数分　　　　　　　　　　　　熊棠宇

A 优

2. 证：$f(x)$在(a,b)连续，且$f(a^+)$，$f(b^-)$存在 ⇒ 可取到介于$f(a^+)$，$f(b^-)$间一切值。

证明：令 $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(a,b) \\ f(a^+), & x=a \\ f(b^-), & x=b \end{cases}$

∴ $f(x)$在$[a,b]$连续　　不妨设$f(a^+)<f(b^-)$

由中间值定理：$g(x)$在$[a,b]$上可取到$[f(a^+),f(b^-)]$间一切值。

∴ $f(x)$在(a,b)上可取到$[f(a^+),f(b^-)]\setminus\{f(a^+),f(b^-)\}$，即：$(f(a^+),f(b^-))$间一切值

3. 证：闭区间$[a,b]$上单调有界函数$f(x)$能取到$f(a)$，$f(b)$间一切值，则$f(x)$是$[a,b]$上连续函数。

证明：不妨设$f(x)$在$[a,b]$单调增加，假设$f(x)$在$[a,b]$上不连续

设$f(x)$在ξ处不连续　　则有：$\cancel{\lim_{x\to\xi^-}f(x)\le f(\xi)\le\lim_{x\to\xi^+}f(x)}$，且$\lim_{x\to\xi}$ $f(\xi^-)\ne f(\xi^+)$

由实数系稠密性：$(f(\xi^-),f(\xi^+))$中间有无限元素，除$f(\xi)$均取不到，矛盾。

若$f(x)$在a处不连续，则有：$f(a)\ne f(a^+)$　则：$(f(a),f(a^+))$中元素取不到，矛盾

在b处同理

综上，$f(x)$在$[a,b]$上为连续函数

8.(1)：$\sin\frac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续，但在$(a,1)$上一致连续。

证明：取$x_n'=\frac{1}{n+1}$，$x_n''=\frac{1}{2(n+1)}$ $(n=1,2,3\cdots)$

∴ ~~x_n'，$x_n''\in(0,1)$，并有：$|x_n'-x_n''|=\frac{1}{2(n+1)}$~~　∴ $\lim_{n\to\infty}|x_n'-x_n''|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}=0$

~~而：$\lim_{n\to\infty}|f(x_n')-f(x_n'')|=\lim_{n\to\infty}\left|\sin\frac{1}{n+1}-\sin\frac{1}{2(n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[2\cos\frac{3}{2(n+1)}\cdot\sin\frac{1}{2(n+1)}\right]=2\lim_{n\to\infty}\cos\frac{3}{2(n+1)}\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{2(n+1)}$~~

而：

8.(1)：$\sin\frac{1}{x}$在$(0,1)$不一致连续，在$(a,1)$ $(a>0)$一致连续

证明：令 $x_n'=\frac{1}{n\pi}$，$x_n''=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$ $(n=1,2,3\cdots)$，有 $x_n', x_n''\in(0,1)$

$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n'-x_n''|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{n\pi(n\pi+\frac{\pi}{2})}=0$

而 $\left|\sin\frac{1}{x_n'}-\sin\frac{1}{x_n''}\right|=1$，$|f(x_n')-f(x_n'')|$不可能收敛于0　　$\therefore \sin\frac{1}{x}$在$(0,1)$不一致连续

$\forall\varepsilon>0$，要找$\delta>0$，使$\forall x', x''\in(a,1)$，满足$|x'-x''|<\delta$，有：

$\left|\sin\frac{1}{x'}-\sin\frac{1}{x''}\right|=\left|2\cos\left(\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}\right)\sin\left(\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right)\right|\le 2\frac{|x'-x''|}{x'x''}<\varepsilon$，即：$|x'-x''|<\varepsilon\cdot\frac{x'x''}{2}$

$\because \frac{x'x''}{2}>\frac{a^2}{2}$　　$\therefore$令$\delta=\frac{\varepsilon\cdot a^2}{2}$

$\therefore \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\frac{\varepsilon\cdot a^2}{2}$，对$\forall x', x''\in(a,1)$且$|x'-x''|<\delta$，有$\left|\sin\frac{1}{x'}-\sin\frac{1}{x''}\right|<\varepsilon$

$\therefore \sin\frac{1}{x}$在$(a,1)$ $(a>0)$上一致连续

(2)：$\sin x^2$在$(-\infty,\infty)$上不一致连续，在$[0,A]$上一致连续

证明：令 $x_n'=\sqrt{n\pi}$，$x_n''=\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}$ $(n=1,2,3\cdots)$，有$x_n', x_n''\in(-\infty,\infty)$

$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n'-x_n''|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi}+\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}}=0$

而：$|\sin x_n'^2-\sin x_n''^2|=1$，$|f(x_n')-f(x_n'')|$不可能收敛于0　　$\therefore \sin x^2$在$(-\infty,\infty)$上不~~不~~一致连续

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2A}$，任意$x'$，和$x''\in[0,A]$，满足$|x'-x''|<\delta$，有：

~~$|\sin x|$~~ $|\sin x'^2-\sin x''^2|=|2\cos(x'^2+x''^2)\sin(x'^2-x''^2)|\le 2|x'^2-x''^2|=2|x'-x''|(x'+x'')$

$<$ ~~$2+\varepsilon+$~~ $\frac{2(x'+x'')}{2A}\varepsilon<\varepsilon$

$\therefore \sin x^2$在$[0,A]$一致连续

扫描全能王 创建

数分　　　　熊荣宇

8

8.(5): $\cos\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续

证明: $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta=2\varepsilon$, 使 $\forall x', x''\in[0,+\infty)$ 且满足 $|x'-x''|<\delta$, 有:

$$\left|\cos\sqrt{x'}-\cos\sqrt{x''}\right| = 2\left|\sin\frac{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}{2}\sin\frac{\sqrt{x'}-\sqrt{x''}}{2}\right| \le \frac{1}{2}\left|\sqrt{x'}+\sqrt{x''}\right|\cdot\left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right| = \frac{1}{2}|x'-x''|$$

$$<\frac{1}{2}\delta=\varepsilon$$

$\therefore \cos\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续

11. $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 上一致连续 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 (a,b) 上有界

证明: $\because f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 上一致连续

(定理3.4.7) $\therefore f(a^+)$, $f(b^-)$ 存在

令 $g(x)=\begin{cases} f(a^+) & (x=a) \\ f(x) & (x\in(a,b)) \\ f(b^-) & (x=b)\end{cases}$

$\because f(x)$ 在 (a,b) 连续

$\therefore g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

$\therefore g(x)$ 有界　$\therefore f(x)$ 在 (a,b) 上有界

12. 证: (1) 某区间上两一致连续函数之和必定一致连续

证明: ~~任取~~ 任取任意区间 I 上函数 $f: \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,

则有: $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta_1>0$, $\forall x', x''\in I$ ($|x'-x''|<\delta_1$), 有 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$

~~$\forall \varepsilon>0$~~ $\exists \delta_2>0$, $\forall x', x''\in I$ ($|x'-x''|<\delta_2$), 有 $|g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$

即 对于上述 ε, 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则有: $\left|[f(x')+g(x')]-[f(x'')+g(x'')]\right|<\varepsilon$

$\therefore f(x)+g(x)$ 在 I 上一致连续　$\therefore$ 命题得证。

(2) 某区间上一致连续函数之积不一定一致连续

$\exists x'=\frac{1}{\delta}$, $x''=\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}$

证明: 令设 $f(x)=g(x)=x$, $(x\in\mathbb{R})$　易知 $f(x)$, $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续

而 $f(x)\cdot g(x)=x^2$　即对 $f(x)\cdot g(x)$, $\exists \varepsilon_0=1$, $\forall \delta>0$, $\exists$ ~~$x'=\frac{\delta}{8}$, $x''=\frac{\delta}{8}+\frac{\delta}{2}$~~, 满足:

$|x'-x''|=\frac{\delta}{2}<\delta$, 但 $|x'^2-x''^2|=|x'+x''|\cdot|x'-x''|=\frac{\delta}{2}\cdot\left|\frac{2}{\delta}+\frac{\delta}{2}\right|>\frac{\delta}{2}\cdot\frac{2}{\delta}=1=\varepsilon_0$

$\therefore f(x)\cdot g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上非一致连续

~~令 $f(x)=x=g(x)$ $(x\in(0,1))$　则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $=\frac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 上~~

令 $f(x)=x=g(x)$, $(x\in[1,2])$　$f(x)\cdot g(x)=x^2$ $(x\in[1,2])$ ~~在 $[1,2]$~~

易知: $\lim\limits_{x\to1^+}[f(x)\cdot g(x)]=1$, $\lim\limits_{x\to2^-}[f(x)\cdot g(x)]=4$　$\therefore f(x)\cdot g(x)$ 在 $[1,2]$ 上一致连续

综上, 命题得证。

14. $f(x)$在$[a,b]$连续，$a\le x_1<x_2<\cdots<x_n\le b \Rightarrow$ 在$[a,b]$中必有ξ，使：

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$$

证明：由~~中间~~最值定理：$\exists \eta,\gamma\in[a,b]$，对$\forall x\in[a,b]$，有：$f(\eta)\le f(x)\le f(\gamma)$

令设$m=f(\eta)$，$M=f(\gamma)$

$\therefore f(x_n)\in[m,M]\ (n=1,2,3,\cdots,n)$，$\frac{1}{n}[f(x_1)+\cdots+f(x_n)]\in[m,M]$

由中间值定理：$\exists\xi\in[a,b]$，使$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+\cdots+f(x_n)]\in[m,M]$

15. $f(x)$在$[a,+\infty)$连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（有限），~~则~~ $\Rightarrow f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续。

证明：$\because \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

$\therefore \forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，s.t. ~~$\forall|x_1-x_2|<$~~ $\forall x_1,x_2>X$，有：$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

对上述ε，在区间$(X,+\infty)$，$\exists\delta_1=1$，$\forall|x_1-x_2|<\delta$且$x_1,x_2>X$，有：$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

$\because$ ~~$f(x)$在~~ 在区间$[a,X]$。$\because f(x)$连续　$\therefore f(x)$在区间$[a,X]$一致连续

$\therefore\exists\delta>0$，$\forall|x'-x''|<\delta$且$x',x''\in[a,X]$，有：$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

对于上述ε，

合并两区间，可得：~~$\forall\varepsilon>0$~~，$\exists\delta>0$，$\forall|x'-x''|<\delta$且$x',x''\in[a,+\infty)$，有：

~~$|f(x')-f(x'')|$~~ ①：$x',x''\in[a,X]$或$x',x''\in(X,+\infty)$

$\therefore|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

②：$x'\in[a,X]$；$x''\in(X,+\infty)$

$\therefore|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-f(X)|+|f(x'')-f(X)|<2\varepsilon$

由ε任意性

《数分》　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　熊翠宇

15、$f(x)$在$[a,+\infty)$连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$(有限) $\Rightarrow$ $f(x)$在$[a,+\infty)$一致连续。

证明：$\because \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$(有限)

$\therefore \forall \varepsilon>0, \exists X>a$, s.t. $\forall x', x''>X$，有：$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$

对上述ε，在区间$[X+1,+\infty)$上，有：

$\exists \delta_0=1, \forall x', x''\geq X+1$且$|x'-x''|<\delta_0=1$，有：$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\because f(x)$在$[a,X+1]$连续　　$\therefore f(x)$在$[a,X+1]$一致连续(cantor定理)

$\therefore$对于上述ε，$\exists \delta_1>0$, s.t. $\forall x', x''$满足$|x'-x''|<\delta_1$且$x', x''\in[a,X+1]$，有：$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$

综合$[a,X+1]$，$[X+1,+\infty)$两区间，有：

对于上述$\varepsilon>0$，$\exists \delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$, s.t. $\forall x', x''$满足$|x'-x''|<\delta$，且$x', x''\in[a,+\infty)$，有：

①：若$x', x''\in[a,X+1]$或$x', x''\in(X+1,+\infty)$

则有：$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$

②：若x', x''分别属于$[a,X+1]$或$(X+1,+\infty)$中一个区间。　不妨设：$x'\in[a,X+1]$，$x''\in(X+1,+\infty)$

则有：$|f(x')-f(x'')|\leq|f(x')-f(X+1)|+|f(X+1)-f(x'')|$

$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

综上，有：$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, s.t. $\forall x', x''$满足：$|x'-x''|<\delta$且$x', x''\in[a,+\infty)$，

有：$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

得证。

T4：证：从椭圆一个焦点发出的任一束光线，反射后必过另一焦点。

证明：不妨设焦点在x轴上，考虑x轴上方。设该区域解析式：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (y>0)$

对该上方椭圆上任一点 (x_0,y_0) 有：$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，$\frac{a^2}{b^2}y_0^2=a^2-x_0^2$　（即：$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ (x\in(-a,a))$）

易知：$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 连续

在 x_0 处，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x_0+\Delta x)^2}-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-2x_0-\Delta x}{\sqrt{a^2-(x_0+\Delta x)^2}+\sqrt{a^2-x_0^2}}$

$=\frac{\frac{b}{a}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-2x_0-\Delta x)}{(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sqrt{a^2-(x_0+\Delta x)^2})+\sqrt{a^2-x_0^2}}=\frac{\frac{b}{a}\cdot -2x_0}{\sqrt{a^2-\lim\limits_{\Delta x\to 0}(x_0+\Delta x)^2}+\sqrt{a^2-x_0^2}}=\frac{-\frac{b}{a}x_0}{\sqrt{a^2-x_0^2}}=\frac{-x_0}{\frac{a}{b}\cdot y_0}\cdot\frac{b}{a}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$

考虑第一象限内情况。($y_0>0$ 时，

设 (x_0,y_0) 与 $(-c,0)$ 连线斜率为：$\tan\theta_1=\frac{y_0}{x_0+c}$

而切线斜率：$\tan\theta=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$，~~法线斜率：$\tan\theta'=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}$~~

切 ~~法线与连线夹角：$\tan\beta=\tan(\theta'-\theta_1)=\frac{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y_0}{x_0}-\frac{y_0}{x_0+c}}{1+\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y_0}{x_0}\cdot\frac{y_0}{x_0+c}}=$~~

连线与切线夹角正切：$\tan\alpha_1=\frac{\frac{y_0}{x_0+c}+\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}}{1-\frac{y_0}{x_0+c}\cdot\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}$

$=\frac{a^2y_0^2+b^2x_0^2+cx_0b^2}{(a^2-b^2)x_0y_0+a^2cy_0}=\frac{a^2b^2+cx_0b^2}{c^2x_0y_0+a^2cy_0}=\frac{b^2}{cy_0}$

(x_0,y_0) 与 $(c,0)$ 连线正切：$\tan\theta_2=\frac{y_0}{x_0-c}$

连线与切线夹角正切：$\tan\alpha_2=\sim\frac{-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}-\frac{y_0}{x_0-c}}{1-\frac{y_0}{x_0-c}\cdot\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}$

$=\frac{cx_0b^2-a^2y_0^2-b^2x_0^2}{(a^2-b^2)x_0y_0-a^2cy_0}=\frac{cx_0b^2-a^2b^2}{c^2x_0y_0-a^2cy_0}=\frac{b^2}{cy_0}$

$\because\tan\alpha_1=\tan\alpha_2$　$\therefore\alpha_1=\alpha_2\ (\alpha_1,\alpha_2\in(0,\frac{\pi}{2}))$，此时反射后过另一焦点

而当 $y_0=0$ 时，切线解析式：$x_0=\pm a$　此时也过另一焦点

综上，由对称性可知：反射后必过另一焦点。

~~T6：不可导点左右导数~~

~~(1)：$y=|\sin x|$~~

~~$y=|\sin x|$ 在 $x=\pi$ 处不可导。~~　~~$x=\pi$ 时，$y=0$。~~

~~在 $x=\pi$ 处，$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\sin\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$~~

~~$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\sin\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\sin\Delta x}{\Delta x}=-1$~~

(2)：

T6：不可导点，左右导数

(1)：$y=|\sin x|$

在 $x=k\pi$ 处，$y=0$ $(k\in \mathbb{Z})$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\sin(\Delta x+k\pi)|-|\sin k\pi|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\sin(k\pi+\Delta x)|-|\sin k\pi|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

(2)：$y=\sqrt{1-\cos x}$

~~在 $x=2k\pi+\pi$ $(k\in \mathbb{Z})$ 处，有 $y=2$。~~

~~$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos[(2k+1)\pi+\Delta x]}-\sqrt{1-\cos(2k+1)\pi}}{\Delta x}$~~ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+\cos\Delta x}-2}{\Delta x}=$

$y=\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{|2\sin^2\frac{x}{2}|}=\sqrt{2}|\sin\frac{x}{2}|$　由(1)知不可导点：$x=2k\pi$ $(k\in \mathbb{Z})$

在 $x=2k\pi$ 处：$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}|\sin(k\pi+\frac{\Delta x}{2})|-\sqrt{2}|\sin k\pi|}{\Delta x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}|\sin(k\pi+\frac{\Delta x}{2})|-\sqrt{2}|\sin k\pi|}{\Delta x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

T6：(3)：$y=e^{-|x|}$

在x=0处。

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-|\Delta x|}-e^{-|0|}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x+o(-\Delta x)}{\Delta x}=-1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{e^{-|\Delta x|}-e^{-|0|}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x+o(\Delta x)}{\Delta x}=1$$

(4)：$y=|\ln(x+1)|$

在x=0处。

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x+o(\Delta x)}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\ln(\Delta x+1)|-|\ln 1|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\ln(\Delta x+1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\cancel{\frac{\ln(\Delta x+1)-1+o(\Delta x)}{\Delta x}}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\ln(\Delta x+1)|-|\ln 1|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\ln(\Delta x+1)}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x+o(\Delta x)}{\Delta x}=-1$$

T7：x=0处可导性。

(1)：$y=\begin{cases}|x|^{1+a}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}|x|^{1+a}\sin\frac{1}{x}$　　$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\sqrt[a+1]{\varepsilon}$，s.t. $\forall x\in(0,\delta)$，有：

$\left||x|^{a+1}\cdot\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant x^{a+1}<\varepsilon$　　$\therefore f(0^+)=0$

$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}|x|^{a+1}\sin\frac{1}{x}$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\sqrt[a+1]{\varepsilon}$，s.t. $\forall x\in(-\delta,0)$，有：$|x|^{a+1}\cdot\sin\frac{1}{x}<\varepsilon$　　$\therefore f(0^-)=0$

$\therefore f(0^+)=f(0^-)=f(0)=0$，$f(x)$在$x=0$处连续。

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x^{1+a}\cdot\sin\frac{1}{x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\Delta x^{a}\cdot\mathrm{sgn}(\Delta x)\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}\right]=0$$

$\therefore f(x)$在$x=0$处可导。

(2)：$y=\begin{cases} x^2, & x>0 \\ ax+b, & x\leqslant 0 \end{cases}$

$\cancel{\lim\limits_{x\to 0} y(x) = \lim\limits_{x\to 0} y(x) = \lim\limits_{x\to 0}(ax+b) = b \quad y(0)=0}$

~~①：b=0时。~~

$\cancel{\lim\limits_{\Delta x\to 0}}$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0 \quad f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b) = b \quad f(0)=b$

①：$b=0$，即$f(x)$在$x=0$处连续。

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x^2-b}{\Delta x} = 0 \quad \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{a\Delta x+b-b}{\Delta x} = a$

当$a=0$时，$f(x)$在$x=0$处可导；$\overset{a}{x}\neq 0$时，$f(x)$在$x=0$处不可导。

②：$b\neq 0$。∴$f(x)$在$x=0$处不连续且不可导。

(3)：$y=\begin{cases} xe^x, & x>0 \\ ax^2, & x\leqslant 0 \end{cases}$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(xe^x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 0$；$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} ax^2 = 0$；$f(0)=a\cdot 0^2=0$

∴$f(0^+)=f(0^-)=f(0)=0$，$f(x)$在$x=0$处连续。

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x e^{\Delta x}-0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+} e^{\Delta x} = 1$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{a\Delta x^2-0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-} a\Delta x = 0$

∴$f(x)$在$x=0$处连续但不可导。

熊荣宇

T7:(4): $y=\begin{cases} e^{\frac{a}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

~~$f(0^+)=f(0)=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{a}{x^2}}$~~

①: $a<0$。

由 $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{a}{x^2}} = \cancel{e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a}{x^2}}} = 0$ 而: $y(0)=0=y(0^+)=y(0^-)$

∴ 函数在 $x=0$ 处连续。

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\frac{a}{\Delta x^2}}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\frac{a}{\Delta x^2}}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} e^{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a}{\Delta x^2}-\ln|\Delta x|}$

∵ $x\to 0$ 时,由 $\frac{1}{x^2}=o(|\ln|x||)$ ∴ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$

此时 y 在 $x=0$ 处可导

②: $a=0$ $y=\begin{cases} 1, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,不在 $x=0$ 处不连续

③: $a>0$ $y=f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{a}{x^2}}=+\infty$ $y=f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{a}{x^2}}=0$

∴ 此 y 在 $x=0$ 处不连续

(8): T8: $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,在什么情况下,$|f(x)|$ 在 $x=0$ 处也可导?

$f(0)\neq 0$ 时,不妨设 $f(0)>0$,则在 $x=0$ 的某邻域内有 $f(x)>0$

此时: $|f(x)|=f(x)$ ∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 ∴ $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处可导

$f(0)=0$ 时,~~$\frac{|f(\Delta x)|-|f(0)|}{\Delta x}$~~ ∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

不妨设 $f'_+(0)=f'_-(0)=a\in\mathbb{R}$

∴ $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=a$

∵ $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{|f(\Delta x)|}{\Delta x}=\cancel{a\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\left\{\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\cdot \mathrm{sgn}[f(\Delta x)]\right\}}\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\left|\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\right|=|a|\cdot\mathrm{sgn}(a)$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{|f(\Delta x)|}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\left|\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\right|=-|a|\cdot\mathrm{sgn}(a)$ 则:左右导数互为相反数

∴ $|f(x)|$ 此时在 $x=0$ 处可导 $\Leftrightarrow$ $a=0$,即: $f'(0)=0$