数学分析（新工科）A

第6章 不定积分习题课

主讲：郭　飞

一、内容提要

1.原函数、不定积分概念

掌握函数与其原函数、导函数之间的关系，不定积分与某个原函数的关系；不定积分运算与求导（求微分）运算的关系；不定积分的线性性质；存在性。

2.基本积分公式

熟记并会使用基本积分公式。

3.积分法

（1）第一换元法（凑微分法）：

此法应用广泛，必须熟练掌握！此法灵活性强，只有熟记基本积分公式（１）～（25）、一些重要的微分式，加上足够的练习，才有可能掌握！

（2）第二换元法：

着重掌握三角代换：当被积式中含有二次根号下的二项式而不能凑微分时一般要做三角代换或双曲代换，（回代时可利用辅助直角三角形）等。尤其需要注意“割代换”的符号问题。

（3）分部积分法：

当被积函数是两个不同类型函数的乘积，而不能凑微分时，一般要用分部积分法，特别是对数函数和反三角函数的积分只能用分部积分法；分部积分的关键是正确选取公式中的 ***u*,*v*** ，按照“反、对、幂、三、指”的顺序先 ***u*** 后 ***v*** ，“三、指：的顺序可换：

$$对于\int x^n e^{ax}\mathrm{d}x选u = x^n;$$

$$\text{对于}\int x^n\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}\mathrm{d}x\text{选}u=x^n;$$

$$\text{对于}\int x^n\ln x\mathrm{d}x\text{选}u=\ln x;$$

$$\text{对于}\int x^n\begin{pmatrix}\arctan x\\ \arcsin x\end{pmatrix}\mathrm{d}x\text{选}u=\begin{pmatrix}\arctan x\\ \arcsin x\end{pmatrix};$$

$$^*\text{对于}\int \mathrm{e}^{ax}\begin{pmatrix}\sin bx\\ \cos bx\end{pmatrix}\mathrm{d}x\text{选}u=\mathrm{e}^{ax}\text{或}u=\begin{pmatrix}\sin bx\\ \cos bx\end{pmatrix}\text{均可,}$$

当不论如何选择，都不能直接得出结果时，可连续使用分部积分法，每次坚持选择相同类型函数作为 u，得到一个以所求积分为未知量的方程，解之即得，还有一些积分也出现类似情况；

利用分部积分法还可建立一些递推公式。

4. 可积函数类

（1）有理函数 $R(x)$ 的积分

1〉任何有理函数或本身是一个真分式，或可化为一个整式与一个真分式之和；而任何真分式都可以分解为以下4种部分分式（也称为最简分式）之和：

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{B}{(x-a)^k},\quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad \frac{Rx+S}{(x^2+px+q)^k},$$

其中 $k=2,3,\cdots;\ p^2-4q<0.$

2〉部分分式的积分

$$\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln\left|x-a\right| + C;$$

$$\int \frac{B}{\left(x-a\right)^{k}}\mathrm{d}x = \frac{B}{1-k}\frac{1}{\left(x-a\right)^{k-1}} + C;$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^{2}+px+q}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^{2}+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4p-q^{2}}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4p-q^{2}}} + C;$$

$$\int \frac{Rx+S}{\left(x^2+px+q\right)^k}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{R}{2(1-k)}(x^2+px+q)^{1-k}+\frac{2S-Rp}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(u^2+a^2)^k},$$

其中$u=x+\dfrac{p}{2}, a=\dfrac{\sqrt{4p-q^2}}{2}$,而

$$I_{k+1}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(u^2+a^2)^{k+1}}=\frac{u}{2a^2k(u^2+a^2)^k}+\frac{2k-1}{2a^2k}I_k,\quad k=1,2,\cdots.$$

3〉有理函数一定能够“积得出来”——有理函数的原函数都是初等函数，且为多项式、有理函数、对数函数、反正切函数，或它们的和。

（2）三角函数有理式的积分——可化为有理函数进行积分

1〉三角函数有理式可表示为 $R(\sin x, \cos x)$

2〉用万能置换可化为有理函数的积分，故三角函数的有理式都能“积得出来”.

3〉万能置换

令 $t = \tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t,$

故 $$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int R_1(t)\mathrm{d}t.$$

注：既是万能置换，自然对某些积分来说就不一定是最简单的，因此，对于三角函数有理式的积分，首先考虑的不是万能置换，甚至要尽量避免使用，因为毕竟较麻烦.

不过对形如 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}, \int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x}, (a \neq b, b \neq 0)$

的积分，却只能作万能置换.

4〉 $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ 的其他代换:

①当 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ 时, 或对 $\int R(\tan x)\mathrm{d}x$,
作代换

$$t = \tan x, \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

比万能置换简单;

②当 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ 时, 可令 $t = \cos x$;

③当 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ 时, 可令 $t = \sin x$.

(3)某些无理函数——有理化

1〉 $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}\right) \mathrm{d}x$

为使其有理化，只需作变换

$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}} = t$,即$x = \frac{ht^n - b}{a - ct^n}, \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{n(ah-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\mathrm{d}t.$

2〉 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$

先配方，再作三角代换，即可有理化。

5. 关于不定积分的几点说明

（1）原函数存在，但不是初等函数（或至少不是有限形式）的不定积分，有人称为可积但“积不出来”. 已经证明“积不出来”的积分有：

$$\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, \int \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x, \int \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x, \int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x, \int \sin(x^2)\mathrm{d}x, \int \sqrt{1+x^3}\mathrm{d}x, \cdots$$

（2）对于较难的积分，首先考虑使用凑微分法，其次看可否用三角代换或分部积法积出来，最后再依被积函数所属类型选择积分方法。

（3）使用积分表。

二、典型例题

$$1.\int \frac{x^4}{x+1}\mathrm{d}x$$

解：$$\int \frac{x^4}{x+1}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{x^4-1}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1| + C$$

$$2.\ \int \frac{x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$$

$$\frac{x}{(1+x)^3} = \frac{A}{(1+x)^3} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{C}{1+x}$$

解： $$\int \frac{x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x = \int \frac{x+1-1}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$$

$$= \int \left[\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}\right]\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{(1+x)} + \frac{1}{2(1+x)^2} + C$$

3. $\int \frac{x^2}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x$

$$\frac{x^2}{(x-1)^{100}} = \frac{A_1}{(x-1)^{100}} + \frac{A_2}{(x-1)^{99}} + \frac{A_3}{(x-1)^{98}} + \cdots + \frac{A_{100}}{x-1}$$

解：$\frac{x^2}{(x-1)^{100}} = \frac{\left(x^2-1\right)+1}{(x-1)^{100}} = \frac{x^2-1}{(x-1)^{100}} + \frac{1}{(x-1)^{100}}$

$$= \frac{x+1}{(x-1)^{99}} + \frac{1}{(x-1)^{100}} = \frac{\left(x-1\right)+2}{(x-1)^{99}} + \frac{1}{(x-1)^{100}}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^{98}} + \frac{2}{(x-1)^{99}} + \frac{1}{(x-1)^{100}}$$

$$\therefore \int \frac{x^2}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\left(x-1\right)}{(x-1)^{98}} + 2\int \frac{\mathrm{d}\left(x-1\right)}{(x-1)^{99}} + \int \frac{\mathrm{d}\left(x-1\right)}{(x-1)^{100}}$$

4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-8x+25}$

解：$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-8x+25} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-4)^2+9} = \frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^{x}+1}\mathrm{d}x$

解：$\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^{x}+1}\mathrm{d}x = \int(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}+x+C$

6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}$

解 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\arcsin\frac{x}{2})}{\arcsin\frac{x}{2}} = \ln\left|\arcsin\frac{x}{2}\right| + C$

作业 $\displaystyle\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,dx$

方法一）: $u=\tan x$.

方法二）:

7. $\displaystyle\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$

解: $\displaystyle\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x} = \ln|\cos x+\sin x| + C$

8. $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$ 解法一：利用切代换。

原式 $\overset{x=\tan t\,(|t|<\frac{\pi}{2})}{=} \int \frac{\sec t}{1+\tan t}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t+\frac{\pi}{4})}{\sin(t+\frac{\pi}{4})}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\csc(t+\frac{\pi}{4}) - \cot(t+\frac{\pi}{4})\right| + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}(\cos t-\sin t)}{\sqrt{2}(\sin t+\cos t)}\right| + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{2}\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}}\right| + C = \text{....化简}$$

8. $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$ 解法二：利用倒数代换。

$$\text{原式} \overset{x+1=\frac{1}{t}>0\text{时}}{=} \int \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2t^2-2t+1}} = -\int \frac{\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\sqrt{(2t-1)^2+1}+(2t-1)\right|+C$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\sqrt{\left(\frac{2}{x+1}-1\right)^2+1}+\left(\frac{2}{x+1}-1\right)\right|+C$$

8. $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$

原式 $\overset{x+1=\frac{1}{t}>0\text{时}}{=} -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\sqrt{2(1+x)^2}+1-x\right|+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+x)+C$

$x+1=\frac{1}{t}<0$时，类似，需要注意开根号时的符号。

9. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}} \quad (x>0)$

法一、切代换（比较简单），可以将x>0的条件去掉

法二、用倒数代换。

解：$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}} \overset{t=\frac{1}{x}}{=} -\int t^4 \frac{\frac{1}{t^2}}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} dt = -\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}} dt$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} d(t^2) \quad = -\frac{1}{2}\int \frac{\left(t^2+1\right)-1}{\sqrt{t^2+1}} d(t^2)$$

$$\begin{cases} d(t^2) = 2t\,dt \\ dt^2 = (dt)^2 = dt \cdot dt \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sqrt{t^2+1}\, d\left(t^2+1\right) + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+1\right)}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\sqrt{t^2+1}\right)^3 + \sqrt{t^2+1} + C \quad = -\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C$$

10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2+1}} \quad (x>0)$

法三、类倒数代换

解：$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2+1}} \overset{t=\frac{1}{x^2}}{=} \int -\frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{t+1}}\mathrm{d}t$

$$=-\frac{1}{2}\int(\sqrt{t+1}-\frac{1}{\sqrt{t+1}})\mathrm{d}(t+1)=-\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{1+t}+C$$

$$=-\frac{1}{3}(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+C$$

11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}$ 分母有理化

解：$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}} = \int \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}}{(2x+3)-(2x-1)}\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4}\int (\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1})\mathrm{d}x = \frac{1}{12}(2x+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + C$

12. $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$

解：$\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{x}}{=} \int \sqrt{\frac{t^2}{1-t^3}}\, 2t\mathrm{d}t = \int \frac{2t^2}{\sqrt{1-t^3}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}(t^3)}{\sqrt{1-t^3}}$

$= -\frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}(1-t^3)}{\sqrt{1-t^3}} = -\frac{4}{3}\sqrt{1-t^3} + C = -\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}} + C$

13. $\int (\frac{\ln x}{x})^2 \mathrm{d}x$

解：$\int (\frac{\ln x}{x})^2 \mathrm{d}x = -\int (\ln x)^2 \mathrm{d}(\frac{1}{x})$

$= -\frac{\ln^2 x}{x} + \int \frac{2\ln x}{x^2} \mathrm{d}x = -\frac{\ln^2 x}{x} + 2\int \ln x \mathrm{d}(-\frac{1}{x})$

$= -\frac{\ln^2 x}{x} - 2\frac{\ln x}{x} + 2\int \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = -\frac{\ln^2 x}{x} - 2\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C$

14. $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$

法一： 解：令$t=\ln x$，则$x=\mathrm{e}^t, \mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$

$$\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x=\int \sin t\cdot\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

$$=\int \sin t\mathrm{d}\mathrm{e}^t=\sin t\cdot\mathrm{e}^t-\int \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\sin t\cdot\mathrm{e}^t-\int \cos t\mathrm{d}\mathrm{e}^t=\sin t\cdot\mathrm{e}^t-\cos t\cdot\mathrm{e}^t-\int \sin t\cdot\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

移项后有

$$\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$$

14. $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$

法二：（直接分部积分）

解：$\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$

$$= x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + \int [-\sin(\ln x)]\mathrm{d}x$$

移项后有

$$\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$$

15. $\int \ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})\mathrm{d}x$

解：令 $t=1+x$

$$\int \ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})\mathrm{d}x=\int \ln(t+\sqrt{t^2-1})\mathrm{d}t$$

$$=t\ln(t+\sqrt{t^2-1})-\int \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$$

$$=t\ln(t+\sqrt{t^2-1})-\sqrt{t^2-1}+C$$

$$=(1+x)\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})-\sqrt{2x+x^2}+C$$

也可直接用分部积分

16. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$

解：$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^{-2}}{x^2+x^{-2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x-x^{-1})}{(x-x^{-1})^2+2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C$$

17. $\int \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{x^2+1}{x^4+1}-\frac{x^2-1}{x^4+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x-x^{-1})}{(x-x^{-1})^2+2}-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+x^{-1})}{(x+x^{-1})^2-2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+C$$

18. $\int \frac{1}{x(3+x^7)}\mathrm{d}x$ 特点：分母两个因式次数相差比较大，且继续因式分解比较困难。----凑

解：$\int \frac{1}{x(3+x^7)}\mathrm{d}x = \int \frac{3}{3x(3+x^7)}\mathrm{d}x = \int \frac{\left(3+x^7\right)-x^7}{3x(3+x^7)}\mathrm{d}x$

$$= \int \left(\frac{1}{3x} - \frac{x^6}{3(3+x^7)} \right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{21}\ln|3+x^7| + C$$

$$= \frac{1}{21}\ln\left|\frac{x^7}{3+x^7}\right| + C$$

19. $\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} \mathrm{d}x$　　可以用万能公式，下采用别的方法

解法一：原式 $= \int \frac{\tan x}{\tan x - 1} \mathrm{d}x$

$$\overset{u=\tan x}{=} \int \frac{u}{u-1} \cdot \frac{1}{1+u^2} \mathrm{d}u$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{(u-1)^2 - (1+u^2)}{(u-1)(1+u^2)} \mathrm{d}u$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{u-1}{1+u^2} \mathrm{d}u + \frac{1}{2} \int \frac{1}{u-1} \mathrm{d}u$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{u}{1+u^2} \mathrm{d}u + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u^2} \mathrm{d}u + \frac{1}{2} \int \frac{1}{u-1} \mathrm{d}u$$

$= \ldots\ldots$

19. $\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx$ 可以用万能公式，下采用别的方法

解法二：原式 $= \int \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{-\cos 2x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left[1 - \sec 2x + \frac{(\cos 2x)'}{2\cos 2x}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\ln|\sec 2x + \tan 2x| + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C)$$

$$= \frac{1}{2}(x + \ln|\cos x - \sin x|) + C$$

20. $\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x(1+\sqrt{x})}}\mathrm{d}x$

解：$\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x(1+\sqrt{x})}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,2\mathrm{d}\sqrt{x}$

$\underline{\underline{令t=\sqrt{x}}}\ 2\int\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\mathrm{d}t=2\int\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$

$=2(\arcsin t+\sqrt{1-t^2})+C$

$=2(\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x})+C$

21. $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\mathrm{d}x$

解： $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\mathrm{d}\left(x^2-1\right)$

$= -\int \ln x\mathrm{d}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

后一式子采用倒数代换:令 $t=\frac{1}{x}$ ，则 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$,

$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \arccos t + C = \arccos\frac{1}{x} + C$

所以， 原式$=-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + \arccos\frac{1}{x} + C$

22. 设 $f'(\sin x)=\cos 2x+\tan^2 x$，求 $f(x)$，$(0<x<1)$。

解：由于 $f'(\sin x)=1-2\sin^2 x+\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$

所以 $f'(x)=1-2x^2+\dfrac{x^2}{1-x^2}=-2x^2+\dfrac{1}{1-x^2}$

$$f(x)=\int\left(-2x^2+\frac{1}{1-x^2}\right)dx$$

$$=-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$$

有理分式积分的练习

$$1.\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}\mathrm{d}x \quad = \int\left(2x+\frac{1}{x^4+3x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= x^2+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+3x^2} = x^2+\int\left[\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}+c$$

$$2.\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x-3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-3\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c$$

三角有理式积分的练习

3. 求 $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$

令 $u = \tan\dfrac{x}{2}$ $\quad \sin x = \dfrac{2u}{1+u^2}$ $\quad x = 2\arctan u$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

于是$\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x \quad =\int\frac{(1+\frac{2u}{1+u^2})}{\frac{2u}{1+u^2}(1+\frac{1-u^2}{1+u^2})}\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$

$$=\frac{1}{2}\int(u+2+\frac{1}{u})\mathrm{d}u=\frac{1}{2}(\frac{u^2}{2}+2u+\ln|u|)+c$$

$$=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$$

简单无理函数的积分的练习

主要讨论 $R(x,\sqrt[n]{ax+b})$ 及 $R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$

例1 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$　　令 $\sqrt{x-1}=t$

例2 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$　　令 $t=\sqrt[3]{x+2}$

例3 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$　　$x=t^6\ (t>0)$

例4 $\displaystyle\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x$　　$\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=t,\quad x=\dfrac{1}{t^2-1}\ (t>0)$

2. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)}$

法1 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)} = \int \frac{(x^{10}+1)-x^{10}}{x(x^{10}+1)}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{(x^{10}+1)-x^{10}}{x(x^{10}+1)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}\left(x^{10}+1\right)}{(x^{10}+1)}$$

法2 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)} = \frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}\ x^{10}}{x^{10}(x^{10}+1)}$

法3 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^{11}(x^{-10}+1)} = -\frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}x^{-10}}{x^{-10}+1}$

补例1：已知$f(x)=|x-1|$,求它的原函数$F(x)$,且满足$F(1)=1$.

解 $\because f(x)=|x-1|=\begin{cases}1-x, & x<1,\\ x-1, & x\geq 1,\end{cases}$ $\therefore F(x)=\begin{cases}x-\dfrac{x^2}{2}+C_1, & x<1,\\ \dfrac{x^2}{2}-x+C, & x\geq 1.\end{cases}$

由$F(x)$在$x=1$处连续,和$F(1)=1$得$1-\dfrac{1}{2}+C_1=\dfrac{1}{2}-1+C=1$

$\Rightarrow C_1=-1+C=\dfrac{1}{2}, C=\dfrac{3}{2}$;故

$$F(x)=\begin{cases}x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}, & x<1,\\ \dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{3}{2}, & x\geq 1.\end{cases}$$

补例2：已知$f'(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0, \\ \sin x, & x>0, \end{cases}$求$f(x)$.

解 $f(x)=\begin{cases} \int x^2\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+C, & x\le 0, \\ \int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C_1, & x>0 \end{cases}$

$\because f(x)$在$x=0$处连续，$\therefore f(0+0)=f(0)$,即

$$-1+C_1=C\Rightarrow C_1=1+C.$$

故 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}+C, & x\le 0, \\ -\cos x+1+C, & x>0. \end{cases}$

补例2：已知$f'(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0, \\ \sin x, & x>0, \end{cases}$求$f(x)$.

解 $f(x)=\begin{cases} \int x^2 \mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+C, & x\le 0, \\ \int \sin x \mathrm{d}x=-\cos x+C_1, & x>0 \end{cases}$

$\because f(x)$在$x=0$处连续，$\therefore f(0+0)=f(0)$,即

$$-1+C_1=C \Rightarrow C_1=1+C.$$

故 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}+C, & x\le 0, \\ -\cos x+1+C, & x>0. \end{cases}$

补例3：$\int e^{2x}(\tan x+1)^2 dx$　　遇到可以拆解的，未必每一项都能积分出来

解: 原式 $= \int e^{2x}(\tan^2 x+1+2\tan x)dx = \int e^{2x}(\sec^2 x+2\tan x)dx$

$$= \int e^{2x} d(\tan x) + 2\int e^{2x} \tan x \, dx$$

$$= e^{2x} \tan x - 2\int \tan x e^{2x} dx + 2\int e^{2x} \tan x \, dx$$

$$= e^{2x} \tan x + C$$

补例4：$\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}x$

方法一：倒数代换，不简单

方法二：割代换，$x=3\sec t$, $t\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi)$,则

当$t\in(0,\frac{\pi}{2})$时，有

$$\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}x=\int \frac{3\sec t\cdot\tan t}{27\times 3\sec^3 t\cdot\tan t}\mathrm{d}t=\frac{1}{27}\int\cos^2 t\ \mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{54}\int(1+\cos 2t)\ \mathrm{d}t=\frac{1}{54}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C$$

$$=\frac{1}{54}(t+\sin t\cos t)+C$$

$$=\frac{1}{54}(\arccos\frac{3}{x}+\frac{3\sqrt{x^2-9}}{x^2})+C$$

当$t\in(\frac{\pi}{2},\pi)$时，类似$\cdots$

补例4：$\int\frac{1}{x^3\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}x$　　方法三：$t=\sqrt{x^2-9}$,则

$x>0$时，$x=\sqrt{t^2+9}$; $x<0$时，$x=-\sqrt{t^2+9}$，从而

$$\int\frac{1}{x^3\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}x \underline{\underline{x>0}} \int\frac{1}{t(t^2+9)\sqrt{t^2+9}}\mathrm{d}\sqrt{t^2+9}=\int\frac{1}{(t^2+9)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{9}\int\frac{(9+t^2)-t^2}{(t^2+9)^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{9}\left(\int\frac{1}{9+t^2}\mathrm{d}t-\int\frac{t^2}{(t^2+9)^2}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(\int\frac{1}{9+t^2}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int\frac{t}{(t^2+9)^2}\mathrm{d}(t^2+9)\right)=\frac{1}{9}\left(\int\frac{1}{9+t^2}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int t\ \mathrm{d}(t^2+9)^{-1}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(\int\frac{1}{9+t^2}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\frac{t}{9+t^2}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{9+t^2}\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{18}\left(\frac{t}{9+t^2}+\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+(\frac{t}{3})^2}\mathrm{d}\frac{t}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{18}\left(\frac{t}{9+t^2}+\frac{1}{3}\arctan\frac{t}{3}\right)+C=\frac{1}{18}\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}+\frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right)+C$$

$x<0$时，类似............

补例4：$\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}x$　　方法四：先凑后换元

原式$=\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}x=\int \frac{x}{x^4\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2-9)}{x^4\sqrt{x^2-9}}$

$\underline{\underline{\text{令}t=\sqrt{x^2-9}}}\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t^2)}{t(t^2+9)^2}=\int \frac{1}{(t^2+9)^2}\mathrm{d}t$

后面同方法三或者令$t=3\tan u\cdots$

补例5：$\int \frac{1}{x\cdot\sqrt[4]{x^4+1}}\,\mathrm{d}x$ （数分课本P230.4(12)）

解：$t=\sqrt[4]{x^4+1}$，则 $x>0$时，$x=\sqrt[4]{t^4-1}$；$x<0$时，$x=-\sqrt[4]{t^4-1}$，从而

$$\int \frac{1}{x\cdot\sqrt[4]{x^4+1}}\,\mathrm{d}x \underline{\underline{\ x>0\ }} \int \frac{1}{t\cdot\sqrt[4]{t^4-1}}\,\mathrm{d}\sqrt[4]{t^4-1}=\frac{1}{4}\int \frac{4t^3}{t\cdot(t^4-1)}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int \frac{t^2}{t^4-1}\,\mathrm{d}t \qquad =\frac{1}{2}\int \frac{(t^2-1)+(t^2+1)}{(t^2-1)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{2}\arctan t+C$$

=回代t. . . . .

$x<0$时，类似...........

补例6：$\displaystyle\int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}\mathrm{d}x$ (数分课本P230.1(15))

解：原式= $\displaystyle\frac{1}{5}\int \frac{x^5}{\left[(x^5+1)^2+1\right]^2}\mathrm{d}x^5$ 令$u = x^5$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{u}{\left[(u+1)^2+1\right]^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{5}\int \frac{(u+1)-1}{\left[(u+1)^2+1\right]^2}\mathrm{d}(u+1)$$ 令$v = u+1$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{v-1}{(v^2+1)^2}\mathrm{d}v = \frac{1}{5}\int \frac{v\mathrm{d}v}{(v^2+1)^2} - \frac{1}{5}\int \frac{1}{(v^2+1)^2}\mathrm{d}v$$

$$= \cdots$$

补例7：$\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$

解法一：原式$=\int \frac{x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+1)}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$ $=2\int x\mathrm{d}\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$ =分部积分$\cdots$

解法二：令$t=\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$,则$x=\ln(t^2-1)$,从而

$$原式=\int \frac{(t^2-1)\ln(t^2-1)}{t}\mathrm{d}\ln(t^2-1)$$

$$=2\int \ln(t^2-1)\mathrm{d}t \text{ =分部积分}\cdots$$

补例8：$\int \frac{x^4}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x$

解：原式= $\int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x$

$$= \int (x^2-1)\arctan x\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\int \arctan x\,\mathrm{d}(x^3-x) + \frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}(x^3-x)\arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{(x^3-x)}{1+x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2$$

$$= \cdots$$

练习题和提示

$$(1)\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}} \quad =\int\frac{\mathrm{d}(x-2)}{\sqrt{4-(x-2)^2}}=\cdots$$

$$(2)\int\frac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x \quad =-\int\ln x\,\mathrm{d}\frac{1}{x}-\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\cdots$$

$$(3)\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x=$$ 分部积分

$$(4)\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x= \quad 2\int\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x}=\ldots..$$

$$(5)\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x= \quad -\int\ln\sin x\,\mathrm{d}\cot x=\ldots..$$

$$(6)\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}= \quad 令 t=\mathrm{e}^x$$

$$(7)\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+1)=2\int x\,\mathrm{d}\sqrt{1+\mathrm{e}^x}=\ldots(令 t=\sqrt{1+\mathrm{e}^x})$$

$$(8)\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x-\int\frac{\arctan x}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$=-\int\arctan x\,\mathrm{d}\frac{1}{x}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2=\ldots$$

$$(9)\int\frac{x^4}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x=\int(x^2-1)\arctan x\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x=\ldots$$

$$(10)\int\mathrm{e}^{2x}(\tan x+1)^2\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{2x}(\sec^2x+2\tan x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}\tan x+2\int\mathrm{e}^{2x}\tan x\,\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{2x}\tan x-\int\tan x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x}+2\int\mathrm{e}^{2x}\tan x\,\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{2x}\tan x+C$$