.

例3 若函数$y_1(x)$与$y_2(x)$在区间I上都不恒为零, 证明$y_1(x)$与$y_2(x)$在I上线性相关的充分必要条件是存在常数$c \neq 0$使得$y_1(x) = cy_2(x)$.

证 充分性是明显的. 现只证必要性. 因为$y_1(x)$与$y_2(x)$线性相关, 所以存在不全为零的常数k_1和k_2使得

$$k_1y_1(x) + k_2y_2(x) = 0.$$

又由$y_1(x)$与$y_2(x)$都不恒为零, 得到k_1和k_2必都不为零. 从而有

$$y_1(x) = -\frac{k_2}{k_1}y_2(x),$$

其中$-\dfrac{k_2}{k_1} \neq 0$.

根据例3的结论, 两个不恒为零的函数只要不是只差一个常数因子(即一个函数不等于某常数乘以另一个函数), 它们一定是线性无关的. 例如, 在$(-\infty, +\infty)$上, 函数1和x线性无关; 当$\alpha_1 \neq \alpha_2$时, 函数$\mathrm{e}^{\alpha_1 x}$和$\mathrm{e}^{\alpha_2 x}$线性无关; 对任意实数α与β, 函数$\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$和$\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$线性无关.

此外, 还可以证明当$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$为互不相等的实数时, 函数

$$\mathrm{e}^{\alpha_1 x}, \mathrm{e}^{\alpha_2 x}, \cdots, \mathrm{e}^{\alpha_n x}$$

在$(-\infty, +\infty)$上线性无关; 对任意的实数α, 函数

$$\mathrm{e}^{\alpha x}, x\mathrm{e}^{\alpha x}, \cdots, x^{n-1}\mathrm{e}^{\alpha x}$$

在$(-\infty, +\infty)$上线性无关.

定理6.2 若函数$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$是线性齐次方程(2)的线性无关的解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

是方程(2)的通解, 其中$C_1, C_2, \cdots, C_n$为任意常数, 并且方程(2)的任何解都可表示为如上形式.

证明略.

定理6.2称为**线性齐次方程通解的结构定理**.

二 线性非齐次微分方程解的结构

定理6.3 若函数$y_1(x)$和$y_2(x)$是线性非齐次方程(1)的两个解, 则$y_1(x) - y_2(x)$是对应的线性齐次方程(2)的解.

证 因$y_1(x)$和$y_2(x)$是方程(1)的解, 故有

$$\begin{aligned} &y_1^{(n)}(x) + p_1(x) y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + p_{n-1}(x) y_1'(x) + p_n(x) y_1(x) = f(x), \\ &y_2^{(n)}(x) + p_1(x) y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + p_{n-1}(x) y_2'(x) + p_n(x) y_2(x) = f(x). \end{aligned}$$

两式相减得

$$\begin{aligned} &[y_1(x) - y_2(x)]^{(n)} + p_1(x)[y_1(x) - y_2(x)]^{(n-1)} \\ &\quad + \cdots + p_{n-1}(x)[y_1(x) - y_2(x)]' + p_n(x)[y_1(x) - y_2(x)] = 0. \end{aligned}$$

这表明函数$y_1(x) - y_2(x)$是线性齐次方程(2)的解. □

定理6.4 若函数$y^*(x)$是线性非齐次方程(1)的解, 而$y(x)$是对应的线性齐次方程(2)的解, 则$y^*(x) + y(x)$ 是方程(1)的解.

证明留给读者.

利用定理6.4, 进一步可证明如下的**线性非齐次微分方程通解结构的定理**.

定理6.5 若函数$y^*(x)$是线性非齐次方程(1)的一个解, 而$\overline{y}(x)$是对应的线性齐次方程(2)的通解, 则$y = \overline{y}(x) + y^*(x)$是方程(1)的通解, 并且方程(1)的任何解都可表示为如上形式.

根据定理6.5, 方程(1)的任何解都是它的特解. 因此, 依据定理6.5, 方程(1)的通解等于它所对应的齐次方程(2)的通解与其自身的一个特解之和.

定理6.6 如果函数$y_1(x)$和$y_2(x)$分别是方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f_1(x)$$

和

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f_2(x)$$

的解, 则函数$y=y_1(x)+y_2(x)$是方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f_1(x)+f_2(x)$$

的解.

只需代入检验便可得到证明.

定理6.6的结论称为线性微分方程解的**叠加原理**.

习 题 6－4

1. 下列函数组在其定义区间内哪些是线性相关的, 哪些是线性无关的:

(1) $\mathrm{e}^x,\ \mathrm{e}^{-x}$;　　(2) $\cos 2x,\ \sin 2x$;

(3) $\sin^2 x,\ 1-\cos 2x$;　　(4) $\ln x,\ x\ln x$.

2. 验证$y_1=\mathrm{e}^{x^2}$及$y_2=x\mathrm{e}^{x^2}$都是方程$y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$的解, 并写出该方程的通解.

3. 验证$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{12}\mathrm{e}^{5x}$ (C_1,C_2是任意常数)是方程$y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{5x}$的通解.

4. 验证$y=C_1x^5+C_2\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^2}{9}\ln x$ (C_1,C_2是任意常数)是方程$x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$ 的通解.

5. 若$y_1=3$, $y_2=3+x^2$, $y_3=3+x^2+\mathrm{e}^x$都是微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的解, 其中$f(x)\neq 0$, 且$p(x)$, $q(x)$, $f(x)$都是连续函数, 求此微分方程的通解.

第五节　常系数线性微分方程

本节将以二阶方程为主讨论常系数线性微分方程的求解方法. 由于分析和推导的需要, 先介绍复值函数与复指数函数.

一 复值函数与复指数函数简介

设$u(x),v(x)$都是定义在集合$D\subset\mathbf{R}$上的函数, 则称

$$z(x)=u(x)+\mathrm{i}\,v(x)$$

是定义在D上的**实变量复值函数**, 简称**复值函数**.

如果当$x \to x_0$时函数$u(x)$与$v(x)$的极限都存在, 则称当$x \to x_0$时函数$z(x) = u(x) + \mathrm{i}\, v(x)$的**极限存在**, 并定义

$$\lim_{x \to x_0} z(x) = \lim_{x \to x_0} u(x) + \mathrm{i} \lim_{x \to x_0} v(x).$$

设函数$z(x) = u(x) + \mathrm{i}\, v(x)$在$U(x_0)$内有定义, 若有

$$\lim_{x \to x_0} z(x) = z(x_0),$$

则称$z(x)$在点x_0**连续**.

显然, $z(x)$在点x_0连续的充分必要条件是$u(x)$与$v(x)$都在点x_0连续.

如果$z(x)$在区间(a, b)内每一点都连续, 则称$z(x)$在区间(a, b)内连续.

如果当$\Delta x \to 0$时$\dfrac{z(x + \Delta x) - z(x)}{\Delta x}$的极限存在, 则称函数$z(x)$在$x$点**可导**, 并称此极限值为$z(x)$在点$x$处的**导数**, 记为$z'(x)$或$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, 即有

$$z'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x + \Delta x) - z(x)}{\Delta x}.$$

若$z(x)$在区间(a, b)内每一点都可导, 则称$z(x)$在区间(a, b)内可导.

依照定义易知, 函数$z(x) = u(x) + \mathrm{i}\, v(x)$在点$x$可导的充分必要条件是函数$u(x)$与$v(x)$都在点$x$可导, 且有

$$z'(x) = u'(x) + \mathrm{i}\, v'(x).$$

设$z = \alpha + \mathrm{i}\, \beta$是任意复数, 定义复指数函数

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^\alpha (\cos \beta + \mathrm{i} \sin \beta).$$

容易验证, 如此定义的复指数函数具有下列性质:

(1) $\mathrm{e}^{\overline{z}} = \overline{\mathrm{e}^z}$, 其中$\overline{z}$表示$z$的共轭复数, $\overline{\mathrm{e}^z}$表示e^z的共轭复数;

(2) $\mathrm{e}^{z_1 + z_2} = \mathrm{e}^{z_1} \mathrm{e}^{z_2}$, 其中$z_1$和$z_2$为任意两个复数;

(3) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, \beta} = \cos \beta + \mathrm{i} \sin \beta$, 其中$\beta$是任意实数, 此式称为**欧拉**(Euler)**公式**;

(4) $\cos \beta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, \beta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, \beta}}{2}, \quad \sin \beta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, \beta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, \beta}}{2\mathrm{i}}$, 其中$\beta$是任意实数, 这是欧拉公式的另一种形式.

若$\lambda = \alpha + \mathrm{i}\, \beta$是一复常数, x是实变量, 则

$$\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\alpha x + \mathrm{i}\, \beta x} = \mathrm{e}^{\alpha x} (\cos \beta x + \mathrm{i} \sin \beta x).$$

据此有

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\lambda x}}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x) + \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x) \\
&= \alpha\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x - \beta\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x + \mathrm{i}\,(\alpha\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x + \beta\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x) \\
&= (\alpha + \mathrm{i}\,\beta)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x + (\mathrm{i}\,\alpha - \beta)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \\
&= (\alpha + \mathrm{i}\,\beta)\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + \mathrm{i}\,\sin\beta x).
\end{aligned}
$$

于是有

$$
\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\lambda x}}{\mathrm{d}x} = \lambda\mathrm{e}^{\lambda x}.
$$

这个结果与λ是实数时的结果完全一样.

二 常系数线性齐次微分方程

先考虑二阶常系数线性齐次方程

$$
y'' + py' + qy = 0, \tag{1}
$$

其中p和q都是实常数.

根据上一节讲的通解结构, 为了求方程(1)的通解, 只需求出方程(1)的两个线性无关的解.

考虑函数$y = \mathrm{e}^{rx}$. 代入方程(1)的左端得到

$$
r^2\mathrm{e}^{rx} + pr\mathrm{e}^{rx} + q\mathrm{e}^{rx} = (r^2 + pr + q)\mathrm{e}^{rx}.
$$

由此可见, 只要r是方程

$$
r^2 + pr + q = 0 \tag{2}
$$

的根, 则函数e^{rx}便是方程(1)的解. 方程(2)称为方程(1)的**特征方程**, 它的根称为方程(1)的**特征根**.

求出特征根之后, 可根据特征根的不同情况确定出方程(1)的两个线性无关的特解.

(1) 当特征方程有两个不相等的实数根r_1和r_2时, 取$y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{r_2 x}$. 这两个函数线性无关, 且都是方程(1)的解. 因此得到方程(1)的通解

$$
y = C_1\mathrm{e}^{r_1 x} + C_2\mathrm{e}^{r_2 x}.
$$

(2) 当特征方程有两个相等的实数根$r_1 = r_2 = r$时, 只得到方程(1)的一个解$y_1 = \mathrm{e}^{rx}$. 下面再求方程的一个与y_1线性无关的解y_2.

因y_1与y_2线性无关, 故设$y_2 = u(x)\mathrm{e}^{rx}$, 其中$u(x)$是不为常数的待定函数. 将

$$y_2' = u'(x)\mathrm{e}^{rx} + ru(x)\mathrm{e}^{rx},$$
$$y_2'' = u''(x)\mathrm{e}^{rx} + 2ru'(x)\mathrm{e}^{rx} + r^2u(x)\mathrm{e}^{rx}$$

代入方程(1)并约去e^{rx}得

$$u''(x) + (2r + p)u'(x) + (r^2 + pr + q)u(x) = 0.$$

因r为特征方程的重根, 故有$r^2 + pr + q = 0$, 且$2r + p = 0$, 由此得

$$u''(x) = 0.$$

积分两次得$u(x) = ax + b$. 由此可见, 只要$a \neq 0$, $y_2 = u(x)\mathrm{e}^{rx}$便是方程(1)的与$y_1 = \mathrm{e}^{rx}$线性无关的解. 为简便起见, 取$a = 1, b = 0$, 得到$y_2 = x\mathrm{e}^{rx}$. 于是得到方程(1)的通解

$$y = \mathrm{e}^{rx}(C_1 + C_2x),$$

其中C_1, C_2为任意常数.

(3) 当特征方程有共轭复根$r_1 = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$和$r_2 = \alpha - \mathrm{i}\,\beta$ $(\beta \neq 0)$时, 不难验证复值函数$y_1 = \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\,\beta)x}$和$y_2 = \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\,\beta)x}$是方程(1)的两个解. 因

$$\mathrm{e}^{(\alpha\pm\mathrm{i}\,\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x \pm \mathrm{i}\sin\beta x),$$

故

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(y_1 - y_2) = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x.$$

根据定理6.1, 这两个函数也都是方程(1)的解. 此外, 它们又是线性无关. 于是得到方程(1)的通解

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

综合上述讨论, 求二阶常系数线性微分方程(1)通解的步骤如下:

第一步, 写出特征方程$r^2 + pr + q = 0$;

第二步, 求出特征根r_1和r_2;

第三步, 根据特征根的不同情况确定出两个线性无关的解:

(i) 若r_1和r_2是两个不等的实根, 则有线性无关的解e^{r_1x}和e^{r_2x};

(ii) 若r_1和r_2是两个相等实根$r_1=r_2=r$, 则有线性无关的解e^{rx}和$x\mathrm{e}^{rx}$;

(iii) 若r_1和r_2是两个共轭复根$r_1=\alpha+\mathrm{i}\,\beta$, $r_2=\alpha-\mathrm{i}\,\beta$ $(\beta\neq 0)$, 则有线性无关的解$\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$和$\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$;

第四步, 将所得的线性无关解各乘以一个任意常数后相加便得到方程的通解.

方程(1)的这种依赖于特征方程和特征根的求解方法称为**特征根法**.

例1 求微分方程$y''-4y'+3y=0$的通解.

解 特征方程为$r^2-4r+3=0$, 两个特征根为$r_1=3$和$r_2=1$, 于是通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{x}.$$

例2 求方程$y''+2y'+y=0$满足条件$y(0)=4, y'(0)=-2$的特解.

解 特征方程为$r^2+2r+1=0$, 两个特征根为$r_1=r_2=-1$, 故通解为

$$y=\mathrm{e}^{-x}(C_1+C_2x).$$

由条件$y(0)=4$, 得$C_1=4$. 由条件$y'(0)=-2$得$C_2=2$. 从而所求特解为

$$y=(4+2x)\mathrm{e}^{-x}.$$

例3 求方程$y''-2y'+5y=0$的通解.

解 特征方程为$r^2-2r+5=0$, 两个根分别为$r_1=1+2\mathrm{i}$和$r_2=1-2\mathrm{i}$. 故通解为

$$y=\mathrm{e}^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

求二阶常系数线性齐次方程通解的特征根法可推广应用到n阶常系数齐次线性方程

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0 \tag{3}$$

上, 其中p_i $(i=1,2,\cdots,n)$为实常数.

代数方程

$$r^n+p_1r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0. \tag{4}$$

称为微分方程(3)的**特征方程**, 方程(4)的根称为微分方程(3)的**特征根**, 方程(4)的k重根称为微分方程(3) 的**k重特征根**. 根据第四章第三节关于多项式根的结论, 如果k重特征根按k个计算, 则n阶方程(3)共有n个特征根, 且其非实数的复数特征根是成对出现的, 即当$\alpha+\mathrm{i}\,\beta$ $(\beta\neq 0)$是特征根时$\alpha-\mathrm{i}\,\beta$也是特征根, 当$\alpha+\mathrm{i}\,\beta$是k重特征根时$\alpha-\mathrm{i}\,\beta$也是k重特征根.

求n阶常系数齐次线性方程(3)通解的步骤如下:

第一步, 写出特征方程(4);

第二步, 求出全部特征根;

第三步, 根据特征根的不同情况确定出方程(3)的n个线性无关的解:

(i) 对每个单实根r, 确定出一个解e^{rx};

(ii) 对每对单复根$r=\alpha\pm\mathrm{i}\,\beta(\beta\neq 0)$, 确定出两个解$\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$;

(iii) 对每个k重实根r, 确定出k个解$\mathrm{e}^{rx}, x\mathrm{e}^{rx}, \cdots, x^{k-1}\mathrm{e}^{rx}$;

(iv) 对每对k重复根$r=\alpha\pm\mathrm{i}\,\beta(\beta\neq 0)$, 确定出$2k$个解

$$
\begin{gathered}
\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \quad x\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \cdots, \quad x^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \\
\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x, \quad x\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \cdots, \quad x^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x;
\end{gathered}
$$

第四步, 将所得的n个线性无关解各乘以一个任意常数后相加便得到方程的通解.

例4 求方程$y^{(4)}-2y'''+5y''=0$的通解.

解 特征方程为$r^4-2r^3+5r^2=0$, 特征根为0(二重), $1\pm 2\mathrm{i}$. 于是方程通解为

$$y=C_1+C_2x+\mathrm{e}^{x}(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x).$$

例5 求方程$\dfrac{\mathrm{d}^4\omega}{\mathrm{d}x^4}+\beta^4\omega=0(\beta>0$为常数)的通解.

解 特征方程为$r^4+\beta^4=0$. 因

$$
\begin{aligned}
r^4+\beta^4 &= r^4+2r^2\beta^2+\beta^4-2r^2\beta^2 \\
&= (r^2+\beta^2)^2-2r^2\beta^2 \\
&= (r^2-\sqrt{2}\beta r+\beta^2)(r^2+\sqrt{2}\beta r+\beta^2)
\end{aligned}
$$

故特征根为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\beta(1\pm\mathrm{i}), \dfrac{\sqrt{2}}{2}\beta(-1\pm\mathrm{i})$. 于是方程通解为

$$
\begin{aligned}
\omega =& \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}\beta x}\Big(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\beta x+C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\beta x\Big) \\
&+\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\beta x}\Big(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\beta x+C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\beta x\Big).
\end{aligned}
$$

三 常系数线性非齐次微分方程

根据线性微分方程解的结构, 线性非齐次方程的通解等于对应的齐次方程的通解加上非齐次方程的一个特解. 前面已经介绍了求常系数线性齐次方程通解的方法. 下面将就二阶常系数线性方程

$$y''+py'+qy=f(x) \tag{5}$$

在$f(x)$为某些特殊类型函数的情况下讨论求方程特解的方法. 所得的结论可推广到更高阶的常系数线性方程上.

1. $f(x)=P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$, 其中$P_n(x)$是$x$的$n$次多项式, λ是常数.

因为多项式与$\mathrm{e}^{\lambda x}$的乘积的导数仍然是多项式与$\mathrm{e}^{\lambda x}$的乘积, 所以方程有形如

$$y=Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

的特解, 其中$Q_m(x)$是m次多项式

$$Q_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m.$$

将$y=Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$代入方程得

$$Q_m''(x)+(2\lambda+p)Q_m'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q_m(x)=P_n(x). \tag{6}$$

比较等式两边x同次幂的系数可以得到$a_0,a_1,\cdots,a_m$所满足的方程组. 解方程组求出$a_0,a_1,\cdots,a_m$, 便得到了$Q_m(x)$. 这种确定多项式$Q_m(x)$的方法称为**待定系数法**.

为了使得等式两边多项式的系数可进行比较, 必须$m\geq n$. 显然m也不必过大. 只需(6)式等号两边是相同次数的多项式即可.

如果$\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$, 即$\lambda$不是特征根, 则由(6)式可以看出, 只需取$m=n$, 即把$Q_m(x)$取为

$$Q_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n. \tag{7}$$

如果$\lambda^2+p\lambda+q=0$而$2\lambda+p\neq 0$, 即λ是单特征根, 则由(6)式可以看出, 只需取$m=n+1$. 此时$Q_m(x)$的常数项a_m在等式(6)中不出现, 故a_m可取任意的值. 为简单起见, 取$a_m=0$. 这时$Q_m(x)$为$xQ_n(x)$的形式, 其中$Q_n(x)$由(7)式给出.

如果$\lambda^2+p\lambda+q=0$, 且$2\lambda+p=0$, 即λ是二重特征根, 则由(6)式可以看出, 只需取$m=n+2$. 此时$Q_m(x)$中的a_m和a_{m-1} 在等式(6)中都不出现, 故可把a_m和a_{m-1}都取为零. 这时$Q_m(x)$为$x^2Q_n(x)$的形式, 其中$Q_n(x)$由(7)式给出.

综合以上讨论, 当λ不是特征根时, 方程有形如$y=Q_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$的特解, 其中$Q_n(x)$是由(7)式给出的与$f(x)=P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$中的$P_n(x)$同样次数的多项式; 当$\lambda$是单特征根时, 方程有形如$y=xQ_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$的特解; 当$\lambda$是二重特征根时, 方程有形如$y=x^2Q_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$的特解.

例6 求$y''-2y'-3y=3x+1$的一个特解.

解 方程的自由项为$P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$型, 其中$P_n(x)=3x+1, \lambda=0$. 对应的齐次方程的特征方程为$r^2-2r-3=0$. 显然$\lambda=0$不是特征根. 方程有形如$y^*=ax+b$的特解. 将其代入原方程得

$$-3ax-2a-3b=3x+1.$$

比较等号两边x同次幂的系数得$a=-1, b=\frac{1}{3}$, 故$y^*=-x+\frac{1}{3}$为方程的一个特解.

例7 求$y''-5y'+6y=x\mathrm{e}^{2x}$的通解.

解 方程的自由项为$P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$型, 其中$P_n(x)=x, \lambda=2$. 对应的齐次方程为

$$y''-5y'+6y=0.$$

特征方程为

$$r^2-5r+6=0.$$

特征根为2和3. 齐次方程通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}.$$

因$\lambda=2$为单根, 故非齐次方程有形如$y^*=x(ax+b)\mathrm{e}^{2x}$的特解. 将其代入原方程得

$$-2ax+2a-b=x.$$

比较等号两边x的同次幂系数得$a=-\frac{1}{2}, b=-1$. 从而

$$y^*=x\Big(-\frac{1}{2}x-1\Big)\mathrm{e}^{2x}.$$

非齐次方程通解为

$$y=\overline{y}+y^*=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{2}(x^2+2x)\mathrm{e}^{2x}.$$

2. $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l^{(1)}(x)\cos\omega x+P_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$, 其中$P_l^{(1)}(x)$和$P_m^{(2)}(x)$分别是$l$次和$m$次多项式, λ和ω是常数.

利用欧拉公式, 有

$$\begin{aligned}
f(x)&=\mathrm{e}^{\lambda x}\Big[P_l^{(1)}(x)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega x}}{2}+P_m^{(2)}(x)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega x}}{2\mathrm{i}}\Big]\\
&=\Big(\frac{P_l^{(1)}(x)}{2}+\frac{P_m^{(2)}(x)}{2\mathrm{i}}\Big)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\,\omega)x}+\Big(\frac{P_l^{(1)}(x)}{2}-\frac{P_m^{(2)}(x)}{2\mathrm{i}}\Big)\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\,\omega)x}\\
&=\frac{1}{2}(P_l^{(1)}(x)-\mathrm{i}\,P_m^{(2)}(x))\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\,\omega)x}+\frac{1}{2}(P_l^{(1)}(x)+\mathrm{i}\,P_m^{(2)}(x))\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\,\omega)x}\\
&=P_n(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\,\omega)x}+\overline{P}_n(x)\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\,\omega)x},
\end{aligned}$$

其中

$$P_n(x)=\frac{1}{2}(P_l^{(1)}(x)-\mathrm{i}\,P_m^{(2)}(x)) \text{ 和 } \overline{P}_n(x)=\frac{1}{2}(P_l^{(1)}(x)+\mathrm{i}\,P_m^{(2)}(x))$$

都是n次复系数多项式, 且它们的同次幂的系数互为共轭复数, 而$n=\max\{l,m\}$. 注意到前一段对自由项$f(x)=P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$的讨论, 完全适合于$P_n(x)$是复系数多项式而$\lambda$是复数的情况. 应用那里的结论可知, 方程

$$y''+py'+qy=P_n(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\,\omega)x}$$

有形如

$$y_1^*=x^kQ_n(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\,\omega)x}$$

的特解, 其中k依据$\lambda+\mathrm{i}\,\omega$是或不是特征根而取1或0, $Q_n(x)$是x的n次复系数多项式. 容易看出

$$y_2^*=\overline{y_1^*}=x^k\overline{Q}_n(x)\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\,\omega)x}$$

是方程

$$y''+py'+qy=\overline{P}_n(x)\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\,\omega)x}$$

的特解. 于是, 根据叠加原理, 方程

$$y''+py'+qy=f(x)$$

有形如

$$\begin{aligned}y^*&=y_1^*+y_2^*\\&=x^k[Q_n(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\,\omega)x}+\overline{Q}_n(x)\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\,\omega)x}]\\&=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}[Q_n(x)(\cos\omega x+\mathrm{i}\,\sin\omega x)+\overline{Q}_n(x)(\cos\omega x-\mathrm{i}\,\sin\omega x)]\end{aligned}$$

的特解. 因为上式括号内的两项是互为共轭的, 所以相加后只剩下实部. 因此

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}[R_n^{(1)}(x)\cos\omega x+R_n^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中$R_n^{(1)}(x)$和$R_n^{(2)}(x)$都是n次实系数多项式.

综合以上讨论, 当$\lambda+\mathrm{i}\,\omega$不是特征根时, 方程有形如

$$y^*=\mathrm{e}^{\lambda x}[R_n^{(1)}(x)\cos\omega x+R_n^{(2)}(x)\sin\omega x]$$

的特解; 当$\lambda+\mathrm{i}\,\omega$是特征根时, 方程有形如

$$y^*=x\mathrm{e}^{\lambda x}[R_n^{(1)}(x)\cos\omega x+R_n^{(2)}(x)\sin\omega x]$$

的特解.

例8 求$y'' + y = x\cos 2x$的一个特解.

解 方程的自由项为$\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l^{(1)}(x)\cos\omega x + P_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$型, 其中$\lambda = 0$, $\omega = 2$, $P_l^{(1)}(x) = x$, $P_m^{(2)}(x) = 0$. 对应的齐次方程的特征方程为$r^2 + 1 = 0$, 特征根为$\pm\mathrm{i}$. 因此对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

因$\lambda + \mathrm{i}\,\omega = 2\mathrm{i}$不是特征根, $n = \max\{l, m\} = \max\{1, 0\} = 1$, 故方程有形如

$$y^* = (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x$$

的特解. 代入方程得

$$(-3ax - 3b + 4c)\cos 2x - (3cx + 3d + 4a)\sin 2x = x\cos 2x.$$

比较两边$\cos 2x$和$\sin 2x$的系数得

$$\begin{cases} -3ax - 3b + 4c = x, \\ 3cx + 3d + 4a = 0. \end{cases}$$

再比较多项式的系数得

$$\begin{cases} -3a = 1, \\ -3b + 4c = 0, \\ -3c = 0, \\ -3d - 4a = 0. \end{cases}$$

由此解得$a = -\frac{1}{3}, b = 0, c = 0, d = \frac{4}{9}$. 于是

$$y^* = -\frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x.$$

方程的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x.$$

例9 写出方程$y'' - 4y' + 5y = \mathrm{e}^{2x}\sin x$一个特解的形式.

解 特征方程为$r^2 - 4r + 5 = 0$, 特征根为$r = 2 \pm \mathrm{i}$. $\lambda + \mathrm{i}\,\omega = 2 + \mathrm{i}$是特征根. 因此方程有形如

$$y^* = x\mathrm{e}^{2x}(a\cos x + b\sin x).$$

的特解.

以上的结果可推广到一般n阶常系数线性非齐次方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = f(x) \tag{8}$$

之上.

若$f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$, 则方程(8)有形如

$$y^*=x^kQ_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

的特解, 其中k是λ作为特征根的重数(当λ不是特征根时$k=0$).

若$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l^{(1)}(x)\cos\omega x+P_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$, 则方程(8)有形如

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}[R_s^{(1)}(x)\cos\omega x+R_s^{(2)}(x)\sin\omega x]$$

的特解, 其中$s=\max\{l,m\}$, k是$\lambda+\mathrm{i}\omega$作为特征根的重数.

例10 求方程$y'''+3y''+3y'+y=\mathrm{e}^{-x}(x-5)$的通解.

解 特征方程为

$$r^3+3r^2+3r+1=0.$$

特征根为-1, 这是三重根. 因此对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}=(C_1+C_2x+C_3x^2)\mathrm{e}^{-x}.$$

设

$$y^*=x^3(ax+b)\mathrm{e}^{-x}$$

为所给方程的一个特解. 代入方程, 比较系数得$a=\dfrac{1}{24},b=-\dfrac{5}{6}$. 于是

$$y^*=x^3\Big(\frac{1}{24}x-\frac{5}{6}\Big)\mathrm{e}^{-x}.$$

所求的通解为

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)\mathrm{e}^{-x}+x^3\Big(\frac{1}{24}x-\frac{5}{6}\Big)\mathrm{e}^{-x}.$$

例11 写出方程$y^{(4)}+y''=3x^2+\sin x$一个特解的形式.

解 考虑方程

$$y^{(4)}+y''=3x^2 \tag{9}$$

与

$$y^{(4)}+y''=\sin x. \tag{10}$$

对应的齐次方程的特征方程为$r^4+r^2=0$, 特征根为0(二重),$\pm i$. 因此, 方程(9)具有形式为$y_1^*=x^2(Ax^2+Bx+C)$的特解, 方程(10)具有形式为$y_2^*=x(D\cos x+E\sin x)$的特解. 由叠加原理, 所给方程具有形式为

$$y^*=x^2(Ax^2+Bx+C)+x(D\cos x+E\sin x)$$

的特解.

四 欧拉方程

形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x) \tag{11}$$

的线性方程称为**欧拉方程**, 其中$p_i(i=1,2,...,n)$为常数,. 欧拉方程可通过变量代换化为常系数线性微分方程.

对于$x>0$, 作变换$x=\mathrm{e}^t$, 即$t=\ln x$, 将自变量x换成t(对于$x<0$作变换$x=-\mathrm{e}^t$). 利用复合函数求导法则, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\\
&\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{x^2}\Big(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big),\\
&\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\frac{1}{x^3}\Big(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big),\\
&\cdots\cdots.
\end{aligned}$$

把上述结果代入方程, 方程化为常系数线性方程, 求出它的解$y=y(t)$. 代回原变量得到原方程的解.

如果用D表示求导运算$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 称为**导算子**, D^2表示$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$, $\cdots$, 则前面的结果等价于

$$\begin{aligned}
&xy'=Dy,\\
&x^2y''=(D^2-D)y=D(D-1)y,\\
&x^3y'''=(D^3-3D^2+2D)y=D(D-1)(D-2)y,\\
&\cdots\cdots.
\end{aligned}$$

一般地, 可证明有

$$x^ky^{(k)}=D(D-1)(D-2)\cdots(D-k+1)y.$$

在实际求解欧拉方程时, 可直接将此代入方程(11), 将其化为以t为自变量的常系数线性微分方程.

例13 求方程$x^2y''+xy'-4y=x^3$的通解, 其中$x>0$.

解 这是欧拉方程. 令$x=\mathrm{e}^t$, 即$t=\ln x$, 方程化为

$$[(D(D-1)+D-4]y=\mathrm{e}^{3t},$$

即

$$(D^2-4)y=\mathrm{e}^{3t}. \tag{12}$$

现解此方程. 对应的齐次方程的特征方程为$r^2-4=0$, 特征根为±2. 齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2\mathrm{e}^{-2t}.$$

设方程(12)的特解为$y^* = a\mathrm{e}^{3t}$, 代入方程求得$a = \frac{1}{5}$. 于是方程的通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{3t}.$$

代回原变量得所给方程的通解为

$$y = C_1x^2 + C_2x^{-2} + \frac{1}{5}x^3.$$

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $y''-4y'=0$;　　(2) $y''-2y'+y=0$;

(3) $y''+y=0$;　　(4) $y''+7y'+10y=0$;

(5) $y''-4y'+13y=0$;　　(6) $9y''+6y'+y=0$;

(7) $y''-6y'+25y=0$;　　(8) $y'''+y''-y'-y=0$.

2. 求下列初值问题的解:

(1) $\begin{cases} y''-5y'+4y=0, \\ y(0)=5,\ y'(0)=8; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} y''-4y'+4y=0, \\ y(0)=1,\ y'(0)=1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y''+2y'+10y=0, \\ y(0)=1,\ y'(0)=2; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} y''+\pi^2 y=0, \\ y(0)=0,\ y'(0)=\pi. \end{cases}$

3. 一单位质量质点在数轴上运动, 开始时质点在原点处, 且速度为v_0,在运动过程中, 它受到一外力作用,该力的大小与质点到原点的距离成正比(比例系数为$k_1>0$), 而方向与初速度一致,又介质阻力与速度成正比(比例系数为$k_2>0$), 求该质点运动的路程函数.

4. 写出下列方程的一个特解的形式:

(1) $y''-3y=3x^2+1$;　　(2) $y''-3y'+2y=3\mathrm{e}^{2x}$;

(3) $y''-3y'+2y=x^2\mathrm{e}^x$;　　(4) $y''-6y'+9y=xe^{3x}$;

(5) $y''-2y'+10y=e^{2x}\sin 3x$;　　(6) $y''-2y'+10y=xe^x\cos x$.

5. 求下列方程的通解:

(1) $y''-6y'+8y=3x+1$;　　(2) $y''-8y'+7y=14$;

(3) $2y''+y'-y=2\mathrm{e}^x$;　　(4) $y''-2y'+y=x\mathrm{e}^x$;

(5) $y''+y=3\cos 2x$;　　(6) $y''-2y'+5y=\mathrm{e}^x\sin 2x$;

(7) $y''-y=2x\sin x$;　　(8) $y''-2y'+2y=x\mathrm{e}^x\cos x$;

(9) $y''+2y'+y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$;　　(10) $y''-3y'=x+\cos x$.

6. 求下列初值问题的解:

(1) $\begin{cases} y''-10y'+9y=\mathrm{e}^{2x}, \\ y(0)=\dfrac{6}{7},\ y'(0)=\dfrac{33}{7}; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} y''-4y'=5, \\ y(0)=1,\ y'(0)=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y''+4y=\sin x\cos x, \\ y(0)=0,\ y'(0)=0; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} y'''+2y''+y'+2\mathrm{e}^{-2x}=0, \\ y(0)=2,\ y'(0)=1,\ y''(0)=1. \end{cases}$

7. 长为6米的链条自桌上无摩擦地向下滑动, 假设在运动开始时, 链条自桌上垂下的部分已经有1米, 问需多长时间链条全部滑出桌面.

8. 已知函数$y=f(x)$所确定的曲线与x轴相切于原点, 且满足$f(x)=2+\sin x-f''(x)$, 试

以下为第六章的总复习题

1. 填空题:

(1) 设一质量为m的物体, 在空中由静止开始下落, 如果空气阻力为$R=k\sqrt{v}$ (k为常数,v为物体运动的速度), 该物体下落的距离s所满足的微分方程为________ ,初始条件为________ ;

(2) 微分方程$y''-2y'+y=6x\mathrm{e}^x$有形式为________的特解;

(3) 若$y_1=x^2, y_2=x^2+\mathrm{e}^{2x}, y_3=x^2+\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{5x}$都是微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的解(其中$f(x)\neq 0, p(x), q(x), f(x)$是连续函数),则此微分方程的通解为$y=$ ________ ;

2. 选择题:

(1) 函数$y=C_1\mathrm{e}^{2x+C_2}$(C_1, C_2为任意常数)是微分方程$y''-y'-2y=0$的(   ).

(A) 通解. (B) 特解. (C) 不是解. (D) 是解,但不是通解,也不是特解.

(2) 微分方程$y''-2y'=2\sin^2 2x$,用待定系数法确定的特解形式是$y^*=$(   ).

(A) $A+B\cos 4x+C\sin 4x$. (B) $A+Bx\cos 4x+Cx\sin 4x$.

(C) $Ax+B\cos 4x+C\sin 4x$. (D) $Ax+Bx\cos 4x+Cx\sin 4x$.

(3) 微分方程$(2x-y)\,\mathrm{d}y=(5x+4y)\,\mathrm{d}x$是(   ).

(A) 一阶线性齐次方程. (B) 一阶线性非齐次方程.

(C) 齐次方程. (D) 可分离变量方程.

3. 求下列微分方程的通解:

(1) $xy'+y=2\sqrt{xy}$; (2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2(\ln y-x)}$;

(3) $xy'\ln x+y=ax(\ln x+1)$; (4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy-x^3y^3=0$;

(5) $yy''-y'^2-1=0$; (6) $y'''+y''-2y'=x(\mathrm{e}^x+4)$;

(7) $x^2y''-4xy'+6y=x$; (8) $y'+x=\sqrt{x^2+y}$.

4. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $\begin{cases} y^3\,\mathrm{d}x+2(x^2-xy^2)\,\mathrm{d}y=0, \\ y(1)=1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y''-ay'^2=0, \\ y(0)=0,\ y'(0)=-1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2y''-\sin 2y=0, \\ y(0)=\frac{\pi}{2},\ y'(0)=-1; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} y''+2y'+y=\cos x, \\ y(0)=0,\ y'(0)=\frac{3}{2}. \end{cases}$

5. 设连续函数$\varphi(x)$满足$\varphi(x)\cos x+2\displaystyle\int_0^x\varphi(t)\sin t\,\mathrm{d}t=x+1$, 求$\varphi(x)$.

6. 设过点$(0,0)$和$(1,1)$的连续曲线$y=f(x)(f(x)\geq 0)$与x轴上由原点到点x的线段及过点$(x,0)$且垂直于x轴的直线围成一个曲边三角形, 其面积与$f(x)$的$n+1(n\in\mathbf{N}^+)$次幂成正比, 求该曲线的方程.

7. 在某池塘内养鱼, 该池塘内最多能养1000尾, 设在t时刻该池塘内鱼数y是时间t的函数$y=y(t)$, 其变化率与鱼数y及$1000-y$ 的乘积成正比, 比例常数为$k>0$. 已知在池塘内放养

鱼100尾, 3个月后池塘内有鱼250尾, 求放养t个月后池塘内的鱼数$y(t)$, 放养6个月后池塘内有多少鱼?

13. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3, & 0 \le x \le 1, \\ -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x + \frac{1}{3}, & 1 < x \le 2, \\ x - 1, & 2 < x < +\infty. \end{cases}$

14. 提示: 利用对任意实数λ都有$\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2 \,\mathrm{d}x \ge 0$, 或讨论函数$F(x) = \left(\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - \int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}t$.

15. (1) $-\frac{1}{2}$. (2) 提示: 利用14题结论或方法.

16. 提示: 对$F(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$应用罗尔定理.

17. (1) $-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$.

18. (1) $f(x) = f'(0)x + \dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$, 其中$\xi$在0与$x$之间.

20. 提示: 考虑函数$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 并注意到$\int_0^\pi F(x)\sin x\,\mathrm{d}x = 0$.

22. (1) $V_1 = \frac{4\pi}{5}(32 - a^5), V_2 = \pi a^4$; (2) 当$a = 1$时, $V_1 + V_2$取得最大值, 最大值为$\frac{129}{5}\pi$.

23. 提示: 考虑函数$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}(x-a)[f(a) + f(x)]$.

24. 提示: 考虑函数$F(x) = x|f(0)| - \int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t - x\int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t$.

以下为第六章习题的答案

习题6–1

1. (1) 2; (2) 1; (3) 2; (4) 3.

2. (1) 是解; (2) 不是解; (3) 是通解.

3. $y = \frac{1}{x}$.

4. $y = \ln x + 1$.

5. (1) $C = -25$; (2) $C_1 = 0, C_2 = 1$.

习题6–2

1. (1) $y = \ln(\mathrm{e}^x + C)$; (2) $y = C(1+x)\mathrm{e}^{-x}$; (3) $y = C(a+x)(1-ay)$;
   (4) $\tan y = C(\mathrm{e}^x - 1)^3$; (5) $\mathrm{e}^{y-x} = C(1+y)(x-1)$; (6) $(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^y-1) = C$.

2. (1) $3y^2 - 1 = 2\mathrm{e}^{3x^2}$; (2) $y = \tan\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$; (3) $\frac{1}{y} = \ln|x^2 - 1| + 1$;
   (4) $y = \mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + 1$.

3. $y = x^2 - 5$.

4. (1) $\dfrac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C$; (2) $\sin\frac{y}{x} = Cx^2$; (3) $x - \sqrt{xy} = C$, (4) $\frac{y}{x} = \mathrm{e}^{Cx}$.

5. (1) $4y + 5 = (2x-3)[\ln|2x-3| + C]$; (2) $y - x - 3 = C(y+x-1)^3$;
   (3) $(y-x-5)^5(x+2y+2) = C$; (4) $\arctan\dfrac{2y}{x-1} + \ln[4y^2 + (x-1)^2] = C$.

6. (1) $y = \mathrm{e}^{-x^2}(\frac{x^2}{2} + C)$; (2) $y = Cx^3 - x^2$; (3) $y = (1+x^2)(x+C)$;
   (4) $x = C\sin t - 5$; (5) $y = x + (C-x)\dfrac{1}{\ln x}$; (6) $y = (x+C)\mathrm{e}^{-\sin x}$.

7. (1) $y = \frac{x}{\cos x}$; (2) $y = \frac{1}{x}(\pi - 1 - \cos x)$;

(3) $y=x^2(1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}-1})$;　(4) $y=2\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}x-\mathrm{e}^x+\frac{1}{4}$.

8. (1) $xy(C-\ln|x|)=1$;　(2) $\sqrt{y}=C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}+x-2$;　(3) $y^{\frac{1}{3}}(Cx^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{7}x^3)=1$.

9. $x^2+y^2=C$.

10. $xy=6$.

习题6–3

1. (1) $y=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$;　(2) $y=x\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}^x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$;

(3) $y=C_1x^2+C_2$;　(4) $y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$;　(5) $\mathrm{e}^y=x^2+C_1x+C_2$;

(6) $y^2=C_1-(x+C_2)^2$;　(7) $C_1y^2-1=(C_1x+C_2)^2$;　(8) $y=\arcsin(C_2\mathrm{e}^x)+C_1$;

(9) $y=\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2+C_1x\ln|x|+C_2x+C_3$;　(10) $y=\frac{1}{C_1}\mathrm{e}^{1+C_1x}+C_2$.

2. (1) $y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+1$;　(2) $y=3x+x^3+1$;　(3) $y=\frac{1}{x}+1$;　(4) $y=\frac{x^4}{48}$.

3. $y=C_1\ln x+C_2$.

4. $y=\ln\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1+\frac{1}{2}\ln 2$, $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$.

习题6–4

1. (1) 无关;　(2) 无关;　(3) 相关;　(4) 无关.

2. $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{x^2}$.

5. $y=C_1x^2+C_2\mathrm{e}^x+3$.

习题6–5

1. (1) $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{4x}$;　(2) $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$;　(3) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$;

(4) $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{-5x}$;　(5) $y=\mathrm{e}^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$;　(6) $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$;

(7) $y=\mathrm{e}^{3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)$;　(8) $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+C_3\mathrm{e}^x$.

2. (1) $y=4\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{4x}$;　(2) $y=(1-x)\mathrm{e}^{2x}$;　(3) $y=\mathrm{e}^{-x}(\cos 3x+\sin 3x)$;　(4) $y=\sin\pi x$.

3. $x=\dfrac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}}\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1})t}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1})t}\right]$.

4. (1) $y*=Ax^2+Bx+C$;　(2) $y*=Ax\mathrm{e}^{2x}$;　(3) $y*=x(Ax^2+Bx+C)\mathrm{e}^x$;

(4) $y*=x^2(Ax+B)\mathrm{e}^{3x}$;　(5) $y*=\mathrm{e}^{2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$;

(6) $y*=\mathrm{e}^x[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x]$.

5. (1) $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{4x}+\frac{3}{8}x+\frac{13}{32}$;　(2) $y=C_1\mathrm{e}^{7x}+C_2\mathrm{e}^x+2$;

(3) $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^x$;　(4) $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+\frac{1}{6}x^3\mathrm{e}^x$;

(5) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos 2x$;　(6) $y=\mathrm{e}^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{4}x\mathrm{e}^x\cos 2x$;

(7) $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}-x\sin x-\cos x$;　(8) $y=\mathrm{e}^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{4}x\mathrm{e}^x(\cos x+x\sin x)$;

(9) $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^x$;　(10) $y=C_2+C_1e^{3x}-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{9}x-\frac{1}{10}(\cos x+3\sin x)$.

6. (1) $y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{9x}+\mathrm{e}^x)-\frac{1}{7}\mathrm{e}^{2x}$;　(2) $y=\frac{11}{16}+\frac{5}{16}\mathrm{e}^{4x}-\frac{5}{4}x$;

(3) $y=\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{8}x\cos 2x$;　　(4) $y=4-3\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}$.

7. $t=\ln(6+\sqrt{35})\sqrt{\frac{6}{g}}$ (秒).

8. $f(x)=\frac{1}{2}(\sin x-x\cos x)+2(1-\cos x)$.

9. $\varphi(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+\mathrm{e}^{x})$.

10. (1) $y=C_1x+\frac{C_2}{x}$;　　(2) $y=C_1x+C_2x\ln x+C_3x^{-2}$;

(3) $y=C_1x^2+C_2x^{-2}+\frac{1}{5}x^3$;　　(4) $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x+x+\frac{1}{6}x^2\ln^3x$.

习题6–6

1. (1) $2x+1$;　　(2)$2\cdot 3^x$;　　(3)$2\cos a(x+\frac{1}{2})\sin\frac{1}{2}a$.

2. (1) 3阶;　　(2) 6阶.

3. (1) $y_x=C\cdot 5^x+8$;　　(2) $y_x=C\cdot 3^x-1$;

(3) $y_x=C(-2)^x+\frac{5}{3}x^2-\frac{10}{9}x-\frac{5}{27}$;　　(4) $y_x=\frac{1}{6}x3^x+C3^x$.

4. (1) $y_x=5\cdot 3^x$;　　(2) $y_x=3\left(-\frac{5}{2}\right)^x$;

(3) $\overline{y}_x=-\frac{36}{125}+\frac{1}{25}x+\frac{2}{5}x^2+\frac{161}{125}(-4)^x$.

5. $P_t=\frac{1}{5}+\left(P_0-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)^t$.

6. $P_t=\frac{2}{3}+\left(P_0-\frac{2}{3}\right)(-2)^t$.

复习题六

1. (1) $s''+\frac{k}{m}\sqrt{s'}-g=0,\ s(0)=0,\ s'(0)=0$;　　(2) $x^2(Ax+B)\mathrm{e}^x$;　　(3) $C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{5x}+x^2$.

2. (1) D;　　(2) C;　　(3) C.

3. (1) $x-\sqrt{xy}=C$;　　(2) $x=Cy^{-2}+\ln y-\frac{1}{2}$;　　(3) $y=ax+\frac{C}{\ln x}$;

(4) $y^{-2}=C\mathrm{e}^{x^2}+x^2+1$;　　(5) $y=\frac{1}{2C_2}\left(C_2^2\mathrm{e}^{\frac{x}{c_1}}+C_1^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{c_1}}\right)$;

(6) $y=C_1+C_2\mathrm{e}^x+C_3\mathrm{e}^{-2x}+\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{4}{9}x\right)\mathrm{e}^x-x^2-x$;;　　(7) $y=C_1x^2+C_2x^3+\frac{1}{2}x$;

(8) $\sqrt{(x^2+y)^3}=x^3+\frac{3}{2}xy+C$.

4. (1) $x(1+2\ln y)-y^2=0$;　　(2) $y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)$;　　(3) $y=2\arctan\mathrm{e}^x$;

(4) $y=x\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\sin x$.

5. $\varphi(x)=\cos x+\sin x$.

6. $y^n=x$.

7. $y(t)=\frac{(1000\cdot 3^{\frac{t}{3}})}{9+3^{\frac{t}{3}}}$(尾); $y(6)=500$(尾).

参 考 文 献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析 上册. 北京: 高等教育出版社, 2007.

[2] 江泽坚. 数学分析 上册. 北京: 人民教育出版社, 1978.

[3] 同济大学数学系. 高等数学 上册. 北京: 高等教育出版社, 2007.

[4] 西北工业大学高等数学教材编写组. 高等数学 上册 下册. 北京: 科学出版社, 2007.

[5] 谢盛刚, 李娟, 陈秋桂. 微积分 上册. 北京: 科学出版社, 2007.

[6] 蒋兴国, 吴延东, 高等数学(经济类). 北京: 机械工业出版社, 2007.

[7] Marvin L. Bittinger著. 微积分及其应用. 杨奇, 毛云英译. 北京: 机械工业出版社, 2006.