行列式

行列式的定义

行列式的性质

行列式的展开和计算

克拉默法则

§第一节 行列式的定义

一、排列及其逆序数

定义2.1.1

由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 阶排列，记作 $j_1 j_2 \cdots j_n$.

注　$\boldsymbol{n}$ 阶排列有 $n!$ 个.

定义　按数字的自然顺序由小到大的 $\boldsymbol{n}$ 阶排列 $1,2,\cdots,n$ 称为自然排列.

排列的逆序数

定义 在一个排列 $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$ 中，若数 $i_t > i_s$ 则称这两个数组成一个逆序.

例如 排列32514 中，

逆序

3 2 5 1 4

逆序 逆序

定义 一个排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**.

例如 排列32514 中，

0 0 1

3 2 5 1 4

1 逆序数为3

故此排列的逆序数为3+1+0+1+0=5.

排列的奇偶性

逆序数为奇数的排列称为奇排列;

逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例2　计算排列 217986354的逆序数，并讨论它的奇偶性.

解

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & 1 & 7 & 9 & 8 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{array}$$

$$t = 5 + 4 + 4 + 3 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0$$

$$= 18$$

此排列为偶排列.

定理2.1.4　一次对换改变排列的奇偶性.

相邻对换的情形：$\cdots i\ j \cdots$ 　　　　$\tau' = \tau \pm 1;$

非相邻对换的情形：$\cdots i\, k_2 k_2 \cdots k_s\, j \cdots$

推论 2.1.5　在全部n阶排列中，奇、偶排列各半，均为$\dfrac{n!}{2}$个.

定理2.1.6　任何一个n阶排列都可以通过对换转化为自然排列，

并且所做对换的次数与该排列具有相同的奇偶性.

行列式概念的提出

- 行列式是由日本数学家关孝和、德国数学家莱布尼茨发明的.
- 关孝和 1683 年在其著作《解伏题之法》中第一次提出了行列式的概念.

关孝和 (Seki Takakazu)

莱布尼茨 (Leibniz)

- 同时代的莱布尼茨是欧洲第一个提出行列式概念的人. 他在 1693 年 4 月写给洛比达的一封信中使用并给出了行列式.

二、n 阶行列式(determinant)的定义

1. 定性描述：称由n阶方阵$\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$所确定的数

$$\det \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为n阶方阵$\boldsymbol{A}$的行列式，简称n 阶行列式

矩阵与行列式的有何区别?

答： 矩阵与行列式有本质的区别：行列式是一个代数和（算式），行数=列数，一个数字行列式经过计算可求得其值，且两个行列式相等只需值相同。而矩阵仅仅是一个数表，它的行数和列数可以不同，且两个矩阵相等要求同型且对应元素相等.

1. 二、三阶行列式

称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为一个二阶行列式。

二阶行列式的计算——对角线法则

主对角线

次对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

对于二元线性方程组 $\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 = b_1, \\ \boxed{a_{21}}x_1 + \boxed{a_{22}}x_2 = b_2. \end{cases}$

若记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$

系数行列式

三阶行列式

定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \qquad (6)$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为一个三阶行列式.

三阶行列式的计算----对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

注意　红线上三元素的乘积冠以正号，蓝线上三元素的乘积冠以负号.

说明　对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

三阶行列式包括3!项,每一项都是位于不同行,不同列的三个元素的乘积,其中三项为正,三项为负.

例2　计算下述线性方程组的系数行列式

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + -3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解　　该方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)$$

$$+1\times2\times1-1\times1\times(-1)-(-2)\times2\times(-1)-1\times(-3)\times1$$

$$=-5\neq0,$$

思考：

- 以上的结果（行列式的定义，线性方程组的求解公式）可以推广到高阶的线性方程组吗？那么该如何定义n阶行列式？

从另一个角度解释3阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

说明　（1）三阶行列式共有6 项，即$3!$ 项.

（2）每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积.

（3）每项的正负号都取决于位于不同行不同列的三个元素的列指标的排列.

$\tau(312)=1+1=2,$ $\qquad$ $t(132)=1+0=1,$

$a_{13}a_{21}a_{32}$ $\quad$ + 正号 $\qquad$ $a_{11}a_{23}a_{32}$ $\quad$ – 负号，

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} a_{3 j_3}.$$

2. *n*阶行列式的定义（定量描述）

定义2.1.7 **n**阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示一个数值．该数值等于上式中所有取自不同行不同列的**n**个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1,2,\ldots,n$ 的一个排列. 对每项前的符号有下述规定：

当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为偶排列时取正号，当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为奇排列时取负号. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

说明

1、行列式是一种特定的算式，它是为求解方程个数和未知量个数相同的线性方程组的需要而引入并定义的数学工具;

2、 n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和;

3、 n 阶行列式的每项都是位于不同行、不同列 n 个元素的乘积;

4、 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

例　用定义计算下列 *n* 阶行列式

- **1、**对角形行列式；
- **2、**下三角行列式；
- **3、**次下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & * & * \\ a_{n,1} & * & \cdots & * & * \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)} a_{1,n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2} a_{n,1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2} a_{n,1}$$

n阶行列式的定义还可以写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

$$=\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}=\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

$$j_1 j_2 \cdots j_n \longrightarrow 12 \cdots n$$

$$12 \cdots n \longrightarrow i_1 i_2 \cdots i_n$$

例 计算n阶上三角行列式的值.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

§ 第2节　行列式的性质

一. 行列式的性质

令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 D^{T} 为 D 的**转置行列式**.

性质 1

行列式与它的转置行列式相等, 即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

☞ **行列式与其转置行列式相等说明, 行列式中行与列的地位是等同的, 凡是对行成立的性质对列也成立.**

一. 行列式的性质

证 设 D^{T} 中第 i 行第 j 列的元素为 $b_{ij}(i,j=1,2,\ldots,n)$, 则有

$$b_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\ldots,n).$$

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=D.$$

一. 行列式的性质

性质 2

如果行列式中某一行 (列) 的元素含有公因数 k, 则 k 可以提到行列式符号外, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论

若行列式中某一行 (列) 的元素全为零, 则行列式等于零.

证 根据行列式的定义,

$$\text{左端} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (k a_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$$

$$= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} = \text{右端}.$$

一. 行列式的性质

性质 3

将行列式中两行 (列) 互换, 行列式改变符号, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

一. 行列式的性质

证

$$\text{左端} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

$$= - \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_k \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

$$= \text{右端}.$$

一. 行列式的性质

推论

若行列式中有两行 (列) 相同, 则行列式等于零.

推论

若行列式中有两行 (列) 的对应元素成比例, 则行列式等于零.

一. 行列式的性质

性质 4

如果行列式的某一行 (列) 中各元素可写成两数之和, 则此行列式可以写成两个行列式之和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

一. 行列式的性质

证 左端 $=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(\underline{b_{ij_i}}+\underline{c_{ij_i}})\cdots a_{nj_n}$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots \underline{b_{ij_i}}\cdots a_{nj_n}$$

$$+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots \underline{c_{ij_i}}\cdots a_{nj_n}$$

$=$ 右端.

一. 行列式的性质

性质 5

如果将行列式的某一行 (列) 的各元素同乘以数 k 后, 加到另一行 (列) 的对应元素上, 行列式的值不变, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

一. 行列式的性质

证

$$右端 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= 左端$$

练习题

1、 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，则下述结论中正确的是（　　）

(A) 在 $\boldsymbol{A}$ 中必有一行或一列元素全为零

(B) 必有 $a_{ij}=0(i, j=1, 2, 3, 4)$，即 $\boldsymbol{A}=O$

(C) 在 $\boldsymbol{A}$ 中必有两行或两列元素对应成比例

(D) $\boldsymbol{A}$ 的秩一定小于 4

2、计算 $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$

小结 行列式的基本运算性质

- 转置性质；
- 拆项性质；
- 三个初等变换性质；
- 特殊结论.

思考：

设方阵$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{有限次初等变换}} \boldsymbol{B}$,则

$|\boldsymbol{A}|$与$|\boldsymbol{B}|$的关系为？

$$|\boldsymbol{A}| = k\,|\boldsymbol{B}|, \quad k \neq 0$$

例1

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2 & ac & bc \\ ac & b^2+c^2 & ab \\ bc & ab & c^2+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & ac & bc \\ ac & b^2+c^2 & ab \\ 0 & ab & c^2+a^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b^2 & ac & bc \\ 0 & b^2+c^2 & ab \\ bc & ab & c^2+a^2 \end{vmatrix}$$

$$
= a\begin{vmatrix} a & ac & bc \\ c & b^2+c^2 & ab \\ 0 & ab & c^2+a^2 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} b & ac & bc \\ 0 & b^2+c^2 & ab \\ c & ab & c^2+a^2 \end{vmatrix}
$$

$$
= a\begin{vmatrix} a & 0 & bc \\ c & b^2 & ab \\ 0 & ab & c^2+a^2 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} b & ac & 0 \\ 0 & b^2+c^2 & ab \\ c & ab & a^2 \end{vmatrix}
$$

$$
= ab\begin{vmatrix} a & 0 & bc \\ c & b & ab \\ 0 & a & c^2+a^2 \end{vmatrix} + ab\begin{vmatrix} b & ac & 0 \\ 0 & b^2+c^2 & b \\ c & ab & a \end{vmatrix}
$$

$$= ab\begin{vmatrix} a & 0 & bc \\ c & b & 0 \\ 0 & a & c^2 \end{vmatrix} + ab\begin{vmatrix} b & ac & 0 \\ 0 & c^2 & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ c & b & 0 \\ 0 & a & c \end{vmatrix} + abc\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= 2abc(abc + abc) = 4a^2b^2c^2$$

三角化方法

1、 低阶数字行列式

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{matrix} r_2+2r_1 \\ r_3-3r_1 \\ r_4-2r_1 \end{matrix}}} - \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 26 & -33 & -24 \end{vmatrix} \underline{\underline{\begin{matrix} r_3-r_4 \\ r_4+2r_2 \end{matrix}}} - \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_4+17r_3}} - \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times (-13) \times (-1) \times (-24) = 312$$

2、箭形行列式（处理方法：三角化）

例2.2.10、计算 $n+1$阶箭形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & & & \\ 1 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & a_n \end{vmatrix},$$

$$a_i \neq 0, i=0,1,2,\cdots,n.$$

$$D_{n+1} \xlongequal{\boldsymbol{c}_1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \boldsymbol{c}_{j+1}} \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & & & \\ 0 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (a_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}) \prod_{i=1}^{n} a_i$$

3、可化为箭形的行列式

- 例2.2.11、计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix},$$

$$a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$$

解 方法1 （特点：各行（列）相近. 处理方法：化为箭形）

$$D \xlongequal[i\geq 2]{\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_1} \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i \geq 2]{c_1 + \frac{b_i}{a_i}\boldsymbol{a}_1} \begin{vmatrix} a_1 + b_1 + a_1 \sum_{i=2}^{n} \frac{b_i}{a_i} & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 + b_1 + a_1 \sum_{i=2}^{n} \frac{b_i}{a_i}) a_2 a_3 \cdots a_n$$

$$= (a_1 + a_1 \frac{b_1}{a_1} + a_1 \sum_{i=2}^{n} \frac{b_i}{a_i}) a_2 a_3 \cdots a_n$$

$$= a_1 (1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i}) \prod_{i=2}^{n} a_i$$

$$= (1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i}) \prod_{i=1}^{n} a_i$$

4、 行（列）和相等的行列式

- 例、计算 n阶行列式（特点：每一行元素之和相等 ）

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \overset{c_1+c_j}{\underset{j=2,\cdots,n}{=}} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & \cdots & a_n \\ 1+\sum_{i=1}^{n} a_i & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

解法1 ： 因为行列式的每一行元素之和相等，先把第 2 列至第 n 列都加到同一列(例如第1列)上，再三角化.

$$= (1+\sum_{i=1}^{n} a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\underset{j=2,\cdots,n}{\overset{c_j - a_j c_1}{=}} (1+\sum_{i=1}^{n} a_i)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1+\sum_{i=1}^{n} a_i$$

- 方法2 此行列式的各行相近，因此可化为箭形行列式处理

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}\overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,\cdots,n}{=}}\begin{vmatrix}1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ -1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+c_j}{\underset{j=2,\cdots,n}{=}}\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1+\sum_{i=1}^{n}a_i$$

§ 第3节　行列式的展开

一、余子式和代数余子式

定义1

在n阶行列式$D_n=|a_{ij}|$中,划去(i,j)元所在的第i行和第j列后,剩下的$(n-1)^2$个元素按原来的相对位置构成的$n-1$阶行列式称为(i,j)元的**余子式**,记为M_{ij}.

称$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为(i,j)元的代数余子式.

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}.$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=M_{44}.$$

行列式的每个元素分别对应着一个余子式和一个代数余子式.

例如：分别计算矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&4&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&5&0\\3&4&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

的(1,2)的余子式和代数余子式，会发现与(1,2)的取值无关。

注意 改变$(i\,,j)$元，甚至改变它所在的行和列的元素，都不改变（$i\,,j$)元的余子式和代数余子式的值。

例1. **用余子式与代数余子式表达2阶行列式.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}$$

$$= \boxed{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}}$$

用余子式与代数余子式表达3 阶行列式.

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underline{a_{13}a_{21}a_{32}}$$

$$- \underline{a_{11}a_{23}a_{32}} - \underline{a_{12}a_{21}a_{33}} - \underline{a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) + a_{12}\left(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\right)$$

$$+ a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

引理2. 3. 2

一个n阶**行列式**D，如果它的第i行（j列）除a_{ij}外其余所有元素都为零，则 $D = a_{ij}A_{ij}$.

二、行列式按一行展开的定理（拉普拉斯展开定理）

定理2.3.3 行列式等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$|\boldsymbol{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

------行列式的按行展开公式

或 行列式等于它的任一列的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

------行列式的按列展开公式

例3 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

解 $D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{2+5}\,2\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -2\cdot 5\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\underline{r_2 + (-2)r_1}}{r_3 + r_1}\ -10\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -10\cdot(-2)\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 20(-42 - 12) = -1080.$$

推论2.3.4 行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j.$$

（“异乘变零”）

小结　关于拉普拉斯展开定理的综合表述

1. 行列式按行（列）展开法则是把高阶行列式的计算化为低阶行列式计算的重要工具.

2. $$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j; \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j. \end{cases}$

三、降阶法计算行列式

- **典型例题** 1、低阶数字行列式：

例4

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4+c_3]{c_1+(-2)c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} =(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$=40.$$

- 2、范德蒙德(Vandermonde)行列式　　　　（递推法）

证明 n 阶范德蒙德行列式

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i).$$

证 采用数学归纳法

（1）当$n=2$时，$V_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=a_2-a_1=\prod_{1\le i<j\le 2}(a_j-a_i)$,

所以当 $n=2$ 时，结论成立.

（2）假设结论对于$n-1$阶范德蒙德行列式成立. 对于n阶的情况，

$$V_n \xlongequal[i=n,n-1,\ldots,2]{r_i-a_1r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

将上述行列式再按第1列展开，并把每列的公因子(a_j-a_1)提出，则

$$V_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_2&a_3&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_2^{n-2}&a_3^{n-2}&\cdots&a_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

n-1阶范德蒙德行列式

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{2\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

$$=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i).$$

3、可转化为范德蒙行列式的行列式

（利用范德蒙行列式的公式）

例5 **计算** $$D=\begin{vmatrix} 12 & 11 & 10 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}.$$

解 $$D \xlongequal[r_1\times\frac{1}{14}]{r_1+r_2} \begin{vmatrix} 14 & 14 & 14 & 14 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix} = 14V(2,3,4,5) = 14\times(3!\cdot 2!\cdot 1) = 14\times 12 = 168$$

例6 计算 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\2&2^2&2^3&2^4&2^5\\3&3^2&3^3&3^4&3^5\\4&4^2&4^3&4^4&4^5\\5&5^2&5^3&5^4&5^5\end{vmatrix}$

解 $D\underset{1\le i\le 4}{\overset{r_i\times\frac{1}{i}}{=\!=\!=\!=}}5!\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&2^2&2^3&2^4\\1&3&3^2&3^3&3^4\\1&4&4^2&4^3&4^4\\1&5&5^2&5^3&5^4\end{vmatrix}\overset{\text{转置}}{=\!=\!=}5!\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\1&2^2&3^2&4^2&5^2\\1&2^3&3^3&4^3&5^3\\1&2^4&3^4&4^4&5^4\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{5}i!$

4、三对角行列式 （常用递推法或三角化方法处理）

例2.3.7 递推法计算三对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

解

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}_n$$

$$\underline{\underline{\text{按第}n\text{列展开}}}(a+b)D_{n-1} + ab(-1)^{2n-1} \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a+b & ab \\ & & & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}=aD_{n-1}+b(D_{n-1}-aD_{n-2}),$$

所以 $D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})$

$$=b^2(D_{n-2}-aD_{n-3})=\cdots=b^{n-2}(D_2-aD_1)$$

又 $D_1=a+b,\quad D_2=\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}=a^2+ab+b^2,$

所以 $D_n-aD_{n-1}=b^n.$ 因此 $D_n=b^n+aD_{n-1}.$

$$=b^n+a(b^{n-1}+aD_{n-2})$$

$$= b^n + ab^{n-1} + a^2 D_{n-2} = \cdots = b^n + ab^{n-1} + \cdots + a^{n-1}b + a^n$$

$$= \begin{cases} (n+1)a^n, & a = b, \\ \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}, & a \neq b. \end{cases}$$

$$D_{n-2} = b^{n-2} + aD_{n-3}$$

例7 三角化法计算三对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix}
2 & -1 & & & & \\
0 & \frac{3}{2} & -1 & & & \\
 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & 0 & \frac{n}{n-1} & -1 \\
 & & & & & \frac{n+1}{n}
\end{vmatrix} = (n+1)
$$

5、分块法计算行列式

例2.3.9. 准对角、准上(下)三角行列式

(可用归纳法证明第一个公式结果)

$$\begin{vmatrix} A_{r\times r} & O \\ C & B_{s\times s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{r\times r} & C \\ O & B_{s\times s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{r\times r} & O \\ O & B_{s\times s} \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$D=\left|\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline c_{11} & \cdots & c_{1r} & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{sr} & b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{array}\right| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{r\times r} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}_{s\times s} \end{vmatrix}$$

对矩阵$\boldsymbol{A}$ 的阶数$\boldsymbol{r}$作数学归纳法证明。

次准对角，次准下（上）三角行列式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{r\times r} \\ \boldsymbol{B}_{s\times s} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc:ccc} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r1} & \cdots & a_{rr} \\ \hdashline b_{11} & \cdots & b_{1s} & c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} & c_{s1} & \cdots & c_{sr} \end{array}\right| = [(-1)^s]^r \left|\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline c_{11} & \cdots & c_{1r} & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{sr} & b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{array}\right|$$

$$= (-1)^{rs} \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{r\times r} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}_{s\times s} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{rs} |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

结论：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{r\times r} \\ \boldsymbol{B}_{s\times s} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_{r\times r} \\ \boldsymbol{B}_{s\times s} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{r\times r} \\ \boldsymbol{B}_{s\times s} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{rs} |\boldsymbol{A}_{r\times r}| |\boldsymbol{B}_{s\times s}|$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{r\times r} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}_{s\times s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{r\times r} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{s\times s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{r\times r} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{s\times s} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_{r\times r}| |\boldsymbol{B}_{s\times s}|$$

定义（伴随矩阵）

设$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbf{P}^{n\times n}, n\geq 2$，$A_{ij}$是$\boldsymbol{A}$的$(i,j)$元的代数余子式，

称矩阵

$$[A_{ij}]^{\mathrm{T}}_{n\times n}=[A_{ji}]_{n\times n}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，记作$\boldsymbol{A}^*$或$\operatorname{adj}\boldsymbol{A}$.

例 求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

解 $A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,$

同理可得 $A_{13}=2,$

$A_{21}=6,\ A_{22}=-6,\ A_{23}=2,$

$A_{31}=-4,\ A_{32}=5,\ A_{33}=-2,$

故 $A^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix},$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=|A|$$

$$a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+\cdots+a_{nn}A_{nn}=|A|$$

$$=\begin{pmatrix} |A| & & & \boldsymbol{O} \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \\ \boldsymbol{O} & & & |A| \end{pmatrix},$$

命题3 设 A^*为方阵A 的伴随矩阵，则

$$AA^* = A^*A = |A|E \, .$$

可逆矩阵的判定

定理 矩阵A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$ ；且当 A 可逆时, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$,其中$A^*$为矩阵$A$的伴随矩阵.

证明　必要性　若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，即有$\boldsymbol{A}^{-1}$使$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$.

故$|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{E}|=1$，所以$|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

充分性　　当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$时，因为 $AA^{*}=A^{*}A=|A|E$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{A}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}\right)=\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}\right)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},$$

由逆矩阵的定义知矩阵 A可逆，且 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}$.

注 若A可逆，则 $A^*=|A|A^{-1}$.

注2 $\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}$，从而$A^*$与$A$可逆性一致．

证明 1) 当$A=O$时，有$A^*=O$，从而$\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}=0$.

2) 当$A\neq O$时，由 $AA^*=A^*A=\left|A\right|E_n$ 可知，

$$\left|A\right|\left|A^*\right|=\left|AA^*\right|=\left|A^*A\right|=\left|\left|A\right|E_n\right|=\left|A\right|^{n}.$$

若$|A|\neq 0$，则$\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}$；

若$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$，但$|\boldsymbol{A}| = 0$，则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n = \boldsymbol{O}$. （*）

假设$|\boldsymbol{A}^*| \neq 0$，则$\boldsymbol{A}^*$可逆，在（*）式两侧右乘$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$，可得

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$，与$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$矛盾，所以假设不成立，即当$|\boldsymbol{A}| = 0$时，必有$|\boldsymbol{A}^*| = 0$.

综上，对任意n阶方阵$\boldsymbol{A}$，恒有$|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$成立.

系数阵可逆的矩阵方程补充例题

设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，且$\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{B}$，求矩阵$\boldsymbol{B}$.

答案 $\boldsymbol{B}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

例4 设实矩阵A的伴随矩阵，$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$，且$AXA^{-1} = XA^{-1} + 3E_4$，求矩阵$X$.

解 $8 = |A^*| = |A|^{4-1} \Rightarrow |A| = 2$，从而$AA^* = |A|E_4 = 2E_4$.

将$AXA^{-1} = XA^{-1} + 3E_4$，右乘矩阵$A$，得

$$AX = X + 3A,$$

再左乘A^*，得 $A^*AX = A^*X + 3A^*A$,

或 $$2X = A^*X + 6E_4.$$

故 $(2\boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{X}=6\boldsymbol{E}_4.$

显然$(2\boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{A}^*)$是可逆矩阵，所以$\boldsymbol{X}=6(2\boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{A}^*)^{-1}.$

$$[2\boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{E}_4]=\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\-1&0&1&0&0&0&1&0\\0&3&0&-6&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0&1&0\\0&3&0&-6&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0&1&0\\0&0&0&-6&0&-3&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{array}\right]$$

矩阵的秩的另一种定义

定义1（k阶子式）

在$m \times n$矩阵$\boldsymbol{A}$中，任意取定k行、k列，位于这些行、列交叉处的k^2个元素按原来的相对位置组成的k阶行列式称为$\boldsymbol{A}$的一个k阶子式.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$$

定义2 设矩阵 A 是非零矩阵，称A的非零子式的最高阶数为矩阵A的秩，记为rank(A)或 $r(A)$.

规定 **零矩阵的秩为0.**

例如, 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 7 & 0\end{bmatrix}$, $\quad r(A)=3.$

注1 $r(A)=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}.$

注2 **矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为$\boldsymbol{r} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$中至少存在一个不为零的$\boldsymbol{r}$阶子式，而所有的$\boldsymbol{r}+1$阶子式均为零.**

注3 **矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为$\boldsymbol{r}$** $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$的列秩为$r \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$的行秩为$r$.

即用各种不同方式定义的矩阵的秩是不同角度的刻画，但在数值上均相等.

定义3

(1) 若$r(\boldsymbol{A}_{m\times n})=m$，则称矩阵$\boldsymbol{A}$是行满秩的；

(2) 若$r(\boldsymbol{A}_{m\times n})=n$，则称矩阵$\boldsymbol{A}$是列满秩的；

(3) 若$r(\boldsymbol{A}_{n\times n})=n$，则称方阵$\boldsymbol{A}$是满秩的；

（否则，若$r(\boldsymbol{A}_{n\times n})<n$，则称$\boldsymbol{A}$是降秩的.）

注4 方阵**A**满秩（即$r(A_{n\times n})=n$）$\Leftrightarrow |A|\neq 0$（称**A**非退化）

$\Leftrightarrow$ A可逆（非奇异）

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$AX=0$ 仅有零解;

$\Leftrightarrow$ A的行、列向量组线性无关.

$\Leftrightarrow$线性映射φ_A是单射.

$\Leftrightarrow$线性映射φ_A是单射.

$\Leftrightarrow$线性映射φ_A是单射.

矩阵秩的运算性质小结

设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{K}^{m\times n}$，则

(1) $0\le r(\boldsymbol{A})\le \min\{m, n\}$;

(2) $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})$.

(3) $r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$, 其中$k\neq 0$常数;

(4) $r(\boldsymbol{A}_1)\le r(\boldsymbol{A})$,其中 $\boldsymbol{A}_1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的子矩阵;

(5) $\boldsymbol{r}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})$;

(2) $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})$;

推广 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{A}_s) \le \sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}_j)$;

(3) $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}) \le \min\{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})\}$;

推广 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s) \le \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}_j) \quad j=1,2,\ldots,n$;

(4) $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}) \ge \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})-\boldsymbol{n}$

(5) 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B}) \le \boldsymbol{n}$.

A_{ij}

巩固与提升练习

1、考察展开定理

$$设D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 0 & -2\\ 1 & -3 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 6 & 2\end{vmatrix}, A_{ij}分别是(i,j)元的余子式和代数余子式, 求$$

(1) $A_{11}-3A_{12}+4A_{13}-A_{14}$;

(2) $A_{11}+A_{21}+2A_{31}+3A_{41}$.

(3) $M_{11}-M_{21}+2M_{31}-3M_{41}$.

解 （1） $A_{11}-3A_{12}+4A_{13}-A_{14}=a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}+a_{34}A_{14}=0$

（2） $A_{11}+A_{21}+2A_{31}+3A_{41}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & 8 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=-3\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=45.$$

（3）$M_{11}-M_{21}+2M_{31}-3M_{41}$.

$$=A_{11}+A_{21}+2A_{31}+3A_{41}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & 8 \end{vmatrix}=45$$

例5 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$，计算$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}A_{ij}$.

2、分块法计算行列式

1、设 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$,

则$f(x)=0$的根的个数为 __2__ .

解

$$f(x) \xlongequal[j\geq 2]{c_j-c_1} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4+c_2} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

显然是关于x的二次多项式.

2、计算行列式$\begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & 0 \\ -5 & -4 & -3 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

答案： $3!\cdot 5!$

例3 设$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{n}$阶方阵，且$\boldsymbol{n} \geq 2$,

$$\text{证明 } \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} \boldsymbol{n}, & \text{若}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{n}, \\ 1, & \text{若}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{n}-1\ , \\ 0, & \text{若}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) < \boldsymbol{n}-1. \end{cases}$$