1. 利用单调有界数列必定收敛的性质，证明下述数列收敛，并求出极限。

(2) $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$，$n=1,2,3,\cdots$；

(5) $0<x_1<1$，$x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$，$n=1,2,3,\cdots$；

证：(2) $0<x_1=\sqrt{2}<2$

设 $0<x_n<2$，则 $0<x_{n+1}=\sqrt{2x_n}<2$

由数学归纳法知，对 $\forall n$，$0<x_n<2$，则 $\{x_n\}$ 是有界的

又 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{2x_n}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{2}-\sqrt{x_n})>0$，知 $\{x_n\}$ 是单调递增的，因此 $\{x_n\}$ 收敛。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$。对 $x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$ 两端取极限，有 $A=\sqrt{2A}$ （也可 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\sqrt{\frac{2}{x_n}}>1$）

解得 $A=2$ 或 $A=0$（舍去），因此有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$。

(5) 解法与(2)类似，单调递减有下界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

2. 利用递推公式与单调有界数列的性质，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{2n+1}=0$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0\ (a>1)$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

证：(1) 设 $x_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{2n+1}$，则 $x_n>0$，且 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n+2}{2n+3}<1$

所以 $\{x_n\}$ 是单调减少有下界的数列，因此收敛。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对等式 $x_{n+1}=\frac{n+2}{2n+3}x_n$ 两端求极限，得 $A=\frac{1}{2}A$

解得 $A=0$。故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{2n+1}=0$

(2) 设 $x_n=\frac{a^n}{n!}$，则 $x_n>0$。当 $n>a$ 时，$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{a}{n+1}<1$。

所以 $\{x_n\}$ 从某项开始是单调减少有下界的数列，因此收敛

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=B$。对等式 $x_{n+1}=\frac{a}{n+1}x_n$ 两端求极限，得 $B=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

(3) 设 $x_n=\frac{n!}{n^n}$，则 $x_n>0$，$\frac{x_n}{x_{n+1}}=(1+\frac{1}{n})^n>1$

所以 $\{x_n\}$ 是单调减少有下界的数列，因此收敛。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$。对 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n x_{n+1}$ 两端求极限，得 $A=eA$，则 $A=0$。

因此 $\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

3. 设 $x_1=a$，$x_2=b$，$x_{n+2}=\frac{x_{n+1}+x_n}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解：利用递推公式，得 $x_{n+1}-x_n=-\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})$

得到数列 $\{x_{n+1}-x_n\}$ 的通项公式 $x_{n+1}-x_n=(-\frac{1}{2})^{n-1}(b-a)$

又 $x_n=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_2-x_1)+x_1=\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-\frac{1}{2})^k\right)(b-a)+a$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{a+2b}{3}$

9.22

4. 设 $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\frac{1}{2+x_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解：当 $0<x_n<\sqrt{2}-1$ 时，有 $x_{n+1}>\sqrt{2}-1$；当 $x_n>\sqrt{2}-1$ 时，有 $0<x_{n+1}<\sqrt{2}-1$

由于 $x_1=\sqrt{2}>\sqrt{2}-1$，得 $x_2<\sqrt{2}-1$，……

得到 $\forall n$，$x_{2n+1}>\sqrt{2}-1$，$0<x_{2n}<\sqrt{2}-1$.

而 $x_{2n+1}-x_{2n-1}=\frac{1}{2+x_{2n}}-x_{2n-1}=\frac{2+x_{2n-1}}{5+2x_{2n-1}}-x_{2n-1}=\frac{-2(x_{2n-1}-\sqrt{2}+1)(x_{2n-1}+\sqrt{2}+1)}{5+x_{2n-1}}<0$，

$x_{2n+2}-x_{2n}=\frac{2+x_{2n}}{5+2x_{2n}}-x_{2n}=\frac{-2(x_{2n}-\sqrt{2}+1)(x_{2n}+\sqrt{2}+1)}{5+x_{2n}}>0$.

知数列 $\{x_{2n-1}\}$ 单调减小有下界，$\{x_{2n}\}$ 单调增加有上界，从而都有极限

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=b$. 分别对 $x_{2n+1}=\frac{2+x_{2n-1}}{5+2x_{2n-1}}$ 与 $x_{2n+2}=\frac{2+x_{2n}}{5+2x_n}$ 两端求极限

有 $a=\frac{2+a}{5+2a}$，$b=\frac{2+b}{5+2b}$，解得 $a=\sqrt{2}-1$，$b=\sqrt{2}-1$ 或 $a=b=-\sqrt{2}-1$（舍去）

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}-1$

错题报告 9.22

1. 错误点：① 数列 $\{x_n\}$ 单增，有下界，不能说明其收敛，应该是单增有上界或单减有下界.

   ② 数列 $\{x_n\}$ 单减有下界，最后计算 $a=1-\sqrt{1-a}$，$a=0$ 或 1，却取了 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

2. 错误点：① 判定 $\{x_n\}$ 有界用的是数学归纳法，判定单调性用 $x_{n+1}-x_n$ 或 $\frac{x_{n+1}}{x_n}$.
   无法用归纳法判定 $x_n<x_{n-1}$.

   ② 令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对 $x_{n+1}=\frac{n+2}{2n+3}x_n$ 两边取极限，不应该是 $a=\frac{n+2}{2n+3}a$
   而是 $a=\frac{1}{2}a$.

   ③ 表述不严密，对 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$，直接写 n 越来越大时，有 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{a}{n+1}<1$.
   应该是存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$

3. 错误点：① 未判定 $\{x_n\}$ 是收敛的，直接令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，计算极限，错误.

   ② 用 $x_{n+3}-x_{n+2}=\frac{1}{4}(x_{n+1}-x_n)=\frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$ 判定 $\{x_n\}$ 是单调的，是不对的.

4. 错误点：应先证明 $\{x_{2n+1}\}$，$\{x_{2n}\}$ 收敛，才能设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=b$，
   也不能说 $\{x_n\}$ 分布在 $\sqrt{2}-1$ 两侧，从而极限就是 $\sqrt{2}-1$.

1. 设$\{x_n\}$是一单调数列，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的充分必要条件是：存在$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$。

证：必要性显然。

充分性：不妨设$\{x_n\}$单调增加，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

则对$\forall\varepsilon>0$，$\exists K$，当$k>K$时，$-\varepsilon<x_{n_k}-a\le 0$

取$N=n_{K+1}$，$\forall n>N$，$\exists M>K+1$，使得$n_{K+1}<n<n_M$，

于是$-\varepsilon<x_{n_{K+1}}-a\le x_n-a\le x_{n_M}-a\le 0$。因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

2. 证明：若有界数列$\{x_n\}$不收敛，则必存在两个子列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$与$\{x_{n_k}^{(2)}\}$收敛于不同的极限，即$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}^{(1)}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}^{(2)}=b$，$a\ne b$。

证：由于$\{x_n\}$不收敛，所以$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N$，$\exists m,n$，且$m>n>N$，有$|x_m-x_n|\ge\varepsilon_0$。

取$N_1=1$，$\exists m_1>n_1>N_1$，有$|x_{m_1}-x_{n_1}|\ge\varepsilon_0$

取$N_2=m_1$，$\exists m_2>n_2>N_2$，有$|x_{m_2}-x_{n_2}|\ge\varepsilon_0$

……

取$N_k=m_{k-1}$，$\exists m_k>n_k>N_k$，有$|x_{m_k}-x_{n_k}|\ge\varepsilon_0$

……

于是得到$\{x_n\}$的两个子列$\{x_{m_k}\}$，$\{x_{n_k}\}$，它们都是有界的，必有收敛子列

分别记作$\{x_{m_k'}\}$，$\{x_{n_k'}\}$，記$\{m_k'\}=\{n_k^{(1)}\}$，$\{n_k'\}=\{n_k^{(2)}\}$

则得到了$\{x_n\}$的两个子列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$与$\{x_{n_k}^{(2)}\}$，它们收敛于不同极限

3. 证明：若数列$\{x_n\}$无界，但非无穷大量，则必存在两个子列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$与$\{x_{n_k}^{(2)}\}$，其中$\{x_{n_k}^{(1)}\}$是无穷大量，$\{x_{n_k}^{(2)}\}$是收敛子列。

证：因为$\{x_n\}$非无穷大量，则$\exists M>0$，使$\{x_n\}$中有无穷多项满足$|x_n|\le M$。

于是可从中取出$\{x_n\}$的收敛子列$\{x_{n_k}^{(2)}\}$

因为$\{x_n\}$无界，对$\forall G>0$，$\{x_n\}$中有无穷多项满足$|x_n|>G$。

取$G_1=1$，$\exists n_1$，使$|x_{n_1}|>G_1$

取$G_2=2$，则$\exists n_2>n_1$，使$|x_{n_2}|>G_2$，

…

取$G_k=k$，则$\exists n_k>n_{k-1}$，使$|x_{n_k}|>G_k$

…

记$\{n_k\}=\{n_k^{(1)}\}$

则得到$\{x_n\}$的两个子列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$与$\{x_{n_k}^{(2)}\}$，其中$\{x_{n_k}^{(1)}\}$是无穷大量，$\{x_{n_k}^{(2)}\}$是收敛子列。

9.26

4. 设S是非空有上界的数集，$\sup S = a \overline{\in} S$，证明在数集S中可取出严格单调增加的数列$\{x_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证：由$\sup S = a \overline{\in} S$，知$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x \in S$，使得$a-\varepsilon < x < a$

取$\varepsilon_1 = 1$，则$\exists x_1 \in S$，使得$a-\varepsilon_1 < x_1 < a$

对$\varepsilon_2 = \min\{\frac{1}{2}, a-x_1\} > 0$，则$\exists x_2 \in S$，使得$a-\varepsilon_2 < x_2 < a$，其中$x_1 = a-(a-x_1) \le a-\varepsilon_2 < x_2$

对$\varepsilon_3 = \min\{\frac{1}{3}, a-x_2\} > 0$，$\exists x_3 \in S$，使得$a-\varepsilon_3 < x_3 < a$，其中$x_2 = a-(a-x_2) \le a-\varepsilon_3 < x_3$.

……

对$\varepsilon_n = \min\{\frac{1}{n}, a-x_{n-1}\} > 0$，$\exists x_n \in S$，使得$a-\varepsilon_n < x_n < a$，其中$x_{n-1} = a-(a-x_{n-1}) \le a-\varepsilon_n < x_n$

……

由此数集S中取到了严格单调增加的数列$\{x_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

5. 设$\{(a_n, b_n)\}$是一列开区间，满足条件：

(1) $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < b_n < \cdots < b_2 < b_1$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

证明存在惟一实数ξ属于所有开区间(a_n, b_n)，且$\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

证：$\{a_n\}$单调增加有上界，$\{b_n\}$单调减少有下界，因此都收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$，则$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - (b_n - a_n)) = \xi$.

因为$\{a_n\}$严格单调增加，$\{b_n\}$严格单调减少，知对$\forall n$，有$a_n < \xi < b_n$　　存在性

若存在另一ξ'属于所有开区间(a_n, b_n)，则由$a_n < \xi' < b_n$

利用极限的夹逼性，得$\xi' = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$.　　唯一性.

6. 利用Cauchy收敛原理证明下述数列收敛：

(1) $x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n$　$(|q| < 1, |a_k| \le M)$

(2) $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

证：(1) 对$\forall \varepsilon > 0$，(取$\varepsilon < \frac{M}{1-|q|}$)，取$N = \left[\frac{\ln \frac{1-|q|}{M}\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，当$m > n > N$时，

$$|x_m - x_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k q^k\right| \le M|q|^{n+1}(1 + |q| + |q|^2 + \cdots + |q|^{m-n-1}) < \frac{M}{1-|q|}|q|^{n+1} < \varepsilon.$$

(2) $\forall \varepsilon > 0$，取$N = [\frac{1}{\varepsilon}]$，当$m > n > N$时，$\left|\sum_{k=n+1}^{m}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

7. (1) 设数列$\{x_n\}$满足条件$\lim_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$. 问$\{x_n\}$是否一定是基本数列.

(2) 设数列$\{x_n\}$满足条件$|x_{n+1}-x_n|<\frac{1}{2^n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 证明$\{x_n\}$是基本数列.

解: (1) 不一定. $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

(2) 对$\forall\varepsilon>0$. 取$N=1+\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln\frac{1}{2}}\right]$. $\forall\ m>n>N$. 有

$$|x_m-x_n|\le|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$$
$$<\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\varepsilon.$$

错题报告 9.26

1. 错误点: ① $n_k<n<n_{k+1}$, 未假设$\{x_n\}$是单调递增的, 直接写$x_{n_k}<x_n<x_{n_{k+1}}$.

② "充分性" "必要性"写反了.

3. 错误点: ①$\{x_n\}$是无界的, 不能利用B-W定理 说$\{x_n\}$存在子列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$. $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\infty$

即B-W定理只能用于有界数列 (必有收敛子列)

② 错误写法: $\{x_n\}$不是无穷大量.

$\therefore\exists M>0$. 使得$\{x_n\}$中有无穷多项满足$|x_n|\le M$

取这无穷多项记为$\{x_{n_k}^{(1)}\}$. 是收敛的.

(从有界数列中任取无穷多项未必是收敛的)

5. 错误点: 未证明唯一性. 或唯一性证明有误: 例: $\lim_{n\to\infty}a_n=\xi'\ne\xi$. 而$\xi'=\xi$. 矛盾.

6. 错误点: $x_m-x_n=a_{n+1}q^{n+1}+a_{n+2}q^{n+2}+\cdots+a_mq^m\le(m-n)Mq^{n+1}$

①. q的正负未知, 应当加绝对值 $|x_m-x_n|\le a_{n+1}|q|^{n+1}+\cdots+a_m|q|^m\le\cdots$

②. 放缩不当, $(m-n)Mq^{n+1}$中有多个n, 不利于求解.

也有存在中间步骤化简错误的.