第4章 线性空间

我们开始讨论K-线性空间的抽象定义. 从现在开始, 我们假设K是一个任意的域.

4.1 K-线性空间的定义

定义 4.1 设 K 是一个域, V 是一个非空集合. 如果在 V 上定义了两个运算, 分别称为"加法运算"和"数乘运算":
（I）$\forall x, y \in V$, 唯一存在 $x + y \in V$. （加法运算）
（II）$\forall \lambda \in K, x \in V$, 唯一存在 $\lambda \cdot x \in V$. （数乘运算）
并且满足如下条件:
(1) $\forall x, y \in V$, 有 $x + y = y + x$;
(2) $\forall x, y, z \in V$, $(x + y) + z = x + (y + z)$;
(3) 存在V中一个元素, 记为 $\mathbf{0}$ 使 $x + \mathbf{0} = x, \forall x \in V$;
(4) $\forall x \in V$, 存在 $y \in V$ 使 $x + y = \mathbf{0}$;
(5) $\forall x \in V, 1 \cdot x = x$, 其中 1 是域$K$ 中单位元;
(6) $\forall \lambda, \mu \in K, x \in V$, 有 $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$;
(7) $\forall \lambda \in K, x, y \in V$, 有 $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
(8) $\forall \lambda, \mu \in K, x \in V$, 有 $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.
则集合 V 与上述运算一起称为 K-线性空间(或 K-向量空间), V 中的元素也可称为向量.

由定义不难推出满足条件 (3)中的元素 $\mathbf{0} \in V$ 是唯一的, 称为 K-线性空间V的零元(或零向量). 对于给定的 $x \in V$, 条件 (4)中的 y也是唯一的: 如果存在$y_1, y_2 \in V$, 使 $x + y_1 = \mathbf{0}, x + y_2 = \mathbf{0}$. 则 $y_1 = y_1 + \mathbf{0} = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = (x + y_1) + y_2 = \mathbf{0} + y_2 = y_2$, 所以条件 (4) 中的 y 称为 x 的负元(或负向量), 记为 $-x$.

练习: 证明 (1) $0 \cdot x = \mathbf{0}$;　(2) $(-1) \cdot x = -x$.

对于任意向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\in V$ 和 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\in K$,

$$\lambda_1\cdot\alpha_1+\lambda_2\cdot\alpha_2+\ldots+\lambda_m\cdot\alpha_m$$

是 V 中唯一确定的元素，称为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 的一个系数是 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ 的线性组合. 为了简化记号, 我们以后将 $\lambda\cdot\alpha$ 简记为 $\lambda\alpha$.

定义 4.2 K-线性空间 V 称为有限生成的, 如果存在有限个向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in V$ 使得 V 中的任意向量 β 都可写成 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ 的线性组合, 即

$$V=\{\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_m\alpha_m \mid \forall\lambda_i\in K\},$$

其中 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ 称为 K-线性空间 V 的生成元.

例 4.1 设 $K\subseteq\mathbb{C}$是一个数域, 则 $K\supset\mathbb{Q}$ 是一个 $\mathbb{Q}$-向量空间. 特别的, 若 $K=\mathbb{C}$, 则 $\mathbb{C}$ 是一个 $\mathbb{Q}$-向量空间, $\mathbb{C}$ 也是一个 $\mathbb{R}$-向量空间. 但 $\mathbb{C}$ 作为 $\mathbb{R}$-向量空间是有限生成的, 作为 $\mathbb{Q}$-向量空间不是有限生成的.

例 4.2 设 $K[x]$ 是多项式环, 则对于多项式的加法 $f(x)+g(x)$ 和乘法 $\lambda f(x)$ ($\lambda\in K$看成零次多项式). $K[x]$ 是一个 K-线性空间, 它不是有限生成的.

例 4.3 设 $C[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上所有连续实函数的集合, 则对于函数的加法和实数与函数的乘法, $C[a,b]$ 是一个 $\mathbb{R}$-线性空间, 它不是有限生成的.

定义 4.3 设 V 是一个 K-线性空间, V 中的非空子集 W 称为 V 的一个子空间, 如果 W 关于 V 中的线性运算封闭, 即对任意的 $x,y\in W,\lambda\in K$, 有 $x+y\in W$, $\lambda x\in W$.

定理 4.1 $W\subset V$ 是 V 的子空间当且仅当 W 对于 V 中的加法和数乘是一个 K-线性空间.

证明: 充分性. 如果 W 关于 V 的运算是一个 K-线性空间, 则对于任意 $x,y\in W,\lambda\in K$, 有 $x+y\in W,\lambda x\in W$. 所以, W 是 V 的子空间.

必要性. 如果 W 是 V 的子空间, 则 W 中的运算就是 V 中的运算. 为了验证 W 中的运算满足定义 4.1 中的 8 个条件, 显然只需证明: $\mathbf{0}\in W$和$-x\in W$ 对任意 $x\in W$ 成立, 这可由 $-x=(-1)\cdot x$ 推出. □

例 4.4 $W=\{\mathbf{0}\}\subset V$ 和 V 都是 V 的子空间. $W=\{\mathbf{0}\}$ 称为 V 的零子空间, 通常直接记为 $\mathbf{0}$. V 和零子空间都称为 V 的平凡子空间.

例 4.5 设 $V = K[x]$, 则 $K[x]_n = \{f(x) \in K[x] \mid \deg f(x) \leq n\} \cup \{\mathbf{0}\}$ 是 V 的子空间, 且由 $1, x, x^2, \ldots, x^n \in K[x]_n$ 生成.

例 4.6 设 $C^1[a, b] \subset C[a, b]$ 是可微函数的子集, 则 $C^1[a, b]$ 是 $C[a, b]$ 的一个子空间.

例 4.7 设 $A \in M_{m\times n}(K)$, 则 $W = \{X \in K^n \mid AX = 0\}$ 是 K^n 的一个子空间.

例 4.8 设 V 是一个 K-线性空间, S 是 V 的一个非空子集, 则

$$\{\lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_m\alpha_m \mid \alpha_i \in S, \lambda_i \in K, i = 1, \ldots, m\}$$

是 V 中包含 S 的最小子空间, 称为由 S 生成的子空间, 可记为 $\langle S\rangle$.

习题4.1

1. 设 V 是 K-线性空间, $x, y \in V, \lambda, \mu \in K$. 证明:
(1) $\lambda \cdot 0 = \mathbf{0}$; (2)$\lambda \cdot (-x) = -\lambda \cdot x$; (3) $(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$;
(4) $\lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$ (此处定义$x - y = x + (-y)$);
(5) 如果 $\lambda \cdot x = \mathbf{0}$, 则 $\lambda = 0$ 或 $x = \mathbf{0}$.
2. 设 V 是 K-线性空间, $V_i \subset V(i \in I)$ 是任意若干个(可能无限个)子空间, 证明它们的交集 $\bigcap_{i\in I} V_i$ 也是 V 的子空间.
3. 设 $V_1, V_2, \ldots, V_m$ 是 V 的子空间, 证明: 它们的和

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_m = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_m \mid x_i \in V_i\}$$

也是 V 的子空间.
4. 设 V_1, V_2 是 V 的子空间, 证明: 它们的并集 $V_1 \cup V_2$ 不是 V 的子空间, 除非 $V_1 \subseteq V_2$ 或 $V_2 \subseteq V_1$.
5. 设 $V = \mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}$-线性空间, 证明: $V_1 = \{(x, 0) \in V \mid x \in \mathbb{R}\}, V_2 = \{(0, y) \in V \mid y \in \mathbb{R}\}$ 是 V 的子空间, 且 $V = V_1 + V_2$, 但 $V \neq V_1 \cup V_2$.
6. 设 V 是任意 K-线性空间, V_1, V_2 是 V 的子空间, 证明: 如果 $V_1 \neq V$, $V_2 \neq V$, 则 $V_1 \cup V_2 \neq V$.

4.2 K-线性空间的基与维数

设 V 是一个 K-线性空间, 如果 V 不是有限生成的, 则称 V 是无穷维 K-线性空间, 对它的研究一般需要引入额外的结构(比如:度量或拓扑). 线性代数一般仅研究有限生成的 K-线性空间.

定义 4.4 设 V 是一个 K-线性空间, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in V$ 称为线性相关, 如果存在不全为零的系数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$, 使得 $\lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_m\alpha_m = 0$. 否则称 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关.

下面的结论是容易证明的, 所以证明省略.

定理 4.2 (1) $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性相关⇔其中有一个向量可以由其余向量线性表出.
(2) 如果 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 中有部分向量线性相关, 则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性相关.
(3) 如果$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关, 则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 中任意若干个向量也线性无关.
(4) 设有三组向量 $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}, B = \{\beta_1, \ldots, \beta_s\}, C = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_t\}$, 如果 A 中的每个向量可由 B 中向量线性表出(简称向量组 A 可由向量组 B 线性表出), B 中每个向量可由 C 中向量线性表出, 则 A 中每个向量可由 C 中向量线性表出.

定理 4.3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 和 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 是 V 中的两个向量组, 每个 α_i 可由 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表出. 则当 $s > t$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 一定线性相关.

证明: 设

$$\alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \ldots + a_{t1}\beta_t,$$

$$\alpha_2 = a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \ldots + a_{t2}\beta_t$$

$$\cdots$$

$$\alpha_s = a_{1s}\beta_1 + a_{2s}\beta_2 + \ldots + a_{ts}\beta_t,$$

其中 $a_{ij} \in K$. 考虑线性组合

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_s\alpha_s = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s)\beta_1 + \ldots + (a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \ldots + a_{ts}x_s)\beta_t.$$

当 $s > t$ 时, 方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2s}x_s = 0, \\ \cdots \\ a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \ldots + a_{ts}x_s = 0. \end{cases}$$

有非零解 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$. 所以存在不全为零的 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s \in K$ 使得

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_s\alpha_n = 0 \cdot \beta_1 + 0 \cdot \beta_2 + \ldots + 0 \cdot \beta_t = 0,$$

即 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关. □

定理 4.4 设 $S \subset V$ 是一个包含非零向量的有限集合, 则存在 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r} \in S$ 满足:

(1) $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;

(2) S 中的每个向量可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 线性表出.

证明: 设 $W = \langle S \rangle$ 是由 S 生成的 V 的子空间. 由于 S 包含非零向量, 所以 $W \neq \{0\}$. 如果存在 $\beta \in S$ 可由 $S' = S \backslash \{\beta\}$ 中向量线性表出, 则 $W = \langle S' \rangle$. 因此存在 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r} \in S$, 使 $W = \langle \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r} \rangle$ 且 $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 线性无关, W 中的每一个向量(特别是 S 中每一个向量)都是 $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 的线性组合. □

定义 4.5 定理4.4中的 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 称为向量组 S 的极大线性无关组.

为了使线性相关和线性无关的概念有更广泛的适用范围, 下面给出线性空间 V 中的子集(有限或无限)线性相关和线性无关的概念.

定义 4.6 设 S 是 V 中非空子集. 若 S 是有限集, 给这个集合中元素一种编号所得到的向量组线性相关(无关), 则称 S 线性相关(无关); 若 S 是无限集, 如果 S 中有一个有限子集线性相关, 则称 S 线性相关, 如果 S 中任一有限子集都线性无关, 则称 S 线性无关.

定义 4.7 向量集 $S \subset V$ 称为 V 的一组基, 如果 S 满足条件:

(1)向量集 S 是线性无关的;

(2)V 中的每一个向量都可以由向量集 S 中有限个向量线性表出, 即 $V = \langle S \rangle$.

定理 4.5 如果 V 是有限生成 K-线性空间, 则存在 V 的一组基 S. 如果 S, S' 是 V 的两组基, 则 $|S| = |S'|$.

证明: V 是有限生成 K-线性空间, 所以存在有限集 $T \subset V$ 使 $V = \langle T \rangle$. 由定理 4.4, 存在线性无关子集合 $S \subseteq T$ 使得 $V = \langle S \rangle$, 所以 S 是 V 的一组基. 如果 S, S' 是 V 的两组基, 则 S, S' 可互相线性表出. 所以下面的一般结论推出 $|S| = |S'|$. □

定义 4.8 设 V 是一个 K-线性空间, 如果 V 有一组基是由有限多个向量组成的, 称 V 是有限维的; 如果 V 有一组基含有无穷多个向量, 称 V 是无限维

的. 若 V 是有限维的, 则把 V 的一组基所含向量的个数称为 V 的维数, 记为 $\dim_K V$, 可简记为 $\dim V$; 若 V 是无限维的, 则 $\dim V = +\infty$; 若 $V = \{\mathbf{0}\}$, 则定义 $\dim V = 0$.

根据定理4.3可以得到如下结论.

定理 4.6 设 $\dim V = n$, 则 V 的任意子空间 $W \subset V$ 都是有限生成的, 且 $\dim W \leq n$. 特别的有, $\dim W = n \Leftrightarrow W = V$.

证明: 由定理4.3, W 中任意 $n+1$ 个向量都线性相关, 所以在 W 的所有线性无关组中必有一个向量个数最多的线性无关组, 设为 S, 则 $|S| \leq n$. 因此对任意的 $\beta \in W$, $S \cup \{\beta\}$ 一定是一组线性相关的向量, 则 β 可以由 S 中向量线性表出. 又因为 S 是线性无关组, 所以 S 是 W 的一组基, 从而 $\dim W = |S| \leq n$. 如果 $|S| = n$, 则 S 必为 V 的一组基, 所以 $W = V$. □

例 4.9 $\dim_K K^n = n$.

例 4.10 $\dim_K M_{m\times n}(K) = m \cdot n$.

例 4.11 $\dim_K K[x] = +\infty, \dim_K K[x]_n = n+1$, 其中

$$K[x]_n = \{f(x) \in K[x] \mid \deg f(x) \leq n\}.$$

定理 4.7 设 $\dim_K V = n > 0$, 则 V 中任意线性无关向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s (s \leq n)$ 可扩充成 V 的一组基. 特别地, V 中任一非零向量可以包含在一组基中.

证明: 我们对 $n-s$ 使用数学归纳法. 若 $n-s=0$, 则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 本身就是 V 的一组基. 下面考虑 $n-s>0$, 则 $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_s \rangle \subsetneq V$. 所以存在 $\alpha_{s+1} \in V$ 但 $\alpha_{s+1} \notin \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_s \rangle$, 所以 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 线性无关(否则 $\alpha_{s+1} \in \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_s \rangle$). 由于 $n-(s+1) < n-s$, 根据归纳假设知 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 可扩充成 V 的一组基. □

定义 4.9 设 $V_1, V_2, \ldots, V_m$ 是 V 的子空间, 如果它们满足:

$$\forall x_i \in V_i, x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0,$$

则称 $V_1, V_2, \ldots, V_m$ 是线性无关的子空间.

定理 4.8 下述结论是等价的:

(1) $V_1, V_2, \ldots, V_m$ 是线性无关的子空间;

(2)如果 $\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{im_i}\in V_i(1\le i\le m)$ 线性无关, 则 $\bigcup_{i=1}^m\{\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{im_i}\}$线性无关;

(3) $\dim_K(V_1+V_2+\ldots+V_m)=\dim_K(V_1)+\dim_K(V_2)+\ldots+\dim_K(V_m)$;

(4) 对任意$1\le i\le m, (V_1+\ldots+V_{i-1}+V_{i+1}+\ldots+V_m)\cap V_i=\{0\}$;

(5) $V_1+V_2+\ldots+V_m$中每个向量可唯一表示成$x_1+x_2+\ldots+x_m, x_i\in V_i$, 即如果

$$x_1+x_2+\ldots+x_m=y_1+y_2+\ldots+y_m,\ x_i,y_i\in V_i,$$

则 $x_1=y_1,x_2=y_2,\ldots,x_m=y_m$.

证明: 我们将证明 $(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(5)\Rightarrow(1)$.

$(1)\Rightarrow(2)$: 如果$\sum_{i=1}^m(\lambda_{i1}\alpha_{i1}+\ldots+\lambda_{im_i}\alpha_{im_i})=0$, 则对任意$1\le i\le m$ 有 $\lambda_{i1}\alpha_{i1}+\ldots+\lambda_{im_i}\alpha_{im_i}=0$, 所以$\lambda_{i1}=\lambda_{i2}=\ldots=\lambda_{im_i}=0$.

$(2)\Rightarrow(3)$: 设$\dim_K(V_i)=m_i$, $\alpha_{i1},\ldots\alpha_{im_i}$是$V_i$的一组基, 则$S=\bigcup_{i=1}^m\{\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{im_i}\}$ 线性无关. 又 $V_1+V_2+\ldots+V_m$ 中任一向量β可写成$\beta_1+\ldots+\beta_m$, 其中$\beta_i\in V_i$, 即β可写成S 中向量的线性组合. 所以S 是 $V_1+V_2+\ldots+V_m$ 的一组基, 故有:

$$\dim_K(V_1+\ldots+V_m)=\dim_K(V_1)+\ldots+\dim_K(V_m).$$

$(3)\Rightarrow(4)$: 对任意子空间$U_1,\ldots,U_n\subset V$, 显然

$$\dim_K(U_1+\ldots+U_n)\le\dim_K(U_1)+\ldots+\dim_K(U_n).$$

所以, 设

$$W_1=V_1+\ldots+V_{i-1}+\ldots+V_{i+1}+\ldots+V_m,\ W_2=V_i,$$

只需证明

$$\dim_K(W_1+W_2)=\dim_K(W_1)+\dim_K(W_2)-\dim_K(W_1\cap W_2).$$

设$\dim_K(W_i)=t_i$, $\dim_K(W_1\cap W_2)=s$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$是$W_1\cap W_2$的一组基. 由定理4.7, $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$可分别扩充成W_1 的一组基$\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_{t_1}$和$W_2$ 的一组基$\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\beta_1,\ldots,\beta_{t_2-s}$. 下面证明$\alpha_1,\ldots,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_{t_1},\beta_1,\ldots,\beta_{t_2-s}$是$W_1+W_2$的一组基. 显然, W_1+W_2中每个向量可由$\alpha_1,\ldots,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_{t_1},\beta_1,\ldots,\beta_{t_2-s}$线性表出, 只需证它们线性无关. 如果

$$\sum_{i=1}^{t_1}\lambda_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{t_2-s}\mu_i\beta_i=0,$$

则

$$\sum_{i=1}^{t_1}\lambda_i\alpha_i=-\sum_{i=1}^{t_2-s}\mu_i\beta_i\in W_2,$$

所以
$$\sum_{i=1}^{t_1}\lambda_i\alpha_i\in W_1\cap W_2.$$
令$\sum_{i=1}^{t_1}\lambda_i\alpha_i=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i'\alpha_i$, 则
$$(\lambda_1-\lambda_1')\alpha_1+\ldots+(\lambda_s-\lambda_s')\alpha_s+\lambda_{s+1}\alpha_{s+1}+\ldots+\lambda_{t_1}\alpha_{t_1}=0.$$
由$\alpha_1,\ldots,\alpha_{t_1}$线性无关得$\lambda_1=\lambda_1',\ldots,\lambda_s=\lambda_s'$, $\lambda_{s+1}=\ldots=\lambda_{t_1}=0$, 所以
$$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{t_2-s}\mu_i\beta_i=0,$$
从而得到$\lambda_1=\ldots=\lambda_s=\mu_1=\ldots=\mu_{t_2-s}=0$.
(4) $\Rightarrow$ (5): 如果存在$\beta\in V_1+V_2+\ldots+V_m$有两种不同表示, 即$\beta=x_1+x_2+\ldots+x_m=y_1+\ldots+y_m$, 其中$x_i,y_i\in V_i$, 且存在$1\le i\le m$使得$x_i\ne y_i$. 可得
$$(x_1-y_1)+\ldots+(x_i-y_i)+\ldots+(x_m-y_m)=0.$$
所以
$$y_i-x_i=(x_1-y_1)+\ldots+(x_{i-1}-y_{i-1})+(x_{i+1}-y_{i+1})+\ldots+(x_m-y_m)\in V_1+\ldots+V_{i-1}+V_{i+1}+\ldots+V_m.$$
因此$y_i-x_i\in(V_1+\ldots+V_{i-1}+V_{i+1}+\ldots+V_m)\cap V_i=\{0\}$, 矛盾.
(5) $\Rightarrow$ (1): 如果$x_1+x_2+\ldots+x_m=0$, 其中$x_i\in V_i$. 由零向量仅有唯一表示$0=0+0+\ldots+0$, 所以$x_1=x_2=\ldots=x_m=0$. □

定义 4.10 如果$V_1,V_2,\ldots,V_m$满足定理4.8中的任一(等价)条件, 则称$V_1+V_2+\ldots+V_m$是$V_1,V_2,\ldots,V_m$的直和, 记为$V_1\oplus V_2\oplus\ldots\oplus V_m$.

习题4.2

1. 设$e_1,e_2,\ldots,e_n$是K-线性空间的一组基, 则向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$满足:
$$(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)=(e_1,e_2,\ldots,e_n)\cdot A,\ \ A=(a_{ij})_{m\times n}\in M_n(K).$$
证明$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$是$V$的一组基的充要条件是$A$可逆.
2. 证明下列向量组在$\mathbb{R}$-线性空间$C(-\infty,+\infty)$中线性无关.
(1)$\sin x$, $\cos x$; (2)1, $\sin x$, $\cos x$; (3)$\sin x$, $\sin 2x,\ldots,\sin nx$.
3. 设V是一个K-线性空间, 映射$f:V\to K$称为一个线性函数, 如果
$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ f(\lambda x)=\lambda f(x),\ \forall x,y\in V,\lambda\in K$$
成立. 证明: V上所有线性函数的集合$V^*=\{f:V\to K\mid f\text{是线性函数}\}$在下述

运算下是一个K-线性空间:

$$f+g:V\to K,\ (f+g)(x)=f(x)+g(x),$$

$$\lambda f:V\to K,\quad (\lambda f)(x)=\lambda f(x),$$

$\forall f,g\in V^*,\lambda\in K$.

4. 设$f(x)\in\mathbb{Q}[x]$是一个不可约多项式, $\theta\in\mathbb{C}$是$f(x)=0$的一个根. 令$S=\{1,\theta,\theta^2,\dots,\theta^k,\dots\}=\{\theta^k\mid k\geq 0$ 是任意非负整数$\}$. 如果$\mathbb{Q}[\theta]=\langle S\rangle\subset\mathbb{C}$表示由$S$生成的$\mathbb{Q}$-线性子空间. 证明: $\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}[\theta]=\deg f(x)$.

5. 举例说明, 直和不满足"消去律", 即$U\oplus W_1=U\oplus W_2$一般不能推出$W_1=W_2$.

6. $U=U_1+U_2+\dots+U_m$是直和的充要条件是:

$$(U_1+\dots+U_{i-1})\cap U_i=\{0\}\ (1<i\leq m),$$

其中$U_1,U_2,\dots,U_m$是V的子空间.