第二章　行列式

2.1　n 阶行列式的定义

2.1.1　排列与逆序

作为定义 n 阶行列式的准备, 首先引入 n 阶排列的定义.

定义 2.1.1 由自然数 $1, 2, \ldots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 阶**排列**, 记作 $j_1 j_2 \cdots j_n$.

例如, 312 是一个 3 阶排列, 45321 是一个 5 阶排列. 显然, n 阶排列有 $n!$ 个. 按数字的自然顺序由小到大的 n 阶排列 $12\cdots n$ 称为**自然排列**.

定义 2.1.2 在一个排列中, 若一个较大的数排在一个较小的数之前, 则称这两个数构成一个**逆序**. 排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 中逆序的总个数称为该排列的**逆序数**, 记作 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$.

例如在排列 312 中, 31 和 32 是逆序, 该排列的逆序数就是 $\tau(312) = 2$, 而排列 45321 的逆序数是 $\tau(45321) = 9$.

定义 2.1.3 逆序数是偶数的排列称为**偶排列**, 逆序数是奇数的排列称为**奇排列**.

例如, 312 是偶排列, 45321 是奇排列. 显然, $12\cdots n$ 的逆序数是零, 因而是偶排列.

把一个排列中某两个数的位置互换, 其余的数不动, 就得到一个新的排列. 这种变换称为**对换**. 例如, 将排列 45321 中的 3 与 4 对换, 则得到新排列 35421, 该排列的逆序数 $\tau(35421) = 8$, 因此它是一个偶排列. 这说明经过一次对换, 该排列的奇偶性发生了改变. 一般地, 有以下结论:

定理 2.1.4 一次对换改变排列的奇偶性.

证明　首先考虑相邻对换的情形, 即对换的两个数在排列中是相邻的. 设排列

$$\cdots ij \cdots \tag{2.1}$$

经过 i 与 j 的对换变成

$$\cdots ji \cdots, \tag{2.2}$$

其中 “$\cdots$” 表示对换前后排列中不变的数. 显然, 在排列 (2.1) 中如 i, j 与其它的数构成逆序, 则在排列 (2.2) 中仍然构成逆序; 如不构成逆序则在 (2.2) 中也不构成逆序; 不同的只是 i, j 的次序. 如果原来 i, j(不) 构成逆序, 那么经过对换, 逆序数就 (增加) 减少一个. 不论哪种情况, 排列的逆序数的奇偶性就改变了. 此时, 定理是成立的.

下面考虑非相邻对换的情形. 设排列

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots \tag{2.3}$$

经过 i 与 j 的对换变成

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots . \tag{2.4}$$

由排列 (2.3) 变成排列 (2.4) 可以通过一系列相邻对换来实现. 先将排列 i 依次与 $k_1,k_2,\dots,$ k_s,j 经过 $s+1$ 次相邻对换, 排列 (2.3) 变为

$$\cdots k_1k_2\cdots k_sji\cdots , \tag{2.5}$$

再将 j 依次与 $k_s,k_{s-1},\dots,k_1$ 经过 s 次相邻对换, 排列 (2.5) 变成了排列 (2.4). 于是, 排列 (2.3) 中的 i,j 对换总共是通过 $2s+1$ 次的相邻对换来实现的. 而每经过一次相邻对换, 都会改变排列的奇偶性, 由于 $2s+1$ 是奇数, 所以排列 (2.3) 与排列 (2.4) 的奇偶性相反. □

推论 2.1.5 全部 n 阶排列中, 奇、偶排列各半, 均为 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明 设在全部 n 阶排列中有 s 个不同的奇排列和 t 个不同的偶排列. 把 s 个奇排列最左边的两个数都进行对换, 则 s 个奇排列变成了 s 个不同的偶排列, 所以 $s\le t$. 对 t 个偶排列最左边的两个数也都进行对换, 同理可得 $t\le s$. 故 $s=t=\frac{n!}{2}$. □

定理 2.1.6 任何一个 n 阶排列与自然排列可以经过一系列对换互变, 并且所作对换的次数与该排列有相同的奇偶性.

证明 任给一个 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$, 若 $j_n\ne n$, 则把 j_n 与 n 对换, 得到的排列的最后一位便是 n. 若这个排列的倒数第 2 位不是 $n-1$, 则把倒数第 2 位的数字与 $n-1$ 对换，得到的排列的倒数第 2 位便是 $n-1$. 依次做下去, 经过一系列对换便得到自然排列. 把这些对换反过来做, 便把自然排列变成排列 $j_1j_2\cdots j_n$.

由于自然排列是偶排列, 因而若 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列, 则所作对换的次数 s 必为偶数; 若 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列, 则 s 必为奇数. 因此所作对换的次数与排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 具有相同的奇偶性. □

2.1.2 2 阶与 3 阶行列式

行列式起源于二元和三元线性方程组的求解问题. 对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{2.6}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\ne 0$ 时, 用加减消元法求得 (2.6) 的唯一解是

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2.7}$$

为了简化结果, 引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

称之为2 **阶行列式**. 则 (2.7) 式中两个分子也可以分别写成

$$a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组 (2.6) 的唯一解可以表示成

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

同理, 考虑三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2.8}$$

引入 3 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \end{array} \tag{2.9}$$

如果 $D \neq 0$, 通过计算可以得出方程组 (2.8) 有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中 $D_i (i = 1, 2, 3)$ 分别是将 D 中第 i 列的元素换成方程组 (2.8) 右端的常数项 b_1, b_2, b_3 得到的 3 阶行列式.

从 2 阶和 3 阶行列式的定义可以看出, 它们都是一些乘积的代数和, 而每一项乘积都是由行列式中位于不同行和不同列的元素构成的, 并且展开式就是由所有这些可能的乘积组成. 当 $n = 2$ 时, 由不同行不同列的元素构成的乘积只有 $a_{11}a_{22}$ 与 $a_{12}a_{21}$ 这两项. 当 $n = 3$ 时也不难看出只有 (2.9) 中的 6 项. 另一方面, 每一项乘积都是带有符号的, 那这些符号是按什么原则确定的呢? 通过观察 3 阶行列式的展开式, 发现它的一般项可以写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是 $1, 2, 3$ 的一个排列. 可以看出, 当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时, 对应的项带正号, 当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时, 对应的项带负号. 显然, 2 阶行列式也符合这个规则. 将这些规律进行推广, 则可以定义 n 阶行列式.

2.1.3 n 阶行列式的定义

定义 2.1.7 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示一个数值. 该数值等于上式中所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和, 其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\ldots,n$ 的一个排列. 对每项前的符号有下述规定: 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时取正号, 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时取负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{2.10}$$

式中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\ldots,n$ 这 n 个数构成的所有排列求和. 这里的数 $a_{ij}(i,j=1,2,\ldots,n)$ 称为行列式的元素. 它的第一个下标 i 表示该元素所在的行, 称为行指标; 第二个下标 j 表示该元素所在的列, 称为列指标.

由定义可以看出, n 阶行列式是 $n!$ 个乘积项的代数和. 当 $n=1$ 时, 即为一阶行列式, 并规定 $|a|=a$. 常用大写英文字母 D 表示一个行列式. 有时为了突出行列式的阶数, n 阶行列式也可记为 $D_n=|a_{ij}|_n$.

设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 为 n 阶方阵, 由方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的行列式 (各元素的位置不变) 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, 记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$, 即

$$|\boldsymbol{A}| = \det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

应当注意, 方阵与行列式是两个不同的概念, n 阶方阵是 n^2 个数按一定方式排成的数表, 而 n 阶行列式则是这些数按一定运算法则所确定的一个数. 在这里, 是把方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|a_{ij}|_n$ 看作是 $\boldsymbol{A}$ 的一个数值特征.

下面是几个利用定义计算行列式的例子.

例 2.1.8 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \text{\huge 0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 在这个行列式中, 当 $i<j$ 时, 有 $a_{ij}=0$, 称这种行列式为**下三角行列式**. 由 n 阶行列式的定义, 展开式中的一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 在该行列式中, 第一行除了 a_{11} 外, 其余元素都为零, 所以只能取 $j_1=1$. 在第二行中, 除了 a_{21},a_{22} 外, 其余元素都为零, 因而 j_2 只有 $1,2$ 这两个可能, 但由于 $j_1=1$, 所以只能取 $j_2=2$. 这样逐步取下去, 在第 n 行就只能取 $j_n=n$. 因此该行列式展开式中可能不为零的项只有

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由于这一项的列指标的排列是自然排列, 其逆序数为零, 所以该项带正号. 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \text{\Large 0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

□

此例说明, 下三角行列式等于主对角线 (从左上角到右下角的连线) 上 n 个元素的乘积. 在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 中, 如果 $i>j$ 时, 有 $a_{ij}=0$, 称 D 为**上三角行列式**; 如果 $i\neq j$ 时, 有 $a_{ij}=0$, 称 D 为**对角行列式**. 对角行列式是下三角行列式的特殊情况, 显然它也等于主对角线上 n 个元素的乘积, 即

$$\begin{vmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \text{\Large 0} \\ & \text{\Large 0} & \ddots & \\ & & & d_n \end{vmatrix} = d_1d_2\cdots d_n.$$

例 2.1.9 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & \text{\Large 0} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 利用行列式的定义分析, 则知 D_n 的展开式中只有下面一项

$$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

可能不为零. 这一项列指标排列的逆序数为

$$\tau(n(n-1)\cdots 321)=\frac{n(n-1)}{2},$$

所以

$$D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

□

上面定义 n 阶行列式中各项的符号时, 把 n 个元素的行指标按自然顺序排列, 以其列指标所成排列的奇偶性来决定该项的正负. 但由于数的乘法满足交换律, 通过有限次元素的交换, 展开式中的一般项

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{2.11}$$

可以写成

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{2.12}$$

因为 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 对换成自然排列与自然排列对换成 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的对换次数相同, 由定理 2.1.6知, 排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 与排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 有相同的奇偶性, 即

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}.$$

于是有

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

显然, 若 $j_i=j$, 则 $i_j=i(a_{ij_i}=a_{ij}=a_{i_jj})$, 可见排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 由排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 唯一确定, 反之亦然. 因此, n 阶行列式的定义可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}, \tag{2.13}$$

其中 $\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}$ 表示所有 n 阶排列求和. 即把行列式每一项的列指标排成自然排列时, 该项的符号由行指标所成排列的奇偶性决定.

2.2 行列式的性质

由行列式的定义知道, n 阶行列式共有 $n!$ 项, 当 n 较大时, 直接从定义来计算它的值是很麻烦的. 因此本节将介绍行列式的性质, 利用这些性质可以简化行列式的计算.

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将该行列式的行与列互换, 不改变它们的先后顺序得到的新行列式称为 D 的**转置行列式**, 记为 D^{T}, 即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如, 下三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \text{\Large 0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 与上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \text{\Large 0} & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$ 就互为转置行列式.

性质 2.2.1 行列式与它的转置行列式相等, 即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证明 设 D^{T} 中第 i 行第 j 列的元素为 $b_{ij}(i,j=1,2,\ldots,n)$, 则有

$$b_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\ldots,n).$$

根据行列式的定义及 (2.13) 式, 有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=D. \end{aligned}$$ □

显然, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \text{\Large 0} & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \text{\Large 0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

性质 2.2.1说明行列式中行与列的地位是对称的, 凡是对行成立的性质对列也同样成立, 反之亦然. 因此下面的一些性质只对行的情况进行证明.

性质 2.2.2 如果行列式中某一行 (列) 的元素含有公因数 k, 则 k 可以提到行列式符号的外面, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 根据行列式的定义,

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=\text{右端}. \end{aligned}$$ □

推论 2.2.3 若行列式中某一行 (列) 的元素全为零, 则行列式等于零.

性质 2.2.4 将行列式中两行 (列) 互换, 行列式改变符号, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 根据行列式的定义及定理 2.1.4,

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= -\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_k \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} = \text{右端}. \end{aligned}$$ □

推论 2.2.5 若行列式中有两行 (列) 相同, 则行列式的值为零.

证明 设行列式的第 i 行和第 j 行相同, 将 i 行与第 j 行互换, 行列式不改变. 但由性质 2.2.4 知, 它们却应当反号, 即 $D=-D$, 所以 $D=0$. □

推论 2.2.6 若行列式中有两行 (列) 的对应元素成比例, 则行列式的值为零.

证明 由性质 2.2.2及推论 2.2.5可知结论成立. □

性质 2.2.7 如果行列式的某一行 (列) 中各元素均可以写成两项之和, 则此行列式可以写成两个行列式之和, 即

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

证明 根据行列式的定义, 有

$$\begin{aligned}
\text{左端} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}\\
&= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}\\
&\quad + \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n} = \text{右端}.
\end{aligned}$$
□

行列式的这一性质显然可以推广到某一行 (列) 为多个数的和的情形, 证明方法类似.

性质 2.2.8 如果将行列式的某一行 (列) 的各元素同乘以数 k 后, 加到另一行 (列) 的对应元素上, 行列式的值不变, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 根据性质 2.2.7,

$$\text{左端} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由推论 2.2.6知上式中的第二个行列式的值为零, 从而结论成立. □

性质 2.2.2(当 $k \neq 0$ 时), 2.2.4, 2.2.8 统称为行列式的**初等变换性质**. 根据行列式与方阵的关系, 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换得到方阵 $\boldsymbol{B}$, 则

$$|\boldsymbol{B}| = l|\boldsymbol{A}|,$$

其中 l 是数域 $\mathbb{P}$ 中非零的数.

通过前面的学习, 可以看出上 (下) 三角行列式很容易计算, 所以简化行列式计算的一个重要方法就是利用行列式的性质, 把所给行列式化为上 (下) 三角行列式. 下面来看几个具体的例子.

例 2.2.9 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & 14 & -8 & 7 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & 14 & -8 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+r_1]{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-3r_1}} -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 9 & -4 \\ 0 & 10 & -19 & 11 \\ 0 & 10 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{r_3+2r_2 \\ r_4+2r_2}} -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+15r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 41 \end{vmatrix}$$

$$= -1\times(-5)\times(-1)\times 41 = -205.$$ □

例 2.2.10 计算行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix},$$

其中 $a_i \neq 0 (i=0,1,\ldots,n)$.

解 D_{n+1} 除第一行外, 其余每行只有两个元素非零, 显然容易把它化为上三角行列式. 对 D_{n+1} 的第一列分别使用 n 次性质 2.2.8, 有

$$D_{n+1} \xlongequal[j\geq 1]{c_1-\frac{1}{a_j}c_{j+1}} \begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = (a_0-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j})\prod_{j=1}^{n}a_j.$$

其中符号 $\prod$ 表示连乘, 即 $\prod\limits_{j=1}^{n} a_j = a_1a_2\cdots a_n$. □

显然, 也可以通过对 D_n 的第一行实施变换, 把 D_n 化为下三角行列式求解. 例 2.2.10 中的行列式称为箭形行列式, 因为其形如 $|\nwarrow|$. 同样, 形如 $|\searrow|, |\nearrow|, |\swarrow|$ 的行列式也称为箭形行列式. 它们均可用类似的方法化为三角行列式进行计算. 而对于某些行列式, 则需要先化成箭形行列式, 再化为三角行列式计算, 如下面这个例子.

例 2.2.11 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & a_3+b_3 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix},$$

其中 $a_i\neq 0(i=1,2,\ldots,n)$.

解 观察 D_n 的各行元素几乎“成比例”, 这样的行列式容易化成箭形行列式.

$$D_n \xlongequal[i\geq 2]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[j\geq 1]{c_j\times\frac{1}{a_j}} a_1a_2\cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} & \frac{b_3}{a_3} & \cdots & \frac{b_n}{a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j\geq 2]{c_1+c_j} a_1a_2\cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{b_j}{a_j} & \frac{b_2}{a_2} & \frac{b_3}{a_3} & \cdots & \frac{b_n}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (1+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{a_j})\prod_{j=1}^{n}a_j. \qquad \square$$

例 2.2.12 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解

$$D_n \xlongequal[j\geq 2]{c_1+c_j} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i\geq 2]{r_i-r_1} [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

$\square$

对于每行 (列) 元素的和都相等的行列式, 常用的方法是把第 $2,3,\ldots,n$ 列 (行) 都加到第一列 (行) 上去, 然后可以从第一列 (行) 提出公因子, 再设法化成三角行列式求解.

2.3 行列式按一行 (列) 展开

一般来说, 低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简单. 这一节将介绍如何把高阶行列式化为低阶行列式, 即行列式的降阶问题.

定义 2.3.1 在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中, 划掉 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后, 剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的相对位置构成的 $n-1$ 阶行列式称为 (i,j) 元 a_{ij} 的**余子式**, 记为 M_{ij}. 称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为 (i,j) 元 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如, 四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix},$$

其中, $(2,3)$ 元 a_{23} 的余子式是

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14}\\ a_{31} & a_{32} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{44}\end{vmatrix},$$

$(2,3)$ 元 a_{23} 的代数余子式是 $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$.

需要注意的是改变元素 a_{ij} 所在的第 i 行或第 j 列中任何元素, 并不影响 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij}. 所以 M_{ij} 和 A_{ij} 也被称为 (i,j) 元的余子式和代数余子式.

引理 2.3.2 一个 n 阶行列式 D, 如果它的第 i 行 (j 列) 所有元素除 a_{ij} 外都为零, 那么该行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积, 即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

证明 首先考虑一个特殊的情形, 当 a_{ij} 位于第一行第一列的位置时, 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

根据行列式的定义,

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\ &= \sum_{1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(1j_2\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\ &= a_{11}\sum_{(j_2-1)\cdots(j_n-1)}(-1)^{\tau((j_2-1)\cdots(j_n-1))}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\end{aligned}$$

$$= \quad a_{11}M_{11} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} = a_{11}A_{11}.$$

再考虑一般的情形, 此时

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 D 的第 i 行依次与第 $i-1,\ldots,2,1$ 各行作 $i-1$ 次相邻对换后调到第一行, 再将第 j 列依次与第 $j-1,\ldots,2,1$ 各列作 $j-1$ 次相邻对换后调到第一列. 这样总共对 D 进行了 $i+j-2$ 次对换, 由行列式性质 2.2.4知

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{i+j-2}\begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}, \end{aligned}$$

所以此结论成立. □

下面介绍一个重要的定理, 由这个定理, 可以把一个行列式用比其阶数低的行列式表示出来.

定理 2.3.3 行列式 $D = |a_{ij}|_n$ 等于它的任意一行 (列) 的各元素与其对应的代数余子式乘积之和, 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}\ (i = 1,2,\ldots,n) \tag{2.14}$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}\ (j = 1,2,\ldots,n). \tag{2.15}$$

证明 把 D 写为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

根据行列式的性质 2.2.7及引理 2.3.2, 有

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}. \end{aligned}$$

这样就证明了 (2.14) 式成立, 同理可以证明 (2.15) 式也成立. □

(2.14) 式称为行列式的**按一行展开公式**, (2.15) 式称为行列式的**按一列展开公式**. 定理 2.3.3表明行列式可以按其任意一行展开, 也可以按其任意一列展开.

推论 2.3.4 行列式 $D = |a_{ij}|_n$ 中某一行 (列) 的各元素与另一行 (列) 的对应元素的代数余子式乘积之和等于 0, 即

$$a_{i'1}A_{i1} + a_{i'2}A_{i2} + \cdots + a_{i'n}A_{in} = 0 \ (i' \neq i)$$

或

$$a_{1j'}A_{1j} + a_{2j'}A_{2j} + \cdots + a_{nj'}A_{nj} = 0 \ (j' \neq j).$$

证明

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i'1} & a_{i'2} & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i + r_{i'}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a_{i'1} & a_{i2} + a_{i'2} & \cdots & a_{in} + a_{i'n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i'1} & a_{i'2} & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把两边的行列式都按第 i 行展开, 有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + a_{i'k})A_{ik}.$$

移项化简得

$$a_{i'1}A_{i1} + a_{i'2}A_{i2} + \cdots + a_{i'n}A_{in} = 0 \ (i' \neq i).$$

同理可证明另一式子成立. □

定理 2.3.3给出了对行列式进行降阶的方法, 但因为要计算多个降阶行列式, 其计算量仍然是比较大的. 因此在实际应用时, 可以先利用行列式的性质, 使行列式某行 (列) 的元素尽可能多的化为零, 然后按这一行 (列) 对行列式展开. 这样一直做下去, 可以把计算一个高阶行列式最终转化为计算若干个二阶行列式. 这也是简化行列式计算的另一个重要方法.

例 2.3.5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & 5 \\ -4 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & -7 \\ 4 & -1 & 3 & -5 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned} D & \xlongequal[c_4-3c_2]{\substack{c_1+4c_2\\ c_3+c_2}} \begin{vmatrix} -10 & -3 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 4 & 10 & -19 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -10 & 4 & 14 \\ 19 & 10 & -19 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \\ & \xlongequal{c_3+c_2} \begin{vmatrix} -10 & 4 & 18 \\ 19 & 10 & -9 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -10 & 18 \\ 19 & -9 \end{vmatrix} \\ & = -2\cdot 9\begin{vmatrix} -10 & 2 \\ 19 & -1 \end{vmatrix} = 504. \end{aligned}$$

□

例 2.3.6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -b_{n-1} \\ -b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

解 把 D 按第一列展开, 则

$$\begin{aligned} D &= a_1\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} \\ & \quad +(-1)^{n+1}(-b_n)\begin{vmatrix} -b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & -b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -b_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{j=1}^{n} a_j - \prod_{j=1}^{n} b_j. \end{aligned}$$

例 2.3.7 计算 n 阶 “三对角” 行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix},$$

其中未写出的元素均为零.

解 为了发现 D_n 的规律, 先试算

$$\begin{aligned} D_4 &= \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 4 列展开}} (a+b)D_3 - ab \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 \\ 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (a+b)D_3 - abD_2. \end{aligned}$$

通过两次降阶发现了其中的递推关系, 把它推广到 D_n. 先将 D_n 按第 n 列展开, 然后再将 D_n 的位于 $n-1$ 行, n 列的元素 ab 的余子式按第 $n-1$ 行展开, 可以得到

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2} = aD_{n-1} + b(D_{n-1} - aD_{n-2}).$$

对于 $n \geq 3$, 该关系式都成立. 因为 $D_1 = a+b$, $D_2 = a^2 + ab + b^2$, 所以由以上递推关系可以得到

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) = b^n,$$

于是

$$\begin{aligned} D_n &= aD_{n-1} + b^n = a^2 D_{n-2} + ab^{n-1} + b^n = \cdots \\ &= a^{n-1}D_1 + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n \\ &= a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n \\ &= \begin{cases} (n+1)a^n, & a = b, \\ \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}, & a \neq b. \end{cases} \end{aligned}$$

□

例 2.3.8 证明 n 阶范德蒙德 (Vandermonde) 行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

证明 对 V_n 的阶数 n 用数学归纳法.

当 $n = 2$ 时, $V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 = \prod\limits_{1 \leq i < j \leq 2} (a_j - a_i)$, 结论成立.

假设结论对 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立. 对于 n 阶范德蒙德行列式, 从第 n 行起, 每一行减去前一行的 a_1 倍, 有

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}.$$

将其按第一列展开后, 把每一列的公因子 $a_i - a_1(i=2,\dots,n)$ 提出, 得到

$$V_n = (a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

上式右端的行列式是一个 $n-1$ 阶范德蒙德行列式, 根据归纳假设

$$V_n = (a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{2\le i<j\le n}(a_j-a_i) = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i).$$

因此, 结论对 n 阶范德蒙德行列式成立. □

显然, n 阶范德蒙德行列式等于零的充分必要条件是 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 这 n 个数中至少有两个相等.

例 2.3.9 证明行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

证明 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{k\times k}, \boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{r\times r}, \boldsymbol{C}=[c_{ij}]_{r\times k}, \boldsymbol{O}$ 为零矩阵. 则本题所要证明的结论可记为

$$D_n = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数 k 作数学归纳法. 当 $k=1$ 时, 将 D_n 按第一行展开, 显然 $D_n=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$. 假设对 $\boldsymbol{A}$ 为 $k-1$ 阶方阵时结论成立. 当 $\boldsymbol{A}$ 为 k 阶方阵时, 将 D_n 按第一行展开

$$D_n = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}. \tag{2.16}$$

D_n 的 $n-1$ 阶余子式 $M_{1j}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_j^1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C}_j & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_j^1$ 表示划去 $\boldsymbol{A}$ 的第一行和第 j 列后剩下的 $k-1$ 阶方阵, $|\boldsymbol{A}_j^1|$ 为 a_{1j} 在 $\boldsymbol{A}$ 中的 $k-1$ 阶余子式. 由归纳假设, $M_{1j}=|\boldsymbol{A}_j^1||\boldsymbol{B}|$, 将其代入式 (2.16) 可得

$$D_n = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{1+j}a_{1j}|\boldsymbol{A}_j^1||\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

□

如果矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 如例 2.3.9所设, 而矩阵 $\boldsymbol{C} = [c_{ij}]_{k\times r}$, 借助行列式按一列展开的性质, 类似地使用例 2.3.9的证明方法, 可得

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

如果矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均如例 2.3.9所设, 则行列式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = (-1)^{kr} \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = (-1)^{kr}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

这是因为, 将 k 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 所在的第一列与其前面零矩阵所在的 r 个列逐列作相邻对换, 共作了 r 次对换; 再依次将 $\boldsymbol{A}$ 所在的第 $i(2 \le i \le k)$ 列分别作上述相邻对换. 则总共作 $k \times r$ 次对换, 因而取符号 $(-1)^{kr}$.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 如例 2.3.9所设, 而矩阵 $\boldsymbol{C} = [c_{ij}]_{k\times r}$, 类似地可证明行列式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{kr} \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = (-1)^{kr}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

例 2.3.7使用了递推的方法, 而例 2.3.8, 2.3.9则使用了数学归纳法. 这两种方法也是在对行列式进行降阶计算时常常使用的方法, 很好地简化了行列式的计算.

2.4 克拉默法则

这一节将应用行列式来研究方程个数与未知量个数相等的线性方程组的求解问题.

设由 n 个未知量 n 个方程所组成的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{2.17}$$

简记为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

方程组系数构成的 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为方程组 (2.17) 的系数行列式.

下面给出与 2.1.2 节中二元和三元线性方程组类似的求解公式.

定理 2.4.1 (克拉默法则) 如果线性方程组 (2.17) 的系数行列式 $D \neq 0$, 则该方程组存在唯一解, 且解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \ldots,\ x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{2.18}$$

其中 $D_j(j = 1, 2, \ldots, n)$ 是在系数行列式 D 中将第 j 列的元素用方程组 (2.17) 右端的常数项 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 代替后所得到行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 定理的证明分为两步, 第一步证明解的存在性. 将 $x_j = \frac{D_j}{D}$ 代入第 i 个方程的左端, 有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{D_j}{D} = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_j.$$

将 D_j 按第 j 列展开

$$D_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj} = \sum_{k=1}^{n} b_kA_{kj}\ (j = 1, 2, \ldots, n),$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_j &= \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\sum_{k=1}^{n} b_kA_{kj}) = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}b_kA_{kj} \\ &= \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj})b_k = \frac{1}{D}b_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}) \\ &= \frac{1}{D}b_iD = b_i\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

这说明了 (2.18) 式是方程组 (2.17) 的解.

第二步证明解的唯一性. 设 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$ 是方程组 (2.17) 的解, 则有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = b_i\ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.19}$$

用系数行列式 D 的第 k 列元素的代数余子式 $A_{1k}, A_{2k}, \ldots, A_{nk}$ 分别去乘 (2.19) 中的各式并相加, 有

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j) = \sum_{i=1}^{n} b_iA_{ik},$$

从而

$$\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik})c_j = D_k,$$

进一步可以得到

$$Dc_k = D_k \ (k = 1, 2, \ldots, n),$$

所以

$$c_k = \frac{D_k}{D} \ (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad \square$$

定理 2.4.2 设 $n \times n$ 线性方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则该方程组有唯一解的充分必要条件是它的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

证明　充分性. 由克拉默法则可知成立.

必要性. 设方程组的增广矩阵为 $\tilde{\boldsymbol{A}}$, 将增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$（系数矩阵 $\boldsymbol{A}$）经过有限次初等行变换化为行阶梯形矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}$ (系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{R}$). 如果方程组有唯一解，则 $r(\tilde{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}) = n$. 因此 $\boldsymbol{R}$ 必定形如

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

其中 $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}$ 都不等于 0. 从而 $|\boldsymbol{R}| = b_{11}b_{22}\cdots b_{nn} \neq 0$. 由于 $|\boldsymbol{R}| = l|\boldsymbol{A}|$ $(l \neq 0)$, 因此可得 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. $\square$

当线性方程组 (2.17) 右端的常数项 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 全为零时, 关于对应的齐次线性方程组有如下结论.

推论 2.4.3 设 $n \times n$ 齐次线性方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$. 则该方程组只有零解的充分必要条件是它的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. 从而它有非零解的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

例 2.4.4 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 7, \\ 3x_2 - x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = -4. \end{cases}$$

解　系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -39 \neq 0.$$

由克拉默法则, 方程组有唯一解. 又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 7 & -1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -39, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -117,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -78, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 39.$$

故

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = 3,\ x_3 = \frac{D_3}{D} = 2,\ x_4 = \frac{D_4}{D} = -1. \qquad \square$$

克拉默法则在线性方程组的理论研究上具有十分重要的意义. 但是当 n 元线性方程组中未知量的个数 n 较大时, 应用克拉默法则的计算量是比较大的, 这时用消元法更为简便. 当然有时也可以两者配合使用.

例 2.4.5 讨论当 μ 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} (\mu-1)x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + (\mu+1)x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - x_2 + (\mu-4)x_3 = -3 \end{cases}$$

有无穷多解, 并求其通解.

解 该线性方程组的系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} \mu-1 & 3 & -2 \\ 1 & \mu+1 & -2 \\ 5 & -1 & \mu-4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 - r_2} \begin{vmatrix} \mu-2 & -\mu+2 & 0 \\ 1 & \mu+1 & -2 \\ 5 & -1 & \mu-4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2 + c_1} \begin{vmatrix} \mu-2 & 0 & 0 \\ 1 & \mu+2 & -2 \\ 5 & 4 & \mu-4 \end{vmatrix} = (\mu-2)\begin{vmatrix} \mu+2 & -2 \\ 4 & \mu-4 \end{vmatrix} = \mu(\mu-2)^2.$$

由于方程组有无穷多解, 故 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 即 $\mu = 0$ 或 $\mu = 2$.

当 $\mu = 0$ 时, 对方程组的增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 作初等行变换后化为行阶梯形矩阵,

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right].$$

此时 $r(\boldsymbol{A}) \neq r(\tilde{\boldsymbol{A}})$, 方程组无解, 即 $\mu = 0$ 不满足题设条件, 舍去.

当 $\mu = 2$ 时, 对方程组的增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 作初等行变换后化为行阶梯形矩阵,

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

此时 $r(\boldsymbol{A}) = r(\tilde{\boldsymbol{A}}) = 2 < 3$, 方程组有无穷多解. 原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}, \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}, \end{cases}$$

取 x_3 为自由变量，则该方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

□

例 2.4.6 证明 n 次多项式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \ (a_n \neq 0)$$

最多有 n 个互异的根.

证明 采用反证法, 假设 $f(x)$ 有 $n+1$ 个互异的根 $c_0, c_1, \ldots, c_n$, 将它们逐个代入方程 $f(x) = 0$, 则有

$$\begin{cases} a_0 + a_1 c_0 + \cdots + a_n c_0^n = 0, \\ a_0 + a_1 c_1 + \cdots + a_n c_1^n = 0, \\ \qquad \cdots \\ a_0 + a_1 c_n + \cdots + a_n c_n^n = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

把 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 看作未知量, 那么方程组 (2.20) 就是由包含 $n+1$ 个未知量的 $n+1$ 个方程组成的一个齐次线性方程组, 其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & c_0 & c_0^2 & \cdots & c_0^n \\ 1 & c_1 & c_1^2 & \cdots & c_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \cdots & c_n^n \end{vmatrix}$$

是 $n+1$ 阶范德蒙行列式的转置. 由于 $c_0, c_1, \ldots, c_n$ 互异, 故 $D \neq 0$. 根据推论 2.4.3知齐次线性方程组 (2.20) 只有零解, 从而 $a_n = 0$, 与题设条件矛盾. □

习题二

1. 求下列排列的逆序数, 并说明哪些是偶排列.
   (1) 13524 (2) 54321
   (3) $13\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$; (4) $(n-1)(n-2)\cdots 21n$.

2. 试确定下列五阶行列式中的项所带的符号.
   (1) $a_{31}a_{25}a_{13}a_{52}a_{44}$; (2) $a_{14}a_{23}a_{51}a_{32}a_{45}$.

3. 利用行列式的定义计算下列行列式.

$$(1)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix};\qquad (2)\ \begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(3)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix};\qquad (4)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

4. 试用行列式的定义确定行列式

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^3 及 x^4 的系数.

5. 计算下列各行列式.

$$(1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 10 \\ 3 & 5 & 11 & 16 \\ 2 & -7 & 7 & 7 \end{vmatrix};\qquad (2)\ \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix};$$

$$(3)\ \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix};\qquad (4)\ \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix};$$

$$(5)\ \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix};\qquad (6)\ \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & b+a & c+b+a & d+c+b+a \\ a & b+2a & c+2b+3a & d+2c+3b+4a \\ a & b+3a & c+3b+6a & d+3c+6b+10a \end{vmatrix}.$$

6. 计算下列各行列式.

$$(1)\ \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & b \\ a & a & \cdots & b & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & b & \cdots & a & a \\ b & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}_n;\qquad (2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix};$$

$$(3)\ \begin{vmatrix} \lambda+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & \lambda+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \lambda+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \lambda+a_n \end{vmatrix};$$

(4) $\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \cdots & a+(n-1)h & a+nh \\ -a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a & a \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n$.

7. 已知行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 7 \end{vmatrix},$$

M_{ij} 和 A_{ij} 分别是 D 中 (ij) 元 a_{ij} 的余子式和代数余子式, 试求：

(1) $A_{14} + 2A_{24} + A_{34} + 5A_{44}$; (2) $4M_{42} + 2M_{43} + 2M_{44}$.

8. 用克拉默法则求解下列各线性方程组:

(1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -2, \\ x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 2, \\ x_3 + 5x_4 + 6x_5 = -2, \\ x_4 + 5x_5 = -4. \end{cases}$

9. 给定平面上的三个点 $(1,1), (2,-1), (3,1)$. 求过这三个点且对称轴与 y 轴平行的抛物线的方程.

10. 设有齐次线性方程组 $\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0 \end{cases}$ $(n \geq 2)$. 试问 a 取何值时, 该方程组有非零解?

习题二参考答案

1. (1) $\tau(13524)=3$, 是奇排列; (2) $\tau(54321)=10$, 是偶排列;

(3) $\tau(13\cdots(2n-1)246\cdots(2n))=\frac{n(n-1)}{2}$, 当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时为偶排列; 当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时为奇排列;

(4) $\tau((n-1)(n-2)\cdots 21n)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, 当 $n=4k+1$ 或 $n=4k+2$ 时为偶排列; 当 $n=4k$ 或 $n=4k+3$ 时为奇排列.

2. (1) $\tau(35142)=6$, 偶排列, 取正号; (2) $\tau(43251)=7$, 奇排列, 取负号.

3. (1) 120; (2) -24; (3) $(-1)^{n-1}n!$; (4) $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$.

4. x^3 的系数为 -1, x^4 的系数为 2.

5. (1) 3; (2) a^2b^2; (3) $4abcdef$; (4) $(a+b+c)^3$; (5) -29400000; (6) a^4.

6. (1) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)a+b](b-a)^{n-1}$; (2) $-2(n-2)!$; (3) $\lambda^{n-1}(\lambda+\sum\limits_{k=1}^{n}a_k)$;

(4) $\frac{(n+1)(2a+nh)}{2}a^n$; (5) $\prod\limits_{k=1}^{n}k!$; (6) $(n+1)a^n$.

7. (1) 0; (2) 48.

8. (1) $[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}=[3,-4,-1,1]^{\mathrm{T}}$; (2) $[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]^{\mathrm{T}}=[-1,1,-1,1,-1]^{\mathrm{T}}$.

9. $y=2x^2-8x+7$.

10. 当 $a=0$ 时, 方程组的通解为 $[x_1,x_2,\ldots,x_n]^{\mathrm{T}}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1}$, 其中 $k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}$ 为任意常数, 且 $\boldsymbol{\eta}_1=[-1,1,0,\ldots,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=[-1,0,1,0,\ldots,0]^{\mathrm{T}},\ldots,\boldsymbol{\eta}_{n-1}=[-1,0,\ldots,0,1]^{\mathrm{T}}$;

当 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时, 方程组的通解为 $[x_1,x_2,\ldots,x_n]^{\mathrm{T}}=k[1,2,\ldots,n]^{\mathrm{T}}$, 其中 k 为任意常数.