数学分析（新工科）

第六章 不定积分

第三节 有理函数的积分法

数学学院 郭飞

- 基本积分法：直接积分法； 换元积分法；分部积分法
- 初等函数 $\underset{\cancel{\xleftarrow{\text{积分}}}}{\xrightarrow{\text{求导}}}$ 初等函数

例如 $\dfrac{\sin x}{x}, \dfrac{\cos x}{x}, \dfrac{1}{\ln x}, \mathrm{e}^{-x^2}, \sin x^2$ 虽然原函数存在，

但原函数不能表达成初等函数，即“积不出来”或称“不可积”。

本节内容:

一、有理函数的积分

1.有理函数的分解　　　**2.**有理函数的积分

二、三角函数有理式的积分

三、无理函数的积分

1.可化为有理函数的积分

2.可化为三角函数的积分

3.倒数代换

一、有理函数的积分法

有理函数： 两个多项式 $P_n(x)$ 与$Q_m(x)$ 之商 $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ 称为有理函数。

(1) 假分式 $\xrightarrow{\text{多项式除法}}$ 多项式（+真分式）;

故下面我们假定分式是真分式，且P与Q无公因式。

(2) 真分式 $\xrightarrow{\text{待定系数法}}$ 部分分式之和:

1. 有理函数的分解

定理4.1 若 $\dfrac{P(x)}{(x-a)^k Q(x)}$为有理真分式，且 $k \geq 1$

$Q(a) \neq 0$，P与Q无公因式,则

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1} Q(x)}$$

定理4.2 若 $\dfrac{P(x)}{(x^2+px+q)^k Q(x)}$ 为有理真分式，且

$k \geq 1$，$x^2+px+q=(x-a-b\mathrm{i})(x-a+b\mathrm{i})$

$Q(a \pm bi) \neq 0$ ，P与Q无公因式,则

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^k Q(x)} = \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} Q(x)}$$

这里，$\dfrac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} Q(x)}$ 仍为有理真分式，B，C为常数，i为虚数单位。

上述两个定理在 $k-1>0$ 时仍可以继续使用。所以有理真分式可以最终分解为下述四种部分分式之和：

$$(1)\ \frac{A}{x-a};\qquad (2)\ \frac{A}{(x-a)^k}\ (k>1);$$

$$(3)\ \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\ (p^2-4q<0);$$

$$(4)\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\ (k>1,\ p^2-4q<0).$$

具体的分解方法可以用待定系数法。

例1. 将下列真分式分解为部分分式之和：

(1) $\dfrac{1}{x(x-1)^2}$; (2) $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$; (3) $\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}$.

解: (1) 用拼凑法

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{x-(x-1)}{x(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$$

或（1）$\dfrac{1}{x(x-1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$,

$\overset{\text{通分}}{\Rightarrow} \quad 1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx.$

（综合法）

令 $x=0$, $\Rightarrow A=1$; 令 $x=1$, $\Rightarrow C=1$;

比较二次项的系数，得 $0 = A + B$, $\Rightarrow B = -A = -1.$

$$\therefore \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

(2) 用赋值法

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

$$\therefore\ x+3=A(x-3)+B(x-2)$$

令$x=2$,得$A=-5$;

令$x=3$,得$B=6$.

故　　原式$=\dfrac{-5}{x-2}+\dfrac{6}{x-3}$

或者用其他方法

（2）比较系数法

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} \overset{\text{分母因式分解}}{=} \frac{x+3}{(x-2)(x-3)}$$

$$\overset{\text{部分分式之和}}{=} \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},$$

用分母乘两边

$$\Rightarrow \quad x+3=A(x-3)+B(x-2),$$

$$\therefore \quad x+3=(A+B)x-(3A+2B),$$

比较系数 $\Rightarrow \begin{cases} A+B=1, \\ -(3A+2B)=3, \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A=-5 \\ B=6 \end{cases},$

$$\therefore \quad \frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}.$$

(3) $$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2},$$

$$1=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+2x),$$

令 $x=-\frac{1}{2}$, $\Rightarrow A=\frac{4}{5}$;

令 $x=0$, 得 $1=A+C$ $\Rightarrow C=\frac{1}{5}$;

比较一次项的系数，得 $0=B+2C$ $\Rightarrow B=-\frac{2}{5}$.

$$\therefore \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}.$$

（综合法）

例2. 将下列真分式分解为部分分式之和：

$$(1)\ \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x};\qquad (2)\ \frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x}$$

解： （1）原式= $\dfrac{2x+3}{x(x+2)(x-1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x-1}$

$$\therefore 2x+3=A(x+2)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+2)$$

令$x=1$,得$5=3C$, $\Rightarrow C=\dfrac{5}{3}$;

令$x=0$,得$3=-2A$, $\Rightarrow A=-\dfrac{3}{2}$;

令$x=-2$,得$-1=6B$, $\Rightarrow B=-\dfrac{1}{6}$;

$$(2)\ \frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x}=\frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\therefore 3x^4+x^3+4x^2+1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x$$

令$x=0$,　得$A=1$;

令$x=\mathrm{i}$,得$3-\mathrm{i}-4+1=-D+E\mathrm{i}$,　$\Rightarrow D=0,E=-1$;

令$x=1$,得$9=4A+2B+2C+D+E$,　(1)

令$x=-1$,得$7=4A+2B-2C+D-E$,　(2)

由(1)和(2)解得$B=2,C=1$.

2. 有理函数的积分

$$1)\int \frac{A\mathrm{d}x}{x-a}=A\ln|x-a|+C;$$

$$2)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k}=\frac{1}{1-k}(x-a)^{-k+1}+C;(k>1)$$

$$3)\frac{Bx+C}{x^2+px+q}(p^2-4q<0)$$

$$\underline{\underline{\text{分母配成完全平方}}}\int \frac{Bx+C}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})}\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{u=x+{}^{p}\!/_{2}\;;\;a=\sqrt{q-{}^{p^2}\!/_{4}}}}\int \frac{Bu+(C-{}^{p}\!/_{2}B)}{u^2+a^2}\mathrm{d}u$$

接前页 $3)\ \dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}\ (p^2-4q<0)$

$$\overset{R=C-\frac{Bp}{2}}{=}\int\frac{Bu+R}{u^2+a^2}\mathrm{d}u=\frac{B}{2}\int\frac{\mathrm{d}(u^2+a^2)}{u^2+a^2}+R\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2}$$

$$=\frac{B}{2}\ln(u^2+a^2)+\frac{R}{a}\arctan\frac{u}{a}+C$$

$$=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2C-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

4) $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\ (k>1,\ p^2-4q<0)$.

$$\underline{\underline{\text{分母配成完全平方}}}\int\frac{Bx+C}{[(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})]^k}\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{u=x+p/2\ ;\ a=\sqrt{q-p^2/4}}}\int\frac{Bu+(C-p/2\,B)}{(u^2+a^2)^k}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{\mathrm{d}(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)^k}+(C-\frac{p}{2}B)I_k\ ,$$

其中 $I_n=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^n}$ 可由递推公式及 I_1 推出。

该递推公式见下面的例题**3**。

例3. 求$I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$.

解:直接用公式 $I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}$$

得递推公式 $$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n$$

$$I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

递推公式 $I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n$

说明: 已知 $I_1=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$ 利用递推公式可求得 I_n.

例如,

$$I_3=\frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}I_2$$

$$=\frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}\left(\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}I_1\right)$$

$$=\frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{8a^4}\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{3}{8a^5}\arctan\frac{x}{a}+C$$

例4 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x$ **同例1（3）**

解： $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x \quad = \int \left(\frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{4}{5}\int \frac{1}{1+2x}\mathrm{d}x - \frac{2}{5}\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{1}{1+2x}\mathrm{d}(1+2x) \;\; - \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2) \;\; + \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C.$$

例5 $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2-x+1)^2}\mathrm{d}x$

分解为部分分式之和

$$=\int \frac{(x^2-x+1)+(x-1)}{(x^2-x+1)^2}\mathrm{d}x$$

（没有用待定系数法）

$$=\int \left(\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}\right)\mathrm{d}x$$

分母配成完全平方

$$=\int \frac{\mathrm{d}(x-\tfrac{1}{2})}{(x-\tfrac{1}{2})^2+(1-\tfrac{1}{4})}$$

$$+\int \frac{(x-\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{2}}{[(x-\tfrac{1}{2})^2+(1-\tfrac{1}{4})]^2}\mathrm{d}(x-\tfrac{1}{2})$$

换元：$u = x - 1/2$

$a = \sqrt{1 - 1/4}$

$$= \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + a^2} + \int \frac{u}{(u^2 + a^2)^2}\mathrm{d}u \ - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2 + a^2)^2}$$

$$= I_1 - \frac{1}{2} I_2 + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(u^2 + a^2)}{(u^2 + a^2)^2}$$

递推公式

$$= \boldsymbol{I_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2a^2}\left(\frac{u}{u^2 + a^2} - I_1\right) \ + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{u^2 + a^2}\right) \ + C}$$

$$= \boldsymbol{\frac{4a^2 + 1}{4a^3} \arctan \frac{u}{a} \ + C}$$

还原

$= \cdots$。

注 （1）有理函数的原函数都是初等函数；有理函数的积分一定可以“积出来”；

（2）有理函数的积分总可以“程序化地”求出来；

（3）对具体的有理函数的积分可能有特定的简便求法，见下面的例6。

例6 $$\int \frac{x+6}{x^2+3x-10}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}(x^2+3x+10)' + (6-\frac{3}{2})}{x^2+3x-10}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+3x-10)}{x^2+3x-10} + \frac{9}{2}\int \frac{(x+5)-(x-2)}{(x+5)(x-2)} \cdot \frac{1}{7}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+3x-10| + \quad \frac{9}{14}\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+3x-10| + \frac{9}{14}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right| + C.$$

二、三角函数有理式的积分

1、三角函数有理式的定义：

指由三角函数和常数经过有限四则运算所构成的函数，由于各种三角函数都可用 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的有理式表示，故三角函数有理式也就是 $\sin x, \cos x$ 的有理式，记作 $R(\sin x, \cos x)$

2、三角有理式的积分法：

（1） $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ 万能代换公式：

令 $u = \tan\frac{x}{2}$ 则 $x = 2\arctan u$

$$\because \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$\therefore \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+u^2}du.$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx \overset{\text{万能代换}}{=} \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du.$$

——化为有理函数的积分。

例7 $\displaystyle\int\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$ 万能代换：$u=\tan\frac{x}{2}$ $\displaystyle=\int\frac{\frac{2u}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$

$$=\int\frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}\mathrm{d}u \quad =\int\frac{(1+u)^2-(1+u^2)}{(1+u)(1+u^2)}\mathrm{d}u$$

$$=\int\frac{1+u}{1+u^2}\mathrm{d}u \;-\int\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u =\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \;+\int\frac{u\mathrm{d}u}{1+u^2} \;-\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u}$$

$$=\arctan u \quad +\frac{1}{2}\ln(1+u^2) \quad -\ln|1+u|+C$$

还原

= …。

例8 求 $\int \frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x.$

解法一 用万能代换

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x \overset{u=\tan\frac{x}{2}}{=} \int \frac{1}{\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^4}\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int \frac{1+3u^2+3u^4+u^6}{8u^4}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3u^3}-\frac{3}{u}+3u+\frac{u^3}{3}\right)+C$$

还原

$= \cdots$

解法二、第一换元法

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x \quad = \int \frac{1}{\sin^2 x}\csc^2 x\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}\cot x$$

$$= -\int (1+\cot^2 x)\mathrm{d}\cot x$$

$$= -\frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x + C$$

所以万能公式不一定是最简单的方法。

（2） $\int R(\tan x)\mathrm{d}x$

令$u=\tan x$，　则$x=\arctan u$，　$\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$，

$$\int R(\tan x)\mathrm{d}x=\int\frac{R(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

例8 $\displaystyle\int\frac{\tan x+\tan^3 x}{3+\tan^2 x}\mathrm{d}x$

解：　令$u=\tan x$，　则　$\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$，

$$\int\frac{\tan x+\tan^3 x}{3+\tan^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{u+u^3}{3+u^2}\cdot\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{u}{3+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\ln(3+u^2)+C=\frac{1}{2}\ln(3+\tan^2 x)+C$$

注（1）用万能代换**一定能**将三角函数有理式的积分化为有理函数的积分；

（2）万能代换不一定是最好的；

（3）常用的将三角函数有理式的积分化为有理函数的积分的代换方法（非“万能的”）：

1）若 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$，可取 $u=\cos x$ 为积分变量；

2）若 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$，可取 $u=\sin x$ 为积分变量；

3）若 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$，可取 $u=\tan x$ 为积分变量。

例9 求 $\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \mathrm{d}x.$

解一 $\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \mathrm{d}x \overset{\text{关于}\sin x\text{为奇函数}}{\underset{\text{以}\cos x\text{为积分变量}}{=}} \int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \cdot \frac{\mathrm{d}\cos x}{-\sin x}$

$$\overset{u=\cos x}{=} -\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)u} \overset{\text{以}u^2\text{为积分变量}}{=} -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(u^2\right)}{(1-u^2)u^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(1-u^2)+u^2}{(1-u^2)u^2} \mathrm{d}(u^2) = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{1-u^2}\right)\mathrm{d}(u^2)$$

$$= -\frac{1}{2}(\ln u^2 - \ln(1-u^2)) + C$$

整理、还原

$= \quad \cdots$。

解二 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x\cdot\cos x}\mathrm{d}x$

$$\overset{\text{关于}\cos x\text{为奇函数}}{\underset{\text{以}\sin x\text{为积分变量}}{=}} \int \frac{1}{\sin x\cdot\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}\sin x}{\cos x}$$

$$\overset{u=\sin x}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{u(1-u^2)} = \cdots.$$

解三 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x\cdot\cos x}\mathrm{d}x$

$$\overset{\text{满足3)}}{\underset{\text{以}\tan x\text{为积分变量}}{=}} \int \frac{1}{\sin x\cdot\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}\tan x}{\sec^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan x}$$

$$= \cdots.$$

解四 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}\mathrm{d}x \overset{\text{倍角公式}}{=} \int\frac{2}{\sin 2x}\mathrm{d}x$

$$=\int\csc 2x\mathrm{d}(2x) \quad =\ln|\csc 2x-\cot 2x|+C.$$

解五 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}\mathrm{d}x \overset{\text{三角公式}}{=} \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}\mathrm{d}x$

$$=\int(\tan x+\cot x)\mathrm{d}x$$

$$=-\ln|\cos x|+\ln|\sin x|+C$$

$$=\ln|\tan x|+C.$$

例10 $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin 3x+\sin x}\mathrm{d}x \overset{\text{和差化积}}{=} \int \frac{1+\sin x}{2\sin 2x\cos x}\mathrm{d}x$

$$\overset{\text{变形}}{=} \int \frac{1+\sin x}{4\sin x\cos^2 x}\mathrm{d}x \overset{\text{线性}}{=} \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin x\cos^2 x}\mathrm{d}x \quad +\frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{变形}}{=} \frac{1}{4}\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}\mathrm{d}x \quad +\frac{1}{4}\int \sec^2 x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x \quad +\frac{1}{4}\tan x$$

$$=-\frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}\cos x+\frac{1}{4}\int \csc x\mathrm{d}x \quad +\frac{1}{4}\tan x$$

$$=\frac{1}{4\cos x} \quad +\frac{1}{4}\ln\left|\csc x-\cot x\right| \quad +\frac{1}{4}\tan x+C.$$

三、无理函数的积分

1. 可化为有理函数的积分：

1）形如 $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\mathrm{d}x$, $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ 的积分

$$\xrightarrow{\text{换元：} u=\sqrt[n]{ax+b}\text{，} u=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}} \text{有理函数的积分.}$$

2）形如 $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})\mathrm{d}x$ 的积分，

$$\xrightarrow{\text{换元：} u=\sqrt[l]{ax+b},\ l\text{是}m,n\text{的最小公倍数}} \text{有理函数的积分.}$$

例11 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x$

解 令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{t^2-1}, \quad \mathrm{d}x=-\frac{2t\,\mathrm{d}t}{\left(t^2-1\right)^2},$

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x=\int\left(t^2-1\right)t\left(-\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}\right)\mathrm{d}t=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t$$

$$=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t=-2t-\ln\frac{t-1}{t+1}+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left[x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right]+C.$$

例12 $$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{变形}}{=} \int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}(x+1)}\mathrm{d}x \quad = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x+1}$$

令 $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$，则 $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$，$\mathrm{d}x=-\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t$，

所求积分 $\overset{\text{有理化}}{=} -3\int \frac{\mathrm{d}t}{t^3-1}$

$$\overset{\text{有理函数积分法}}{=} -\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$\overset{\textbf{还原}}{=} \cdots.$$

例13 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x \xlongequal[x=t^6-1]{令t=(x+1)^{\frac{1}{6}}} \int\frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\mathrm{d}t$

$$=6\int\frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t \quad = 2t^3-3t^2+6t+6\ln|t+1|+C$$

$$=2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[6]{x+1}+6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1)+C.$$

注 对形如 $R\left(x,\sqrt[n_1]{\dfrac{ax+b}{cx+d}},\cdots,\sqrt[n_k]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ 的积分，

令$t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$，其中$n$为$n_1,\cdots,n_k$的最小公倍数，

可使积分有理化。

2.可化为三角函数有理式的无理函数积分

形如 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ 的积分，通常先将根号内的二次三项式进行配方，再通过代换化为三角有理式的积分

例14 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{1}{1+\sqrt{(x+1)^2+1}}\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令}x+1=\tan t(|t|<\frac{\pi}{2})} \int \frac{\sec^2 t}{1+\sec t}\mathrm{d}t$$

$$=\int \frac{1}{\cos^2 t+\cos t}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos t}\mathrm{d}t - \int \frac{1}{1+\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\int \sec t\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}}\mathrm{d}t + C = \cdots$$

3.倒数代换

形如 $\int \frac{1}{(x-l)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$ 的积分，通常做变换

$x-l=\frac{1}{u}$ ，称为倒数代换。

例15 $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}\mathrm{d}x,(x>2)$

解：令$x-1=\frac{1}{t}$,则$x^2-2=\frac{1+2t-t^2}{t^2}$,$\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$

$$原式=\int \frac{t^2}{\sqrt{1+2t-t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=-\int \frac{1}{\sqrt{2-(t-1)^2}}\mathrm{d}t$$

$$=-\arcsin\frac{t-1}{\sqrt{2}}+C=-\arcsin\frac{2-x}{\sqrt{2}(x-1)}+C.$$

例16. 求$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\,\mathrm{d}x$.

解：令 $x=\frac{1}{t}$，则$\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$

$$\text{原式}=\int \frac{\sqrt{a^2-\frac{1}{t^2}}}{\frac{1}{t^4}}\cdot\frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t=-\int (a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}|t|\,\mathrm{d}t$$

当$x>0$时，

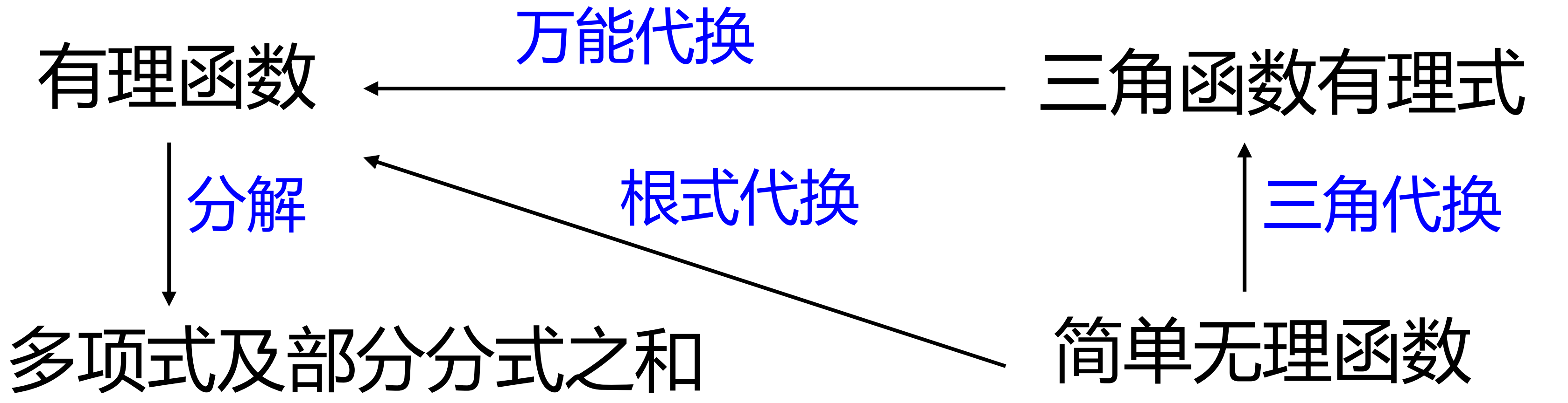
$$\text{原式}=-\frac{1}{2a^2}\int (a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(a^2t^2-1)$$

$$=-\frac{(a^2t^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}+C=-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3}+C$$

当$x<0$时，类似可得同样结果.

内容小结

1. 可积函数的特殊类型



2. 特殊类型的积分按上述方法虽然可以积出, 但不一定简便 , 要注意综合使用基本积分法 , 简便计算 .