学院 求是学部 专业/大类______ ___班 年级____ 学号______ 姓名______

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 函数 $y=\sin x$ 的二阶微分 $\mathrm{d}^2 y=$ ___ $-\sin x\,\mathrm{d}x^2$ ___.

2. 函数 $y=x\mathrm{e}^{2x}$ 的下凸区间为 ___ $(-1,+\infty)$ 或 $[-1,+\infty)$ ___.

3. 曲线 $y=(2+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的垂直渐近线方程为 ___ $x=0$ ___，斜渐近线方程为 ___ $y=x+3$ ___.

4. 不定积分 $\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x=$ ___ $\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C$ ___.

5. 若 $f(x)$ 在 R 上有定义，$f(1)=0$，且 $f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{\tan x\cdot\ln(1+x)}=$ ___ 1 ___.

二、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 已知函数 $f(x)=|x-2|+\frac{\sin x}{x}\cdot\ln|x-1|$，则 $f(x)$ 在 R 上(A).

(A) $x=0$ 是可去间断点，$x=1$ 是无穷间断点　(B) $x=0$ 和 $x=2$ 是可去间断点

(C) $x=0$ 是可去间断点，$x=2$ 是跳跃间断点　(D) $x=0$ 和 $x=1$ 无穷间断点

2. 区间 $(1,+\infty)$ 上，下列函数中非一致连续的是(B).

(A) $y=\sqrt{x}$　(B) $y=x^2$　(C) $y=\frac{1}{x}$　(D) $y=x$

3. 设函数 $f(u)$ 可导，函数 $y=f(x^3)$ 当自变量 x 在 $x=1$ 处取增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.3，则 $f'(1)=$(A).

(A) -1　(B) 0.1　(C) 1　(D) 0.5

4. 若当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=\sin x-x\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{6}}$ 是 x 的 n 阶无穷小，则 n 的值为(D).

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 5

5. 已知函数 $f(x)$ 对一切实数 x 满足 $(1-x)f''(x)+3x\left(f'(x)\right)^2=1-\mathrm{e}^x$，$f'(0)=0$，则(C).

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点　(D) 以上都不对

三、计算题（共 24 分，每小题 8 分）

1. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x+t(t+1)=0,\\ t\mathrm{e}^y+y+1=0\end{cases}$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 在 $t=0$ 对应点处的切线方程和法线方程.

解：当 $t=0$ 时，$x(0)=0,\ y(0)=-1$,

方程组两边对 t 求导，得

$$\begin{cases}x'(t)+1+2t=0,\\ \mathrm{e}^y+t\mathrm{e}^y y'(t)+y'(t)=0,\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}x'(0)=-1,\\ y'(0)=-\mathrm{e}^{-1},\end{cases}$$

所以，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\frac{y'(0)}{x'(0)}=\mathrm{e}^{-1}$,

故，切线方程为 $y+1=\mathrm{e}^{-1}x$，法线方程为 $y+1=-\mathrm{e}x$.

2.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})\ (a>0)$.

解法一：对函数 $f(x)=a^x$ 在 $\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$ 上应用拉格朗日中值定理得

$$a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}=a^{\xi}\cdot\ln a\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),\quad \frac{1}{n+1}<\xi<\frac{1}{n},$$

从而当 $n\to\infty$ 时，$\xi\to 0$. 于是有

$$原式=\lim_{n\to\infty}a^{\xi}\cdot\ln a\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)n^2=\ln a\cdot\lim_{\xi\to 0}a^{\xi}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}=\ln a.$$

解法二：用等价无穷小代换

3. 求不定积分 $\int\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx$.

解：令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，于是

$$\int\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx=2\int t^2e^tdt$$
$$=2t^2e^t-4\int te^tdt$$
$$=2t^2e^t-4\int tde^t$$
$$=2t^2e^t-4te^t+4\int e^tdt$$
$$=2t^2e^t-4te^t+4e^t+C=2e^t(t^2-2t+2)+C$$
$$=2e^{\sqrt{x}}(x-2\sqrt{x}+2)+C$$

四、证明题（共 46 分，第 1 小题 14 分，第 2-5 每小题 8 分）

1. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上连续，在开区间 $(0,2)$ 内可导，且满足

$$f(0)=f(2)=0,\quad \lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{(x-1)^2}=5.$$

证明：(1) $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值大于 2；

(2) 存在 $\eta\in(1,2)$，使得 $f(\eta)=\eta$；

(3) 存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{2\xi-f(\xi)}{\xi}$.

证明：(1)因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{(x-1)^2}=5>0$,故由极限的保号性知,在 $x=1$ 的某去心邻域内,有

$\dfrac{f(x)-2}{(x-1)^2}>0$,即 $f(x)>2$.又 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续,故必有最大值,于是最大值大于 2.

(2)因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{(x-1)^2}=5$，所以 $f(1)=2$.

设 $F(x)=f(x)-x$，由条件知 $F(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，且 $F(1)=1>0$，$F(2)=-2<0$

根据零点定理，至少存在一个 $\eta\in(1,2)$，使得 $F(\eta)=0$，即 $f(\eta)=\eta$.

(3)设 $G(x)=xf(x)-x^2$，

由条件知 $G(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续，在 $(0,\eta)$ 内可导，且 $G(0)=G(\eta)=0$，根据罗尔中值定理，至少存在一个 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使得 $G'(\xi)=0$，即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)-2\xi=0$，也即

$$f'(\xi)=\frac{2\xi-f(\xi)}{\xi}.$$

2.若 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上三阶导函数连续，且 $f(1)=1, f(-1)=0, f'(0)=0$，证明存在 $\xi\in(-1,\ 1)$ ，使得 $f'''(\xi)=3$.

证明：将 $f(1)$，$f(-1)$ 在 0 点 Talyor 展开，得

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{3!}f'''(\xi_1),\quad \xi_1\in(0,1),$$

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{3!}f'''(\xi_2),\quad \xi_2\in(-1,0),$$

两式相减得 $f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=6,$

设 m,M 分别是 $f'''(x)$ 在 $[\xi_2,\xi_1]$ 上的最小值和最大值，则

$$m\le\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3\le M,$$

由介值定理可得，存在 $\xi\in[\xi_2,\xi_1]\subset(-1,\ 1)$ 使得 $f'''(\xi)=3$.

3. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（$A$ 为有限数），证明 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

证明：由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 和 Cauchy 收敛原理知，

$\forall\varepsilon>0,\exists M(\varepsilon)>0$ ，$\forall x',x''\in[M,+\infty)$, 有 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$. ①

由 $f(x)$ 在区间 $[0,M+1]$ 上连续和 cantor 定理，知 $f(x)$ 在区间 $[a,M+1]$ 上一致连续，从而

$\forall\varepsilon>0,\exists\eta(\varepsilon)>0,\ \ \forall x',x''\in[0,M+1]$ 且 $|x'-x''|<\eta$ 时有 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$. ②

取 $\delta(\varepsilon)=\min\{1,\eta(\varepsilon)\}>0$，则 $\forall x',x''\in[0,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时，要么 x',x'' 同属于区间 $[0,M+1]$，要么同属于区间 $[M,+\infty)$, 不管哪种情况发生，由①②可知，都有 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$

4.利用闭区间套定理证明实数集R是不可列集.

证明：用反证法，假设实数集R是可列集，即可以找到一种排列的规则，使得 $\mathrm{R}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$. 先取闭区间$[a_1,b_1]$，使$x_1\notin[a_1,b_1]$；然后将$[a_1,b_1]$三等分，则在得到的闭区间$[a_1,\frac{2a_1+b_1}{3}]$，$[\frac{2a_1+b_1}{3},\frac{a_1+2b_1}{3}]$，$[\frac{a_1+2b_1}{3}, b_1]$中，至少有一个不含有$x_2$，记为$[a_2,b_2]$；再将$[a_2,b_2]$三等分，同样，在得到的三个闭区间中至少有一个不含有x_3，记为$[a_3,b_3]$.

$\cdots$这样依次进行下去，于是得到一个闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$，满足

$$x_n\notin[a_n,b_n],\ n=1,2,3\cdots.$$

由闭区间套定理，存在唯一的实数$\xi\in[a_n,b_n],\ n=1,2,3\cdots$，即$\xi\neq x_n,\ n=1,2,3\cdots$

这与$\mathrm{R}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$矛盾.

5. 已知函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内二阶可导，且$f''(x)\neq 0$.

(1) 证明：对任何非零实数x, 存在唯一的$\theta(x)(0<\theta(x)<1)$，使得

$$f(x)=f(0)+f'(x\cdot\theta(x))x;$$

(2) 计算$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)$.

证明：(1)由Lagrange中值定理知道，存在$\theta(x)(0<\theta(x)<1)$使得

$$f(x)=f(0)+xf'(x\cdot\theta(x))$$

下证唯一性：如果$\theta(x)$不唯一，即存在$\theta_1(x)=\theta_2(x)$，使得$f'(x\cdot\theta_1(x))=f'(x\cdot\theta_2(x))$

由罗尔中值定理得，存在ξ介于$\theta_1(x)$和$\theta_2(x)$之间，使得$f''(\xi)=0$,这与题意矛盾.

(2)因为$f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x\cdot\theta(x))-f'(0)}{x\cdot\theta(x)}$, 且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x\cdot\theta(x))-f'(0)}{x\cdot\theta(x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\theta(x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\theta(x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\theta(x)}\\&=\frac{f''(0)}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\theta(x)},\end{aligned}$$

故$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.