1. 证明有界数集的上、下确界唯一.

证：设 S 为有界数集，A, B 都是其上确界，且 $A<B$. 取 $\varepsilon = \frac{B-A}{2} > 0$

因为 B 是 S 的上确界，所以 $\exists\, x \in S$，使得 $x > B-\varepsilon = A+\varepsilon > A$

与 A 是 S 的上确界矛盾. 故 $A=B$. 即上确界唯一. 同理可证有界数集下确界唯一.

2. 设 $S=\{x \mid x\in Q$ 并且 $x^2<3\}$. 证明：

(1) S 没有最大数与最小数

(2) S 在 Q 内没有上确界与下确界.

证：(1) $\forall\, \frac{q}{p} \in S$, $\frac{q}{p}>0$, 则 $(\frac{q}{p})^2<3$, $\frac{q}{p}<2$. 取有理数 $r>0$ 充分小，使 $r^2+4r < 3-(\frac{q}{p})^2$

于是 $(\frac{q}{p}+r)^2 = (\frac{q}{p})^2 + r^2 + \frac{2q}{p} r < (\frac{q}{p})^2 + r^2 + 4r < 3$. 即 $\frac{q}{p}+r \in S$

所以 S 没有最大数. 同理可证 S 没有最小数.

(2) (反证法). 设 S 在 Q 上有上确界，记 $\sup S = \frac{n}{m}$ ($m,n\in N_+$ 且 m,n 互素)

显然 $0<\frac{n}{m}<2$，由有理数平方不等于3. 所有只能有两种可能.

(i) $(\frac{n}{m})^2<3$. 由(1)知 存在充分小的有理数 $r>0$，使 $(\frac{n}{m}+r)^2<3$，说明 $\frac{n}{m}+r \in S$.

与 $\sup S = \frac{n}{m}$ 矛盾.

(ii) $(\frac{n}{m})^2>3$. 取有理数 $r>0$ 充分小，使得 $4r-r^2 < (\frac{n}{m})^2-3$. 于是 $(\frac{n}{m}-r)^2 =$

$(\frac{n}{m})^2 - \frac{2n}{m} r + r^2 > (\frac{n}{m})^2 - 4r + r^2 > 3$

说明 $\frac{n}{m}-r$ 也是 S 的上界，与 $\sup S = \frac{n}{m}$ 矛盾.

所以 S 没有上确界. 同理可证 S 无下确界.

2. 证明若 $n\in N^*$，n 不是完全平方数，则 $\sqrt{n}$ 是无理数.

$nq^2-kpq = p^2-kpq$

证：设 $\sqrt{n}$ 是有理数，则存在互质的两个数 p,q 使 $(\frac{p}{q})^2=n$.

设正整数 k 且满足 $k<\frac{p}{q}<k+1$. 则 $0<p-kq<q$.

又 $\frac{p}{q}(k+1)>n$. 所以 $p>nq-kp$.

所以 $\frac{nq-kp}{p-kq} = \frac{p}{q}$，左边分子<右边分子，左边分母<右边分母. 与 p,q 互质矛盾.

故不存在互质的两个数 p,q 使 $(\frac{p}{q})^2=n$.

法二：$\sqrt{n}=\frac{p}{q}$，p,q 互质，且 $p,q\in N^*$　$n=\frac{p^2}{q^2}$　$p^2=nq^2$

$\because p,q$ 互质 $\therefore p^2,q^2$ 互质. 与 $p^2=nq^2$ 矛盾，故 $\sqrt{n}$ 为无理数.

法三：假设 $\sqrt{n}$ 为有理数　$n=\frac{p^2}{q^2}$　$nq^2=p^2$　n 是 p 的因数. 则 $nr=p$

$nq^2=p^2=n^2r^2$　故 $q^2=nr^2$，n 是 q 的因数. n 是 p,q 的公因数与 p,q 互质矛盾.

错题报告. 9.13.

1° 错误点：假设 a,b 均为 S 的上确界，且 $a<b$，从 $\forall x\in S$，有 $x\le a$ 推出 $x+\varepsilon<b$，~~这样推出~~ 这样不能推出矛盾.

2° 错误点：① 从 $p^2=nq^2$，直接推出了 q^2 为 p^2 的因数，是不对的.

② 公因数与因数表达有误.

3° (1) 错误点：① $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$，直接叙述 S 中可找到最逼近 $\pm\sqrt{3}$ 的数，未用数学语言去证明.

② $(\frac{p}{q})^2<3$，存在足够小的有理数 r，使 $(\frac{p}{q}+r)^2<3$，但未取一个具体的数 r.

③ $k^2<3$，而 $\frac{k^2+3}{2}>k^2$，但 $\sqrt{\frac{k^2+3}{2}}$ 可能是无理数，不属于 S.

(2) 错误点：① 假设 $\inf S=\frac{n}{m}$，用 $\frac{n}{m}+r\in S$ 不能说明下确界不存在.

② 证明过程中未取定一个具体的数 r.

③ 从 S 在实数上有上下确界 不能推出 S 在有理数集无上下确界.

1. 按定义证明下列数列是无穷小量.

(7) $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$. 对 $\forall \varepsilon>0$, 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$, 当 $n>N$ 时 $\underline{0<\frac{n!}{n^n}<\frac{1}{n}}<\varepsilon$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

将原数列适当放大，放大后小于 ε 即可证明收敛.

(8) $\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}\right\}$

对 $\forall \varepsilon>0$, 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$, 当 $n>N$ 时

$$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}-\underbrace{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}\right)}_{>0}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}\right)=0$$

2. 按定义证明下述极限.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\frac{1}{2}$. (5) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$, 其中 $x_n=\begin{cases}\frac{n+\sqrt{n}}{n}, & n\text{是偶数}\\ 1-10^{-n}, & n\text{是奇数}.\end{cases}$

解: (3) 对 $\forall \varepsilon>0$, 取 $N=[\frac{1}{8\varepsilon}]$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\sqrt{n^2+n}-n-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}-\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{2(\sqrt{n^2+n}+n)}=\frac{n}{2(\sqrt{n^2+n}+n)^2}<\frac{1}{8n}<\varepsilon$$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\frac{1}{2}$

(5) $\forall\varepsilon$. $(0<\varepsilon<1)$, 取 $N=\max\left\{[\frac{1}{\varepsilon^2}], [\lg\frac{1}{\varepsilon}]\right\}$, 当 $n>N$ 时

若 n 为偶数, 则 $|x_n-1|=\left|\frac{n+\sqrt{n}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n}}{n}<\varepsilon$

若 n 为奇数, 则 $|x_n-1|=|1-10^{-n}-1|=10^{-n}<\varepsilon$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$. 知 对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N_1$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $|x_{2n}-a|<\varepsilon$

又 $\exists N_2$, 当 $n>N_2$ 时, $|x_{2n+1}-a|<\varepsilon$.

取 $N=\max\{2N_1, N_2\}$. 当 $n>N$ 时. $|x_n-a|<\varepsilon$. 因此有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

4. 设 $x_n\geq 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\geq 0$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

证: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 知 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N$. $\forall n>N$. 有 $|x_n-a|<\varepsilon^2$

此时 $|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}|\leq\sqrt{|x_n-a|}<\varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

5. $\{x_n\}$ 是无穷小量, $\{y_n\}$ 是有界数列. 证明 $\{x_ny_n\}$ 也是无穷小量.

证: 由 $\{y_n\}$ 是有界数列, 则对 $\forall n$. 有 $|y_n|\leq M$ $(M>0)$

又由 $\{x_n\}$ 是无穷小量, 则对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N$, 当 $n>N$ 时. $|x_n|<\frac{\varepsilon}{M}$.

则对以上的 ε, N, 有 $|x_ny_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$ 成立

故 $\{x_ny_n\}$ 也是无穷小量.

6. 证明，若 $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty$

证：由 $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$，知 $\forall G>0$，$\exists N_1>0$，$\forall n>N_1$ 有 $a_n>3G$。

对此 N_1，$\exists N>2N_1$，当 $n>N$ 时 $\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|<\frac{G}{2}$。

于是 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\frac{a_{N_1+1}+a_{N_1+2}+\cdots+a_n}{n}-\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|$

$>\frac{3G}{2}-\frac{G}{2}$

$=G$

因此 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty$。

错题报告. 9.15.

1. (7) 未对 $\{\frac{n!}{n^n}\}$ 这个数列通项进行变形放缩，直接 $\frac{n!}{n^n}<\varepsilon$ 去求 N 的表达式，很容易出错。

2. (3) 中间步骤化简出错。

(5) 取 $N_1=[\frac{1}{\varepsilon^2}]$，$N_2=[\lg\frac{1}{\varepsilon}]$，最后对 $N>2N_2$ 时，得到 $|x_n|<\varepsilon$。

应该是 $N=\max\{N_1,N_2\}$，因为 N_1 可能比 $2N_2$ 大。

5. 表述不完整，$\{y_n\}$ 是有界数列，则 $|y_n|<M\ (M>0)$，之后直接推出

$|x_ny_n|<\varepsilon\cdot M$，未写出 $\{x_n\}$ 是无穷小量这一条件给出 $|x_n|<\varepsilon$。

6. 前面取 $\forall G>0$，后面推出 $\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right|$ 大于一个与 n 相关的表达式 $(\frac{n-N_1}{n})G$

可继续做下去，大于 $\frac{G}{2}$。

4. ① 前面设出对 $\forall\varepsilon>0$，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，后面 $|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}|\leq\sqrt{|x_n-a|}<\sqrt{\varepsilon}$，不能是小于 ε。

② 从 $\sqrt{x_n}-\sqrt{a}<\sqrt{x_n-a}<\sqrt{\varepsilon}$ 无法推出 $\sqrt{x_n}-\sqrt{a}<\varepsilon$，因为 ε 是取的大于0的任意数。

1. 利用夹逼法计算极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$

解: (1) 由 $\frac{n}{n+\sqrt{n}}<\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)<\frac{n}{n+1}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.知原极限 $=1$

(2) 由 $0<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{\sqrt{1\cdot3}\cdot\sqrt{3\cdot5}\cdot\sqrt{5\cdot7}\cdot\cdots\cdot\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$, 故原极限 $=0$

2. 求下列数列的极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+n^3}{3^{n+1}+(n+1)^3}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

解: (1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n^3}{3^n}}{3\left(1+\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\right)}=\frac{1}{3}$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\times3}{2^2}\cdot\frac{2\times4}{3^2}\cdot\frac{3\times5}{4^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}$

$=\frac{1}{2}$

3. 证明 若 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

证: 取 $1<r<l$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$. 知 $\exists N$, $\forall n>N$. 有 $\frac{a_n}{a_{n+1}}>r>1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{1}{r}$.

于是 $0<a_n<a_{N+1}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-N-1}$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{a_{N+1}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-N-1}\right\}=0$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

4. 证明. 若 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$

证: 由 $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}$, 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$. $a_n>0$.

~~由几何平均的收敛定理知~~ $\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a}$.

~~法二~~: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln(a_n)^{\frac{1}{n}}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln a_1+\ln\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\ln\frac{a_n}{a_{n-1}}}{n}}$

$=\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln a}}\ \cancel{e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln a}}\ e^{\ln a}$

$=a$

求极限时经常会用到取对数的思想.

5. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = ab$

证：令 $a_n = a + \alpha_n$，$b_n = b + \beta_n$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$

设对 $\forall n \in N_+$，$|\beta_n| \le M$

$$\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = ab + \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k + \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_{n-k+1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k| = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k = 0$

而 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k\beta_{n-k+1}| \le \dfrac{M}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k| \to 0 \ (n\to\infty)$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = ab$

6. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a \ (-\infty < a < +\infty)$ 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$

证：因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}\right) = a$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n}\right) = a - a = 0.$

错题报告 9.19.

3. 错误答案：$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}\cdot l$

根据 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ ，$l>1$

所以 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

错误点：① 上面错误答案中忽略了 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 时等式也会成立]

② 通过数列 $\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\}$ 极限 $l>1$，推出数列 $\{a_n\}$ 是单调递减的.

且有下界 0. 不能直接利用单调有界原理说 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

那任意负数都是 $\{a_n\}$ 的下界.

4. 错误点：从 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a$. 不能推出 $\lim_{n\to\infty} a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}} = a^n$.

5. 错误点 ① 尝试构造 $a_q b_q$ 和 $a_p b_p$ 的极限都为 ab，利用夹逼法求证.

但构造不清晰或有误.

② 取 $\max\{a_n\}$，仅管数列 $\{a_n\}$ 是收敛的，但最值也可能取不到.

③ $\left|\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n} - ab\right| = \left|\frac{(a_1b_n-ab)+\cdots+(a_nb_1-ab)}{n}\right|$

再将绝对值中分为两部分. 但后边的分析有问题，特别是 "$<M\varepsilon$"，"$<|b|\varepsilon$" 难以推出.

1、证明：(1) 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量，$|y_n| \geq \delta > 0$，则 $\{x_n y_n\}$ 是无穷大量

(2) 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$，则 $\{x_n y_n\}$ 与 $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ 是无穷大量。

证：(1) 由 $\{x_n\}$ 是无穷大量，对 $\forall G>0$，$\exists N$，当 $n>N$，有 $|x_n| > \frac{G}{\delta}$。

对以上 G，N，有 $|x_n y_n| > G$。所以 $\{x_n y_n\}$ 也是无穷大量。

(2) 由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$。知 $\exists N_1$，当 $n > N_1$ 时 $\frac{|b|}{2} \leq |y_n| \leq 2|b|$

由 $\{x_n\}$ 是无穷大量，对 $\forall G>0$，$\exists N_2$，$\forall n > N_2$。

有 $|x_n| > \max\left\{\frac{2G}{|b|}, 2|b|G\right\}$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n y_n| > G$，$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > G$。

故 $\{x_n y_n\}$，$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ 是无穷大量。

2.(1) 用 Stolz 定理证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a>1)$

证：根据 Stolz 定理 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \log_a \frac{n}{n-1}$

~~构造~~数列 $\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$，现证 $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a x_n = 0$

对 $\forall \varepsilon > 0$。取 $\eta = \min\{a^{\varepsilon}-1, 1-a^{-\varepsilon}\} > 0$。由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

知 $\exists N$，当 $n>N$，有 $|x_n - 1| < \eta$。

于是 $a^{-\varepsilon} < x_n < a^{\varepsilon}$，即 $-\varepsilon < \log_a x_n < \varepsilon$。即 $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a x_n = 0$

因而有原极限等于 0。

3.(1) 在 Stolz 定理中，若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \infty$，能否得出 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$ 的结论？

(2) 在 Stolz 定理中，若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ 不存在，能否得出 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ 不存在的结论。

解：(1) 不能。 $x_n = (-1)^n n$，$y_n = n$

(2) 不能 $x_n = 1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1} n$，$y_n = n^2$