错题报告 9.5

1° 举例集合的交并运算不满足消去律，即.

(1) $A\cup B = A\cup C \nRightarrow B=C$

(2) $A\cap B = A\cap C \nRightarrow B=C$

错误点：①题目要求举出例子即可，不需要严格证明，且证明过程不严谨.

②只对题目进行了展开说明.

2° 证明：任意无限集必包含一个可列子集.（即可列集是最小的无限集）.

错误点：①在构造可列子集时，未说明取出的 a_i $(i=1,2,\cdots)$ 互不相等.

②直接说明无限集中的部分元素与正整数集一一对应，但未说清楚如何对应，或未构造出可列子集.

3° 举一个不是可列集的例子？无理数集可列吗？R可列吗？为什么？

错误点：①未举例.

②无理数集，实数集均不可列，未说清楚原因.

4° 下列命题是否正确？不正确的话，请改正.

(1) $x\bar{\in} A\cap B \iff x\bar{\in} A$ 并且 $x\bar{\in} B$.

(2) $x\bar{\in} A\cup B \iff x\bar{\in} A$ 或者 $x\bar{\in} B$

错误点：①第(1)问"并且"改为"或者"，第(2)问"或者"改为"并且".

有同学把(1)问中"$\iff$"改为"$\Leftarrow$"，把(2)问中"$x\bar{\in} A\cup B$"改为"$x\bar{\in} A\cap B$".

其实也对，~~共~~

②"$\Rightarrow$"表示必要性，"$\Leftarrow$"表示充分性，某同学写反了.

③第(2)问部分同学认为正确.

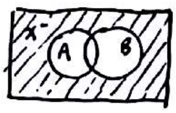
（方法一）$\Leftarrow$：取 $a\bar{\in} A$ 且 $a\in B$，满足 $x\bar{\in} A$ 或 $x\bar{\in} B$

但 $a\in A\cup B$，故充分性不正确.

$\Rightarrow$ 取 $a\bar{\in} A\cup B$，则 $a\bar{\in} A$，$a\bar{\in} B$，必要性正确

综上，该命题不正确

（方法二）使用Venn图.



错题报告 9.6

1° 证明：① $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

② $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

③ $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

错误点：中间步骤 从 $\beta = -\alpha$ 不能直接推出 $\sin\beta = \sin(-\alpha)$，

要加上 $\alpha, \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 这一条件才可以推过去.

优秀答案：②：证：设 $\alpha = \arccos(-x) \in (0, \pi)$

$\beta = \pi - \arccos x \in (0, \pi)$

故原题即证 $\cos\alpha = \cos\beta$ ，$\alpha, \beta \in (0, \pi)$

而 $\cos\alpha = -x$

$\cos\beta = \cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$

故得证.

① ③ 同理可证.

2° 设 $f(x) = \frac{1}{1+x}$，求 $f\circ f$，$f\circ f\circ f$，$f\circ f\circ f\circ f$ 的函数表达式.

解：$f\circ f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

$f\circ f\circ f(x) = \frac{x+2}{2x+3}$

$f\circ f\circ f\circ f(x) = \frac{2x+3}{3x+5}$

3° 证明：定义于 $(-\infty, +\infty)$ 上的任何函数都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和.

证明：设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上任一函数

$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 为偶函数，$h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是奇函数.

$f(x) = g(x) + h(x)$.

错题报告 9.8

1° 证明定义(1) 若存在两个常数 m, M，使得 $y=f(x)$ $(x\in D)$ 满足 $m\le f(x)\le M$，$x\in D$。则 $f(x)$ 有界 与定义(2) 若存在 $k>0$，使得 $|f(x)|\le k$，则称 $f(x)$ 有界
二者为等价定义。

错误点：只证明了(1)推(2)或(2)推(1)，应该两个方向都证。

优秀答案：(1) $\Rightarrow$ (2) 已知 $y=f(x)$ $(x\in D)$ 满足 $m\le f(x)\le M$

取 $k=\max\{|m|, |M|\}$，则 $k>0$。

故有 $-k\le m\le f(x)\le M\le k$，即 $|f(x)|\le k$

(2) $\Rightarrow$ (1) 已知存在 $k>0$，使得 $|f(x)|\le k$。

故有 $-k\le f(x)\le k$，取 $m=-k$，$M=k$

则 $m\le f(x)\le M$ 成立。

2° 试求定义在 $[0,1]$ 上的函数，它是 $[0,1]$ 与 $[0,1]$ 之间的一一对应，但在 $[0,1]$ 的任一子区间上都不是单调函数。

错误点：① 忽视了该函数为一一对应，如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\0, & x\text{为无理数}\end{cases}$。

② 只构造了有理数点，未定义无理数点的函数值。

③ 定义的函数的值域超过了 $[0,1]$ 这一范围。

3° 证明集合 $S=[0,1)$ 的最大值 $\max S$ 不存在

错误点：某同学试途采用"空区间"去证，还是严格使用定义去证明为好。

4° 求下列数集的最大数、最小数，或证明它们不存在：

(1) $A=\{x\mid x\ge 0\}$；

(2) $B=\{\sin x\mid 0<x<\frac{2\pi}{3}\}$

(3) $C=\{\frac{n}{m}\mid m,n\in N_+，\text{并且 } n<m\}$

错误点：以(1)为例，认为集合A无最大数是显然的，就不证了，还是应该该用定义去证明。