工科数学分析A

第5章　微分中值定理　习题课

对应于《高数2A》第三章习题课，视频网址：
http://www.icourse163.org/live/480000001943707.htm

天津大学 数学学院
郭飞

- Part 1　导数的应用
- Part 2　洛必达法则
- **Part3　微分中值定理**
- **Part4　泰勒公式**

Part1、导数的应用

常见题型

- 单调性与极值
- 凹凸性与拐点
- 方程解的个数问题
- 利用单调性或凹凸性证明不等式
- 渐近线（不讲）

极值的充分条件

第一充分条件：设$f(x)$在点x_0处连续，在x_0的某去心邻域内可导，

（1）若左去心邻域内$f'(x)>0$,右去心邻域内$f'(x)<0$,则$f(x)$在点x_0处取极大值；

（2）若左去心邻域内$f'(x)<0$,右去心邻域内$f'(x)>0$,则$f(x)$在点x_0处取极小值.

第二充分条件：设$f(x)$在点x_0处存在二阶导数，且$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$,

（1）若$f''(x_0)<0$,则$f(x)$在点x_0处取极大值；

（2）若$f''(x_0)>0$,则$f(x)$在点x_0处取极小值.

凹凸性定义：设函数$f(x)$**在区间**I **上有定义**,$\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0,1]$,

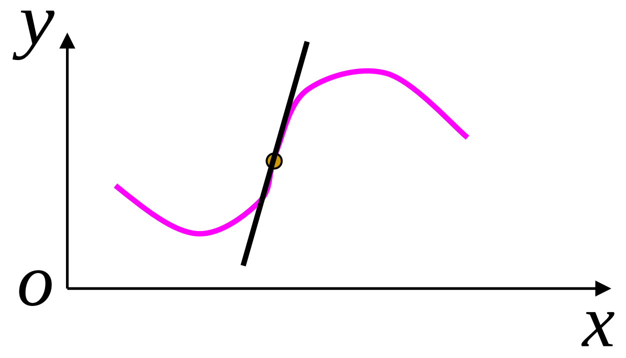
(1)**若恒有**$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right)(<) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$,

则称 $f(x)$ **是（严格）下凸函数;**

(2)**若恒有**$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right)(>) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$,

则称 $f(x)$**是（严格）上凸函数.**

连续曲线上严格上凸和严格下凸的分界点称为拐点 .



凹凸性的充分条件： 设$f(x)$在区间I上有二阶导数

（1）若在I内$f''(x) > 0$,则$f(x)$在I严格下凸;

（2）若在I内$f''(x) < 0$,则$f(x)$在I严格上凸.

拐点的必要条件：

设$f(x)$在x_0点二阶可导，若$(x_0, f(x_0))$是曲线$y = f(x)$的拐点，

则$f''(x_0) = 0$.

拐点的第二充分条件：

设$f(x)$在x_0点的某邻域内二阶可导，x_0 点三阶可导，$f''(x_0) = 0$,

$f'''(x_0) \neq 0$，则$(x_0, f(x_0))$是曲线$y = f(x)$的拐点.

例1.1. 设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解，若 $f(x_0) > 0$，且 $f'(x_0) = 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 点(**A**)

(A) 取得极大值

(B) 取得极小值

(C) 某邻域内单调增加

(D) 某邻域内单调减少

解： 将 $f(x)$ 代入方程，令 $x = x_0$，得 $f''(x_0) = -4f(x_0) < 0$

注：由微分方程的性质可知 $f''(x)$ 连续，则根据极限的保号性，可知在 x_0 的某邻域内 $f''(x) < 0$，从而 $f'(x)$ 严格单减，$f(x)$ 严格上凸.

例1. 2 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$**在区间**$\underline{\left(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)}$**内是严格上凸曲线.**

解： $y'=-2x\mathrm{e}^{-x^2}, y''=2(x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2}.$

仅当$x^2-2<0$**即**$|x|<\sqrt{2}$**时,** $y''<0,$ **故其严格上凸的区间为**

$\left(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right).$

例1.3 方程$x^3-3x+1=0$在区间(0, 1)内（ B ）

（A）无实根　　（B）有惟一实根

（C）有两个实根　　（D）有三个实根

解：令 $f(x)=x^3-3x+1$,则$f\in C[0,\ 1]$.

$\because\ f(0)=1>0,\ f(1)=-1<0, \therefore\ f(x)=0$在$(0,\ 1)$内

至少有一个实数根；又由

$$f'(x)=(x^3-3x+1)'=3x^2-3=3(x^2-1)<0$$

知$f(x)$在$(0,\ 1)$内严格递减，所以此方程在$(0,\ 1)$内有且仅有一个实根.

例1.4.

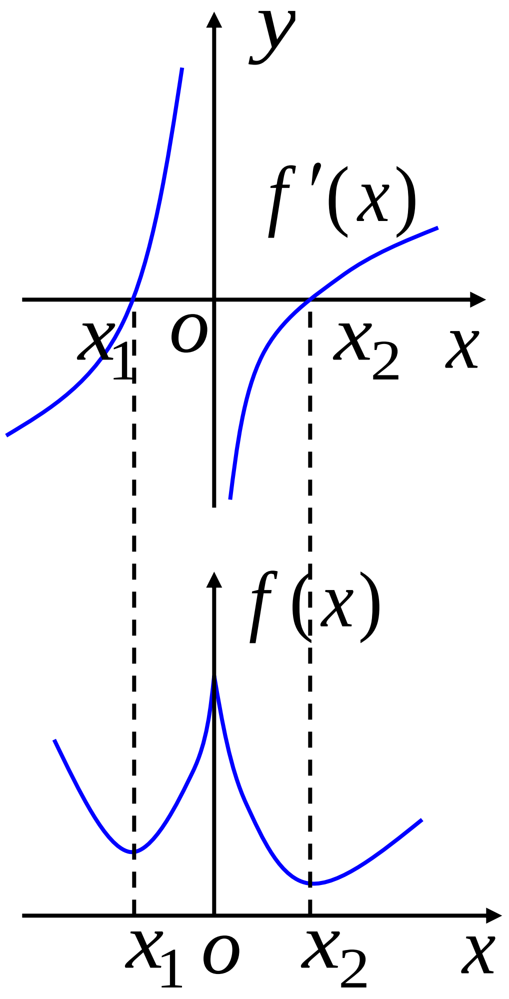
（1） 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，其导函数图形如图所示，则$f(x)$的

单调减区间为 $\underline{(-\infty, x_1), (0, x_2)}$ ；

单调增区间为 $\underline{(x_1, 0), (x_2, +\infty)}$ ；

极小值点为 $\underline{x_1,\ x_2}$ ；

极大值点为 $\underline{x = 0}$.

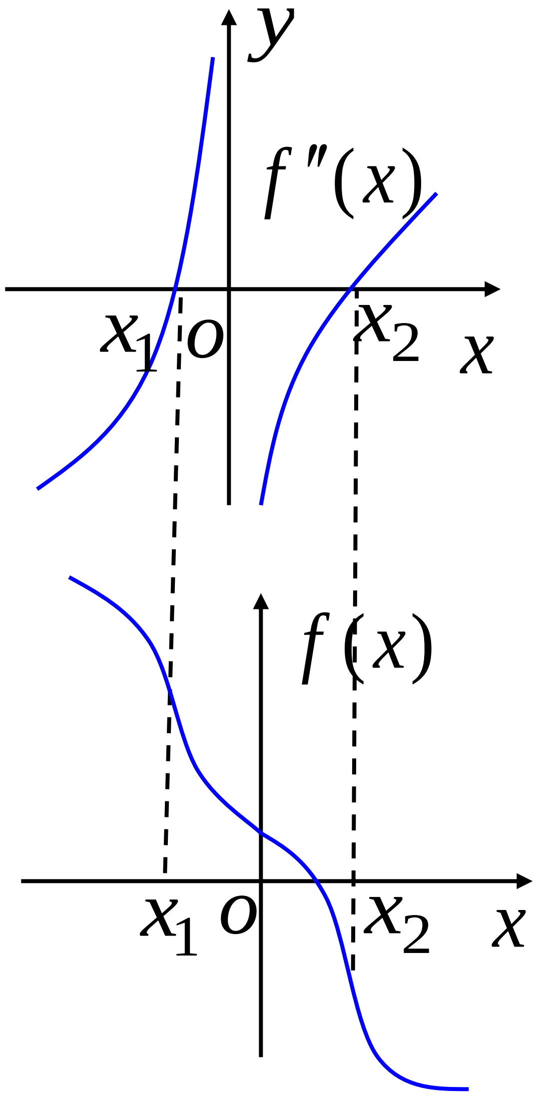


提示：根据$f(x)$的连续性及导函数的正负作$f(x)$的示意图.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$f''(x)$ 的图形如图所示，则函数 $f(x)$ 的图形在区间 $\underline{(x_1, 0), (x_2, +\infty)}$ 下凸；

在区间 $\underline{(-\infty, x_1), (0, x_2)}$ 上凸；

拐点为 $\underline{(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (0, f(0))}$.



提示：根据 $f(x)$ 的可导性及 $f''(x)$ 的正负作 $f(x)$ 的示意图.

例1.5. 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项 .

解： 设 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}\ (x\ge 1)$, 用对数求导法得

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=\mathrm{e}$,

列表判别：

x	$[1,\mathrm{e})$	e	$(\mathrm{e},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$	$\searrow$

极大值

因为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 只有唯一的极大点 $x=\mathrm{e}$, 因此在 $x=\mathrm{e}$ 处 $f(x)$ 也取最大值 .

又因 $2<\mathrm{e}<3$, 且 $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$, 故 $\sqrt[3]{3}$ 为数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 中的最大项.

例1.6. 证明：当 $0<x<1$ 时，$e^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}$.

法一：两边取对数后，只要证

$$f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)-2x>0.$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-2=\frac{2x^2}{1-x^2}>0$$

$$\Rightarrow f(x)>f(0)=0 \quad (0<x<1).$$

例1.6. 证明：当 $0<x<1$ 时，$e^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}$.

法二： 只要证 $(1-x)e^{2x}-1-x<0, \quad (0<x<1)$.

设 $f(x)=(1-x)e^{2x}-1-x$，则 $f(0)=0$，

$$f'(x)=(1-2x)e^{2x}-1 \Rightarrow f'(0)=0,$$

$$f''(x)=-4xe^{2x}<0 \quad (0<x<1)$$

$$f'(x)<f'(0)=0 \Rightarrow f(x)<f(0)=0$$

故原不等式成立.

这个例子说明：同样是利用函数的单调性证明不等式，辅助函数选择的恰当，就能简化计算和证明.

例1.7. 证明： $\forall x>0,\forall y>0,$ 且 $x\neq y,$ 恒有

$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}.\Leftarrow\frac{x\ln x+y\ln y}{2}>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}$$

证明： 令 $f(t)=t\ln t, t\in(0,\ +\infty),$ 则 $f'(t)=\ln t+1.$

$f''(t)=\frac{1}{t}>0\ \ (\forall t>0)$，故 $f(x)$ 为严格下凸函数，所以

$\forall x>0,\forall y>0,$ 且 $x\neq y,$ 恒有 $\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$ 即

$$\frac{x\ln x+y\ln y}{2}>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2},$$

即 $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$

Part2　洛必达法则

$\dfrac{0}{0}$型及$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式解法：洛必达法则

如果当 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 时，两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大，那么极限 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可能存在、也可能不存在.

通常把 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 称为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

例如, $\dfrac{\tan x}{x}$ $(\dfrac{0}{0})$ $\qquad \dfrac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$ $(\dfrac{\infty}{\infty})$

定理 $\frac{0}{0}$ **型未定式的洛必达法则**

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$;

(2) 在 x_0 点的某去心邻域内，$f(x)$ 及 $g(x)$ 都可导

且 $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为无穷大);

那么，$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

定理 $\frac{\infty}{\infty}$ **型未定式的洛必达法则**

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$;

(2) 在 x_0 点的某去心邻域内，$f(x)$ 及 $g(x)$ 都可导

且 $g(x)\neq 0, g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为无穷大);

那么，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

使用洛必达法则的注意事项

- 先判断是哪种类型的未定式，然后进行最简单的形变，形变的原则是使用洛必达法则时的求导运算尽量简单；
- 要注意定理的使用条件，如果分子分母的导数相除的极限不存在，**不能说明函数极限不存在**，而是说明洛必达法则失效；
- 遇到0/0型的未定式时，如果函数中有极限非零的因式，应先求出该因式的极限，然后再使用洛必达法则，这样可以简化求导计算；
- **洛必达法则未必是最优方法！**一定结合其他求极限的方法. 因为使用洛必达法则要对函数求导，在能使用无穷小等价代换时先代换, 这样可以在求导时大大简化计算.

例2.1 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

正确解： $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1+0=1.$

错误解： $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ 不存在.

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ 不存在.

例2.2 设$f(x)$在x_0点处二阶可导，求极限

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}.$$

解：$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}\quad(\frac{0}{0})$$

能继续用洛必达法则吗？

$$=\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)+f'(x_0)-f'(x_0-h)}{2h}\quad(\frac{0}{0})$$

凑二阶导数的定义

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\left[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}\right]$$

$$=f''(x_0).$$

例2. 3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-(e^x-1)}{(1+\cos x)x\ln(1+x)}$.

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-(e^x-1)}{(1+\cos x)x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(1+\cos x)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-(e^x-1)}{x\ln(1+x)}$ **(极限的四则运算)**

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-(e^x-1)}{x^2}$ **(无穷小等价代换)**

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^x}{2x}$ **(洛必达法则)**

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x-e^x}{2}$ **(洛必达法则)**

$=-\dfrac{1}{4}$.

例2. 4　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]$.

分析：1. 这是$\infty-\infty$型未定式.

2. 极限过程如果变为$x\to 0$，会比$x\to\infty$有更多的求极限的方法.

解：令$t=\frac{1}{x}$,则

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]$$ **(改变极限过程)**

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}$$ **(通分后用洛必达法则)**

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2}.$$

Part3、微分中值定理

$$
\begin{tikzcd}
\text{罗尔定理} \arrow[r, dashed, shift right] \arrow[d, dashed, shift left] & \text{拉格朗日中值定理} \arrow[l, shift right, "f(a)=f(b)"'] \\
\text{柯西中值定理} \arrow[u, "{F(x)=x,\ f(a)=f(b)}"] \arrow[ur, "F(x)=x"] \arrow[r, dashed] & \text{泰勒中值定理} \arrow[u, "n=0"']
\end{tikzcd}
$$

罗尔定理：$f'(\xi)=0$

拉格朗日中值定理：$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

柯西中值定理：$\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

泰勒中值定理：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

有关中值问题证明题的解题方法

- 证明含有一个中值的等式或方程根的存在，多用罗尔中值定理，可用积分的方法找辅助函数.
- 若结论中涉及到含中值的两个不同函数，则应考虑用柯西中值定理.
- 若结论中含两个或两个以上的中值，必须多次应用中值定理.
- 若条件或结论中含高阶导数，多考虑用泰勒公式，有时也可考虑对导函数用中值定理.
- 若结论为不等式，要注意适当放大或缩小的技巧.

常见题型

- 证明等式或不等式
- 求极限

例3. 1. **设函数 $f(x)$ 在[0, 3] 上连续, 在(0, 3) 内可导, 且**

$f(0)+f(1)+f(2)=3,\ f(3)=1$, **试证必存在** $\xi\in(0,3)$, 使

$f'(\xi)=0$.

证: 因 $f(x)$ 在[0, 3]上连续, 所以在[0, 2]上连续, 且在

[0, 2]上有最大值 M 与最小值 m, 故

$$m\le f(0),\ f(1),\ f(2)\le M \Longrightarrow m\le\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$$

由介值定理, 至少存在一点 $c\in[0,2]$, 使

$$f(c)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$$

$\because\ f(c)=f(3)=1$, 且 $f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续, 在 $(c,3)$ 内可导,

由罗尔定理知, 必存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$.

例3.2　若$f\in C[a,\ b], f\in D(a,\ b),(0<a<b)$,则$\exists\xi\in(a,\ b)$,使得

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi).\Leftarrow -\frac{1}{\xi^2}\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'\Bigg|_{x=\xi}$$

试分别用罗尔中值定理和柯西中值定理证明之.

证法一：用罗尔中值定理. 令$\varphi(x)=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}\frac{1}{x}-\frac{f(x)}{x}$,则

$$\varphi\in C[a,\ b],\varphi\in D(a,\ b),\text{且}\varphi(a)=\varphi(b)=\frac{f(b)-f(a)}{a-b},$$

由罗尔中值定理知，$\exists\xi\in(a,\ b)$,使得

$$\varphi'(\xi)=-\frac{1}{\xi^2}\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}-\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0,$$

即，$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

证法二：用柯西中值定理.

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)\Leftrightarrow\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}},$$

故取$g(x)=\dfrac{f(x)}{x},\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$.

易知$g(x),\varphi(x)$在$[a,\ b]$上满足柯西中值定理条件，故$\exists\xi\in(a,\ b)$, 使得

$$\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}},\text{ 即}\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

例3. 3. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) **内可导, 且** $|f'(x)| \le M$,

证明 $f(x)$在 (a,b)**内有界.**

证: 取点 $c \in (a,b)$, **再取异于** c 的点 $x \in (a,b)$, **对**

$f(x)$在以 c, x**为端点的区间上用Lagrange中值定理,**

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x-c)$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad |f(x)| &= |f(c) + f'(\xi)(x-c)| \\ &\le |f(c)| + |f'(\xi)||x-c| \\ &\le |f(c)| + M(b-a) := K \quad \text{(定数)}\end{aligned}$$

可见对任意 $x \in (a,b)$, **有** $|f(x)| \le K$.

例3.4 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{2}-\sqrt[n+1]{2})$

解： 利用拉格朗日中值定理求极限.

$$\sqrt[n]{2}-\sqrt[n+1]{2}=2^{\xi}\cdot\ln 2\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),\quad (\frac{1}{n+1}<\xi<\frac{1}{n}).$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{2}-\sqrt[n+1]{2})=\lim_{n\to\infty}2^{\xi}\cdot\ln 2\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)n^2$$

$$=\ln 2\cdot\lim_{\xi\to 0}2^{\xi}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}=\ln 2.$$

注意：此题还有其他解法，比如利用无穷小等价代换.

例3.5 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1})\quad (a\neq 0)$

解：对函数$y=\arctan x$在以$\frac{a}{n}$和$\frac{a}{n+1}$为端点的区间上使用拉格朗日中值定理.

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty} n^2\frac{1}{1+\xi^2}(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1})\quad (\xi\text{在}\frac{a}{n}\text{与}\frac{a}{n+1}\text{之间})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}\frac{a}{1+\xi^2}$$

$$=a$$

Part4、泰勒公式

带拉格朗日型余项的泰勒公式： 如果函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上有n阶连续导数，在(a,b)内存在$(n+1)$阶导数，则对任意x_0, $x\in[a,b]$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x).$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$， ξ介于 x_0 与 x 之间.

当 $x_0 = 0$ 时，泰勒公式变成

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad (\xi\text{介于}0\text{与}x\text{之间}),$$

上式称为**麦克劳林(Maclaurin)公式.**

由此可得近似计算公式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

其误差估计公式为

若 $\left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \le M$，则 $|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$.

带佩亚诺型余项的泰勒公式：如果函数 $f(x)$ 在x_0点存在直到n阶的导数，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)，\ x\to x_0.$$

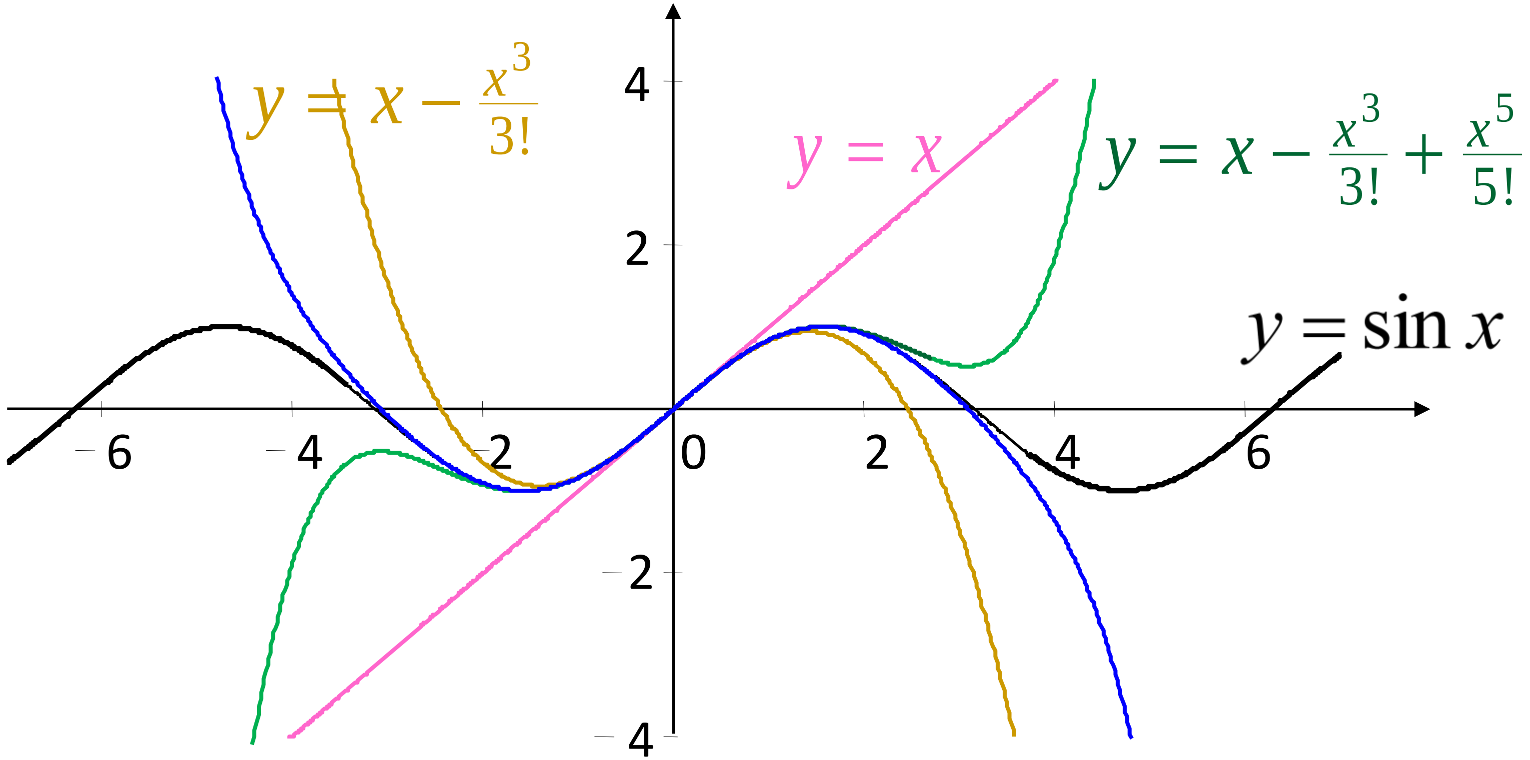
泰勒公式的理解：用一个多项式近似代替一个光滑性比较好的函数，且误差可估计 (定量估计用拉格朗日型余项，定性估计用佩亚诺型余项).能用几次多项式近似代替一个给定的函数，完全取决于该函数的可导性.

所以,可以利用泰勒公式进行近似计算和误差估计.

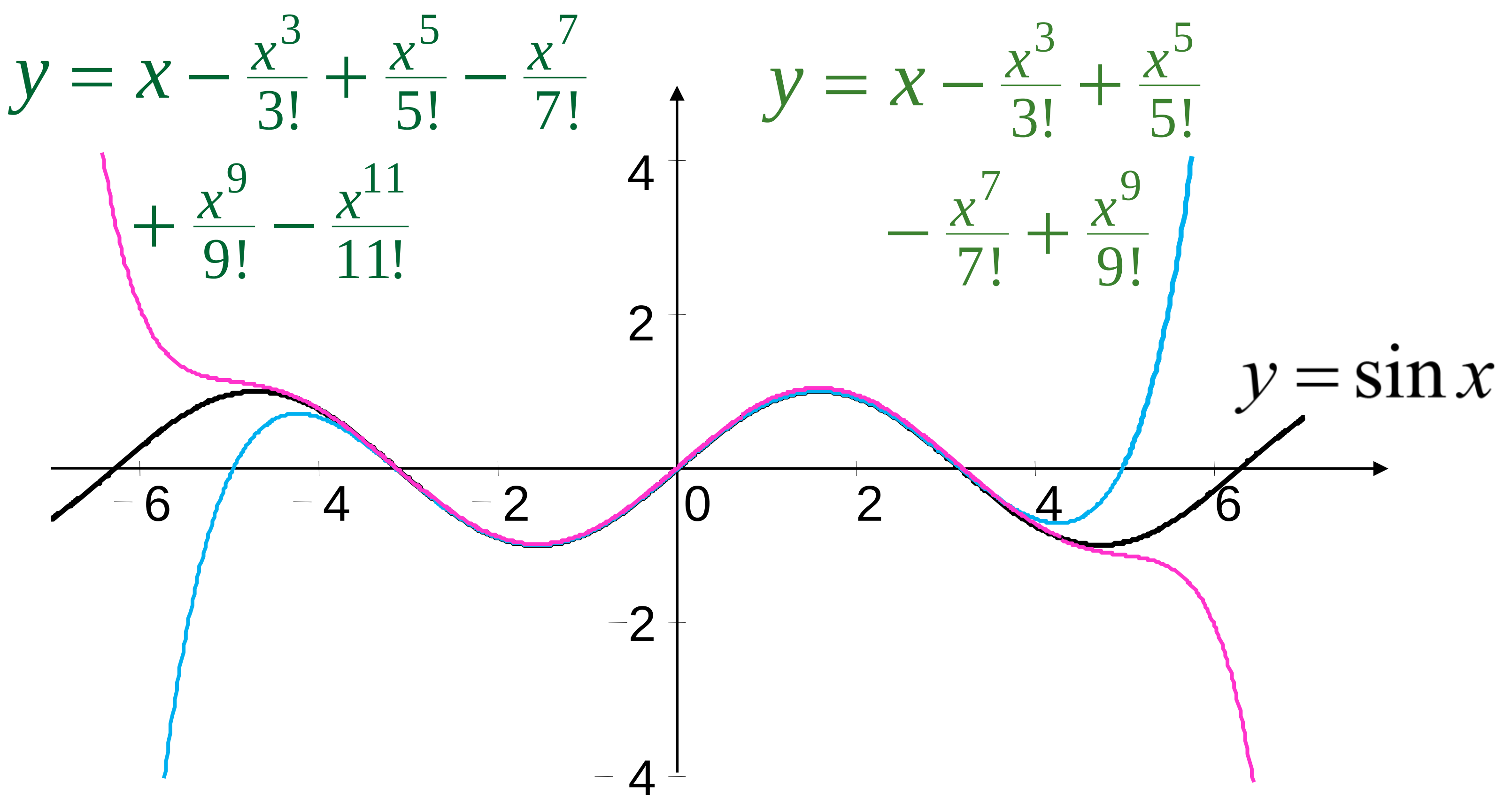
演示：泰勒多项式逼近 $y = \sin x$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$



$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$



熟记带佩亚诺余项如下的麦克劳林公式. 极限过程为

$x \to 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + o(x^{2m}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

最好还能记住下述带佩亚诺余项的麦克劳林公式:

极限过程为 $x \to 0$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4),$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4),$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

熟记带佩亚诺余项如下的麦克劳林公式. 极限过程为

$x \to 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + o(x^{2m}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

最好还能记住下述带佩亚诺余项的麦克劳林公式:

极限过程为 $x \to 0$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4),$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4),$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

关于泰勒公式，主要有如下几个题型：

- 求函数在一点处展开成泰勒公式
- 求一点处的高阶导数
- 求无穷小的阶
- 求函数的极限
- 证明等式或不等式
- 近似计算或求方程的近似解（不讲）

例4. 1 写出函数 $y = x^2 \ln(1+x)$ 的带佩亚诺型余项的n阶麦克劳林公式.

解： 利用函数 $\ln(1+x)$ 的 $(n-2)$ 阶麦克劳林公式 .

$$y = x^2 \ln(1+x) = x^2 \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + (-1)^{n-3} \frac{x^{n-2}}{n-2} + o(x^{n-2}) \right]$$

$$= x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} - \frac{x^6}{4} + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n-2} + o(x^n), x \to 0.$$

回顾 : $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n)$

例4.2 已知函数 $y=x^2\ln(1+x)$ ， 求 $y^{(n)}(0)(n>2)$.

分析： 利用函数$x^2\ln(1+x)$的 n 阶麦克劳林公式 .

解：根据例4.1可知

$$x^2\ln(1+x)=x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}-\frac{x^6}{4}+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n-2}+o(x^n).$$

根据泰勒公式的定义可知: 若 a_n 是麦克劳林公式中 x^n 的系数，则

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

$$\therefore \frac{(-1)^{n-1}}{n-2}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Rightarrow f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\frac{n!}{n-2}(n>2).$$

注意：本题利用莱布尼茨公式和 $\ln(1+x)$ 的高阶导数公式直接求导也行 .

例4. 3 已知 $x \to 0$ 时 $e^x + \ln(1-x) - 1$ 与 x^n 是同阶无穷小，求常数 n 的值.

解： 利用 e^x 和 $\ln(1-x)$ 的 3 阶麦克劳林公式，得到

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3), x \to 0.$$

$$\therefore e^x + \ln(1-x) - 1 = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim -\frac{x^3}{6}, x \to 0.$$

$\therefore n = 3.$

思考：为什么展开到 3 阶？能否低于或高于 3 阶？

例4. 4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\mathrm{e}^x+1)-2(\mathrm{e}^x-1)}{x^2\sin x}$.

分析： (1) 分母可以使用等价无穷小代换，但是分子中的第二项不能使用无穷小等价代换. 一般来说，0/0型未定式在求极限时如果加减法中等价无穷小代换失效，那么就可以考虑使用洛必达法则或泰勒公式.

(2) 如果分母容易判断等价于 x 的几阶无穷小, 则分子使用泰勒公式时，将分子展开到几阶取决于分母是 x 的几阶无穷小.

(3) 如果分母不容易一眼就判断等价于x 的几阶无穷小, 则使用泰勒公式时，将分子和分母各自展开到第一项不为0的次数就结束.

例4. 4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\mathrm{e}^x+1)-2(\mathrm{e}^x-1)}{x^2\sin x}$.

解：分子中的e^x使用麦克劳林公式，分母使用等价无穷小代换，得

$$x(\mathrm{e}^x+1)=x\left(2+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=2x+x^2+\frac{x^3}{2}+o(x^3),$$

$$2(\mathrm{e}^x-1)=2\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)=2x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\quad x\to 0.$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x(\mathrm{e}^x+1)-2(\mathrm{e}^x-1)}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

例4.5 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有三阶连续导数，

且 $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f'(\frac{1}{2})=0$, 证明:

存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $|f'''(\xi)|\geq 24$.

证: (泰勒公式:不同值在同一点展开)

由题设，在1/2处展开成泰勒公式，所以对 $x\in[0,1]$, 有

$$f(x)=f(\tfrac{1}{2})+f'(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})^2+\frac{1}{3!}f'''(\zeta)(x-\tfrac{1}{2})^3$$

$$=f(\tfrac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})^2+\frac{1}{3!}f'''(\zeta)(x-\tfrac{1}{2})^3$$

(其中 ζ 在 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间)

分别令 $x=0,1$, 得

$$1 = f(0) = f(\tfrac{1}{2}) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(-\tfrac{1}{2})^2 + \frac{f'''(\zeta_1)}{3!}(-\tfrac{1}{2})^3 \quad (\zeta_1 \in (0, \tfrac{1}{2}))$$

$$2 = f(1) = f(\tfrac{1}{2}) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(\tfrac{1}{2})^2 + \frac{f'''(\zeta_2)}{3!}(\tfrac{1}{2})^3 \quad (\zeta_2 \in (\tfrac{1}{2}, 1))$$

下式减上式， 得

$$1 = \frac{1}{48}\left(f'''(\zeta_2) + f'''(\zeta_1)\right) \le \frac{1}{48}\left(|f'''(\zeta_2)| + |f'''(\zeta_1)|\right)$$

取 $|f'''(\xi)| = \max\{|f'''(\zeta_2)|, |f'''(\zeta_1)|\}$

$$\le \frac{1}{24}|f'''(\xi)| \qquad (0 < \xi < 1)$$

$$\Longrightarrow \quad \therefore |f'''(\xi)| \ge 24$$

例4. 6 设$f\in D^2[a,b]$, $f'(a)=f'(b)=0$, 试证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\ge 4\left|\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}\right|.$$

证明:(泰勒公式:同一值在不同点展开)

将$f(\frac{a+b}{2})$分别在$x=a$和$x=b$处展开得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2}).$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b).$$

下式减上式，$f(b)-f(a)=\frac{1}{2}\left(f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$

下式减上式，$f(b)-f(a)=\frac{1}{2}\left(f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

$$\therefore \left|f(b)-f(a)\right| \le \frac{1}{2}(\left|f''(\xi_1)\right|+\left|f''(\xi_2)\right|)\frac{(a-b)^2}{4},$$

即$\frac{1}{2}(\left|f''(\xi_1)\right|+\left|f''(\xi_2)\right|)\ge 4\frac{\left|f(b)-f(a)\right|}{(a-b)^2}$.

令$\left|f''(\xi)\right|=\max\{\left|f''(\xi_1)\right|,\left|f''(\xi_2)\right|\}$,则有

$$\left|f''(\xi)\right|\ge 4\frac{\left|f(b)-f(a)\right|}{(a-b)^2}.$$