考察伴随矩阵

1、设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$，计算$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} A_{ij}$.

2、 设A为n阶方阵，且$n \geq 2$,

证明 $$r(A^*) = \begin{cases} n, & 若 r(A) = n, \\ 1, & 若 r(A) = n-1, \\ 0, & 若 r(A) < n-1. \end{cases}$$

分块法计算行列式

1、设 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$,

则$f(x)=0$的根的个数为___2___.

解

$$f(x)\xlongequal[j\geq 2]{c_j-c_1}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}\xlongequal{c_4+c_2}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

显然是关于x的二次多项式.

2、计算行列式$\begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & 0 \\ -5 & -4 & -3 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

答案： $3!\cdot 5!$

相抵标准形的应用，矩阵的秩

1、 **设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵**，证明$r(\boldsymbol{A})=r$的充分必要条件是存在$m\times r$矩阵$\boldsymbol{B}$和$r\times n$矩阵$\boldsymbol{C}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$，其中$r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{C})=r$.

2、（秩1矩阵）**设A为n阶方阵，**

（1）证明$r(\boldsymbol{A})=1$的充分必要条件是存在非零列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

（2）若$r(\boldsymbol{A})=1$，证明$\boldsymbol{A}^m=(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A})^{m-1}\boldsymbol{A}$,其中$m$是正整数;

（3）设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 6\\ 3 & -6 & 9\end{bmatrix}$,求$\boldsymbol{A}^m$，其中$m$是正整数.

§第四节 克拉默（Cramer）法则

已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

定理3.4.1 （克拉默法则）

设$n \times n$线性方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$， 则该方程组有唯一解的充分必要条件是它的系数矩阵$\boldsymbol{A}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}| \neq 0.$

且该唯一解可以表示为 $[x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} = [\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \cdots, \frac{D_n}{D}]^{\mathrm{T}}.$

其中 $D_j = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$

注 如果非齐次线性方程组无解或有无穷多个解，则它的系数行列式必为零.

例1 用克拉默则解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3 + 2c_2]{c_1 + 2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -27, \qquad\qquad = 27,$$

$$\therefore\ x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{81}{27} = 3, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-108}{27} = -4,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-27}{27} = -1, \qquad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{27}{27} = 1.$$

齐次线性方程组的相关结论

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

推论2.4.3

齐次线性方程组(2)只有零解的充分必要条件是它的系数行列式非零.

齐次线性方程组(2)有非零解的充分必要条件是它的系数行列式等于零.

例2 已知

$$\begin{cases} (\lambda-2)x_1 & +2x_2 & -2x_3 & =0, \\ 2x_1 & +(\lambda+1)x_2 & -4x_3 & =0, \\ -2x_1 & -4x_2 & +(\lambda+1)x_3 & =0 \end{cases}$$

有非零解，求λ的值.

解

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+1 & -4 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda+5 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 4 & -2\\ 2 & \lambda+5 & -4\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda-2 & 4\\ 2 & \lambda+5\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2(\lambda+6),$$

因为其次方程组有非零解，所以$|A|=0$,

从而$\lambda=3$或$\lambda=-6$.

例3 已知

$$\begin{cases} (\mu-1)x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + (\mu+1)x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - x_2 + (\mu-4)x_3 = -3 \end{cases}$$

有无穷多解，求μ的值，并求通解.

解 该线性方程组的系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} \mu-1 & 3 & -2 \\ 1 & \mu+1 & -2 \\ 5 & -1 & \mu-4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1-r_2} \begin{vmatrix} \mu-2 & -\mu+2 & 0 \\ 1 & \mu+1 & -2 \\ 5 & -1 & \mu-4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+c_1} \begin{vmatrix} \mu-2 & 0 & 0 \\ 1 & \mu+2 & -2 \\ 5 & 4 & \mu-4 \end{vmatrix} = (\mu-2)\begin{vmatrix} \mu+2 & -2 \\ 4 & \mu-4 \end{vmatrix} = \mu(\mu-2)^2.$$

由于方程组有无穷多解, 故 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 即 $\mu = 0$ 或 $\mu = 2$.

当 $\mu=0$ 时，对方程组的增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 作初等行变换后化为行阶梯形矩阵，

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}-1 & 3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\\ 5 & -1 & -4 & -3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -5\end{array}\right].$$

此时 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\tilde{\boldsymbol{A}})$，方程组无解，即 $\mu=0$ 不满足题设条件，舍去.

当 $\mu=2$ 时, 对方程组的增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 作初等行变换后化为行阶梯形矩阵,

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -2 & 1\\ 5 & -1 & -2 & -3\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

此时 $r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=2<3$, 方程组有无穷多解. 原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2},\\ x_2=\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2},\end{cases}$$

取 x_3 为自由变量，则该方程组的通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

例4（插值多项式唯一性定理）

设$x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$是数域$\mathbb{P}$中$n$+1个互不相同的数，而$b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}$是$\mathbb{P}$中任意给定的$n$+1个数，证明在数域$\mathbb{P}$上存在唯一的$n$次多项式（函数）

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

使得

$$f(x_i) = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n+1.$$

解：根据题设构造方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = b_1, \\ a_0 + a_1 x_2 + \cdots + a_n x_2^n = b_2, \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_{n+1} + \cdots + a_n x_{n+1}^n = b_{n+1}. \end{cases}$$

是以 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为未知量的$(n+1)\times(n+1)$非齐次线性方程组. 其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n+1} (x_j - x_i) \neq 0$$

所以由克拉默法则可知该方程组的解唯一存在，即 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 存在且取值唯一．从而问题得证。

小结

1. **用克拉默法则解方程组的两个条件**

(1) 方程个数等于未知量个数;

(2) 系数行列式不等于零.

2. **克拉默法则建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系.它主要用于理论推导.**

二、线性方程组的应用

- 在光合作用下，植物利用太阳光的辐射能量把二氧化碳(CO_2)和水(H_2O)转化成氧气(O_2)和葡萄糖($C_6H_{12}O_6$). 试建立该反应的化学平衡方程式.

$$x_1 CO_2 + x_2 H_2O \xrightarrow{\text{太阳光}} x_3 O_2 + x_4 C_6H_{12}O_6$$

其中 x_1, x_2, x_3, x_4 **是尽可能小的正整数**.

解　由碳原子、氢原子、氧原子分别平衡，有

$$\begin{cases} x_1 = 6x_4, \\ 2x_2 = 12x_4, \\ 2x_1 + x_2 = 2x_3 + 6x_4, \end{cases}$$

$$或\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad -6x_4 = 0, \\ \qquad 2x_2 \qquad\quad -12x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 2 & 0 & -12\\ 2 & 1 & -2 & -6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 2 & 0 & -12\\ 0 & 1 & -2 & 6\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 4 & -24\\ 0 & 1 & -2 & 6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 1 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 4 & -24\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 1 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 1 & -6\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6x_4, \\ x_2 = 6x_4, \\ x_3 = 6x_4, \end{cases}$$

其中 x_4 为自由变量.

由题意，应取 $x_4 = 1$, $x_1 = x_2 = x_3 = 6$

反应的化学平衡方程式为

$$6CO_2 + 6H_2O \xrightarrow{\text{太阳光}} 6O_2 + C_6H_{12}O_6$$

作业：

第9题要求利用克拉默法则求解得到的线性方程组。

9. 给定平面上的三个点 $(1,1),(2,-1),(3,1)$. 求过这三个点且对称轴与 y 轴平行的抛物线的方程.

10. 设有齐次线性方程组
$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \cdots\cdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0\end{cases}$$
$(n\geq 2)$. 试问 a 取何值时, 该方程组有非零解?

第10题要求用两种方法求解：方法一是直接用高斯消元法；方法二是结合克拉默法则+高斯消元法求解。

6. 计算下列各行列式.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \cdots & a+nh \\ -a & a & & & \\ & -a & a & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -a & a \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$;

(6) $\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}$.（本题要求用三角化方法做）

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} \xlongequal[(i \neq 2)]{r_i - r_2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!.$

$$\xlongequal[(i \geq 2)]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}_n \xlongequal{\text{按第2行展开}} (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}_{n-1} = -2(n-2)!.$$

（4）$$\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \cdots & a+nh \\ -a & a & & & \\ & -a & a & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -a & a \end{vmatrix} \xlongequal[(j\geq 2)]{c_1+c_j} \begin{vmatrix} (n+1)a+(1+2+\cdots+n)h & a+h & a+2h & \cdots & a+nh \\ 0 & a & & & \\ 0 & -a & a & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -a & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[(n+1)a+\tfrac{n(n+1)}{2}h\right]\begin{vmatrix} a & & & \\ -a & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -a & a \end{vmatrix}_{(n阶)} = \frac{(n+1)(2a+nh)}{2}a^n$$

（5）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n \end{vmatrix} \xlongequal[1\le i\le n]{r_i/i} n!V(1,2,\ldots,n) = \prod_{i=1}^{n} i!$

（6）$\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}$. $D_n = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & 0 & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix} = (n+1)a^n$

7. 已知行列式

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\1 & 1 & 2 & 2\\4 & 5 & 3 & 7\end{vmatrix},$$

M_{ij} 和 A_{ij} 分别是 D 中 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式和代数余子式，试求：

（1）$A_{14}+2A_{24}+A_{34}+5A_{44}$；（2）$4M_{42}+2M_{43}+2M_{44}$.

(1）$A_{14}+2A_{24}+A_{34}+5A_{44}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}=0.$(得到的行列式第2,4列成比例）

(2) $4M_{42}+2M_{43}+2M_{44}=4A_{42}-2A_{43}+2A_{44}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=48.$

第二周第1次课作业

4. 利用行列式的定义确定行列式 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 和 x^4 的系数.

x^3项为$-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$，其系数为$-1$.

x^4项为$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，其系数为2.

5. 计算下列行列式.（提示：2），3）小题可利用性质化简出多个零元素后，2）可用行列式定义，3）可用对角线法；其他题目可考虑三角化）

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 10 \\ 3 & 5 & 11 & 16 \\ 2 & -7 & 7 & 7 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & b+a & c+b+a & d+c+b+a \\ a & b+2a & c+2b+3a & d+2c+3b+4a \\ a & b+3a & c+3b+6a & d+3c+6b+10a \end{vmatrix}$；

（2）
$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_4]{r_1-r_2} \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-c_3]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -b \end{vmatrix} = a^2b^2.$$

（4）
$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2+r_3} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

5（6）

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & b+a & c+b+a & d+c+b+a \\ a & b+2a & c+2b+3a & d+2c+3b+4a \\ a & b+3a & c+3b+6a & d+3c+6b+10a \end{vmatrix} \overset{\substack{r_4-r_3 \\ r_3-r_2}}{\underset{r_2-r_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b+a & c+b+a \\ 0 & a & b+2a & c+2b+3a \\ 0 & a & b+3a & c+3b+6a \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-r_3}{\underset{r_3-r_2}{=\!=}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b+a & c+b+a \\ 0 & 0 & a & b+2a \\ 0 & 0 & a & b+3a \end{vmatrix} \overset{r_4-r_3}{=\!=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b+a & c+b+a \\ 0 & 0 & a & b+2a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4.$$

6. 计算下列各行列式. （提示：三角化）

(1) $\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & b \\ a & a & \cdots & b & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & b & \cdots & a & a \\ b & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} \lambda+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & \lambda+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \lambda+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \lambda+a_n \end{vmatrix}$；

6（1）
$$\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & b \\ a & a & \cdots & b & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & b & \cdots & a & a \\ b & a & \cdots & a & a \end{vmatrix} \xlongequal[(j\geq 2)]{c_1+c_j} \begin{vmatrix} (n-1)a+b & a & \cdots & a & b \\ (n-1)a+b & a & \cdots & b & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (n-1)a+b & b & \cdots & a & a \\ (n-1)a+b & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(1\leq i\leq n-1)]{r_i-r_n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b-a \\ 0 & 0 & \cdots & b-a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & b-a & \cdots & 0 & 0 \\ (n-1)a+b & a & \cdots & a & a \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left[(n-1)a+b\right](b-a)^{n-1}.$$

6（3）$\begin{vmatrix} \lambda+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & \lambda+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \lambda+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \lambda+a_n \end{vmatrix} = (\lambda+\sum_{k=1}^{n} a_k) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & \lambda+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & \lambda+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & \lambda+a_n \end{vmatrix}$

$$\overset{r_i - r_1}{\underset{(i\geq 2)}{=\!=\!=}} (\lambda+\sum_{k=1}^{n} a_k) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}(\lambda+\sum_{k=1}^{n} a_k).$$

第三章　行列式及其应用

§第3.1节 对称群与行列式定义

一、对称群

设X是一个有限集，$|X| = n.$　　令$S(X) = \{\sigma : X \to X \mid \sigma\text{是双射}\}.$

映射的合成定义了$S(X)$上的一个乘法：

$$\forall \sigma, \tau \in S(X)，\quad \sigma \cdot \tau：\ X \xrightarrow{\tau} X \xrightarrow{\sigma} X.$$

可以证明$S(X)$关于上述乘法构成一个群.

定理 1.1.1 设$S(X) \times S(X) \to S(X), (\sigma, \pi) \mapsto \sigma \cdot \pi$是映射合成定义的乘法, 则:

(1)$\forall \sigma, \pi, \tau \in S(X)$, $(\sigma \cdot \pi) \cdot \tau = \sigma \cdot (\pi \cdot \tau)$ (结合律).

(2)如果$e : X \to X$表示恒等映射, 则$\forall \sigma \in S(X)$, 有

$$e \cdot \sigma = \sigma \cdot e = \sigma \quad \text{(单位元的存在性)}.$$

(3)$\forall \sigma \in S(X)$, 存在(逆映射) $\sigma^{-1} \in S(X)$, 使

$$\sigma \cdot \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \sigma = e \quad \text{(每个元素均可逆)}.$$

如果$|X| = n$, 无妨设$X = \{1, 2, 3, ..., n\}$ (将$1, 2, 3, ..., n$分别理解为元素1, 元素2, 元素3, ..., 元素n等). 则一个双射$\sigma : X \to X$等价于"给1, 2, 3, ..., n一个排列$\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)$". 我们可将双射$\sigma : X \to X$表示为:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & ... & i_n \end{pmatrix},$$

其中$i_1 = \sigma(1), i_2 = \sigma(2), ..., i_n = \sigma(n)$,且用$S_n$表示$S(X)$.

定义 1.1.1 S_n和映射的合成运算一起称为n阶对称群(也成n阶置换群).

例 1.1.1 (对换) $\sigma : X \to X$, 将i映到j, 将j映到i. 但将其他元素保持不动. 即:

$$\sigma(i) = j, \sigma(j) = i, \text{但 } \sigma(k) = k, \text{如果 } k \neq i, j.$$

这样的双射记为$\sigma = (i\,j)$, 称为一个对换.

例 1.1.2 (r-循环) 设$i_1, i_2, ..., i_r \in X$是两两不同的元素. 双射$\sigma : X \to X$定义为:$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, ..., \sigma(i_{r-1}) = i_r, \sigma(i_r) = i_1, \sigma(j) = j$ 如果$j \notin \{i_1, i_2, ..., i_r\}$, 则称这样的双射$\sigma$为$r$-循环, 记为$\sigma = (i_1, i_2, ..., i_r)$.

显然, 对换就是一个2-循环.

对任意$\sigma \in S_n$和$m \in \mathbb{Z}$, 如果$m > 0$, 我们约定:

$$\sigma^m = \overbrace{\sigma \cdot \sigma \cdots \sigma}^{m}.$$

如果$m = 0$, 则约定$\sigma^m = e$ ($e \in S_n$是单位元). 如果$m < 0$, 则约定$\sigma^m = (\sigma^{-1})^{-m}$. 不难看出, 对任意整数$m, l \in \mathbb{Z}$, 有$\sigma^m \cdot \sigma^l = \sigma^{m+l}$.

引理 1.1.1 对任意$\sigma \in S_n$, 存在$m > 0$使

$$\sigma^m = e.$$

定义 1.1.2 对$\sigma \in S_n$, 使$\sigma^m = e$的最小正整数m称为σ的阶.

例 1.1.3 如果$\sigma = (i_1, i_2, ..., i_r)$是一个$r$-循环, 则$\sigma$的阶是$r$. σ可表示为$\sigma = (i_1, \sigma(i_1), \sigma^2(i_1), ..., \sigma^{r-1}(i_1))$.

定义 1.1.3 对任意r-循环$\sigma = (i_1, i_2, \cdots, i_r)$, 子集合$\{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \subset X$称为$\sigma$的支撑集(support set). 两个循环$\sigma = (i_1, i_2, \cdots, i_r)$和$\tau = (j_1, j_2, \cdots, j_l)$称为不相交. 如果它们的支撑集不相交. ($i.e.$ $\{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \cap \{j_1, j_2, ..., j_l\} = \varnothing$)

引理 1.1.2 如果$\sigma, \tau \in S_n$是不相交循环，则$\sigma \cdot \tau = \tau \cdot \sigma$.

引理 1.1.3 S_n中的每个元素都可写成不相交循环的乘积.

例 1.1.4 将$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in S_7$分解成不相交循环的乘积.

定理 1.1.2 S_n中每个元素可唯一分解成不相交循环的乘积, 即: $\forall \pi \in S_n, \pi \neq e$,则

(1)$\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdots \pi_t$, 其中$\pi_i$是$r_i$-循环($r_i \geq 2$).

(2)如果$\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdots \pi_t = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_s$, 其中$\pi_i, \sigma_i$都是长度大于1的循环.($r$-循环$\sigma$的长度$l(\sigma)$定义为$r$).则$t = s$, 且适当排序后, $\pi_i = \sigma_i (i = 1, \cdots, t)$.

引理 1.1.4 S_n中每个元素可写成有限个对换的乘积.

注：S_n中元素的对换分解没有唯一性.

例如，$$e=(1\ 2)\cdot(1\ 2)=(2\ 3)\cdot(2\ 3)=(i\ j)\cdot(i\ j).$$

$$(3\ 2)=(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3)=(2\ 4)(3\ 4)(2\ 4).$$

定理 1.1.3 对任意$\pi \in S_n$, 如果

$$\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdots \pi_s = \sigma_1 \cdots \sigma_t$$

是两个对换分解($i.e. \pi_i, \sigma_i$是对换), 则$s + t$是偶数.($i.e.$ s, t有相同奇偶性).

(定理证明过于繁琐, 省略).

定义 1.1.4 对任意$\pi \in S_n$, 如果$\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdots \pi_s$是一个对换分解($\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_s$中可以有相同的对换). 则

$$\varepsilon_\pi = (-1)^s$$

称为π的符号. 如果$\varepsilon_\pi = 1$, 则称π为偶置换. 否则π称为奇置换. ($i.e.$ $\varepsilon_\pi = -1$).

引理 1.1.5 对任意$\pi, \sigma \in S_n$, $\varepsilon_{\pi\cdot\sigma} = \varepsilon_\pi \cdot \varepsilon_\sigma$. 如果$\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdots \pi_s$是$\pi$ 的不相交循环分解. 则

$$\varepsilon_\pi = (-1)^{\sum_{i=1}^{s}(l(\pi_i)-1)}.$$

其中$l(\pi_i)$是π_i的长度($i.e.$ π_i 是$l(\pi_i)$-循环).

定义 1.1.5 $|A| = \sum_{\pi\in S_n} \varepsilon_\pi a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)} \in \mathbb{R}$称为矩阵$A \in M_n(\mathbb{R})$的行列式.
(有时也用det(A)表示A的行列式), 其中ε_π是置换π的符号.

例 1.1.5 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\pi\in S_2} \varepsilon_\pi a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\pi\in S_3} \varepsilon_\pi a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} a_{3\pi(3)}$, S_3共有6个置换: $S_3 = \{(1), (1\ \ 2), (1\ \ 3), (2\ \ 3), (1\ \ 2)(1\ \ 3), (1\ \ 2)(2\ \ 3)\}$. 所以$\sum_{\pi\in S_3} \varepsilon_\pi a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} a_{3\pi(3)} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$.

引理 1.1.6 设$A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$,${}^tA$表示$A$的转置矩阵, 则$|A| = |{}^tA|$.