第一次课

2022年9月6日 8:30

先用PPT讲开学第一课和学习要求

§1.1 集合

重点与难点：可列集

一、集合的概念

1. 集合：具有某种确定性质的对象全体称为集合.
   组成集合的对象称为集合的元素.
2. 集合的表示：集合通常用大写英文字母 $A, B, C, \cdots$ 表示.
   元素用小写英文字母 $a, b, c, \cdots$ 表示.
3. 元素与集合的关系：$a \in A$，$a \notin A$ 或 $a \bar{\in} A$.
4. 常用的集合：

   $\mathbb{N}_+$ 或 $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \cdots\}$

   $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

   $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$

   $\mathbb{R}$：实数集　$\mathbb{Q}$：有理数集，$\mathbb{C}$：复数集

   $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$：无理数集（用了集合的减法）
5. 集合的表示法：列举法，描述法
6. ϕ：空集，不含任何元素. $\neq \{0\}$
7. 集合中的元素没有顺序，且重复的元素为一个，如

   $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$

$\{a,a,b,b\}=\{a,b\}$

二. 集合间的关系（设 A,B 为两个集合）

1. 子集：若 A 中的任何元素都属于 B，则称 A 是 B 的子集. 记为 $A\subset B$. 或 $A\subseteq B$.

2. 真子集：若 $A\subset B$，且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集

记为 $A\subsetneq B$ 或 $A\subsetneqq B$.

3. 集合的相等：若 A 与 B 的元素完全相同，记为 $A=B$

显然 $A=B \Leftrightarrow A\subset B$ 且 $B\subset A$.

（这是证明两个集合相等常用的方法）

三. 集合的运算

设 A,B 为 X 的子集，X 为基本集（全集）

1° $A\cup B=\{x\in X \mid x\in A$ 或 $x\in B\}=\{x\in X \mid (x\in A)\vee(x\in B)\}$

2° $A\cap B=\{x\in X \mid x\in A$ 且 $x\in B\}=\{x\in X \mid (x\in A)\wedge(x\in B)\}$

3° $A\setminus B=\{x\in X \mid x\in A$ 但 $x\notin B\}=\{x\in X \mid (x\in A)\wedge(x\notin B)\}$

（注意：并不要求 $B\subset A$. 与中学不同之处）

4° $\complement_X A=\{x \mid x\in X$ 但 $x\notin A\}=\{x \mid (x\in X)\wedge(x\notin A)\}$

也可记为 A_X^c，称为 A 的补集.

c 取自"补集"的英文单词"complement".

性质：1° $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

2° $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

对偶律（De Morgan 公式）

证明：自证. $\Longleftarrow$ $A=B \Leftrightarrow A\subset B$ 且 $B\subset A$

四. 有限集与无限集（本节重点与难点）

1. 有限集：如果集合中元素的个数是有限个

2. 无限集：不是有限集的集合称为无限集.

如 $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ 都是无限集.

3. 可列集（可数集）

如果一个无限集 A 中的元素可以按照某种规律排成一列

即 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\}$

本质是 A 中元素建立了与 $\mathbb{N}^*$ 之间的一一对应关系：

$$a_1 \to 1 \quad a_2 \to 2 \quad a_3 \to 3 \quad a_4 \to 4$$

称 A 为可列集（可数集）

无限集 $\begin{cases} \text{可列集} \\ \text{不可列集.} \end{cases}$

Ex1. $\mathbb{N}^*=\{1, 2, 3, \cdots\}$ 可数

偶数集 $=\{2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}$ 可数

奇数集 $=\{1, 3, 5, \cdots 2n-1, \cdots\}$ 可数

$\mathbb{Z}=\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots n, -n, \cdots\}$ 可数

$\{x\in\mathbb{R} \mid \sin x=0\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x=n\pi, n\in\mathbb{Z}\}$ 可数

定理1.1.1 可列个可列集之并也是可列集.

证明：$A_n=\{x_{n1}, x_{n2}, \cdots x_{nk}, \cdots\}$, $n=1, 2, 3, \cdots$

把 A_n 中的所有元素按"对角线顺序"排列：

正方形顺序

$$
\begin{array}{llllll}
A_1: & x_{11} \rightarrow & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \cdots\cdots \\
A_2: & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \cdots\cdots \\
A_3: & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \cdots \\
A_4 & x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \cdots\cdots
\end{array}
$$

正方形顺序

如遇到重复的元素，就删除后出现的！得到 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 与 N^* 建立了"一一对应"． ∴ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可列集．

定理 1.1.2　有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可列集．

证明：由于 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 可由可列个区间 $(n,n+1]$ 之并表示

即 $\mathbb{R}=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(n,n+1]$，故只需证 $(0,1]$ 中的有理数

是可列集（由定理 1.1.1 知）

$(0,1]$ 中的有理数可唯一地表示为 $\frac{q}{p}$（$p,q\in N^*$，p,q 互质）$q\le p$

则 分母 $p=1$：　$x_{1}=1$　　　$n(1)=1$

$p=2$：　$x_{21}=\frac{1}{2}$　　　$n(2)=1$

$p=3$：　$x_{31}=\frac{1}{3}$　$x_{32}=\frac{2}{3}$　　$n(3)=2$

$p=4$：　$x_{41}=\frac{1}{4}$，$x_{42}=\frac{3}{4}$　　$n(4)=2$

$\cdots\cdots$

分母为 p 的 $(0,1]$ 内的既约分数不超过 $p-1$ 个，记为

$x_{p1}, x_{p2}, \cdots\cdots x_{p\,n(p)}$

∴ $(0,1]$ 中全体有理数可排成

x_{11} x_{21} x_{31} x_{32}, x_{41} x_{42} ......

$\therefore$ (0,1]中的有理数集是可列集 $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$是可列集

思考题：1° 举例 集合的交、并运算不满足消去律，即
(HWK)
6

(1) $A\cup B = A\cup C \not\Rightarrow B=C$

(2) $A\cap B = A\cap C \not\Rightarrow B=C$

→ 2° 证明：任意无限集必包含一个可列子集
2(1)

(即可列集是最小的无限集)

3° 举一个不是可列集的例子？

无理数集可列吗？ $\mathbb{R}$可列吗？为什么？

4°. 课后题 P9 7.

5° 预习 §1.2. → 反函数. 反三角函数

复合函数.