

学院_____专业/大类_____ 班 年级_____学号_____ 姓名_____ 共 4 页 第 1 页 (A 卷)

一、填空题 (共 15 分, 每小题 3 分)

1. 函数 $y = \sin x$ 的二阶微分 $d^2 y =$ _____.
2. 函数 $y = xe^{2x}$ 的下凸区间为_____.
3. 曲线 $y = (2+x)e^{\frac{1}{x}}$ 的垂直渐近线方程为_____, 斜渐近线方程为_____.
4. 不定积分 $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx =$ _____.
5. 若 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义, $f(1) = 0$, 且 $f'(1) = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{\tan x \cdot \ln(1+x)} =$ _____.

二、选择题 (共 15 分, 每小题 3 分)

1. 已知函数 $f(x) = |x-2| + \frac{\sin x}{x} \cdot \ln|x-1|$, 则 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上().
 (A) $x=0$ 是可去间断点, $x=1$ 是无穷间断点 (B) $x=0$ 和 $x=2$ 是可去间断点
 (C) $x=0$ 是可去间断点, $x=2$ 是跳跃间断点 (D) $x=0$ 和 $x=1$ 无穷间断点
2. 区间 $(1, +\infty)$ 上, 下列函数中非一致连续的是().
 (A) $y = \sqrt{x}$ (B) $y = x^2$ (C) $y = \frac{1}{x}$ (D) $y = x$
3. 设函数 $f(u)$ 可导, 函数 $y = f(x^3)$ 当自变量 x 在 $x=1$ 处取增量 $\Delta x = -0.1$ 时, 相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.3, 则 $f'(1) =$ ().
 (A) -1 (B) 0.1 (C) 1 (D) 0.5
4. 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = \sin x - x \cdot e^{-\frac{x^2}{6}}$ 是 x 的 n 阶无穷小, 则 n 的值为().
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5

5. 已知函数 $f(x)$ 对一切实数 x 满足 $(1-x)f''(x) + 3x(f'(x))^2 = 1 - e^x$, $f'(0) = 0$, 则().
 (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值 (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
 (C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点 (D) 以上都不对

三、计算题 (共 24 分, 每小题 8 分)

1. 已知函数 $y = y(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x+t(t+1)=0, \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$ 确定, 求曲线 $y = y(x)$ 在 $t=0$ 对应点处的切线方程和法线方程.

2. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a})$ ($a > 0$).

3. 求不定积分 $\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx$.

四、证明和计算题 (共 46 分, 第 1 小题 14 分, 第 2-5 每小题 8 分)

1. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 2]$ 上连续, 在开区间 $(0, 2)$ 内可导, 且满足

$$f(0) = f(2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{(x-1)^2} = 5.$$

证明: (1) $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值大于 2;

(2) 存在 $\eta \in (1, 2)$, 使得 $f(\eta) = \eta$;

(3) 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{2\xi - f(\xi)}{\xi}$.

2. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ (A 为有限数), 证明 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

3. 若 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上三阶导函数连续, 且 $f(1) = 1, f(-1) = 0, f'(0) = 0$, 证明存在 $\xi \in (-1, 1)$, 使得 $f'''(\xi) = 3$.

4. 利用闭区间套定理证明实数集 \mathbf{R} 是不可列集.

5. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内二阶可导, 且 $f''(x) \neq 0$.

(1) 证明: 对任何非零实数 x , 存在唯一的 $\theta(x)(0 < \theta(x) < 1)$, 使得

$$f(x) = f(0) + f'(x \cdot \theta(x))x;$$

(2) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x)$.