第六章　微分方程

第五节　常系数线性微分方程

天津大学

数学学院

郭飞

第五节　常系数线性微分方程

一、二阶常系数齐次线性方程解法

二、常系数非齐次线性方程 (重点和难点)

三、欧拉方程（了解）

基本思路:

求解常系数线性齐次微分方程

转化为

求特征方程(代数方程)之根

n阶常系数线性微分方程的标准形式：

$$y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}y'+P_ny=f(x)$$

二阶常系数齐次线性方程的标准形式：

$$y''+py'+qy=0$$

二阶常系数非齐次线性方程的标准形式：

$$y''+py'+qy=f(x)$$

一、二阶常系数齐次线性方程解法

$$y''+py'+qy=0$$ -----特征方程法

特点 未知函数与其各阶导数的线性组合等于0

即函数和其各阶导数只相差常数因子

猜想 有特解 $y=\mathrm{e}^{rx}$

将其代入上方程, 得

$$(r^2+pr+q)\mathrm{e}^{rx}=0 \qquad \because \mathrm{e}^{rx}\neq 0,$$

故有 $$r^2+pr+q=0$$ 特征方程

由此可见, 只要r满足代数方程$r^2+pr+q=0$, 函数$y=\mathrm{e}^{rx}$就是微分方程的解.

1. 当 $p^2-4q>0$ 有两个不相等的实根

特征根为 $\boldsymbol{r_1=\dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}}$， $\boldsymbol{r_2=\dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}}$，

两个线性无关的特解

$$y_1=\mathrm{e}^{r_1x}, \qquad y_2=\mathrm{e}^{r_2x},$$

得齐次方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x};$

2\. 当 $p^2-4q=0$ 时, 特征方程有两个相等实根 $r_1=r_2=\frac{-p}{2}$,

则微分方程有一个特解 $y_1=\mathrm{e}^{r_1 x}$.

常数变易法：设另一特解 $y_2=y_1 u(x)=\mathrm{e}^{r_1 x}u(x)$ ($u(x)$ 待定) 代入方程得:

$$\cancel{\mathrm{e}^{r_1 x}}[\,(u''+2r_1u'+r_1^2u)+p(u'+r_1u)+qu\,]=0$$

$$u''+(\underline{2r_1+p})u'+(\underline{r_1^2+pr_1+q})u=0$$

$$\Big\downarrow \text{注意 } r_1 \text{ 是特征方程的重根}$$

$$u''=0$$

取 $u=x$, 则得 $y_2=x\mathrm{e}^{r_1 x}$, 因此原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{r_1 x}$$

3. 当 $p^2-4q<0$ 时, 特征方程有一对共轭复根 $r_1=\alpha+\mathrm{i}\beta,\quad r_2=\alpha-\mathrm{i}\beta$

这时原方程有两个复数解:

$$y_1=\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}\quad=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x+\mathrm{i}\sin\beta x)$$

$$y_2=\mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)x}\quad=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x-\mathrm{i}\sin\beta x)$$

利用解的叠加原理 , 得原方程的实线性无关特解:

$$\overline{y_1}=\frac{1}{2}(y_1+y_2)\quad=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\overline{y_2}=\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$$

因此原方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta\, x)$$

小结:

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q\text{为常数})$$

特征方程: $r^2 + pr + q = 0$, 特征根 : r_1, r_2

特 征 根	通　　　解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$	$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

以上结论可推广到高阶常系数线性微分方程 .

推广:

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_n y=0 \ (a_k \text{ 均为常数})$$

特征方程: $r^n+a_1 r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0$

若特征方程含 k 重实根 r , 则其通解中必含对应项

$$(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\mathrm{e}^{rx}$$

若特征方程含 k 重复根 $r=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$, 则其通解中必含对应项

$$\mathrm{e}^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+$$

$$+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$$

(以上 C_i, D_i 均为任意常数)

例1. 求方程 $y''-2y'-3y=0$的通解.

解: 特征方程 $r^2-2r-3=0$, 特征根: $r_1=-1, r_2=3$,

因此原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$

例2. 求解初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+s=0\\ \underline{s\big|_{t=0}=4},\quad \underline{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=-2}\end{cases}$

解: 特征方程 $r^2+2r+1=0$ 有重根 $r_1=r_2=-1$,

因此原方程的通解为 $s=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{-t}$

利用初始条件得 $C_1=4,\quad C_2=2$

于是所求初值问题的解为 $s=(4+2t)\mathrm{e}^{-t}$

例3. 求方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解.

解: 特征方程 $r^4-2r^3+5r^2=0$, 特征根:

$$r_1=r_2=0, \quad r_{3,4}=1\pm 2\,\mathrm{i}$$

因此原方程通解为

$$y=C_1+C_2x+\mathrm{e}^x(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)$$

例4. 解方程 $y^{(5)}-y^{(4)}=0$.

解: 特征方程: $r^5-r^4=0$, 特征根:

$$r_1=r_2=r_3=r_4=0, \quad r_5=1$$

原方程通解: $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+C_5\mathrm{e}^x$

(不难看出, 原方程有特解 $1, x, x^2, x^3, \mathrm{e}^x$)

例5. 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4}+\beta^4 w=0\ (\beta>0)$.

解: 特征方程: $r^4+\beta^4=(r^2+\beta^2)^2-2\beta^2 r^2=0$

即 $(r^2+\sqrt{2}\beta r+\beta^2)(r^2-\sqrt{2}\beta r+\beta^2)=0$

其根为 $r_{1,2}=\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}(1\pm \mathrm{i}),\quad r_{3,4}=-\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}(1\pm \mathrm{i})$

方程通解:

$$w=\mathrm{e}^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_1\cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x+C_2\sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right)$$

$$+e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_3\cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x+C_4\sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right)$$

例6. 解方程 $y^{(4)}+2y''+y=0$.

解: 特征方程: $r^4+2r^2+1=0$

即 $(r^2+1)^2=0$

特征根为 $r_{1,2}=\pm\mathrm{i}, \quad r_{3,4}=\pm\mathrm{i}$

则方程通解:

$$y=(C_1+C_3x)\cos x+(C_2+C_4x)\sin x$$

二、常系数非齐次线性方程 (重点和难点)

二阶常系数线性非齐次微分方程：

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (p, q \text{ 为常数}) \qquad ①$$

根据解的结构定理，其通解为

$$\underbrace{y = Y}_{\text{齐次方程通解}} + \underbrace{y^*}_{\text{非齐次方程特解}}$$

求特解的方法 — 待定系数法

根据 $f(x)$ 的特殊形式，给出特解 y^* 的待定形式，

代入原方程比较两端表达式以确定待定系数 .

（一）、$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型

λ 为实数，$P_m(x)$ 为 m 次多项式．

设特解为 $y^*=e^{\lambda x}Q(x)$，其中 $Q(x)$ 为待定多项式，

$$y^{*\prime}=e^{\lambda x}[\lambda Q(x)+Q'(x)]$$

$$y^{*\prime\prime}=e^{\lambda x}[\lambda^2 Q(x)+2\lambda Q'(x)+Q''(x)]$$

代入原方程，得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$$

(1) 若 λ 不是特征方程的根，即 $\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$，则取

$Q(x)$ 为 m 次待定系数多项式 $Q_m(x)$，从而得到特解

形式为 $y^*=e^{\lambda x}Q_m(x)$．

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)\ +(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)\ =P_m(x)$$

(2) 若λ 是特征方程的单根 , 即

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,\quad 2\lambda+p\neq 0\,,$$

则$Q'(x)$为m 次多项式, 故特解形式为 $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$

(3) 若 λ 是特征方程的重根 , 即

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,\ \ 2\lambda+p=0\,,$$

则$Q''(x)$ 是 m 次多项式, 故特解形式为 $y^*=x^2Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$

小结 对方程①, 当λ 是特征方程的 k 重根 时, 可设

特解 $y^*=x^k\,Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}\ \ (k=0,1,2)$

此结论可推广到高阶常系数线性微分方程 .

例7. 求方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的一个特解.

解: 本题 $\lambda=0$, 而特征方程为 $r^2-2r-3=0$,

$\lambda=0$ 不是特征方程的根 .

设所求特解为 $y^*=b_0x+b_1$, 代入方程 :

$$-3b_0x-3b_1-2b_0=3x+1$$

比较系数, 得

$$\begin{cases}-3b_0=3\\-2b_0-3b_1=1\end{cases}\longrightarrow\quad b_0=-1,\ b_1=\frac{1}{3}$$

于是所求特解为 $y^*=-x+\dfrac{1}{3}$.

例8. 求方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解.

解: 本题 $\lambda=2$, 特征方程为 $r^2-5r+6=0$, 其根为

$$r_1=2,\quad r_2=3$$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

设非齐次方程特解为 $y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}$

代入方程得 $-2b_0x-b_1+2b_0=x$

比较系数, 得 $\begin{cases}-2b_0=1\\ 2b_0-b_1=0\end{cases} \longrightarrow b_0=-\frac{1}{2},\ b_1=-1$

因此特解为 $y^*=x(-\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$.

所求通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-(\frac{1}{2}x^2+x)e^{2x}$.

例9. 求解定解问题 $\begin{cases} y''' + 3y'' + 2y' = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

解: 本题$\lambda = 0$, 特征方程为$r^3 + 3r^2 + 2r = 0$, 其根为

$$r_1 = 0, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = -2$$

故对应齐次方程通解为$Y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$

设非齐次方程特解为$y^* = bx$, 代入方程得 $2b = 1$, 故

$y^* = \frac{1}{2}x$, 原方程通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{2}x$$

由初始条件得 $\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ -C_2 - 2C_3 = -\frac{1}{2} \\ C_2 + 4C_3 = 0 \end{cases}$

解得

$$\begin{cases} C_1 = -3/4 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = -1/4 \end{cases}$$

于是所求解为

$$y = -\frac{3}{4} + \mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{1}{4}(-3 + 2x + 4\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x})$$

（二）、$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+\tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$ 型

分析思路:

第一步 将 $f(x)$ 转化为

$$f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}+\overline{P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}}$$

第二步 求出如下两个方程的特解

$$y''+py'+qy=P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}$$

$$y''+py'+qy=\overline{P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}}$$

第三步 利用叠加原理求出原方程的特解

第四步 分析原方程特解的特点

第一步 利用欧拉公式将 $f(x)$ 变形

$$f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}+\tilde{P}_n(x)\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}\right]$$

$$=\left[\frac{P_l(x)}{2}+\frac{\tilde{P}_n(x)}{2i}\right]e^{(\lambda+i\omega)x}$$

$$+\left[\frac{P_l(x)}{2}-\frac{\tilde{P}_n(x)}{2i}\right]e^{(\lambda-i\omega)x}$$

令 $m=\max\{n,l\}$,则

$$f(x)=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P_m(x)}e^{(\lambda-i\omega)x}$$

$$=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

第二步 求如下两方程的特解

$$y'' + py' + qy = P_m(x)e^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x} \qquad ②$$

$$y'' + py' + qy = \overline{P_m(x)e^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}} \qquad ③$$

设 $\lambda+\mathrm{i}\omega$ 是特征方程的 k 重根 ($k = 0, 1$)，则 ② 有特解:

$$y_1^* = x^k Q_m(x)e^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x} \qquad (Q_m(x)\text{为}m\text{次多项式})$$

故 $$(y_1^*)'' + p(y_1^*)' + q\,y_1^* \equiv P_m(x)e^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}$$

等式两边取共轭 :

$$\overline{y_1^*}'' + p\,\overline{y_1^*}' + q\,\overline{y_1^*} \equiv \overline{P_m(x)e^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}}$$

这说明 $\overline{y_1^*}$ 为方程 ③ 的特解 .

第三步 求原方程的特解

原方程

$$y''+py'+qy=\quad e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+\tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$$

利用第二步的结果, 根据叠加原理, 原方程有特解 :

$$y^*=y_1^*+\overline{y_1^*}$$

$$=x^k e^{\lambda x}\quad Q_m e^{i\omega x}+\overline{Q_m}\,e^{-i\omega x}$$

$$=x^k e^{\lambda x}\quad Q_m(\cos\omega x+i\sin\omega x)$$

$$+\overline{Q_m}(\cos\omega x-i\sin\omega x)$$

$$=x^k e^{\lambda x}\;R_m\cos\omega x+\tilde{R}_m\sin\omega x$$

其中 $R_m,\tilde{R}_m$ 均为 m 次多项式 .

第四步 分析 y^*的特点

$$y^* = y_1^* + \overline{y_1^*}$$

$$= x^k e^{\lambda x} \; R_m \cos \omega x + \tilde{R}_m \sin \omega x$$

因

$$\overline{y^*} = \overline{y_1^* + \overline{y_1^*}} = \overline{y_1^*} + \overline{\overline{y_1^*}}$$

$$= \overline{y_1^*} + y_1^*$$

$$= y^*$$

所以 y^*本质上为实函数，因此 $R_m, \tilde{R}_m$ 均为 m 次实多项式 .

小 结:

对非齐次方程

$$y'' + py' + qy \ = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x \right]$$

$(p, q$ 为常数$)$

$\lambda + i\omega$ 为特征方程的 k 重根 ($k\ = 0, 1$), 则可设特解:

$$y^* = x^k e^{\lambda x}\ R_m \cos\omega x + \tilde{R}_m \sin\omega x$$

其中 $m = \max\{n, l\}$

上述结论也可推广到高阶方程的情形.

例10. 求方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解 .

解: 本题 $\lambda=0, \omega=2, P_l(x)=x, \tilde{P}_n(x)=0,$

特征方程 $r^2+1=0$

$\lambda\pm i\omega=\pm 2i$不是特征方程的根, 故设特解为

$$y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x$$

代入方程得

$$(\underline{-3ax}\underline{-3b+4c})\cos 2x-\underline{(3cx+3d+4a)}\sin 2x=\underline{x}\cos 2x$$

比较系数, 得 $\begin{cases}-3a=1\\-3b+4c=0\\-3c=0\\-3d+4a=0\end{cases}$ $\therefore\ a=\frac{-1}{3},\quad d=\frac{4}{9}$

$b=c=0$

于是求得一个特解 $y^*=\frac{-1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$.

例11. 求方程 $y''+9y=18\cos 3x-30\sin 3x$ 的通解.

解: 特征方程为 $r^2+9=0$, 其根为 $r_{1,2}=\pm 3i$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$

$\pm 3i$为特征方程的单根 , 因此设非齐次方程特解为

$$y^*=x(a\cos 3x+b\sin 3x)$$

代入方程: $\underline{6b}\cos 3x\underline{-6a}\sin 3x=\underline{18}\cos 3x\underline{-30}\sin 3x$

比较系数, 得 $a=5,\quad b=3,$

因此特解为 $y^*=x(5\cos 3x+3\sin 3x)$

所求通解为

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x(5\cos 3x+3\sin 3x)$$

例12. 设下列高阶常系数线性非齐次方程的特解形式:

(1) $y^{(4)}+2y''+y=\sin x$

(2) $y^{(4)}+y''=x+e^{x}+3\sin x$

解: (1) 特征方程 $r^4+2r^2+1=0$, 即 $(r^2+1)^2=0$, 有二重根 $r=\pm i$, 所以设非齐次方程特解为

$$y^*=x^2(a\cos x+b\sin x)$$

(2) 特征方程 $r^4+r^2=0$, 即 $r^2(r^2+1)=0$ 有根

$$r_{1,2}=0,\quad r_{3,4}=\pm\mathrm{i}$$

利用叠加原理, 可设非齐次方程特解为

$$y^*=x^2(ax+b)+ce^{x}+x(d\cos x+k\sin x)$$

内容小结

1. $y'' + p\,y' + q\,y = P_m(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$

λ 为特征方程的 $k\,(=0, 1, 2)$ 重根, 则设特解为

$$y^* = x^k Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

2. $y'' + py' + qy = \mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x]$

$\lambda \pm i\omega$为特征方程的 $k\,(=0, 1\,)$重根, 则设特解为

$$y^* = x^k \mathrm{e}^{\lambda x}\,[R_m(x)\cos\omega x + \tilde{R}_m(x)\sin\omega x]$$

$$m = \max\{\,l\,, n\,\}$$

3. 上述结论也可推广到高阶方程的情形.

思考与练习

1 . (填空) 设 $y'' + y = f(x)$

1) 当 $f(x) = x\cos x$ 时可设特解为

$$y^* = x\left[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x\right]$$

2) 当 $f(x) = x\cos 2x + \mathrm{e}^{2x}$ 时可设特解为

$$y^* = (ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x + k\,\mathrm{e}^{2x}$$

提示: $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$

$$y^* = x^k \mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_m(x)\cos\omega x + \tilde{R}_m(x)\sin\omega x\right] \quad m = \max\{n, l\}$$

2. 已知二阶常微分方程 $y'' + ay' + by = c\mathrm{e}^{x}$ 有特解

$y = \mathrm{e}^{-x}(1 + x\mathrm{e}^{2x})$，求微分方程的通解 .

解: 将特解代入方程得恒等式

$$(1-a+b)\mathrm{e}^{-x} + (2+a)\mathrm{e}^{x} + (1+a+b)x\mathrm{e}^{x} = c\mathrm{e}^{x}$$

比较系数得 $\begin{cases} 1-a+b=0 \\ 2+a=c \\ 1+a+b=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$

故原方程为 $y'' - y = 2\mathrm{e}^{x}$ $\boxed{y = \mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{x}}$

对应齐次方程通解: $Y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x}$

原方程通解为 $y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{x}$

三、欧拉方程

欧拉方程的标准形式：

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

$(p_k$为常数$)$

思路：

令 $x = \mathrm{e}^t$, 即 $t = \ln x$

常系数线性微分方程

欧拉方程的算子解法:

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

令 $x = \mathrm{e}^t$， 则$t = \ln x$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \longrightarrow xy' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \longrightarrow x^2 y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \longrightarrow x^3 y''' = \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},\ D^k=\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\ (k=2,3,\cdots)$,则由上述计算可知:

$$xy'=Dy$$

$$x^2y''=D^2y-Dy=D(D-1)y$$

用归纳法可证 $\quad x^ky^{(k)}=D(D-1)\cdots(D-k+1)y$

于是欧拉方程

$$x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$$

转化为常系数线性方程:

$$D^ny+b_1D^{n-1}y+\cdots+b_ny=f(\mathrm{e}^t)$$

即 $$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}+b_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+b_ny=f(\mathrm{e}^t)$$

例13. 求方程 $x^2y''-2xy'+2y=\ln^2 x-2\ln x$ 的通解.

解: 令 $x=\mathrm{e}^t$, 则 $t=\ln x$, 记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}$, 则原方程化为

$$D(D-1)y-2Dy+2y=t^2-2t$$

即 $$(D^2-3D+2)y=t^2-2t$$

亦即 $$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=t^2-2t \qquad ④$$

特征方程 $r^2-3r+2=0$, 其根 $r_1=1, r_2=2$,

则④对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{2t}$$

设特解: $y^* = At^2 + Bt + C$

代入④确定系数, 得

$$y^* = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

④的通解为

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

换回原变量, 得原方程通解为

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}$$

例14. 求方程 $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$ 的通解.

解: 将方程化为 $x^2 y'' - x y' + y = 2x$ (欧拉方程)

令 $x = \mathrm{e}^t$, 记 $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 则方程化为

$$[D(D-1) - D + 1)]\, y = 2e^t$$

即 $$(D^2 - 2D + 1)y = 2e^t \qquad ⑤$$

特征根: $r_1 = r_2 = 1,$

设特解: $y = At^2\mathrm{e}^t$, 代入 ⑤ 解得 $A = 1$, 所求通解为

$$y = (C_1 + C_2\, t\,)\mathrm{e}^t + t^2\mathrm{e}^t$$

$$= (C_1 + C_2 \ln x)\, x + x \ln^2 x$$

例15. 设函数 $y=y(x)$ 满足

$$xy+\int_1^x [3y(t)+t^2y''(t)]\mathrm{d}t=5\ln x,\ x\geq 1$$

且 $y'|_{x=1}=0$，求 $y(x)$.

解: 由题设得定解问题

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+4y=\dfrac{5}{x} & ⑥ \\ y(1)=0,\quad y'(1)=0 & ⑦ \end{cases}$$

令 $x=\mathrm{e}^t$，记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则⑥化为

$$[D(D-1)+D+4]\,y=5\mathrm{e}^{-t}$$

$$(D^2+4)\,y=5\mathrm{e}^{-t} \qquad ⑧$$

特征根: $r=\pm 2i$，设特解: $y^*=A\mathrm{e}^{-t}$，代入⑧得 $A=1$

得通解为

$$y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \mathrm{e}^{-t}$$

$$= C_1 \cos(2\ln x) + C_2 \sin(2\ln x) + \frac{1}{x}$$

利用初始条件⑦得

$$C_1 = -1, \quad C_2 = \frac{1}{2}$$

故所求特解为

$$y = -\cos(2\ln x) + \frac{1}{2}\sin(2\ln x) + \frac{1}{x}$$

小结

欧拉方程解法思路

$$\boxed{\text{变系数的线性微分方程}} \xrightarrow[x = e^t \text{ 或 } t = \ln x]{\text{变量代换}} \boxed{\text{常系数的线性微分方程}}$$

注意：欧拉方程的形式.

思考题： 如何解下述微分方程

$$(x+a)^2 y'' + p_1(x+a)y' + p_2 y = f(x)$$

提示： 原方程

先令 $u = x + a$

$$u^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}u^2} + p_1 u \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} + p_2 y = f(u-a)$$

令 $u = e^t$，记 $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

$$[D(D-1) + p_1 D + p_2]y = f(e^t - a)$$

直接令

$x + a = e^t$

记 $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$