§ 2.3节　矩阵的秩

天津大学数学学院

线性代数及其应用课程教学团队

域 $\mathbb{K}$ 上全体 n 元向量的集合记为：

$$\mathbb{K}^n = \left\{ {}^t[a_1, a_2, \cdots, a_n] \mid a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \; a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{K} \right\}$$

K-向量空间及其子空间

向量的线性运算

定义1. 设$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\in\mathbb{K}^n,\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]\in\mathbb{K}^n$,规定

(1) $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$ 当且仅当 $a_i=b_i,\quad i=1,2,\cdots,n;$

(2) 加法运算: $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=[a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n]\in\mathbb{K}^n;$

(3) 数乘运算: $\forall k\in\mathbb{K},\forall\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\in\mathbb{K}^n$,规定

$$k\boldsymbol{\alpha}=[ka_1,ka_2,\cdots,ka_n]\in\mathbb{K}^n.$$

对 $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{K}^n$, $\forall k, l \in \mathbb{K}$, 有

(1) $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$;

(3) $\exists \mathbf{0} = [0, 0, \cdots, 0] \in \mathbb{K}^n, s.t. \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{K}^n, \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}$; (加法单位元)

(4) $\forall \boldsymbol{\alpha} = [a_1, a_2, \cdots, a_n] \in \mathbb{K}^n, \exists -\boldsymbol{\alpha} = [-a_1, -a_2, \cdots, -a_n] \in \mathbb{K}^n$,

$s.t. \boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$; (加法负元)

(5) $1 \cdot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$;

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha}) = (kl)\boldsymbol{\alpha}$;

(7) $(k + l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha}$;

(8) $k(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta}$.

八条运算律

定义3.2.1 设 V 是 $\mathbb{K}^n$ 的非空子集. 如果满足条件:

(1)$\forall \boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta} \in V$，有$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V$(称$W$关于 $\mathbb{K}^n$ 的加法封闭）；

(2)$\forall k \in \mathbb{K}$，$\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, 有$k\boldsymbol{\alpha} \in V$(称$W$关于 $\mathbb{K}^n$的数量乘法封闭),

则称V是$\mathbb{K}^n$的一个线性子空间，简称子空间, 记为$V < \mathbb{K}^n$.

注 $\mathbb{K}^n$的非空子集W是$\mathbb{K}^n$的子空间

$$\Leftrightarrow \forall k,l \in \mathbb{K}, \forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in W, \text{有 } k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta} \in W.$$

例 证明集合 $\mathrm{W} = \{[a-b, a+b, 3b]^{\mathrm{T}} \mid \forall a,b \in \mathrm{R}\}$ 是 R^3的一个子空间.

线性组合与线性表示

定义2.3.2 设(I): $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\mathbb{K}^n$ 中的一组向量，$k_1, k_2, \cdots, k_s \in \mathbb{K}$ 称

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

为向量组(I)的一个线性组合，$k_1, k_2, \cdots, k_s$ 为组合系数.

如果给定的向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能表为向量组(I)的线性组合，即存在数域 $\mathbb{K}$ 中的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组(I)线性表示，称组合系数为表示系数.

例1 n元零向量可由任意n元向量组线性表示，这是因为

$$\mathbf{0}=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_s.$$

例2 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的任意一个向量可由该向量组线性表示, 这是因为

$$\boldsymbol{\alpha}_i=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_i+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_s,$$

$$(i=1,2,\ldots,s).$$

例3　已知向量组

$\alpha_1=[1,2,3]^{\mathrm T}$，　$\alpha_2=[-1,-2,-3]^{\mathrm T}$，$\alpha_3=[0,2,4]^{\mathrm T}$，　$\alpha_4=[3,4,5]^{\mathrm T}$，

试判断向量α_4是否可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？若能表示，表示关系是否唯一，如何计算全部线性表示关系式？

解法1　观察可知$\boldsymbol{\alpha}_4=3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$，所以可以表示；

又$\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，所以表法不唯一.

解法2　设$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{x}_3\boldsymbol{\alpha}_3$，这是一个非齐次线性方程组，考察该方程组解的情况.

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{\alpha}_3, \iff \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

即 $$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}$$ 或 $$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r(\tilde{\boldsymbol{R}}) = r(\boldsymbol{R}) = 2 < 3$, 方程组有无穷多解，通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+3 \\ k \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \forall k \in \mathbb{K}$$

因此**向量**α_4**可由**$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$**线性表示,但表示式不唯一**，有无穷多种线性表示关系，全部的线性表示式为

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = (\boldsymbol{k}+3)\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{k}\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{K}$$

结论：

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s=\begin{bmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ns}\end{bmatrix};\ \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}\in\mathbb{K}^n$.则

$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ 存在数 $x_1,x_2,\cdots,\ x_s$，使得$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s$.

$\Leftrightarrow n\times s$ 非齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}$有解.

(即 $\boldsymbol{A}_{n\times s}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$有解，其中$\boldsymbol{A}_{n\times s}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_s]$,

$\boldsymbol{X}=[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_s]^{\mathrm{T}}$)

线性相关与线性无关及其判别方法

定义2.3.2 设(I): $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ $(m \geq 1)$ 是$\mathbb{K}^n$中的向量组,如果存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

则称向量组(I): $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$在数域$\mathbb{K}$上**线性相关**;否则称(I)在数域$\mathbb{K}$上**线性无关**.

注 (1)向量组(I)线性无关 $\Leftrightarrow$ 只有$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$时,才有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

成立.

(2) (I)线性无关,且$k_1, k_2, \cdots, k_s$不全为0,则$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \neq \mathbf{0}$.

特别:

1）当$s=1$时，(Ⅰ)线性相关$\Leftrightarrow \alpha_1=0$;

当$s=2$时，(Ⅰ)线性相关$\Leftrightarrow \alpha_1$与α_2成比例;

2）当$s=1$时，(Ⅰ)线性无关$\Leftrightarrow \alpha_1\neq 0$;

当$s=2$时，(Ⅰ)线性无关$\Leftrightarrow \alpha_1$与α_2不成比例;

例4 判断向量组的线性相关性.

(1) R^2 中向量组

$$\alpha_1=[1,\ 0],\alpha_2=[0,\ 1],\ \alpha_3=[1,\ 3]$$

方法一 观察可知，$\alpha_3=\alpha_1+3\alpha_2$，故线性相关.

方法2 待定系数法 $\Rightarrow$ 转化为齐次线性方程组问题

当$m>n$时，m个n元向量必线性相关.因为转化的齐次方程组必有非零解.

特别地，$n+1$个n元**向量**必**线性相关.**

结论：线性相关性与线性方程组的联系

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m=\begin{bmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{nm}\end{bmatrix}\in\mathbb{K}^n.$

则列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关（线性无关）

$\Leftrightarrow n\times m$齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$

即 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 有非零解（仅有零解），其中$\boldsymbol{A}_{n\times m}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m].$

线性相关性与线性表示

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **是一个向量组**，由其中的一部分向量组成的向量组称为这个向量组的一个部分组.

向量组与其部分组的线性相关性之间的联系

结论：

1）部分组相关，则整组必相关；

2）整组无关，则任一非空部分组无关；

3）特别地，包含零向量或成比例向量在内的向量组必相关.

命题1 向量组(Ⅰ)$:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\ge 2)$线性相关

$\Leftrightarrow$ (Ⅰ)中至少有一向量可由其余向量线性表示.

向量组(Ⅰ)$:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\ge 2)$线性无关

$\Leftrightarrow$ (Ⅰ)中任一向量都不能由其余向量线性表示.

定理2 设向量组(I): $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关, 而(II): $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关，则

1）β可由(I)线性表示；2）表示法必惟一.

推论1 设(I): $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关, 而$\alpha_{s+1}$不能由(I)线性表示，则扩充组(II): $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$也线性无关.

（习题2.3的第7题要用这个结论）

引理2.3.1 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in\mathbb{K}^n$，则

$$<\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m>=\left\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i\,\middle|\,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{K}\right\}$$

是$\mathbb{K}^n$中包含$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的最小子空间.

定义2.3.3 $<\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m>$称为由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in\mathbb{K}^n$生成的子空间. 一个子空间$V\subset\mathbb{K}^n$称为有限生成的子空间，如果存在有限个元素$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in V$使$V=<\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m>$.

向量组间的线性表示与等价

定义　设(Ⅰ)$:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$;　(Ⅱ)$:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$是两个向量组. 如果(Ⅱ)中每个向量都可由(Ⅰ)线性表示，则称组(Ⅱ)可由组(Ⅰ)线性表示.

如果(Ⅰ)与(Ⅱ)可以互相线性表示，则称组(Ⅰ)与组(Ⅱ)等价，记作(Ⅰ)$\cong$(Ⅱ).

关于向量组间的线性表示与等价，易知有以下结论：

1) 向量组间的线性表示不满足对称性, 但满足

① 反身性，即任一向量组可由自身线性表示;

② 传递性，即

$$\left.\begin{array}{r}(\mathrm{II})\text{可由}(\mathrm{I})\text{表示}\\(\mathrm{III})\text{可由}(\mathrm{II})\text{表示}\end{array}\right\}\Rightarrow(\mathrm{III})\text{可由}(\mathrm{I})\text{表示}.$$

2) 向量组间的等价满足反身性、对称性、传递性.

例： 设向量$\alpha_1=[1,2,3,1]$, $\alpha_2=[-1,-2,-3,-1]$, $\alpha_3=[-1,-1,-1,1]$, $\alpha_4=[0,2,4,1]$.

构造向量组

（I）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$（线性相关）；

（II）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$（线性相关）；

（III）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$（线性无关）；

则

（1）向量组（I）与（III）等价;

（2）向量组（I）与（II）不是等价的.

向量组的极大无关组

定义2.3.4 给定$\mathbb{K}^n$中的一个向量组（I）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$. 若组（II）$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots\alpha_{i_r}\ (r\le s)$是（I）的一个部分组，且满足

① （II）线性无关；

② $\forall\alpha\in$（I），α可由（II）线性表示,

则称向量组（II）为向量组（I）的一个极大线性无关部分组，简称极大无关组.

引理2.3.2 如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 不全为零，则存在极大线性无关组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{ir}$.

基本引理

引理3.3 设$\mathbb{K}^n$中向量组(I): $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$可由(II): $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示. 则

(1) 如果$s > r$,则组(I): $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$一定线性相关;

(2) 如果(I): $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$线性无关, 则必有$s \le r$.

推论 等价的线性无关组必包含有相同个数的向量.

关于向量组的极大无关组，有以下结论

① 任一非空、有限、非零(即其中向量不全是零向量)的向量组必有极大无关组；（引理2.3.2）

线性无关向量组的极大无关组是其本身；

一般情况下，极大无关组不惟一.

② 向量组的任一极大无关组与向量组本身等价.

③ 向量组的任两个极大无关组等价.

向量组的秩

④ 向量组的任两个极大无关组所含向量的个数都相同

(与极大无关组的选取无关，而由向量组本身直接决定).

定义 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的极大无关组所含向量的个数称为该向量组的秩. 记为$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$.

规定 只含有零向量的向量组秩为0.

练习题:

试证明： 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = s$.

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) < s$.

注：若干结论（作业）

⑴ 若向量组(I)的秩为r，则(I)中任r个线性无关的向量都是 组(I)的极大无关组.

（2）若向量组(I)可由(II)线性表示，则$r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{II})$.

（3） 等价向量组有相同的秩.

子空间的基与维数

定义2.3.5 设V是K^n的一个子空间，若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in V$满足：

1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关；

2) V中任一向量可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$W$的一个**基**.

注 零空间$\{O\}$没有基.

注 (1)$\mathbb{K}^n$中的基本向量组$e_1,e_2,\cdots,e_n$就是它的一个基,称为$\mathbb{K}^n$的标准基.

(2)$\mathbb{K}^n$中任意$\boldsymbol{n}$个线性无关的向量都是它的一个基.

定理2.3.1 设$V\subset\mathbb{K}^n$是一个非零子空间（即$V\neq\{0\}$），则

（1）V的基必存在;

（2）如果$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$,和$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$,分别是$V$的一组基，则$s=t$.

（3）V中任取一个线性无关组，都可扩充为V的一个基.

定义2.3.6 设V是$\mathbb{K}^n$的一个非零子空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in V$是$V$的一个**基**，则称正整数$m$为**子空间**$V$的**维数**，记作$\dim_{\mathbb{K}} V=m$；称$V$为$m$**维子空间**.

如果$V=\{O\}$，则$\dim_{\mathbb{K}} V=0$.

例 2.3.1 $\mathbb{K}^n$的维数是n, 因此也将$\mathbb{K}^n$称作n维向量空间.

例 2.3.2 $M_{m\times n}$（$\mathbb{K}$）的维数是mn, $E_{ij}, i=1,2,\ldots,m, j=1,2,\ldots,n$是常用基.

例 2.3.3 $\mathbb{C}$可以看成维数为2的$\mathbb{R}$-向量空间，$\{1, \mathrm{i}\}$是一组基.

矩阵的秩

定义2.3.7 设矩阵$A=\left[a_{ij}\right]_{n\times m}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{(1)}\\ \boldsymbol{A}_{(2)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{(m)}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{A}^{(1)},\boldsymbol{A}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{A}^{(n)}]$,

称$\left\langle \boldsymbol{A}^{(1)},\boldsymbol{A}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{A}^{(n)}\right\rangle\subseteq\mathbb{K}^n$为$\boldsymbol{A}$的列空间，称列空间的维数 $\dim_{\mathbb{K}}\left\langle \boldsymbol{A}^{(1)},\boldsymbol{A}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{A}^{(n)}\right\rangle$为$\boldsymbol{A}$的**列秩**，记作$r_c(A)$;

称$\left\langle \boldsymbol{A}_{(1)},\boldsymbol{A}_{(2)},\cdots,\boldsymbol{A}_{(m)}\right\rangle\subseteq\mathbb{K}^n$为$\boldsymbol{A}$的行空间，称行空间的维数 $\dim_{\mathbb{K}}\left\langle \boldsymbol{A}_{(1)},\boldsymbol{A}_{(2)},\cdots,\boldsymbol{A}_{(m)}\right\rangle$为$\boldsymbol{A}$的行秩，记作$r_r(A)$;

例2.3.6

设$\varphi_{\boldsymbol{A}}:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$是由矩阵$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$确定的$\mathbb{K}-$线性映射，则

$\varphi_{\boldsymbol{A}}$的像

$$\operatorname{Im}\varphi_{\boldsymbol{A}}=\varphi_{\boldsymbol{A}}(\mathbb{K}^n)=\{x_1\boldsymbol{A}^{(1)}+x_2\boldsymbol{A}^{(2)}+\cdots+x_n\boldsymbol{A}^{(n)}\,|\,x_i\in\mathbb{K}\}$$

是$\mathbb{K}^m$的子空间$\left\langle\boldsymbol{A}^{(1)},\boldsymbol{A}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{A}^{(n)}\right\rangle$,即$\boldsymbol{A}$的列空间，故$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im}\varphi_{\boldsymbol{A}})=r_C(\boldsymbol{A})$;

而$\varphi_{\boldsymbol{A}}$的核

$$\ker\varphi_{\boldsymbol{A}}=\varphi_{\boldsymbol{A}}^{-1}(0)=\{\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\ldots,x_n]^T\,|\,x_i\in\mathbb{K}\}$$

是$\mathbb{K}^m$的子空间，同时也是齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=0$的解空间.

矩阵的秩

矩阵的行秩与列秩是矩阵的秩的两种刻画。

定理2.3.2 $\boldsymbol{A}$ 的行秩$r_r(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$ 的列秩$r_c(\boldsymbol{A})$.

定义3 称$\boldsymbol{A}$ 的行秩$r_r(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$ 的列秩$r_c(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A})$ 为矩阵$\boldsymbol{A}$的秩.

由定理3.2的证明过程可知：

结论 **初等行变换不改变矩阵的列向量之间的线性相关性.**

若$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \bar{\boldsymbol{A}}$（行阶梯矩阵），则二者行空间相等，秩相等.

设行阶梯矩阵$\bar{\boldsymbol{A}}$有r个非零行，则这r个非零行一定线性无关，从而构成$\bar{\boldsymbol{A}}$的行空间的基，因此$\bar{\boldsymbol{A}}$的秩为r(= $\bar{\boldsymbol{A}}$的非零行个数)。所以，计算A的秩，只需将

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \bar{\boldsymbol{A}}\text{（行阶梯矩阵）},$$

则有$r(A)=r(\bar{A}) = \bar{\boldsymbol{A}}$的非零行个数.

非齐次线性方程组解的存在及个数的判定

定理2.3.3 ①非齐次方程组(1)有解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})$.

当$r(\boldsymbol{A})\neq r(\tilde{\boldsymbol{A}})$时,(1)无解;

② 当$r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=n$时,(1)有惟一解;

③ 当$r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})<n$时,(1)有无穷多解。

非齐次线性方程组解的判定

记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$=[\boldsymbol{\alpha}_1, \quad \boldsymbol{\alpha}_2, \quad \cdots \quad ,\boldsymbol{\alpha}_n],$

则上述方程组（2）可写成向量方程形式

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}.$$

延伸：

方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$ 有解

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta}$可由系数阵的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性表出；

$\Leftrightarrow$向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$与向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}$等价；

$\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta})$

$\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\tilde{\boldsymbol{A}})$

齐次线性方程组解的判定

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

若记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则上述方程组（2）可写成矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}.$

定义　称齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的导出组.

① $r(\boldsymbol{A})=n \Leftrightarrow \boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 仅有零解；

② $r(\boldsymbol{A})<n \Leftrightarrow \boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 有无穷多解，从而有非零解.

齐次方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$ 仅有零解

$\Leftrightarrow$ 系数阵的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关;

$\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\mathrm{n}$

$\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{n}$

齐次方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ 系数阵的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性相关;

$\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)<\mathrm{n}$

$\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})<\mathrm{n}$

齐次线性方程组解的性质及结构

1、齐次线性方程组解的性质

（1）若η_1,η_2是$AX=0$的解，则$\eta_1+\eta_2$也是$AX=0$的解；

（2）若η是$AX=0$的解，则$k\eta,(k\in\mathbb{K})$也是$AX=0$的解.

注1 齐次线性方程组解的线性组合还是解；

注2 $AX=0$的解集

$$\ker(A)=\left\{X\in\mathbb{K}^n \,\middle|\, AX=0\right\}$$

是$\mathbb{K}^n$的子空间，称之为$AX=0$的解空间。

注： 当 $\ker(A)\neq\{0\}$(即$r(A)<n$)时，基必存在.

齐次方程组的基础解系（解空间的基）

1） 基础解系的定义

定义4　齐次线性方程组 $AX=0$有非零解时，如果解向量$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$满足以下两个条件：

(1) $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性无关；

(2) $AX=0$的任一解都可由$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性表出，

则称向量组$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$为方程组$AX=0$ 的一个基础解系。

当$r(\boldsymbol{A}_{m\times n})<n$时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$有非零解，基础解系存在.

如果$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$为齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系,则$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的通解可表示为:

$$\boldsymbol{X}=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_t$是任意常数.

2）基础解系的求法

求解$m \times n$齐次线性方程组$AX = 0$可分三步：

1) 对系数矩阵A作初等行变换，先将其化为行阶梯形矩阵.

2) 如果$r(A_{m \times n}) = r < n$，继续作初等行变换，将$A$化为行简化阶梯形矩阵$R$.

3) 选取主变量 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$ 为主变量，则得一般解

$$\begin{cases} x_{j_1} = -c_{1j_{r+1}} x_{j_{r+1}} - \cdots - c_{1j_n} x_{j_n}, \\ x_{j_2} = -c_{2j_{r+1}} x_{j_{r+1}} - \cdots - c_{2j_n} x_{j_n}, \\ \qquad \cdots, \\ x_{j_r} = -c_{rj_{r+1}} x_{j_{r+1}} - \cdots - c_{rj_n} x_{j_n}, \end{cases}$$

其中 $x_{j_{r+1}}, \cdots, x_{j_n}$ 任意取值.

不失一般性，不妨设$x_1,x_2,\cdots,x_r$为主变量，$x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$为自由变量(共计$n-r$个)，则

$$A\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$AX=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

从而，通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n \\ \vdots \\ -b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} -b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n \\ \vdots \\ -b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n \\ 1\cdot x_{r+1}+0\cdot x_{r+2}\cdots+0\cdot x_n \\ \vdots \\ 0\cdot x_{r+1}+0\cdot x_{r+2}\cdots+1\cdot x_n \end{bmatrix}
= x_{r+1}\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
+ x_{r+2}\begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
+\cdots+ x_n\begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

则通解为

$$X = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$，为任意常数.

(1) 显然, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是原方程组的$n-r$个解;

(2) 易证 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$, 线性无关;

(3) 且通解

$$\boldsymbol{X} = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$, 为任意常数;

因此$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是$AX=0$的一个基础解系, 且

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker(\boldsymbol{A}) = n - r(A).$$

齐次线性方程组解的结构

综上：　① $\dim\ker(\boldsymbol{A})=n-r_r(A)=\dim_K(\ker(\varphi_A))$;

② 当 $r(A)=n$时，$AX=0$仅有零解；

③当$r(\boldsymbol{A})<n$时，$\boldsymbol{AX}=0$有无穷多解,从而有非零解.

称解空间$N(\boldsymbol{A})$的任一个基为$\boldsymbol{AX}=0$的一个基础解系,

$\boldsymbol{AX}=0$的通解为

$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r},$$

其中$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$为$\boldsymbol{AX}=0$的一个基础解系,$k_1,k_2,\cdots,$
k_{n-r}为任意常数.

$$A_{m\times n}X=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

基础解系的另一取法

可对$x_{r+1},\cdots,x_n$取下列 $n-r$ 组数：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

分别代入$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n \end{cases}$

依次得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix}.$

从而求得原方程组的 $n-r$ 个解:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例2 解线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=0 \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4-x_5=0 \\ 3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=0 \end{cases}$

解
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & -3\\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因为$r(\boldsymbol{A})=2<5$ **故方程组有无穷多解，**

且基础解系中含有3个解向量.

同解方程组为$\begin{cases}x_1=-2x_3-x_4+2x_5,\\ x_2=x_3-3x_4+x_5\end{cases}$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

得原方程组的一个基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故原方程组的通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$.

其中k_1, k_2, k_3为任意常数.

例**6**：已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是齐次线性方程组$AX=0$的一个基础解系，证明$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$也是$AX=0$的一个基础解系.

习题2.3的第6题

求线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=0 \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=0 \\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$$
的基础解系。

非齐次线性方程组解的性质及结构

1．非齐次线性方程组解的性质

(1)设 $\boldsymbol{X}_1$ 及 $\boldsymbol{X}_2$ 都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解,则 $\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2$ 为导出的齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(2) 设$\boldsymbol{X}_0$是方程 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解,η是导出组 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,则 $\boldsymbol{X}_0+\eta$ 是方程组 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 的解.

非齐次线性方程组的通解

定理

当$r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=\mathrm{r}<n$时，$\boldsymbol{AX}=\beta$有通解

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r},$$

其中$\boldsymbol{X}_0$为$\boldsymbol{AX}=\beta$的一个特解，

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$为导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，

$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任意常数.

例5　求下述方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \\ 8 & 3 & 4 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$,得$x_1 = -\frac{9}{2}, x_2 = \frac{23}{2}$.

求得特解 $\left[-9/2,\quad 23/2,\quad 0,\quad 0,\quad 0\right]^{\mathrm{T}}$

下面求导出组的基础解系，令

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

代入 $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}x_3 + 2x_5, \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}x_3 - x_4 - 3x_5 \end{cases}$

得导出组的一个基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以方程组的通解为

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -9/2 \\ 23/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3$ 为任意常数.

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & -2 & -9/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 & 3 & 23/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\tilde{A})=2<5$,知方程组有无穷多解.

且原方程组等价于方程组

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{2}x_3+2x_5-\dfrac{9}{2}, \\ x_2=-\dfrac{1}{2}x_3-x_4-3x_5+\dfrac{23}{2} \end{cases}$$

4、设$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的解向量，且$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，求$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的通解。

解 由题设知$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$为三元方程组，且有无穷多解，又$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,故$1\leq r(A)\leq 2$,即$r(A)=1$或$2$.

令$\eta_1=X_2-X_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\eta_2=X_3-X_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，显然$\eta_1$，$\eta_2$线性无关，故$r(A)=1$，且$\eta_1$，$\eta_2$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的基础解系，从而$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的通解为

$$X=X_1+k_1\eta_1+k_2\eta_2，其中k_1,k_2为任意常数.$$

5、已知4阶方阵$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$均为4维列向量，其中$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$.如果$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组$AX=\beta$的通解.

解法1 令$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}$，则由$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,$$

将$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$代入上式，得

$$(2x_1+x_2-3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(x_4-1)\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$$

由$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，知

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 = 0, \\ -x_1 + x_3 = 0, \\ x_4 - 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 + 3, \\ x_3 = x_1, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

解得通解为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + k\boldsymbol{\eta} = [0, \quad 3, \quad 0, \quad 1]^{\mathrm{T}} + k[1, \quad -2, \quad 1, \quad 0]^{\mathrm{T}},$$

其中k为任意常数.

解法2 因为$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，且$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，

所以$r(\boldsymbol{A})=3$，且$\eta=[1,-2,1,0]^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解.

又$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，故$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$有解，因此

$r(\tilde{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=3<4$，从而$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解，且

$X_0=[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}$为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的一个特解，

通解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0+k\boldsymbol{\eta}=[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}+k[1,-2,1,0]^{\mathrm{T}}$，

其中k为任意常数.

补充习题

例4.2.12 求向量组$\alpha_1=[1,0,-1,1]^{\mathrm{T}}$， $\alpha_2=[2,1,-2,0]^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=[-2,-1,0,1]^{\mathrm{T}}$, $\alpha_4=[0,-1,2,1]^{\mathrm{T}}$， $\alpha_5=[0,0,-2,1]^{\mathrm{T}}$的秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

解 将所给向量构成一个 4×5 的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 并进行初等行变换

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_4', \alpha_5'] = \boldsymbol{R}.\end{aligned}$$

因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{R})=3$, 所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩为 3.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组, 并且有

$$\alpha_4 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3,\ \ \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_3.$$

例 1 设向量组(Ⅰ)$=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$，(Ⅱ)$=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\4\\2\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\a\\-1\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}2\\7\\3\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\3\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}3\\10\\4\\b\end{bmatrix}.$$

(1) a,b取何值时，向量组(Ⅱ)可由(Ⅰ)线性表示？

(2) a,b取何值时，向量组(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示？

(3) a,b取何值时，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)线性等价？

解 $[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3; \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3]$

$$= \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 3 & 10 \\ 2 & 0 & a & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & b \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-4r_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & a & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array}\right] = [\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2', \boldsymbol{\alpha}_3; \boldsymbol{\beta}_1', \boldsymbol{\beta}_2', \boldsymbol{\beta}_3'].$$

记$(\mathrm{I}') = \{\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2', \boldsymbol{\alpha}_3'\}$，$(\mathrm{II}') = \{\boldsymbol{\beta}_1', \boldsymbol{\beta}_2', \boldsymbol{\beta}_3'\}$，则

(1) (II)可由(I)线性表示$\Leftrightarrow(\mathrm{II}')$可由$(\mathrm{I}')$线性表示$\Leftrightarrow b-2=0 \Leftrightarrow b=2$；

(2) (I)可由(II)线性表示$\Leftrightarrow(\mathrm{I}')$可由$(\mathrm{II}')$线性表示$\Leftrightarrow a-1=0 \Leftrightarrow a=1$；

(3) $(\mathrm{I}) \cong (\mathrm{II}) \Leftrightarrow a=1$且$b=2$.

例 2 设 $r\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}=4$， $r\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5\}=3$，求 $r\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5\}$.

解 $r\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}=4 \Rightarrow \{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$线性无关

$\Rightarrow \{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$线性表示；

$r\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5\}=3 \Rightarrow \{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5\}$线性相关

$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_5$ 可由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$线性表示.

可知 $\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5$ 不能由无关组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$线性表示，从而

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5\}\text{线性无关} \Rightarrow r\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5\}=4.$$

注3 更一般地，$\mathbf{P}^n$ 的 $\boldsymbol{r}$ 维子空间 W 中任意 $\boldsymbol{r}$ 个线性无关的向量都是 W 的一个基, 并可进一步扩充为 $\mathbf{P}^n$ 的基.

例4.3.8 求 R^4 的子空间

$$W=\{[a+b+2c,b+c,-b-c+d,d]^{\mathrm{T}}\ \mid \forall a,b,c,d\in\mathrm{R}\}$$

的一个基及其维数；如果 $W\neq\mathrm{R}^4$，试将所求基扩充为 R^4 的一个基.

解 显然

$$
\begin{aligned}
W &= \left\{ a\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d\in\mathbb{R} \right\} \\
&= L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4),
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,-1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[2,1,-1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=[0,0,1,1]^{\mathrm{T}}$.

由

$$
[\boldsymbol{\alpha}_1.\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]=\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&-1&-1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{R},
$$

可知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1.\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{R})=3$, 且 $\boldsymbol{R}$ 的第 1,2,4 列所构成的向量组线性无关, 因此对应的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 W 的一个基, $\dim W=3$.

有多种方式将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的一个基. 观察可知, 试取 $\boldsymbol{\varepsilon}_2=[0,1,0,0]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^4$, 行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_2|\neq 0$, 所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 线性无关, 又 $\dim\mathbb{R}^4=4$, 所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的一个基. $\square$

谢谢！