高等数学第七章

第三节 向量的数量积、向量积、混合积

天津大学
数学学院
郭飞

§7.3 数量积、向量积、混合积

一、两向量的数量积

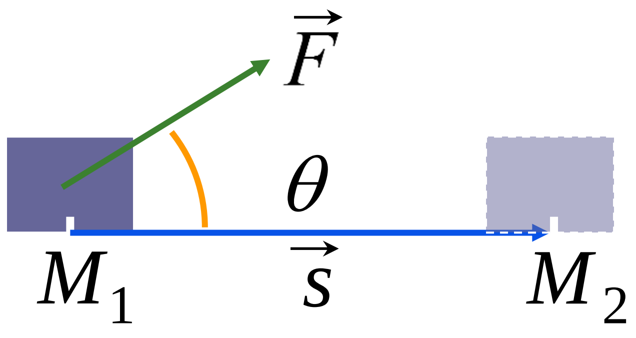
二、两向量的向量积

三、两向量的混合积

一、两向量的数量积

引例. 设一物体在常力 $\vec{F}$ 作用下, 沿与力夹角为θ 的直线移动, 位移为 $\vec{s}$, 则力$\vec{F}$ 所做的功为

$$W = |\vec{F}|\,|\vec{s}|\cos\theta$$



$$\boxed{W = \vec{F}\cdot\vec{s}}$$

1. 定义

设向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为θ, 称

$$|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \vec{a}\cdot\vec{b}$$

为a与b的数量积 (点积、内积) .

2. 性质

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

(2) $\vec{a},\vec{b}$为两个非零向量，则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

$\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$

则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$\Downarrow\Uparrow$$

$$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{2}$$

3. 运算律

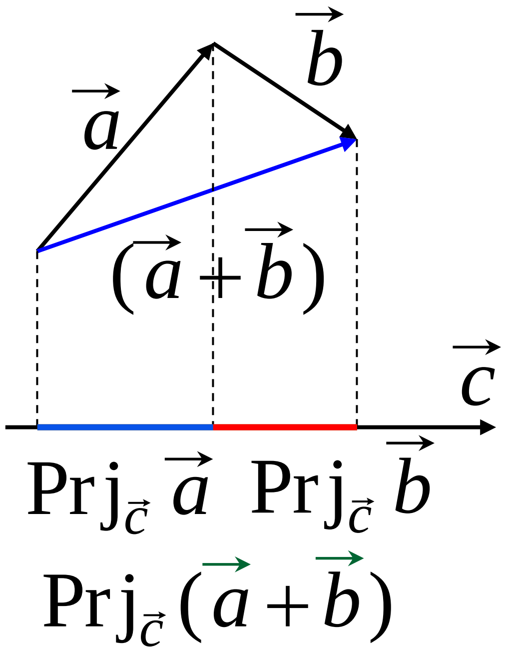
(1) 交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) 结合律 $(\lambda,\mu$为实数$)$

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=\lambda\left(\vec{a}\cdot(\mu\vec{b})\right)$$

$$=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b})$$



(3) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

事实上, 当$\vec{c}=\vec{0}$时, 显然成立；当$\vec{c}\neq\vec{0}$时

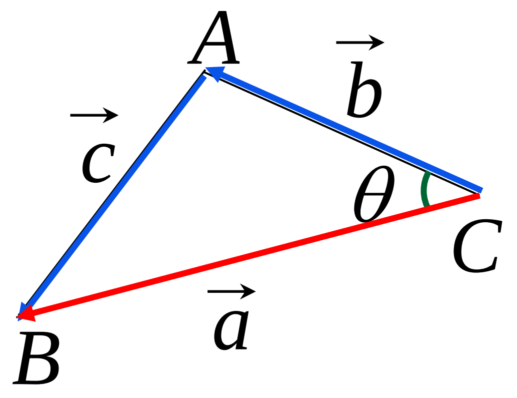
$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|\left(\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}+\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{b}\right)$$

$$=|\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}+|\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

例1. 证明三角形余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

证: 如图 . 设



$$\overrightarrow{CB} = \vec{a},\quad \overrightarrow{CA} = \vec{b},\quad \overrightarrow{AB} = \vec{c}$$

则 $\qquad \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

$$|\vec{c}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\Big\downarrow\; a = |\vec{a}|,\, b = |\vec{b}|,\, c = |\vec{c}|$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

4. 数量积的坐标表示

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)$$

$$\downarrow\quad \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

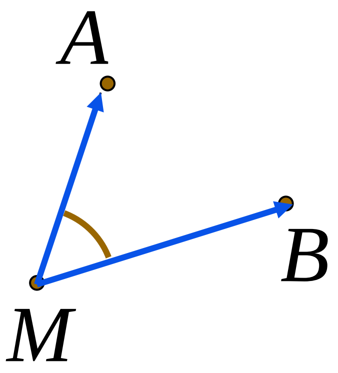
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

两向量的夹角公式

当 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为非零向量时, 由于 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, 得

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

例2. 已知三点$M(1,1,1)$, $A(2,2,1)$, $B(2,1,2)$, 求 $\angle AMB$.



解: $\overrightarrow{MA}=\{1,\ 1,\ 0\}$, $\overrightarrow{MB}=\{1,\ 0,\ 1\}$

则 $$\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}$$

$$=\frac{1+0+0}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

故 $$\angle AMB=\frac{\pi}{3}$$

二、两向量的向量积

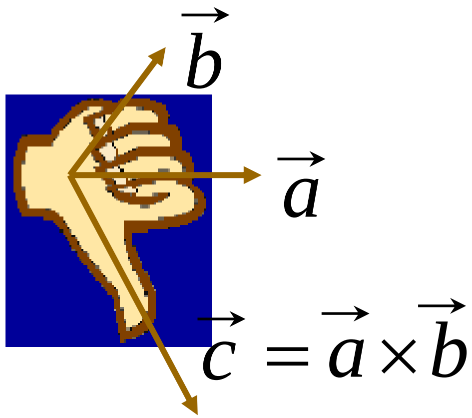
1. 定义

设 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 θ，定义

向量 $\vec{c}$ $\begin{cases} \text{方向}: \vec{c}\perp\vec{a}, \vec{c}\perp\vec{b} \text{ 且符合右手规则} \\ \text{大小} \quad |\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \end{cases}$

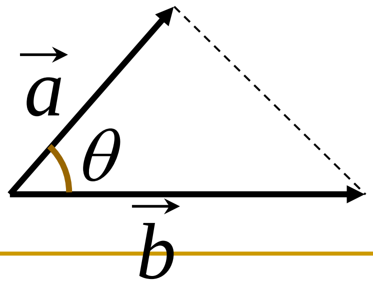
称 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的向量积，记作

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} \quad \text{(叉积)}$$



思考：右图三角形面积

$$S = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$



2. 性质

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

(2) $\vec{a},\vec{b}$为非零向量, 则 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

证明: 当$\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$时,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Longleftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=0$$

$$\Longleftrightarrow \sin\theta=0,\text{即}\,\theta=0\text{ 或 }\pi \Longleftrightarrow \vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$$

3. 运算律

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

(2) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

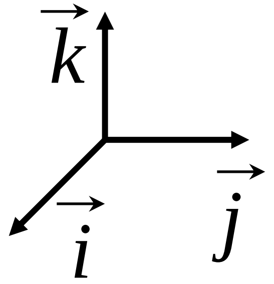
(3) 结合律 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

(证明略)

4. 向量积的坐标表示式

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\ \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b}&=\left(\underline{a_x\vec{i}}+\underline{a_y\vec{j}}+\underline{a_z\vec{k}}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)\\
&=\cancel{a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})}+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})\\
&\quad+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+\cancel{a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})}+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})\\
&\quad+a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+\cancel{a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})}\\
&=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}\\
&\quad+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}
\end{aligned}
$$



向量积的行列式计算法

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_y b_z - a_z b_y)\vec{i}+(a_z b_x - a_x b_z)\vec{j}$$
$$+(a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

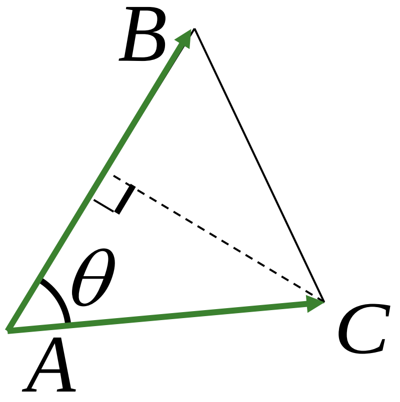
$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}&=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\\ \vec{b}&=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\end{aligned}}$$

$$=\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)$$

(行列式计算)

例4. 已知三点 $A(1,2,3)$, $B(3,4,5)$, $C(2,4,7)$, 求三角形 ABC 的面积



解: 如图所示,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|(4,-6,\ 2)|$$

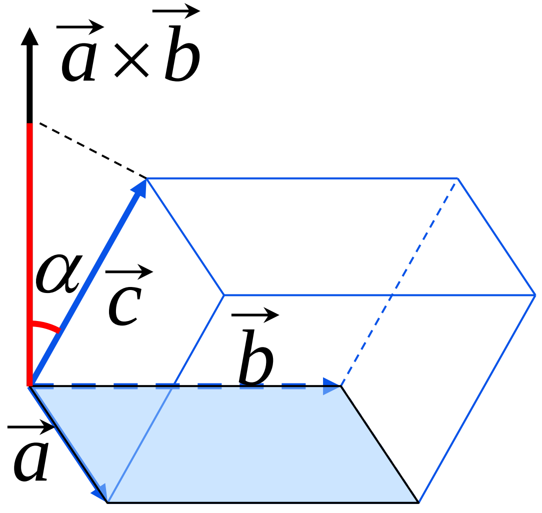
$$=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}$$

三、向量的混合积

1. 定义 已知三向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, 称数量

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \xlongequal{\text{记作}} (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

为 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的**混合积**.



几何意义

以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱作平行六面体, 则其

底面积 $A=|\vec{a}\times\vec{b}|$, 高 $h=|\vec{c}|\,|\cos\alpha|$

故平行六面体体积为

$$V=Ah=|\vec{a}\times\vec{b}|\,|\vec{c}|\,|\cos\alpha|=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$$

$$=|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$$

2. 混合积的坐标表示

设 $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right),\ \vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right),\vec{c}=\left(c_x,c_y,c_z\right)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z$$

$$=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

3. 性质

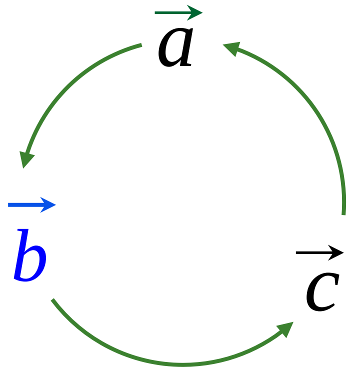
(1) 三个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充要条件是

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$$

（请记住结论）

(2) 轮换对称性：

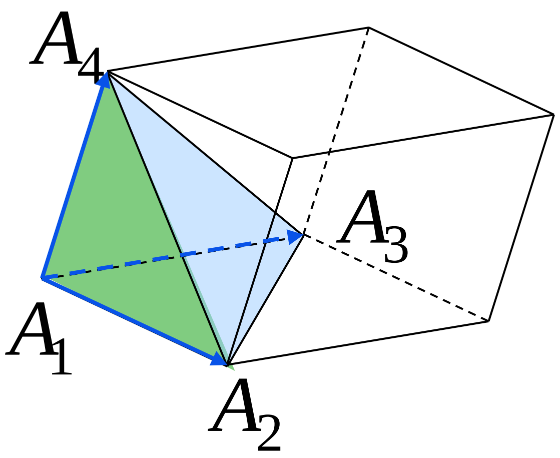
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$



(可用三阶行列式推出)

例6. 已知一四面体的顶点 $A_k(x_k, y_k, z_k)\ (k=1,2,3,4)$, 求该四面体体积 .

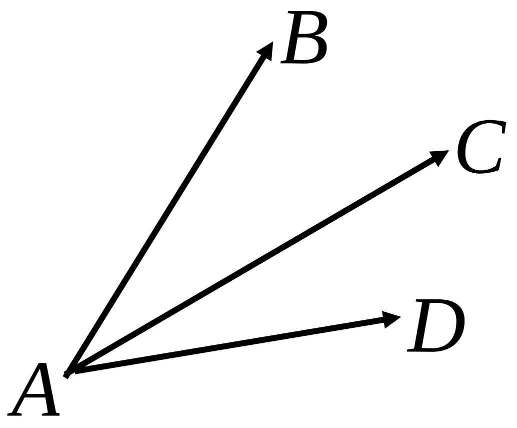
解: 已知四面体的体积等于以向量 $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ 为棱的平行六面体体积的 $\frac{1}{6}$, 故



$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}\right|$$

例7. 证明四点 $A(1,1,1)$, $B(4,5,6)$, $C(2,3,3)$, $D(10,15,17)$ 共面 .



解: 因

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

故 A, B, C, D 四点共面 .

内容小结

设 $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right),\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right),\vec{c}=\left(c_x,c_y,c_z\right)$

1. 向量运算

加减: $\vec{a}\pm\vec{b}=\left(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\right)$

数乘: $\lambda\vec{a}=\left(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\right)$

点积: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

叉积: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

混合积: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

2. 向量关系:

$$\vec{a}//\vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \iff \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c}\text{共面} \iff (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$$

$$\iff \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$$

向量的数量积是否满足消去律？

注 向量的数量积不满足消去律，即在一般情况下，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c},\quad \vec{a}\neq\vec{0}\ \not\Rightarrow \vec{b}=\vec{c}.$ 事实上，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，是说 $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$. 即 $\vec{b}-\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，

未必 $\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$.

$\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})\overset{?}{=}(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}.$

注 平行于 $\vec{c}$ 的向量 $\neq$ 平行于 $\vec{b}$ 的向量

思考与练习

1. 判断题

对两个非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，是否成立如下的等式：

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2.$$

是 注意，$\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

因为 $(\vec{a}\times\vec{b})^2=|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$

又 $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=(|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}))^2$

$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}),$$

所以 $(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2=\vec{a}^2\vec{b}^2.$

下列命题是否正确

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^3$ 错，等式左边没意义.

(2) $\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{a}|^2\cdot\vec{b}$ 错.

(3) $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$ 错.

(4) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$ 对.

向量的向量积是否满足消去律

注 向量的向量积不满足消去律, 即在一般情况下,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c},\ \vec{a}\neq\vec{0}\ \not\Rightarrow \vec{b}=\vec{c}.$$

向量的向量积是否满足交换律?

注 向量的向量积不满足交换律.

下列命题是否正确

$$(1)\ (\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}$$ 错

$$(2)\ [(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}]\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$$ 对