第六章　微分方程

第三节 可降阶的高阶微分方程

天津大学

数学学院

郭飞

第三节　可降阶的高阶微分方程

一、$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程

二、$y''=f(x, y')$型的微分方程

三、$y''=f(y, y')$型的微分方程

一、$y^{(n)}=f(x)$型微分方程

方程的解法　　积分n次

$$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1,\quad y^{(n-2)}=\int[\int f(x)dx+C_1]dx+C_2,\ \cdots.$$

例1　求微分方程 $y'''=e^{2x}-\cos x$ 的通解.

解　对所给方程接连积分三次, 得

$$y''=\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C_1,$$

$$y'=\frac{1}{4}e^{2x}+\cos x+C_1x+C_2,$$

$$y=\frac{1}{8}e^{2x}+\sin x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3,$$

这就是所给方程的通解.

二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程 (缺y)

设$y'(x) = p(x)$，则 $y'' = p'$，原方程化为一阶方程

$$p' = f(x, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(x, C_1)$

则得 $y' = \varphi(x, C_1)$

再一次积分，得原方程的通解

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2$$

例2. 求解 $\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy' \\ y\big|_{x=0}=1, \quad y'\big|_{x=0}=3\end{cases}$

解：设 $y'(x)=p(x)$, 则 $y''=p'$, 代入方程得

$$(1+x^2)p'=2xp \quad \text{分离变量得} \quad \frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)}$$

积分得 $\ln|p|=\ln(1+x^2)+\ln|C_1|$, 即 $p=C_1(1+x^2)$

利用 $y'\big|_{x=0}=3$, 得 $C_1=3$, 于是有 $y'=3(1+x^2)$

两端再积分得 $y=x^3+3x+C_2$

利用 $y\big|_{x=0}=1$, 得 $C_2=1$, 因此所求特解为

$$y=x^3+3x+1$$

推广: $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, \cdots, y^{(n-1)})$ 型

特点: 不显含未知函数 y 及 $y', \cdots, y^{(k-1)}$.

解法: 令 $y^{(k)} = P(x)$

则 $y^{(k+1)} = P', \ y^{(n)} = P^{(n-k)}$.

代入原方程, 得

P(x)的(n-k)阶方程

$P^{(n-k)} = f(x, P(x), \cdots, P^{(n-k-1)}(x))$. 求得 $P(x)$,

将 $y^{(k)} = P(x)$ 连续积分 k 次, 可得通解.

例3. 求方程 $xy^{(5)}-y^{(4)}=0$ 的通解.

解 设 $y^{(4)}=P(x)$, $\quad y^{(5)}=P'(x)$

代入原方程 $\quad xP'-P=0$,（$P\neq 0$）

解线性方程, 得 $P=C_1x \qquad$ 即 $y^{(4)}=C_1x$,

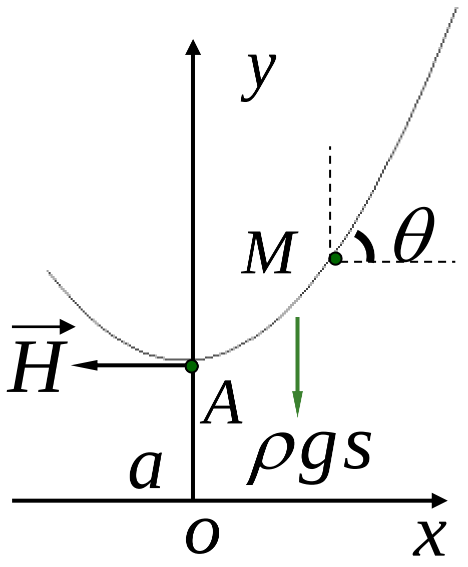
两端积分,得 $y'''=\frac{1}{2}C_1x^2+C_2$, $\cdots\ \cdots$,

$$y=\frac{C_1}{120}x^5+\frac{C_2}{6}x^3+\frac{C_3}{2}x^2+C_4x+C_5\ ,$$

原方程通解为 $y=d_1x^5+d_2x^3+d_3x^2+d_4x+d_5$

例4. 设有一均匀, 柔软的绳索, 两端固定, 绳索仅受重力作用而下垂,

解: 取坐标系如图.考察最低点 A 到任意点$M(x,y)$弧段的受力情况:



A 点受水平张力 $\vec{H}$

M 点受切向张力 $\vec{T}$

弧段重力大小 $\rho g s$ （ρ : 密度, s :弧长）

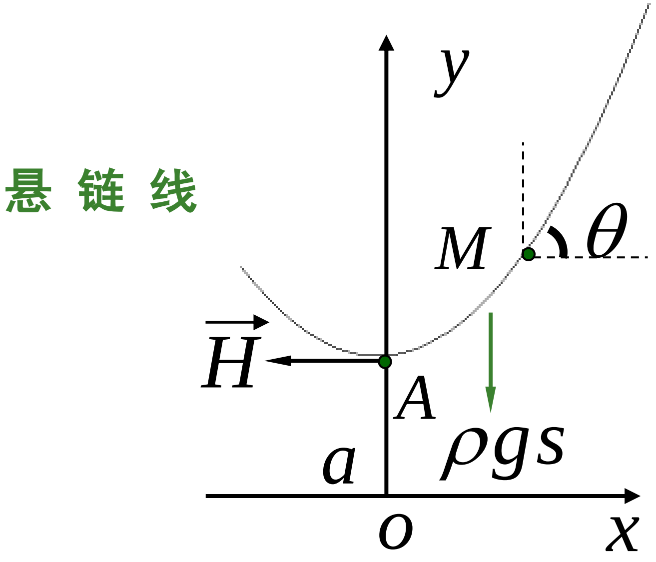
按静力平衡条件, 有 $T\cos\theta = H$, $T\sin\theta = \rho g s$

两式相除得 $\tan\theta = \frac{1}{a}s$, $\quad (a = H/\rho g)$

故有 $y' = \frac{1}{a}\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \longrightarrow y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}$

设 $|OA| = a$, 则得定解问题:

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{a}\sqrt{1+y'^2} \\ y\big|_{x=0} = a, \quad y'\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$



令 $y' = p(x)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, 原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{a}\mathrm{d}x$$

两端积分得 $\operatorname{Arsh} p = \dfrac{x}{a} + C_1$, 由 $y'\big|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = 0$,

则有 $y' = \operatorname{sh}\dfrac{x}{a}$

两端积分得 $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a} + C_2$, 由 $y\big|_{x=0} = a$, 得 $C_2 = 0$

故所求绳索的形状为 $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$

三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程 (缺x)

令 $y' = p$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ （难点）

故方程化为 $$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(y, C_1)$, 即得

$$y' = \varphi(y, C_1)$$

分离变量后积分, 得原方程的通解

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

例5. 求解 $yy''-y'^2=0$.

解： 设 $\boldsymbol{y'=p}$, 则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

代入方程得 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=0$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$ 或 $p=0$

两端积分得 $\ln|p|=\ln|y|+\ln|C_1|$, 即 $p=C_1y$,

$\therefore \quad y'=C_1y$ (一阶线性齐次方程)

故所求通解为 $y=C_2\mathrm{e}^{C_1x}$

例6. 解初值问题$\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y\big|_{x=0} = 0\,, \quad y'\big|_{x=0} = 1 \end{cases}$

解： 令 $y' = p,$ 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 代入方程得

$$p\,\mathrm{d}p = e^{2y}\,\mathrm{d}y$$

积分得 $\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1$

利用初始条件,得 $C_1 = 0$, 根据 $p\big|_{y=0} = y'\big|_{x=0} = 1 > 0$, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = e^{y}$$

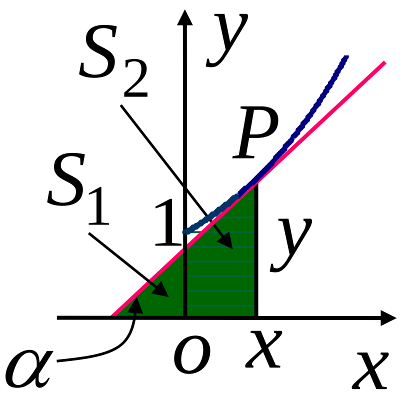
积分得 $-e^{-y} = x + C_2$, 再由 $y\big|_{x=0} = 0$, 得 $C_2 = -1$

故所求特解为 $1 - e^{-y} = x$

例7 (考研) 设函数 $y(x)\,(x\ge 0)$ 二阶可导, 且 $y'(x)>0, y(0)=1$, 过曲线 $y=y(x)$ 上任一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴围成的三角形面积记为 S_1, 区间$[\,0,x\,]$ 上以 $y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2, 且 $2S_1-S_2\equiv 1$, 求 $y=y(x)$ 满足的方程 .

解 因为 $y(0)=1, y'(x)>0$, 所以 $y(x)>0.$

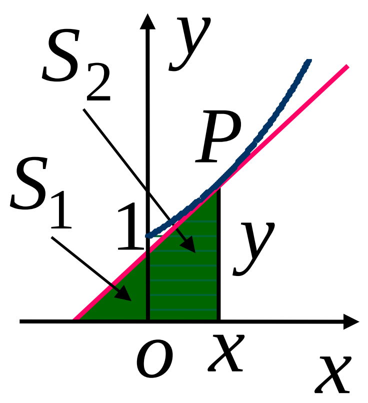
设曲线 $y=y(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的切线倾角为 α, 于是



$$S_1=\frac{1}{2}y^2\cot\alpha=\frac{y^2}{2y'}$$

$$S_2=\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$$

利用 $2S_1 - S_2 = 1$，得 $\dfrac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t = 1$



两边对 x 求导，得　$yy'' = (y')^2$

定解条件为　$y(0) = 1,\quad y'(0) = 1$

令 $y' = p$，　则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ 方程化为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^2 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

解得 $p = C_1 y$，利用定解条件得 $C_1 = 1$，再解 $y' = y$，得

$y = C_2\,\mathrm{e}^x$，再利用 $y(0) = 1$ 得 $C_2 = 1$，故所求曲线方程为

$$y = \mathrm{e}^x$$

四、小结

三类可降阶的微分方程的解法

1. $y^{(n)} = f(x)$

   逐次积分

2. $y'' = f(x, y')$

   令 $y' = p(x)$，则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$

3. $y'' = f(y, y')$

   令 $y' = p(y)$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

思考与练习

求通解 $y'' = \dfrac{1+y'^2}{2y}$.

解 方程不显含 x.

令 $y' = P$, $y'' = P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$, 代入方程，得

$P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1+P^2}{2y}$, 解得， $1+P^2 = C_1 y$,

$\therefore$ $P = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$,

故方程的通解为 $\dfrac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2$.