工科数学分析A

第三章　函数与极限

习题课

（对应于《高数2A》第一章

习题课（spoc有视频讲解））

天津大学数学学院

本 章 知 识 结 构

函数与极限

研究对象：函数

- 定义
- 特性：单调性、有界性、奇偶性、周期性
- 反函数、复合函数、初等函数
- 函数的连续性与间断点
- 闭区间连续函数的性质

基于极限工具定义

研究工具：极限

- 数列极限定义、函数极限定义
- 极限存在准则： 迫敛准则、单调有界准则
- 无穷小、无穷大
- 求极限的方法
  - ✓ 无穷小量乘以有界变量
  - ✓ 极限四则运算法则
  - ✓ 复合函数极限运算法则
  - ✓ 两个重要极限
  - ✓ 等价无穷小代换
  - ✓ 利用初等函数的连续性进行运算

基本要求

1. 正确理解极限的概念, 会叙述各种极限的 ε-N, ε-δ 定义. (对简单的函数, 要求在给定ε 后能找出N或δ).

2. 熟练掌握极限的性质和四则运算法则.

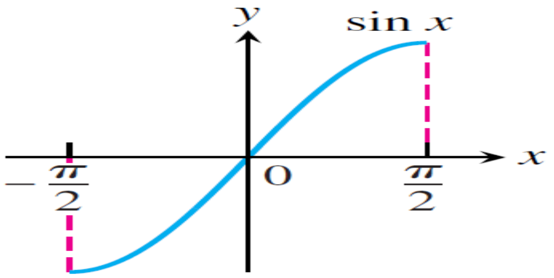
3. 掌握极限的各种求法.

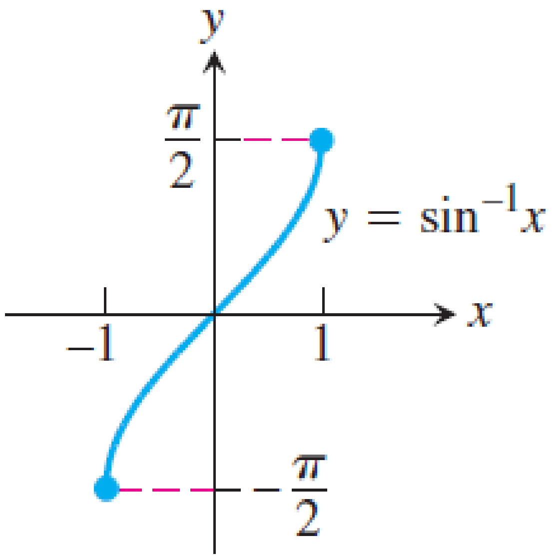
4. 了解无穷小,无穷大概念; 掌握无穷小的比较; 熟悉常见的等价无穷小.

5. 正确理解连续的概念; 掌握间断点的分类.

6. 掌握闭区间上连续函数的性质 （有界性定理、最大值最小值定理、介值定理、零点存在定理）.

一、反三角函数

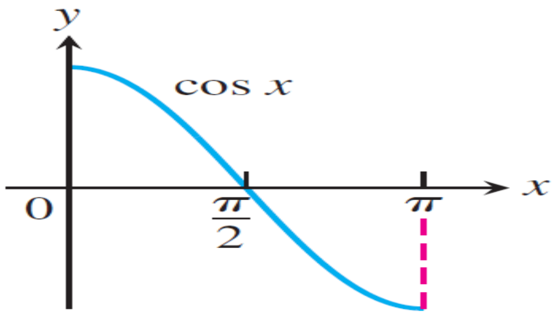


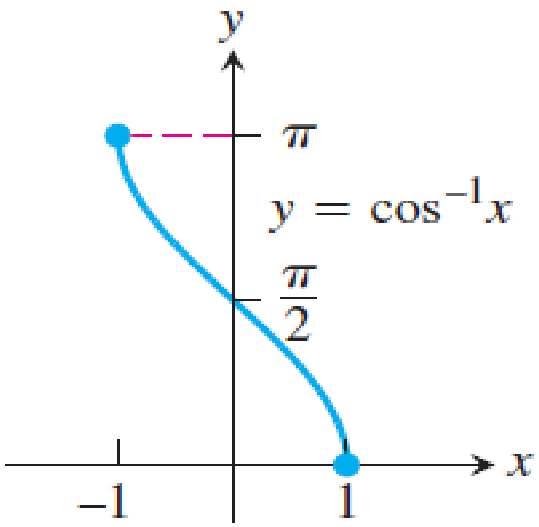


$$y = \arcsin x$$

定义域: $[-1, 1]$

值域: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

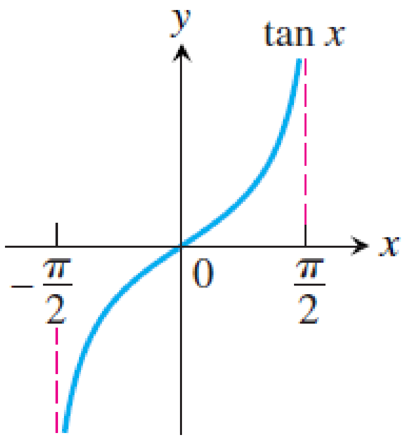


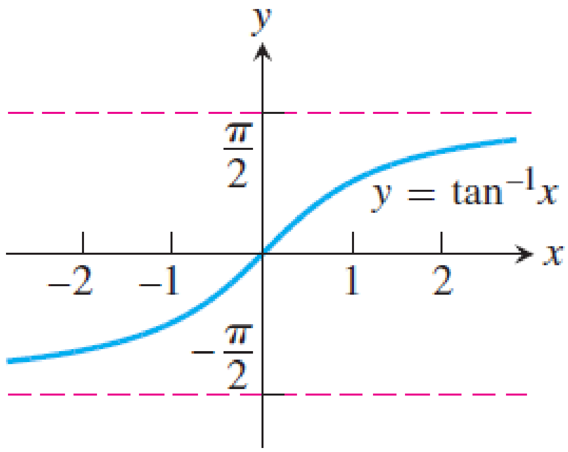


$$y = \arccos x$$

定义域: $[-1, 1]$

值域: $[0, \pi]$

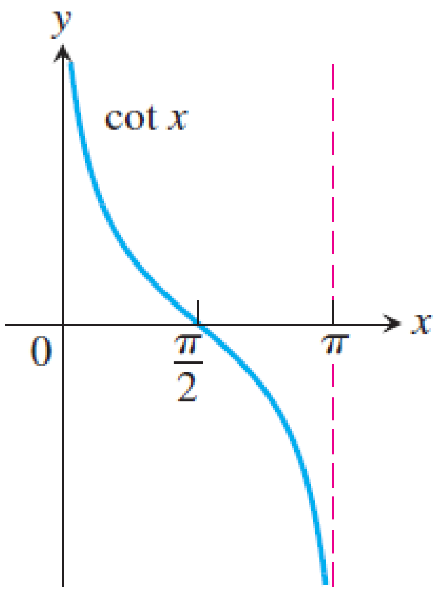


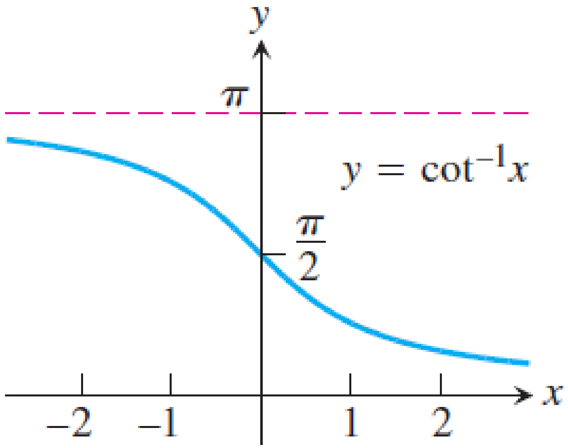


$$y = \arctan x$$

定义域: $(-\infty, +\infty)$

值域: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$





$$y = \operatorname{arc}\cot x$$

定义域: $(-\infty, +\infty)$

值域: $(0, \pi)$

常用三角函数公式

$$
(1)\begin{cases}
\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y\\
\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y\\
\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y\\
\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y
\end{cases}
$$

$$
(2)\begin{cases}
2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)\\
2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)\\
2\sin x\cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y)
\end{cases}
$$

$$(3)\begin{cases} \sin 2x = 2\sin x\cos x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} \sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x) \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x) \end{cases}$$

$$(5)\begin{cases} \sin n\pi = 0 \\ \cos n\pi = (-1)^n \\ \sin(n\pi+\dfrac{\pi}{2}) = (-1)^n \end{cases}$$

二、常用不等式

绝对值： $\forall x \in \mathrm{R}, |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

1. $\forall x \in \mathrm{R} \Rightarrow |x| \geq 0$.

2. $\forall x \in \mathrm{R} \Rightarrow -|x| \leq x \leq |x|$.

3. $|x| \leq h\,(h > 0) \Leftrightarrow -h \leq x \leq h$.

4. $|x| \geq h\,(h > 0) \Leftrightarrow x \geq h$ 或 $x \leq -h$.

5. $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \big||x|-|y|\big| \le |x \pm y| \le |x|+|y|.$

(三角不等式)

更一般地, 设 $a_i \in \mathbb{R}\ (1 \le i \le n)$, 有

$$\Rightarrow |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| .$$

6. (平均值不等式) 设 $a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

(几何平均值) (算术平均值)

(调和平均值)

三、判定极限存在的准则

1. 迫敛准则（夹逼准则，三明治定理）
2. 单调有界原理

两个重要极限

$$\boxed{(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

$$\boxed{(2)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}}$$

四、常见的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时,

(1) $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$

(2) $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

(3) $a^x - 1 \sim x\ln a \quad (a>0,\ a\neq 1)$

(4) $\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}$

一般, 若 $\alpha\neq 0$, $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

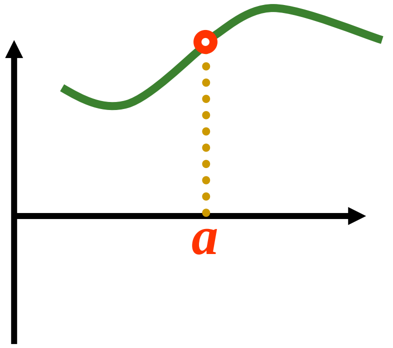
(5) $x^2 + x \sim x$, $x - \sin x = o(x)$

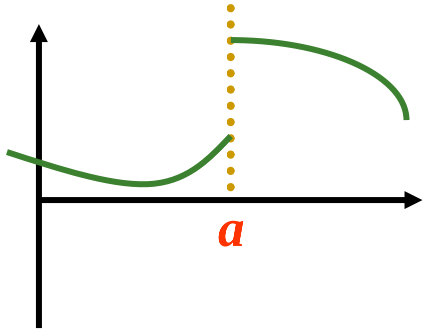
五、函数的连续性

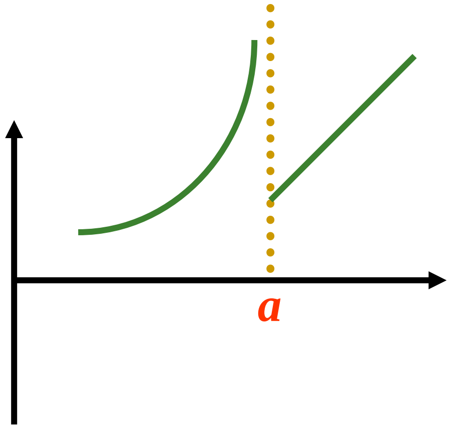
若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续.

1. 间断点

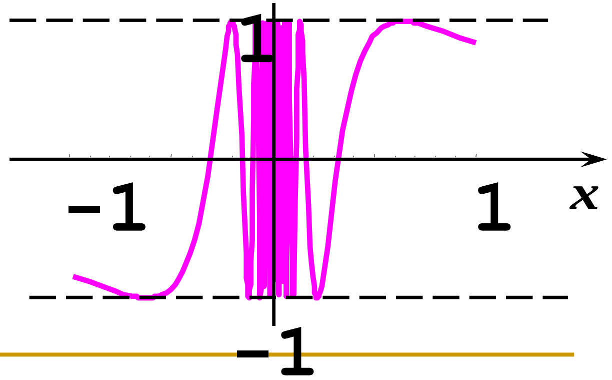
- 第一类
  - 可去型： 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在.
  - 跳跃型： $f(a-0), f(a+0)$都存在但不相等.
- 第二类：非第一类（含无穷型、振荡型）







$y=\sin\dfrac{1}{x}\,(x=0)$



2.连续函数的运算性质

(1)连续函数的和、差、积、商是连续的.

(2)连续函数的复合函数是连续的.

若 $u=\varphi(x)$在x_0连续, 且$f(u)$在$u_0=\varphi(x_0)$处连续,

则$y=f[\varphi(x)]$在x_0处连续.

(3)函数$y=f(x)$在区间I内严格单调且连续, 则它的反函数

$y=f^{-1}(x)$在相应区间$f(I)$上严格单调且连续.

3.初等函数的连续性

(1)一切基本初等函数在其定义域内是连续的.

(2)一切初等函数在其定义区间内是连续的.

4. 闭区间上连续函数的性质

定理1 (最大值和最小值定理) 闭区间上连续的函数在该区间上一定取得最大值和最小值.

定理2 (有界性定理) 闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

定理3 (零点存在定理)

设$f(x) \in C[a,b]$且$f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$, 使$f(\xi) = 0$.

定理4 (介值定理)

设$f(x) \in C[a,b]$, 且$f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$,

则对 A 与 B 之间的任一数 $C \Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$, 使$f(\xi) = C$.

六、极限求法小结

(1) 利用函数连续性求极限——代入法.

(2) 用恒等变形消去零因子法求极限.

(3) 用同除一个函数的方法求 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限（抓大头）.

(4) 利用两个重要极限求极限.

(5) 利用无穷小性质求极限.

(6) 利用等价无穷小代换求极限.

(7) 利用极限存在的两个准则证明极限存在并求极限.

(8) 从左、右极限求分段函数在分界点处的极限.

* (9) 用洛必达法则求未定式的极限（微分中值定理之后）.

一、求极限

例1 利用极限的基本性质和运算法则

$$(1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+\cdots+x^n-n}{x-1}$$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\left[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots x+1)\right]$$

$$=1+2+3+\cdots+n$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$(2)\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\dots+\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}\right]$$

$\boxed{\text{裂项}}$

解 原式 $=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=1$

$$(3)\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

解 $1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2},$

原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\dots\cdot\frac{(n-2)\cdot n}{(n-1)\cdot(n-1)}\cdot\frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$

$$\text{(4)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right]$$

$\boxed{\text{含参量}}$

解 $$\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)=(n-1)x+\frac{n(n-1)a}{2n}$$

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\left(x+\frac{a}{2}\right)=x+\frac{a}{2}$$

$$\text{(5)}\ \lim_{n\to\infty}(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^{2^2}\right)\cdots\left(1+x^{2^n}\right),\text{其中}\ |x|<1$$

解 $$(1-x)(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^{2^2}\right)\cdots\left(1+x^{2^n}\right)=1-x^{2^{n+1}}$$

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}$$

例2 利用适当的函数变换求极限

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$$

解 令 $t=\sqrt[6]{1+x}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}=\frac{3}{2}$$

法二 利用等价无穷小代换

$$x\to 0,\quad (1+x)^{\alpha}-1\sim \alpha x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{3}x}=\frac{3}{2}$$

有理化

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left[\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-x}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-\left(x^2-x\right)}{x-\sqrt{x^2-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2-x}}$ （分子分母同除以 x）

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2}$$

$$(4)\ \lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\quad (a>0)$$

$\boxed{\text{有理化}}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}\cdot\sqrt{x-a}}=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2a}}\lim_{x\to a^+}\left[\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)\sqrt{x-a}}+1\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2a}}\lim_{x\to a^+}\left[\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+1\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$(5)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(1+2x)^{10}(1+3x)^{20}}{(1+6x^2)^{15}}=\frac{2^{10}\cdot 3^{20}}{6^{15}}=\left(\frac{3}{2}\right)^5$$

有理式，分子分母趋于无穷(抓大头)

$$(6)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x-2e^{-x}}{2e^x+3e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-2e^{-2x}}{2+3e^{-2x}}=\frac{3}{2}$$

$$(7)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x^2-2x}{\cos^2 x+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}\sin x^2-2}{\frac{1}{x}\cos^2 x+1}=-2$$

注 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x^2=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cos^2 x=0$ (无穷小与有界函数的乘积为无穷小)

$$\textbf{(8)}\ \lim_{x\to+\infty}\arcsin\left(x\sqrt{x^2+1}-x^2\right)$$

解 $$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x^2+1}-x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2},$$

$$\text{原式}=\arcsin\left[\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x^2+1}-x^2\right)\right]=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$$

例3 利用两个重要极限

$$\text{(1)} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{x+C} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{4}\cdot\frac{4(x+C)}{x-2}} = e^4$$

$$\text{(2)} \lim_{x\to 0}\left(\sec^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\tan^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sec^2 x &= \tan^2 x + 1\\ \csc^2 x &= \cot^2 x + 1\end{aligned}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\tan^2 x\right)^{\frac{1}{\tan^2 x}\cdot\frac{\tan^2 x}{x^2}} = e$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{2n\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}}=e^4$$

$$\textbf{(4)}\ \lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n},\qquad x\neq 0$$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot 2\sin\frac{x}{2^n}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot 2\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^2\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\frac{\sin x}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$$

例4 利用极限存在的准则

$$\text{(1)}\ \lim_{n\to\infty}\left(a^n+b^n+c^n\right)^{\frac{1}{n}},\quad \text{其中} a>b>c>0.$$

$\boxed{\text{迫敛准则}}$

解 $a<\left(a^n+b^n+c^n\right)^{\frac{1}{n}}<\sqrt[n]{3}a,$

$\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=1$，由迫敛准则，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n+b^n+c^n\right)^{\frac{1}{n}}=a=\max\{a,b,c\}.$

(2) 设 $u_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

解 令 $v_n=\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$，显然 $u_n<v_n$，于是 $u_n\cdot u_n<v_n\cdot u_n=\dfrac{1}{2n+1}$，

$\Rightarrow\ 0<u_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$，由迫敛准则，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0.$

$$(3)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$$

迫敛准则

解 由于 $\sqrt[n]{n}>1$, 记 $h_n=\sqrt[n]{n}-1$, $\sqrt[n]{n}=1+h_n$,

$$n=(1+h_n)^n=1+n\cdot h_n+\frac{n(n-1)}{2!}\left(h_n\right)^2+\cdots+\left(h_n\right)^n$$

$$\geq 1+\frac{n(n-1)}{2!}\left(h_n\right)^2$$

$$\Rightarrow\quad 0<h_n\leq\sqrt{\frac{2}{n}},$$

由迫敛准则知, $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

$$\textbf{(4)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right)$$

$\boxed{\text{迫敛准则}}$

解 令 $x_n=\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n}$,

$$a_n=\frac{n+1}{n^2+n}+\frac{n+2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}=\frac{n^2+\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+n},$$

$$b_n=\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+1}=\frac{n^2+\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+1},$$

则 $a_n<x_n<b_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{3}{2}$,

由迫敛准则, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}$.

(5) 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

迫敛准则

解 由取整函数的性质，$\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\le\dfrac{1}{x}$.

当 $x>0, 1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\le 1$，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1,$

因此由迫敛性得 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1;$

当 $x<0,\ 1\le x\left[\dfrac{1}{x}\right]<1-x,$ 同理得 $\lim\limits_{x\to 0^-} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1;$

于是求得 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1.$

(6) 设 $a>0,\ x_1>0,\ x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$. 证明数列$\{x_n\}$收敛, 并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 易知 $x_n>0$, 且 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)\geq\sqrt{x_n\cdot\dfrac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$,

于是$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{a}{x_n^2}\right)\leq\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{a}{\sqrt{a}^2}\right)=1\,(n>2)$,

即数列$\{x_n\}$单调减且有下界, 由单调有界原理知$\{x_n\}$ 收敛.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 由 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$, $A=\dfrac{1}{2}\left(A+\dfrac{a}{A}\right)$,

则 $A=\pm\sqrt{a}$, 因为 $x_n\geq\sqrt{a}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

单调有界准则

例5 利用无穷小的性质和等价无穷小代换

$\boxed{\text{等价无穷小代换}}$

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}$$

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x-1}{x}+\frac{3^x-1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\ln 2}{x}+\frac{x\ln 3}{x}\right)=\ln 2+\ln 3=\ln 6$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$$

解
$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\left(e^{x-\sin x}-1\right)}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(x-\sin x)}{x-\sin x}=e^0\cdot 1=1$$

$$\text{(3)}\ \lim_{n\to\infty} n^2\left(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n+1}}\right),\quad x>0.$$

$\boxed{\text{等价无穷小代换}}$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\, x^{\frac{1}{n+1}}\left(x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)$

$$=\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n+1}}\cdot n^2\,\frac{1}{n(n+1)}\ln x \ =\ln x$$

$$\text{(4)}\ \lim_{x\to0}\frac{(1+2\sin x)^x-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln(1+2\sin x)}-1}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+2\sin x)}{x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{2\sin x}{x}=4$$

$$(5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x\sin x}-\cos x}{\ln(1+x^2+x^3)}$$

$\boxed{\text{等价无穷小代换}}$

解 原式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x\sin x}-1+1-\cos x}{x^2+x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x\sin x}-1}{x^2+x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2+x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x\sin x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{5}{6}$$

$$\textbf{(6)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+\mathrm{e}^x)-x}{\ln(x^2+\mathrm{e}^{2x})-2x}$$

$\boxed{\text{等价无穷小代换}}$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+\mathrm{e}^x)-x}{\ln(x^2+\mathrm{e}^{2x})-2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{-x}\sin^2 x+1)\right]-x}{\ln\left[\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{-2x}x^2+1)\right]-2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{e}^{-x}\sin^2 x+1)}{\ln(\mathrm{e}^{-2x}x^2+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x}\sin^2 x}{\mathrm{e}^{-2x}x^2}=1$$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\left(\ln(1+x)\right)-\sin\left(\ln x\right)\right)$

等价代换,
有界量乘无穷小仍为无穷小

解 $\sin\left(\ln(1+x)\right)-\sin\left(\ln x\right)$

$$=2\cos\frac{\ln(1+x)+\ln x}{2}\cdot\sin\frac{\ln(1+x)-\ln x}{2}$$

$$\because\ \lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\ln(1+x)-\ln x}{2}=\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0,$$

且 $2\cos\dfrac{\ln(1+x)+\ln x}{2}$ 有界,

$$\therefore\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sin\left(\ln(1+x)\right)-\sin\left(\ln x\right)\right)=0.$$

$$\text{(8)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}},\ a>0, b>0, c>0.$$

等价无穷小代换

解 设 $f(x)=\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$, $\ln f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c),$$

$$\therefore \text{原式}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=\sqrt[3]{abc}.$$

$$(9)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{3-\mathrm{e}^{x}}{2+x}\right)^{\csc x}$$

等价无穷小代换

解 原式 $=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\ln\left(\frac{3-\mathrm{e}^{x}}{2+x}\right)}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\ln\left(\frac{3-\mathrm{e}^{x}}{2+x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\ln\left(1+\frac{1-x-\mathrm{e}^{x}}{2+x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{1-x-\mathrm{e}^{x}}{2+x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(-1-\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}\right)=-1,$$

$\therefore$ 原式 $=\mathrm{e}^{-1}$.

(10) 当$x \to 1^{+}$时, $\sqrt{3x^2-2x-1} \cdot \ln x$ 是 $x-1$的k 阶无穷小, 求k 的值.

解 $\sqrt{3x^2-2x-1} \cdot \ln x$

$$=\sqrt{(3x+1)(x-1)} \cdot \ln\left(1+x-1\right)$$

$$\sim 2\sqrt{x-1} \cdot (x-1) = 2(x-1)^{\frac{3}{2}}, x \to 1^{+}$$

$$\therefore k=\frac{3}{2}.$$

等价无穷小代换

(11) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{3^x-1}=5$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{3^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{x\ln 3}=5,$

$\Rightarrow$ 当 $x\to 0$ 时，$\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)\sim\dfrac{f(x)}{\sin x}\sim(5\ln 3)x,$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x\sin x}=5\ln 3.$

例6 利用左右极限

极限存在 $\Leftrightarrow$

左极限与右极限存在且相等

$$\text{(1)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{m+n}{2}-\frac{m-n}{\pi}\arctan\frac{1}{x}\right)$$

解 $$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{m+n}{2}-\frac{m-n}{\pi}\arctan\frac{1}{x}\right)=\frac{m+n}{2}-\frac{m-n}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=m,$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{m+n}{2}-\frac{m-n}{\pi}\arctan\frac{1}{x}\right)=\frac{m+n}{2}-\frac{m-n}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=n,$$

所以当$m\neq n$时, $f(0-0)\neq f(0+0)$, 所求极限不存在;

当$m=n$时, 所求极限存在, 极限值为$m=n$.

$$\text{(2)} \lim_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+2e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$$

$\boxed{\begin{array}{c}\text{极限存在} \Leftrightarrow \\ \text{左极限与右极限存在且相等}\end{array}}$

解 $$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+2e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{-x}\right)=2-1=1,$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+2e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{2}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{2}{x}}+2}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1,$$

由于 $f(0-0)=f(0+0)$，极限存在， $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+2e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

例7 根据极限确定参数

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{\ln(1+kx^2)}, & x\neq 0, \\ 2, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求常数k 的值.

解 $f(x)$在$x=0$处连续, 则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{\ln(1+kx^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x\sin x}{kx^2}=\frac{1}{2k}=f(0)=2,$$

$$\therefore k=\frac{1}{4}.$$

(2) 试确定常数 a,b 的值, 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)\right)=0$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\left(a+\frac{b}{x}\right)\right)=0,$$

即 $1-a=0$, 于是 $a=1$.

所以 $$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\frac{1}{2}.$$

(3) 试确定常数 a,b 的值, 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+4x-7}-(ax+b)\right)=0.$

解 $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+4x-7}-(ax+b)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+4x-7-(ax+b)^2}{\sqrt{3x^2+4x-7}+ax+b}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-a^2)x^2+(4-2ab)x-(7+b^2)}{\sqrt{3x^2+4x-7}+ax+b}=0,$$

上述极限为0, 表明分子的最高幂次低于分母的最高幂次,

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2-3=0,\\4-2ab=0,\end{cases}$$ 于是 $a=\sqrt{3}$（舍去 $a=-\sqrt{3}$）, $b=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

例8 求由极限定义的函数表达式

(1) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n+1}}{2+x^{2n}}$，求 $f(x)$的表达式.

解 当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{2+x^{2n}}=\frac{1}{2},$$

当 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{-2n}=0$，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{-2n}-x}{2x^{-2n}+1}=-x,$$

$$f(1)=0,\ f(-1)=\frac{2}{3},$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |x|<1,\\ -x, & |x|>1,\\ 0, & x=1,\\ \dfrac{2}{3}, & x=-1.\end{cases}$$

$\boxed{\text{迫敛准则}}$

(2) 求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$, $x\geq 0$.

解 若$a,b,c>0$, 由迫敛准则, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n+b^n+c^n\right)^{\frac{1}{n}}=\max\{a,b,c\}$.

由 $\max\left\{1,x,\dfrac{x^2}{2}\right\}=1$, 解得 $0\leq x\leq 1$,

由 $\max\left\{1,x,\dfrac{x^2}{2}\right\}=x$, 解得 $1\leq x\leq 2$,

由 $\max\left\{1,x,\dfrac{x^2}{2}\right\}=\dfrac{x^2}{2}$, 解得 $x\geq 2$,

于是 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq 1,\\ x, & 1<x\leq 2,\\ \dfrac{x^2}{2}, & x>2.\end{cases}$

(3) 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(1+\sin\pi x)^n+\sin\pi x}{1+(1+\sin\pi x)^n}\quad(-1\le x\le 1)$.

解 当$-1<x<0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sin\pi x)^n=0$, $\therefore\ f(x)=\sin\pi x$.

当$0<x<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sin\pi x)^n=+\infty$,

$$\therefore\ f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\dfrac{\sin\pi x}{(1+\sin\pi x)^n}}{\dfrac{1}{(1+\sin\pi x)^n}+1}=x.$$

$f(0)=0,\ f(1)=\dfrac{1}{2},\ f(-1)=-\dfrac{1}{2}$.

则 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & x=-1,\\ \sin\pi x, & -1<x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1.\end{cases}$

二、讨论连续性及间断点

例9 讨论 $f(x)=\begin{cases} |x-1|, & |x|>1, \\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\le 1 \end{cases}$ 的连续性.

解 $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<-1, \\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & -1\le x\le 1, \\ x-1, & x>1, \end{cases}$

显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$ 内连续.

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<-1,\\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & -1\le x\le 1,\\ x-1, & x>1,\end{cases}$$

当$x=-1$时，

$$f(-1-0)=\lim_{x\to -1^-}(1-x)=2,$$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to -1^+}\cos\frac{\pi x}{2}=0,$$

所以$x=-1$为$f(x)$的第一类跳跃间断点.

当$x=1$时，$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0=f(1)$,

$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0=f(1)$，于是$f(x)$在点$x=1$连续.

故 $f(x)$在$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$连续.

例10 求 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0, \\ \ln(1+x), & x\le 0 \end{cases}$ 的间断点,并判断类型.

解 $f(x)$ 的定义域:$(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(1) $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(1+x)=0$, $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-1}$,

所以 $x=0$ 为 $f(x)$的第一类跳跃间断点.

(2) $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$, $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$,

所以 $x=1$ 为 $f(x)$的第二类无穷间断点.

例11 求 $f(x)=\dfrac{\ln x}{(x-1)(x-2)}$ 的间断点,并判断类型.

解 $f(x)$ 的定义域:$(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

$$(1)\ \lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{\ln(x-1+1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{(x-1)(x-2)}=-1,$$ 所以 $x_1=1$ 为第一类可去间断点.

$$(2)\ \lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\frac{\ln x}{(x-1)(x-2)}=\infty,$$

所以 $x_2=2$ 为 $f(x)$ 的第二类无穷间断点.

例12 试确定 a,b 的值, 使得函数 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$

(1)有无穷间断点 $x=0$; (2)有可去间断点 $x=1$.

解 (1) 当 $x=0$ 为无穷间断点时,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty,$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(x-a)(x-1)=a=0,$$

若 $b=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x(x-1)}=-1\neq\infty$,

$$\Rightarrow a=0, b\neq 1.$$

(2) 当 $x=1$ 为可去间断点时,

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}\text{存在},$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}(e^x-b)=e-b=0, b=e.$$

若 $a=1$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{(x-1)^2}=\infty$,

$$\Rightarrow b=e, a\neq 1.$$

例13 求 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}, & x<0, \\ \ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x\geq 0 \end{cases}$ 的间断点，并判断类型.

解 1. 当 $x<0$ 时,由 $\sin\pi x=0$, 得 $x=-1,-2,-3,\cdots$

(1) 当 $x_1=-1$ 时, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x-1)(x+1)}{-\sin\pi(x+1)}=-\dfrac{2}{\pi}$,

$\therefore x_1=-1$ 为第一类可去间断点.

(2) 当 $x_k=-k\,(k=2,3,\cdots)$, $\lim\limits_{x\to x_k} f(x)=\lim\limits_{x\to x_k}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}=\infty$,

$\therefore x_k=-k\,(k=2,3,\cdots)$ 为第二类无穷间断点.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{\sin \pi x}, & x<0,\\ \ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x\ge 0\end{cases}$$

解 2. 当 $x \ge 0$ 时,

(1) 当 $x=0$时, $f(0+0)=-\sin 1$,

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-x}{\sin \pi x}=-\frac{1}{\pi},$$

$\therefore x=0$ 为第一类跳跃间断点.

(2) 当 $x=1$时, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}\right)$不存在,

且 $f(x)$在$\ln 2-1$和$\ln 2+1$之间无限振荡,

$\therefore x=1$为第二类振荡间断点.

三、证明题

例14　设 $a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证　因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$，根据极限的保号性, $\exists N \in \mathrm{N}^*$,

当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \dfrac{a}{2} \Rightarrow \dfrac{a}{2} < a_n < \dfrac{3a}{2}$,

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{a}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}} = 1$，所以由追敛准则, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

例15 若单调数列的一个子列收敛，则这个数列收敛.

证 不妨设数列$\{a_n\}$单调增，且有$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$,

$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbf{N}^*$, 使得$\forall k > K$, 有$\left|a_{n_k} - a\right| < \varepsilon$.

取 $N = n_{K+1}$, 对$\forall n > N$, $\exists l \in \mathbf{N}^*$, 使得 $n_{K+1} < n < n_l$,

由数列的单调性， $a_{n_{K+1}} \le a_n \le a_{n_l}$,

于是 $-\varepsilon < a_{n_{K+1}} - a \le a_n - a \le a_{n_l} - a < \varepsilon$,

从而 $|a_n - a| < \varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

例16　设 $x_1=\sqrt{3}, x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}\,(n\in\mathrm{N}^*)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求该极限值.

证　显然 $x_2=\sqrt{3+\sqrt{3}}>x_1$, 且 $x_1<3$. 假设 $x_{k+1}>x_k$, 且 $x_k<3$.

则 $$x_{k+2}=\sqrt{3+x_{k+1}}>\sqrt{3+x_k}=x_{k+1},$$

且 $$x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3.$$

$\therefore$ 数列 $\{x_n\}$ 单调增且有上界, 必收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,

由 $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$, $x_{n+1}^2=3+x_n$, 取极限, 得 $A^2=3+A$,

解得 $A=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $A=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去), $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

例17　设 $x_1=2, x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}(n\in \mathrm{N}^*)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，

并求该极限值.

证　由 $x_1=2, x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$ 易得 $2\le x_n<3$, 即数列 $\{x_n\}$ 有界.

且　$x_1=2, x_2=\dfrac{5}{2}, \ x_3=\dfrac{12}{5}, \ x_4<\dfrac{29}{12}, \ \Rightarrow \ x_1<x_3, \ x_2>x_4.$

$$x_{n+2}-x_n=\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{x_{n-1}-x_{n+1}}{x_{n-1}x_{n+1}},$$

$\therefore \ x_{n+2}-x_n$ 与 $x_{n+1}-x_{n-1}$ 异号, 从而与 x_n-x_{n-2} 同号,

$\Rightarrow$ 奇子列 $\{x_{2k-1}\}$ 单调增, 偶子列 $\{x_{2k}\}$ 单调减.

例17 设 $x_1=2, x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}(n\in \mathrm{N}^*)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

由单调有界准则, 奇子列 $\{x_{2k-1}\}$ 与偶子列 $\{x_{2k}\}$ 均收敛,

设二者的极限分别为 A 与 B.

由 $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$ 得 $A=2+\dfrac{1}{B}$, 且 $B=2+\dfrac{1}{A}$, $\Rightarrow A=B$,

由于 $\{x_n\}$ 的奇子列与偶子列收敛于同一极限值, 故 $\{x_n\}$ 收敛.

由 $A=2+\dfrac{1}{A}$ 解得 $A=1+\sqrt{2}$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n=1+\sqrt{2}.$$

例18 设 $f(x)\in C(a,b)$, 且 $f(a+0)$, $f(b-0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

证 令 $F(x)=\begin{cases} f(a+0), & x=a, \\ f(x), & x\in(a,b), \\ f(b-0), & x=b, \end{cases}$

$$\lim_{x\to a^+}F(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a+0)=F(a),$$

$$\lim_{x\to b^-}F(x)=\lim_{x\to b^-}f(x)=f(b-0)=F(b),$$

$\therefore F(x)\in C[a,b]$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

于是 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

闭区间上连续函数性质

例19 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续, $f([a,b])\subset[a,b]$.

证明: 存在 $x_0\in[a,b]$, 使 $f(x_0)=x_0$.

证 由条件知 $a\le f(a)$, $f(b)\le b$.

(1) 若$a=f(a)$ 或 $b=f(b)$, 则结论成立.

(2) 若 $a<f(a)$, $f(b)<b$,

令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(x)$在$[a,b]$上连续,

且 $F(a)\cdot F(b)=(f(a)-a)\cdot(f(b)-b)<0.$

由零点存在定理,存在$x_0\in(a,b)$, 使 $F(x_0)=0$, 即

$$f(x_0)=x_0.$$

例20 设函数 $f(x)$在$[0,2a]$上连续, 且 $f(0)=f(2a)$.

证明: $\exists\xi\in[0,a)$, 使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

证 设 $F(x)=f(x)-f(x+a)$, 则 $F(x)$在$[0,a]$上连续.

且 $F(0)=f(0)-f(a)$,

$F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$.

(1)若 $f(0)=f(a)$, 则$\xi=0$即为所求;

(2) 若 $f(0)\neq f(a)$, 则$F(0)\cdot F(a)<0$, 由零点定理知

$\exists\xi\in(0,a)$, 使 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

综上, $\exists\xi\in[0,a)$, 使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

例21 证明：当 n 为奇数时，方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \ (a_0 \neq 0) \text{ 至少有一实根.}$$

证 令 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^n} = a_0 \neq 0$，由函数极限的保号性，$\exists X_0 > 0$，使当 $|x| > X_0$ 时

$\dfrac{f(x)}{x^n}$ 与 a_0 同号．不妨设 $a_0 > 0$，取 $a = -(X_0 + 1), b = X_0 + 1$,

则 $f(a) < 0, f(b) > 0$，于是 $f(a)\cdot f(b) < 0$，又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

故由零点存在定理知 $\exists\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi) = 0$,

即方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 至少有一实根.