第十六次课

2022年10月13日 8:23

§3.2 连续函数(2)

连续: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$y=\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$

连续: (1) $y=C$. (2) $y=a^x$ $\Updownarrow$ $y=\log_a x$ (3) $y=\sin x$, $y=\cos x$ $\Rightarrow$ $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$; $y=\sin x$ $\Updownarrow$ $y=\arcsin x$

$y=x^\alpha$ 幂函数

EX3.2.9 Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p}\ (p\in\mathbb{N}^*,\ q\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\ p,q\text{互质})\\ 1, & x=0,\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

证明: $\forall x_0\in\mathbb{R}$, 有 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$.

($\Rightarrow$ 任意无理点是连续点, 有理点均为可去间断点)

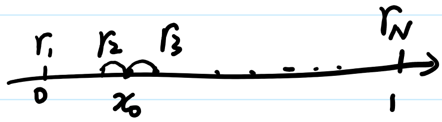
证明: $R(x)$ 以1为周期. 故只需讨论$[0,1]$上的连续性.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists p_0\in\mathbb{N}^*$, s.t. $\frac{1}{p_0}<\varepsilon$. 如$p_0=5$: $0, 1, \frac12, \frac13, \frac23, \frac14, \frac34, \frac15, \frac25, \frac35, \frac45$

$[0,1]$内分母不大于p_0的有理数为有限个: $r_1, r_2, \cdots r_N$ (含0)

$\forall x_0\in[0,1]$, 取$\delta=\min\{|r_1-x_0|, |r_2-x_0|, \cdots, |r_N-x_0|\}>0$

(若$x_0=r_i$, 则删去$|r_i-x_0|$)



当$0<|x-x_0|<\delta$时的有理数x的分母$p>p_0$,

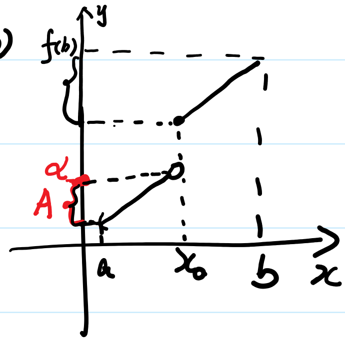
从而 $|R(x)-0|=\begin{cases}0, & x\text{为无理数}\\ \dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p}\ (p>p_0,\ p,q\in\mathbb{N}^*,\ p,q\text{互质},\ q\leq p)\end{cases}$

$\therefore\ |R(x)-0| < \frac{1}{p} < \frac{1}{p_0} < \varepsilon.$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to x_0} R(x) = 0.$ 证毕.

EX3.2.9 定义在区间 (a,b) 上的单调函数的不连续点必为跳跃间断点.

证明: 不妨假设 $f(x)$ 在 (a,b) 内单增. $\forall x_0\in(a,b)$



下证: $f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 均存在.

令 $A=\{f(x)\mid x\in(a,x_0)\}$, 由 $f(x)$ 单增知

A 有上界 $f(x_0)$, 则必存在上确界 α.

即 $\alpha=\sup A$. $\Rightarrow \begin{cases} \forall x\in(a,x_0) \text{ 有 } f(x)\le\alpha. & ① \\ \forall\varepsilon>0\ \exists\,\xi\in(a,x_0) \text{ 有 } f(\xi)>\alpha-\varepsilon & ② \end{cases}$

取 $\delta=\min\{x_0-\xi,\ x_0-a\}>0$. $\forall\ a< x_0-\delta<x<x_0$ 有

$\alpha-\varepsilon \overset{②}{<} f(\xi) < f(x) \overset{①}{\le} \alpha < \alpha+\varepsilon$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\alpha=\sup A.$

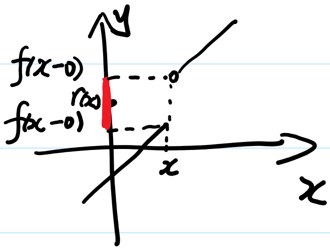
同理: 定义 $B=\{f(x)\mid x\in(x_0,b)\}$ 有下确界 β

$\beta=\inf B$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\beta.$

$\begin{cases} f(x_0+0)=f(x_0-0), \text{ 则连续} \\ f(x_0+0)\ne f(x_0-0), \text{ 则 } x_0 \text{ 为跳跃间断点} \end{cases}$ 证毕.

EX3.2.10. 定义在 (a,b) 内的单调函数 $f(x)$ 的不连续点至多可列个.

分析:



记 E 为 $f(x)$ 的间断点. $\forall x\in E$, 有

$[f(x-0),\ f(x+0)]$

$x \longmapsto r(x)\in[f(x-0),\ f(x+0)]$ 的有理点

四. 反函数的连续性

定理3.2.1 (反函数的存在性定理)

若函数 $y=f(x)$, $(x\in D_f)$ 严格单增(减), 则存在反函数 $x=f^{-1}(y)$, $(y\in R_f)$. 且 $f^{-1}(y)$ 也严格单增(减).

(自证).

定理3.2.2 (反函数的连续性定理)

设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且严格单增, $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$.

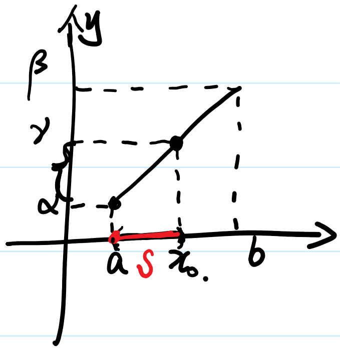
则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 且严格单增.

(单减时 $[\alpha,\beta]$ 改为 $[\beta,\alpha]$).

证明: (1) 先证明 $D_{f^{-1}}=[\alpha,\beta]$, 即 $f([a,b])=[\alpha,\beta]$.

$\Updownarrow$

即 $\forall\, \gamma\in(\alpha,\beta)$, $\exists\, x_0\in(a,b)$, s.t. $f(x_0)=\gamma$.



$\forall\, \gamma\in(\alpha,\beta)$. 下面找 γ 的原像 x_0:

记 $S=\{x \mid x\in[a,b] \mid f(x)<\gamma\}$.

$\Rightarrow S$ 非空有上界. $\Rightarrow$ 有上确界, 记为 $x_0=\sup S$. 则 $x_0\in(a,b)$.

$x<x_0$ 由 $x_0=\sup S$ 知 $f(x)<\gamma$. $\quad$ $x>x_0$ 时, $f(x)>\gamma$.

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$

Ex3.2.9 知 $f(x_0\pm0)$ 存在: $f(x_0-0)\le\gamma$. $\quad$ $f(x_0+0)\ge\gamma$.

$f(x)$ 在 (a,b) 内连续 $\therefore f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0)=\gamma$.

$\Rightarrow R_f=[\alpha,\beta]$.

由定理3.2.1 知 $[\alpha,\beta]$ 上存在 f 的反函数 $x=f^{-1}(y)$. 且在 $[\alpha,\beta]$ 上严格单增.

(2) 再证 $x=f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

$\forall\, y_0\in(\alpha,\beta)$, 记 $y_0=f(x_0)$, $x_0\in(a,b)$.

$\forall\,\varepsilon>0$, 要使 $|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|=|f^{-1}(y)-x_0|<\varepsilon$.

$\forall y_0 \in (\alpha,\beta)$，记 $x_0 = f^{-1}(y_0)$，则 $x_0 \in (a,b)$.

$\forall \varepsilon>0$，要使 $|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)| = |f^{-1}(y)-x_0| < \varepsilon$.

$$\Longleftrightarrow \quad x_0-\varepsilon < f^{-1}(y) < x_0+\varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad f^{-1}(f(x_0-\varepsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(x_0+\varepsilon)).$$

$$\overset{f^{-1}\text{严格增}}{\Longleftrightarrow} \quad f(x_0-\varepsilon) < y < f(x_0+\varepsilon)$$

$$\Longleftrightarrow \quad f(x_0-\varepsilon)-y_0 < y-y_0 < f(x_0+\varepsilon)-y_0$$

取 $\delta = \min\{|f(x_0-\varepsilon)-y_0|,\ |f(x_0+\varepsilon)-y_0|\} > 0$.

当 $|y-y_0|<\delta$ 时，有 $|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon$

$\because \lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$. $\Rightarrow$ y_0 处连续 $\Longrightarrow$ $x=f^{-1}(y)$ 在 (α,β) 内连续.

$y_0=\alpha$，只证右连续 . – .

$y_0=\beta$. 只证左连续 – – .

证毕.

$\Rightarrow$ $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 连续.

$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$ 在 $[-1,1]$ 上连续

$y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

五. 复合函数的连续性.

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$ $\not\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f\circ g(x)=A$.

加上: $g(x)\neq u_0$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f\circ g(x)=A$

可证明: $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) \overset{u=g(x)}{=\!=} \lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$.

如例. 外层 $y=f(u)=\begin{cases}0, & u=0\\ 1, & u\neq 0\end{cases}$ 内层 $u(x)=g(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}$.

则 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0 \triangleq u_0$ $\lim\limits_{u\to 0} f(u)=1 \triangleq A$.

则 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0 \triangleq u_0 \quad \lim\limits_{u\to 0} f(u)=1 \triangleq A.$

$$f(g(x))=\begin{cases}0, & x=\frac{1}{n\pi} \text{ 或 } 0.\\ 1, & x\neq \frac{1}{n\pi}, x\neq 0.\end{cases}$$

但 $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$ 不存在.（海涅定理：$x_n=\frac{1}{n\pi}\to 0.\ f(g(x_n))=0\to 0$

$y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0.\ f(g(x_n))=1\to 1.$）

又如 $f(u)=\begin{cases}u, & u\neq 0\\ 1, & u=0.\end{cases} \quad u=g(x)\equiv 0$

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) \neq \lim_{u\to u_0} f(u) \quad (u_0=0,\ x_0=0).$$