高等数学第七章

第六节 曲面方程

主讲： 郭飞

§7.6 常见的曲面方程

一、曲面方程的概念

二、柱面

三、旋转曲面

四、二次曲面

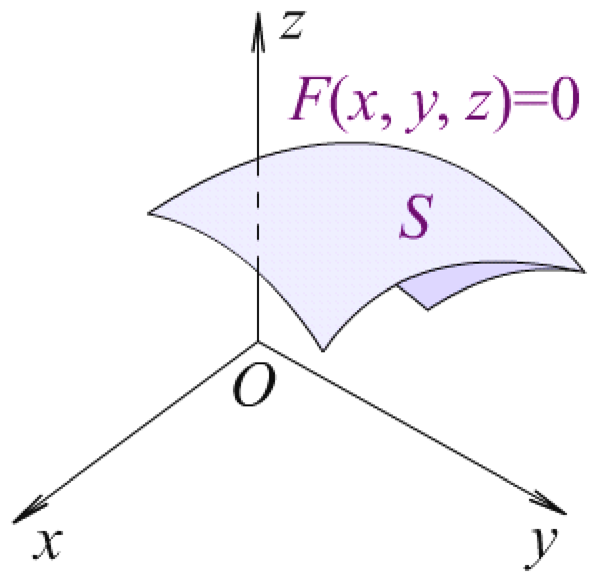
一、曲面方程的概念

在空间解析几何中，任何曲面都可以看作点的几何轨迹.

曲面方程的定义

如果曲面S与三元方程

$$F(x, y, z)=0$$



有下述关系:

(1)曲面S上任一点的坐标都满足方程$F(x, y, z)=0$;

(2)不在曲面S上的点的坐标都不满足方程$F(x, y, z)=0$,

那么，方程$F(x, y, z)=0$就叫做曲面S的方程，而曲面S就叫做方程$F(x, y, z)=0$的图形.

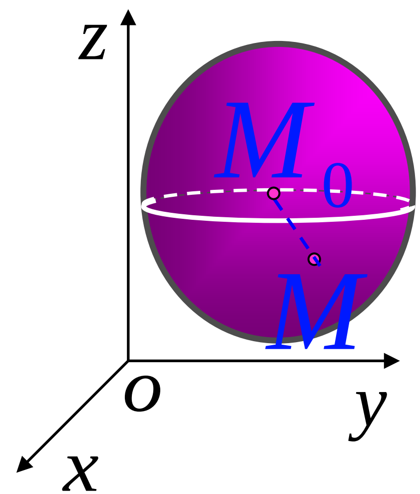
例1. 求动点到定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 距离为 R 的轨迹方程.

解: 设轨迹上动点为 $M(x, y, z)$, 依题意 $|M_0M| = R$

即 $$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R$$

故所求方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$$



特别,当M_0在原点时,球面方程为

$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$

$z = \pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示上(下)球面 .

研究曲面的两个基本问题

(1)已知一曲面作为点的轨迹时, 建立这曲面的方程;

(2)已知坐标x、y和z间的一个方程时, 研究这方程所表示的曲面的形状.

例2 方程$x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$表示怎样的曲面？

解 通过配方, 原方程可以改写成

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5.$$

这是一个球面方程，球心在点 $M_0(1, -2, 0)$ 、半径为 $R=\sqrt{5}$.

一般地, 三元二次方程

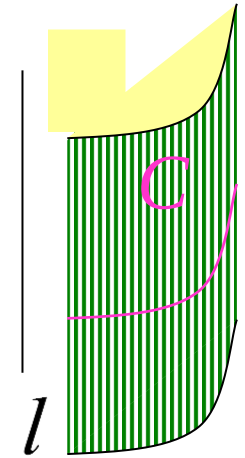
$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0$$

的图形就是一个球面.

二、柱面

定义1. 直线l沿曲线C平移所形成的曲面称为**柱面.**

C 叫做**准线**, l 叫做**母线**.

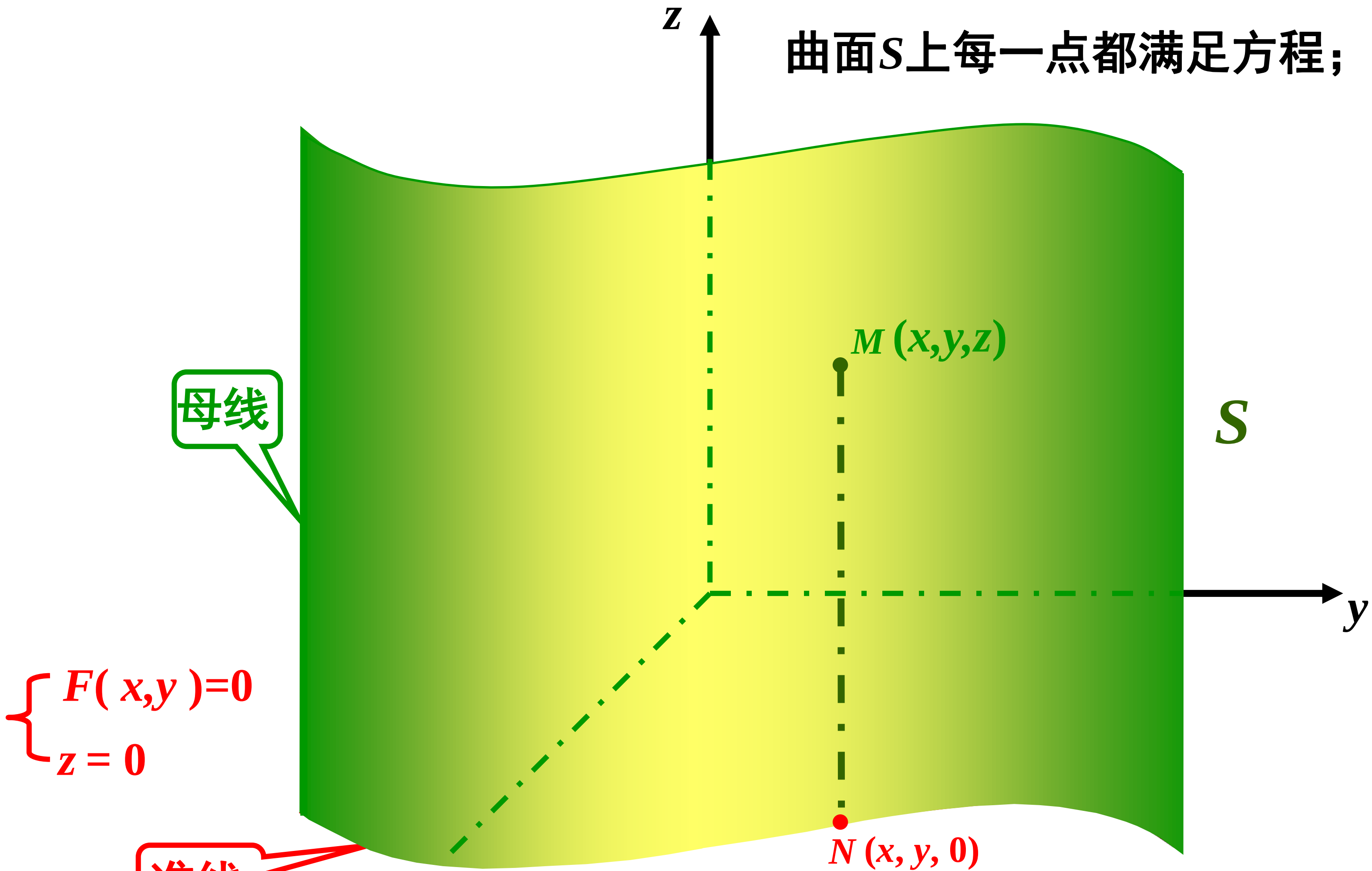


在空间中 $x^2+y^2=R^2$ 表示**圆柱面**

一般柱面 $F(x,y)=0$ (不含z)

$F(x,y)=0$表示母线平行于z轴的柱面

曲面S上每一点都满足方程;

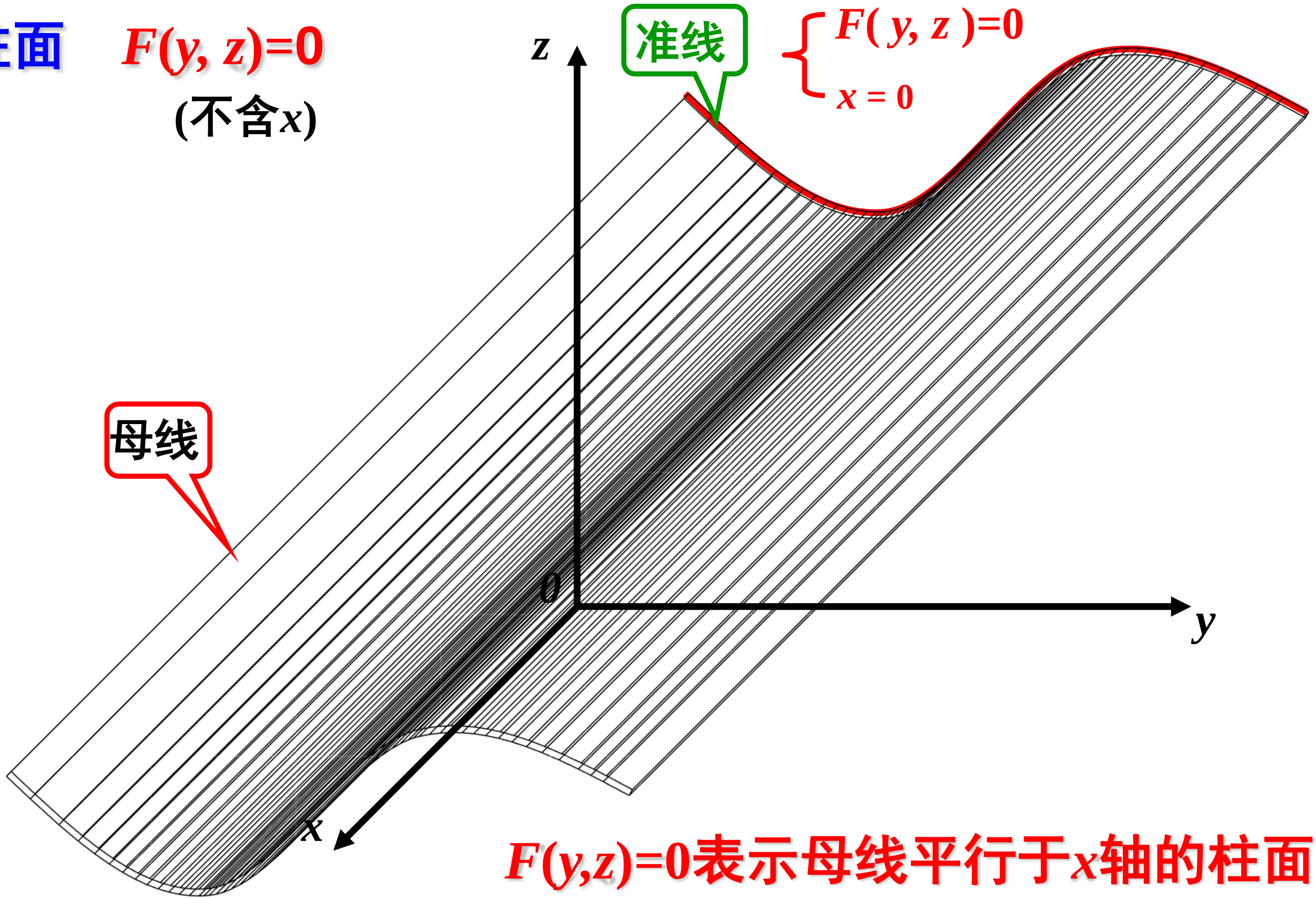


点N满足准线方程，故点M满足曲面方程

曲面S外的每一点都不满足方程

一般柱面 $F(y, z)=0$

(不含x)

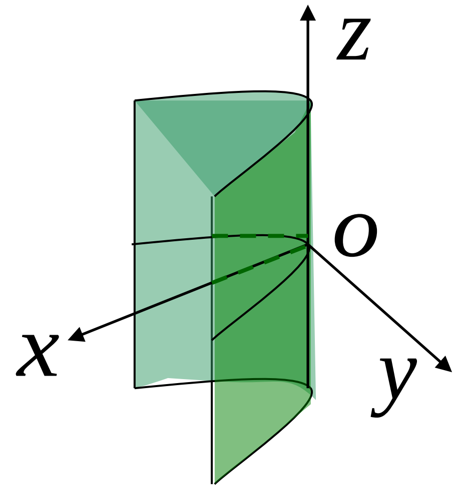


$F(y,z)=0$表示母线平行于x轴的柱面

- $y^2 = 2x$ 表示**抛物柱面**,

  母线平行于 z 轴;

  准线为 xoy 面上的抛物线.



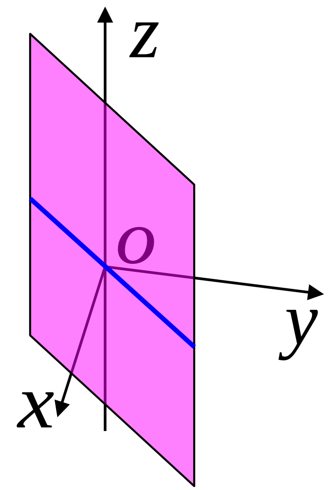
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 表示母线平行于

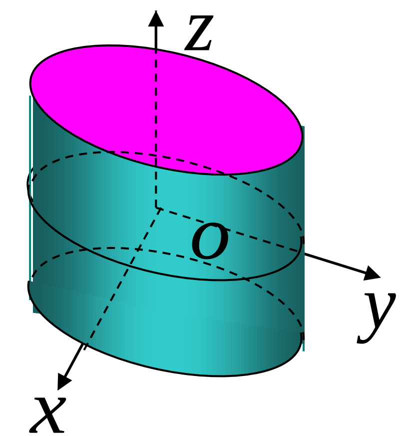
  z 轴的**椭圆柱面**.

- $x - y = 0$ 表示母线平行于

  z 轴的**平面**.

  (且 z 轴在平面上)





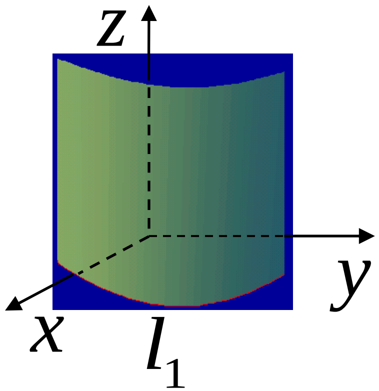
课本例题1

一般地,在三维空间

方程 $F(x,y)=0$ 表示柱面,

母线 平行于 *z* 轴;

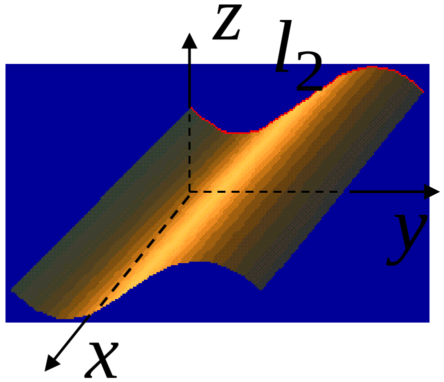
准线 *xoy* 面上的曲线 l_1.



方程 $G(y,z)=0$ 表示柱面,

母线 平行于 *x* 轴;

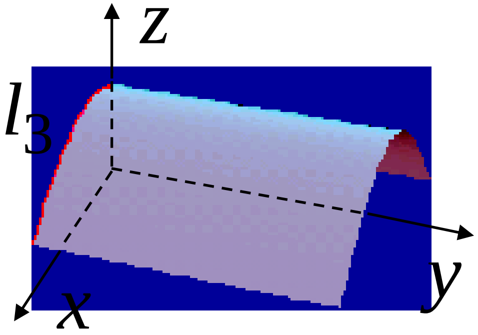
准线 *yoz* 面上的曲线 l_2.



方程 $H(z,x)=0$ 表示柱面,

母线 平行于 *y* 轴;

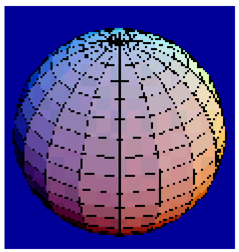
准线 *xoz* 面上的曲线 l_3.

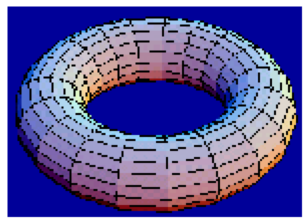


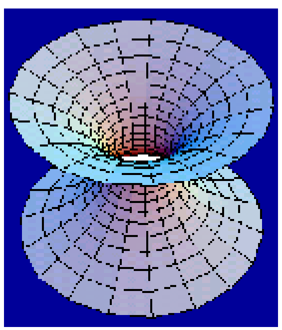
三、旋转曲面

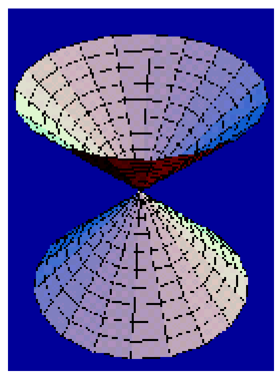
定义2. 一条平面曲线 绕其平面上一条**定直线**旋转一周 所形成的曲面叫做**旋转曲面**. 该定直线称为**旋转轴**.

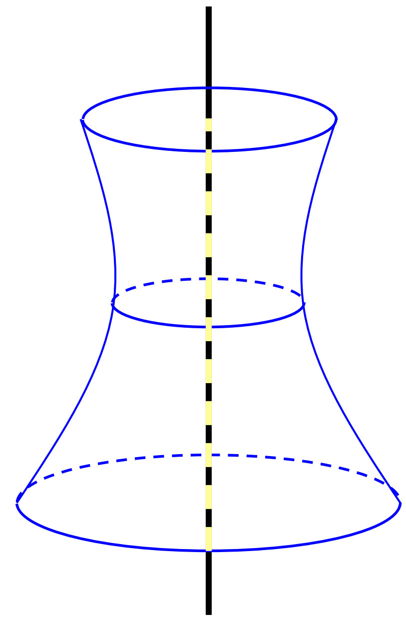
例如：







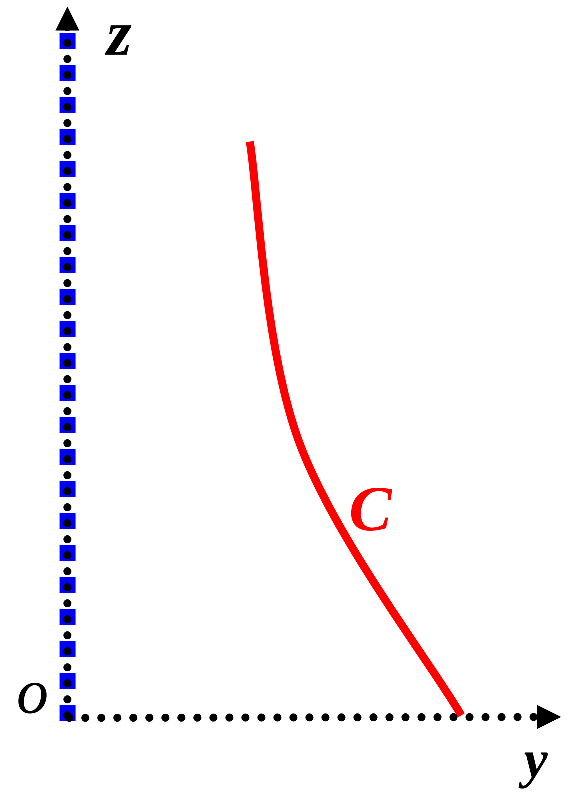




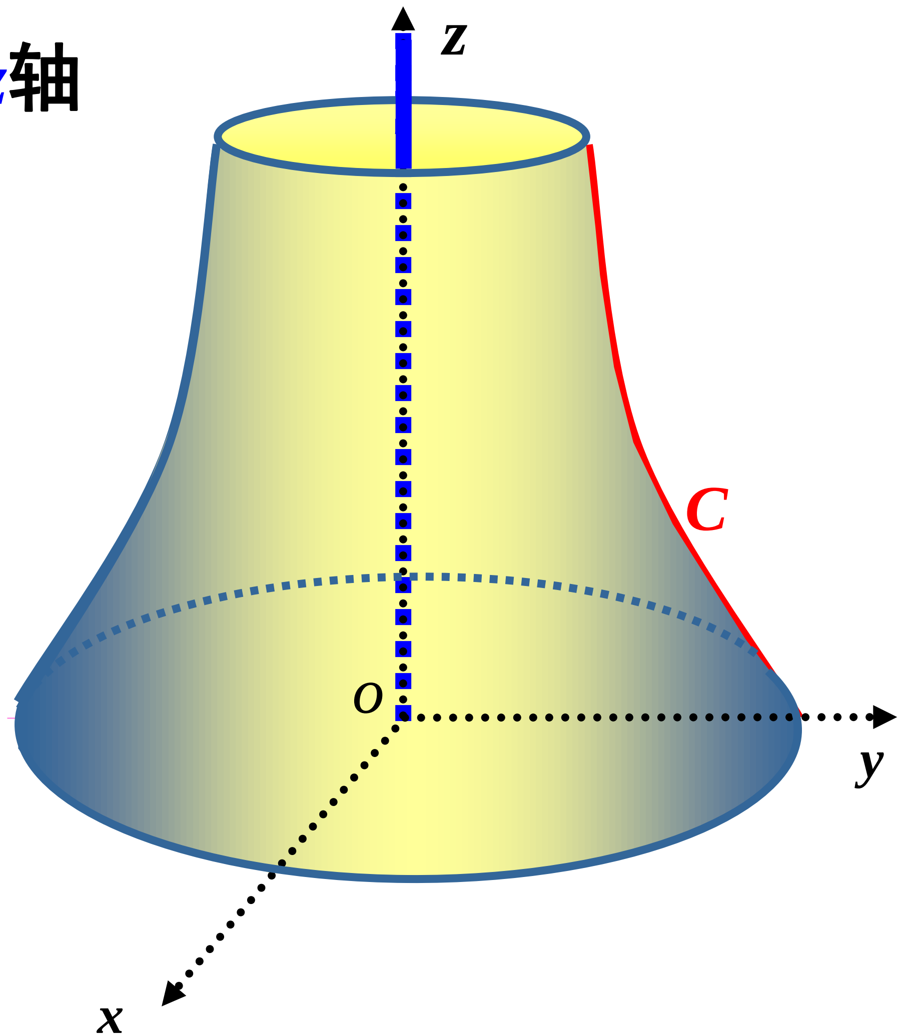
建立yoz面上曲线C 绕 z 轴旋转所成曲面的方程:

给定 yoz 面上曲线 C:　$f(y,z)=0$

曲线 C $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$　**绕 z轴**



曲线 C $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ **绕 z轴**



曲线 C $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z轴

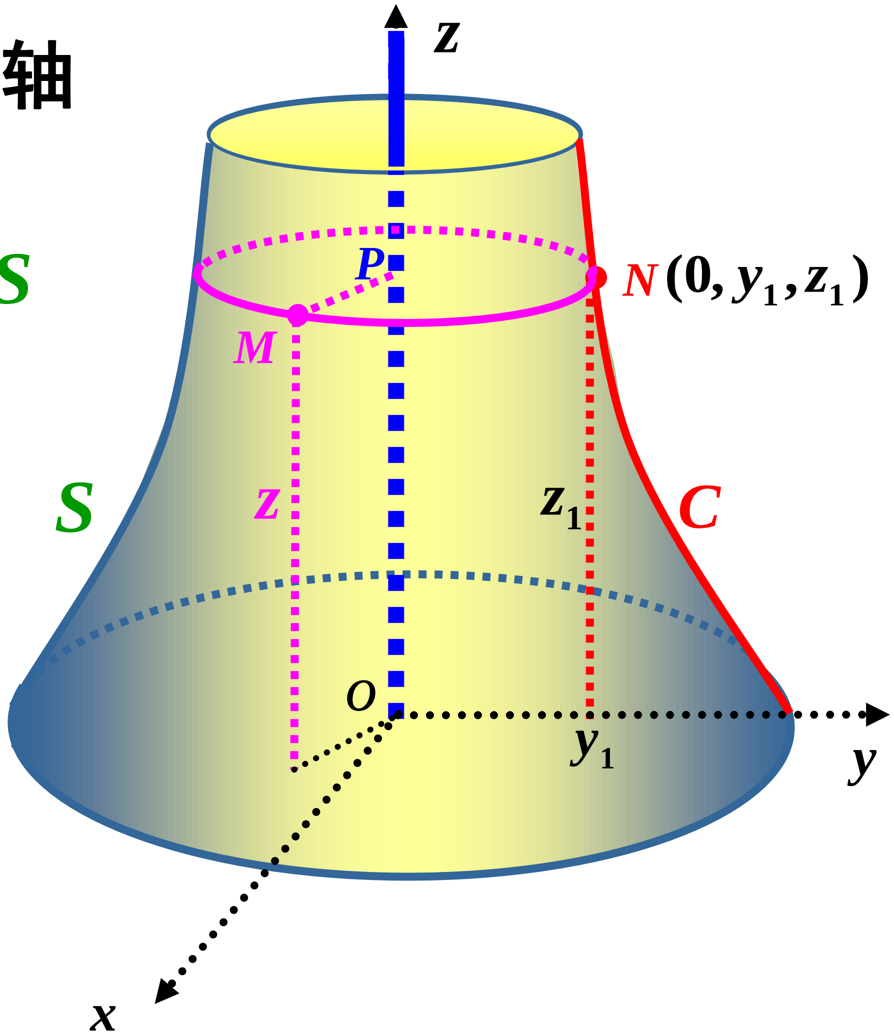
旋转一周得旋转曲面 S

$\forall\ M(x,y,z) \in S$

$f(y_1, z_1)=0$

$z_1 = z$

$|y_1| = |\overline{MP}| = \sqrt{x^2+y^2}$



曲线 C $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z轴

旋转一周得旋转曲面 S

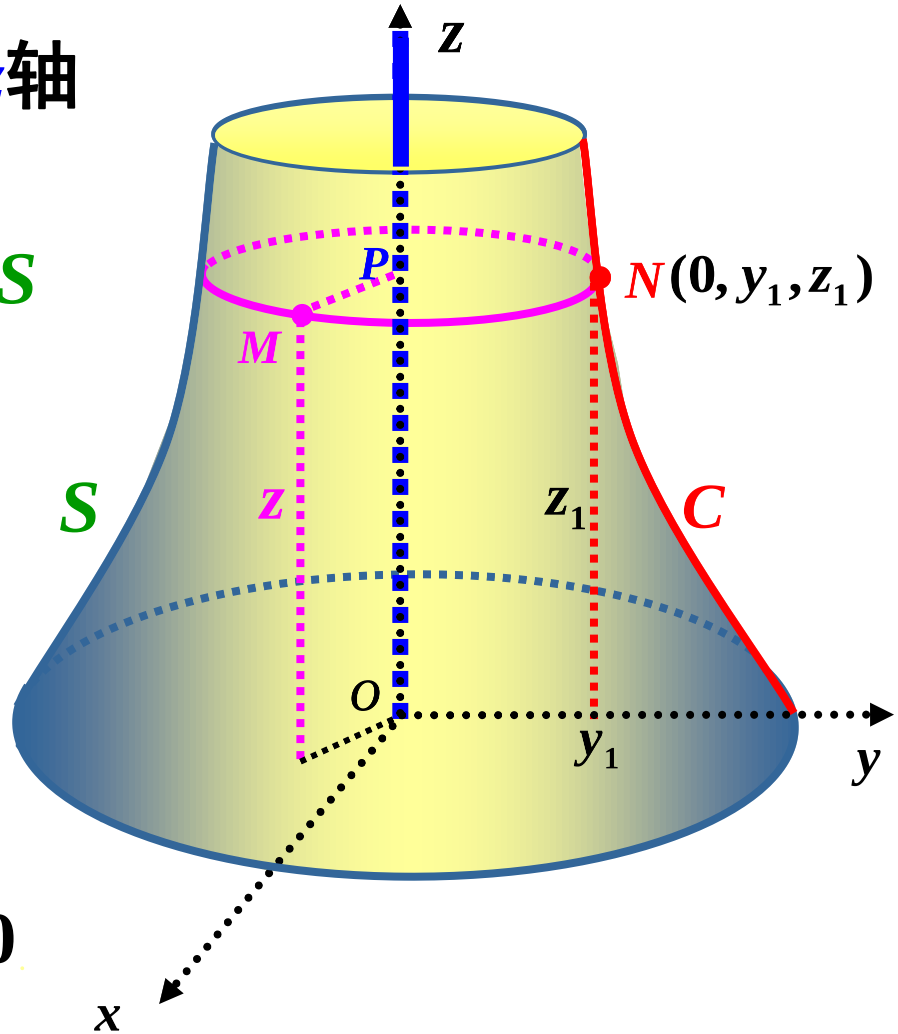
$\forall$ $M(x,y,z)$ $\in S$

$f(y_1, z_1)=0$

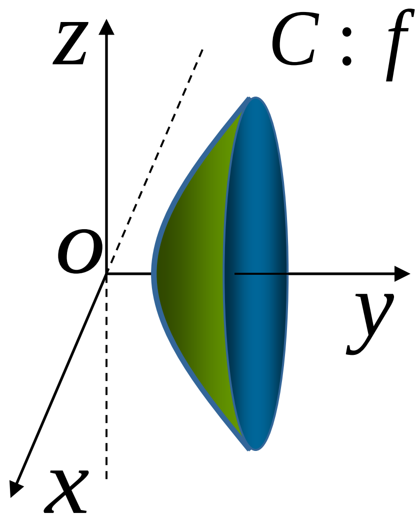
$z_1 = z$

$|y_1| = |\overline{MP}| = \sqrt{x^2+y^2}$

S: $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$



思考： 当曲线 C 绕 y 轴旋转时，方程如何？



$C: f(y, z) = 0$

$$f\left(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0$$

例3. 试建立顶点在原点, 旋转轴为z 轴, 半顶角为 α 的圆锥面方程.

解: 在yoz面上直线L 的方程为

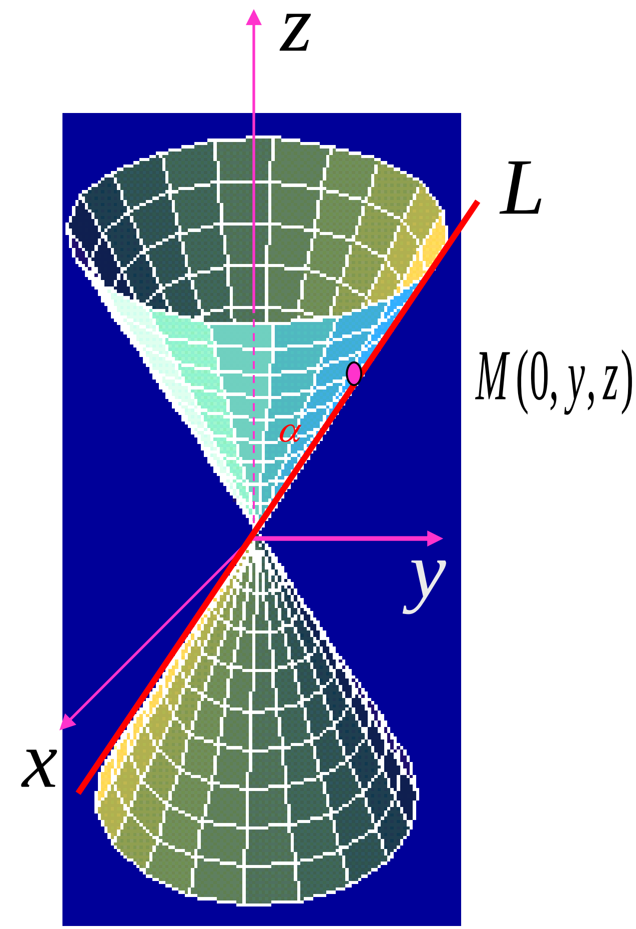
$$z = y\cot\alpha$$

绕z 轴旋转时,圆锥面的方程为

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\cot\alpha$$

令 $a = \cot\alpha$ 两边平方

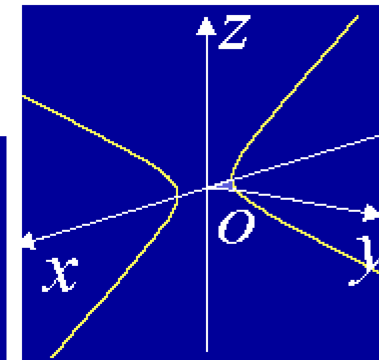
$$z^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

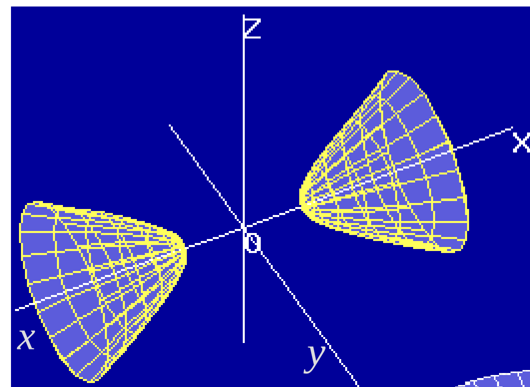


例4. 求坐标面 xoz 上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.

解: 绕 x 轴旋转 所成曲面方程为

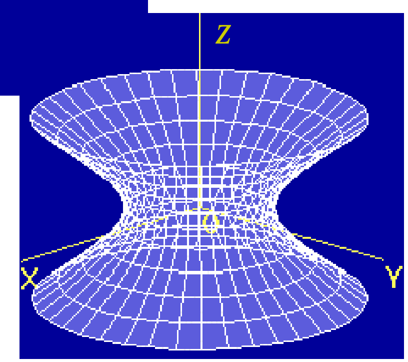
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$





绕 z 轴旋转所成曲面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



这两种曲面都叫做旋转双曲面.

四、二次曲面

三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyx + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

(二次项系数不全为 0)

的图形通常为**二次曲面**. 其基本类型有:

椭球面、抛物面、双曲面、锥面

适当选取直角坐标系可得它们的标准方程,下面仅就几种常见标准型的特点进行介绍 .

研究二次曲面特性的基本方法: **截痕法**

1. 椭球面

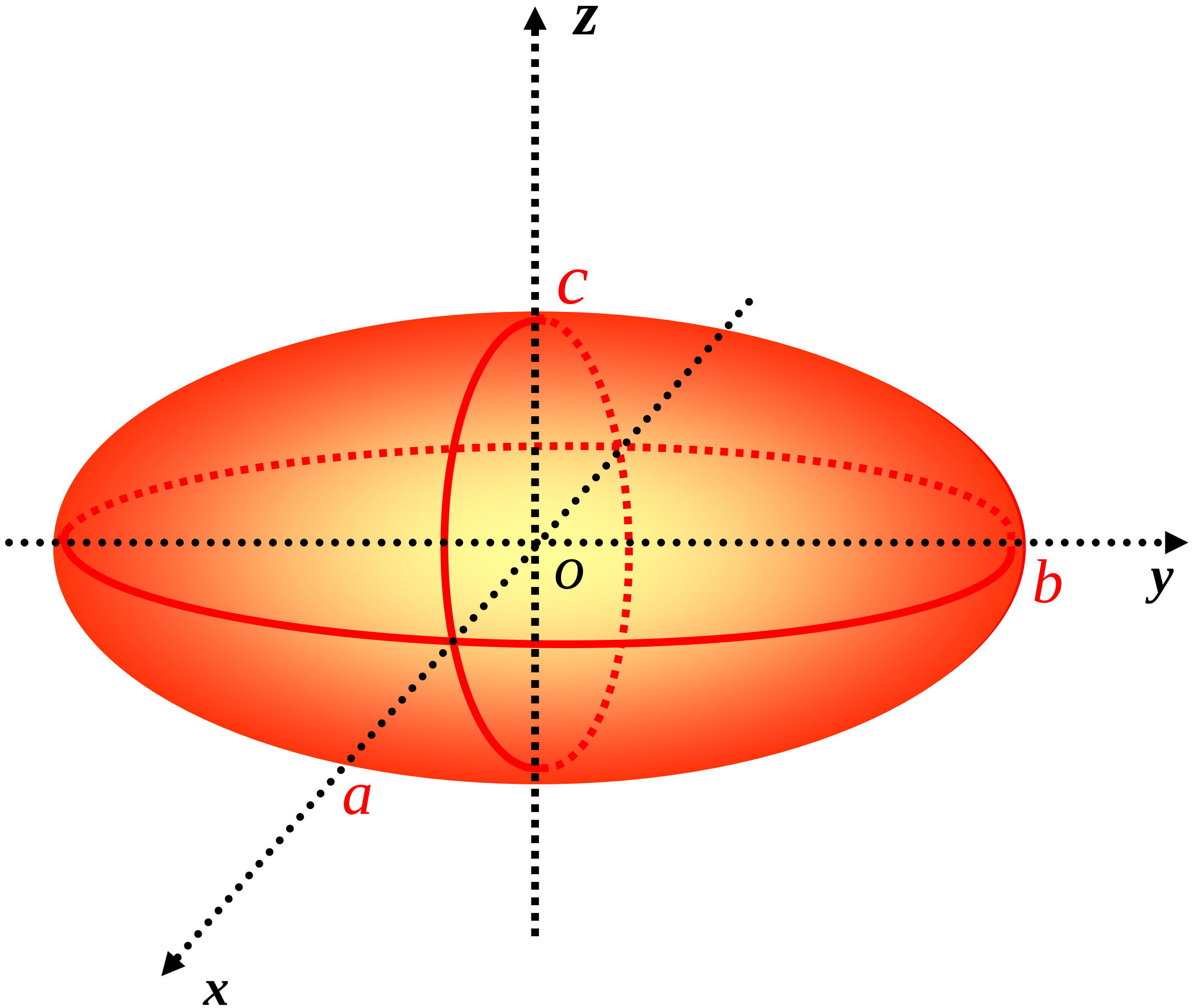
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

截痕法

用$z=h$截曲面

用$y=m$截曲面

用$x=n$截曲面



1. 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$

(1)范围：

$$|x|\le a, \quad |y|\le b, \quad |z|\le c$$

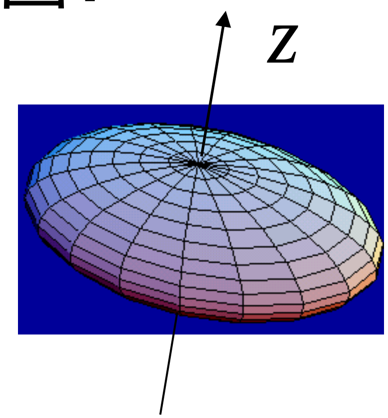
(2)与坐标面的交线：椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}, \quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}, \quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$

(3) 截痕: 与 $z = z_1$ $(|z_1| < c)$的交线为椭圆:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2 - z_1{}^2)} + \dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2 - z_1{}^2)} = 1 \\ z = z_1 \end{cases}$$



同样 $y = y_1$ $(|y_1| \le b)$ 及 $x = x_1$ $(|x_1| \le a)$的截痕

也为椭圆.

(4) 当 $a=b$ 时为旋转椭球面; 当$a=b=c$ 时为球面.

2. 抛物面

(1). 椭圆抛物面

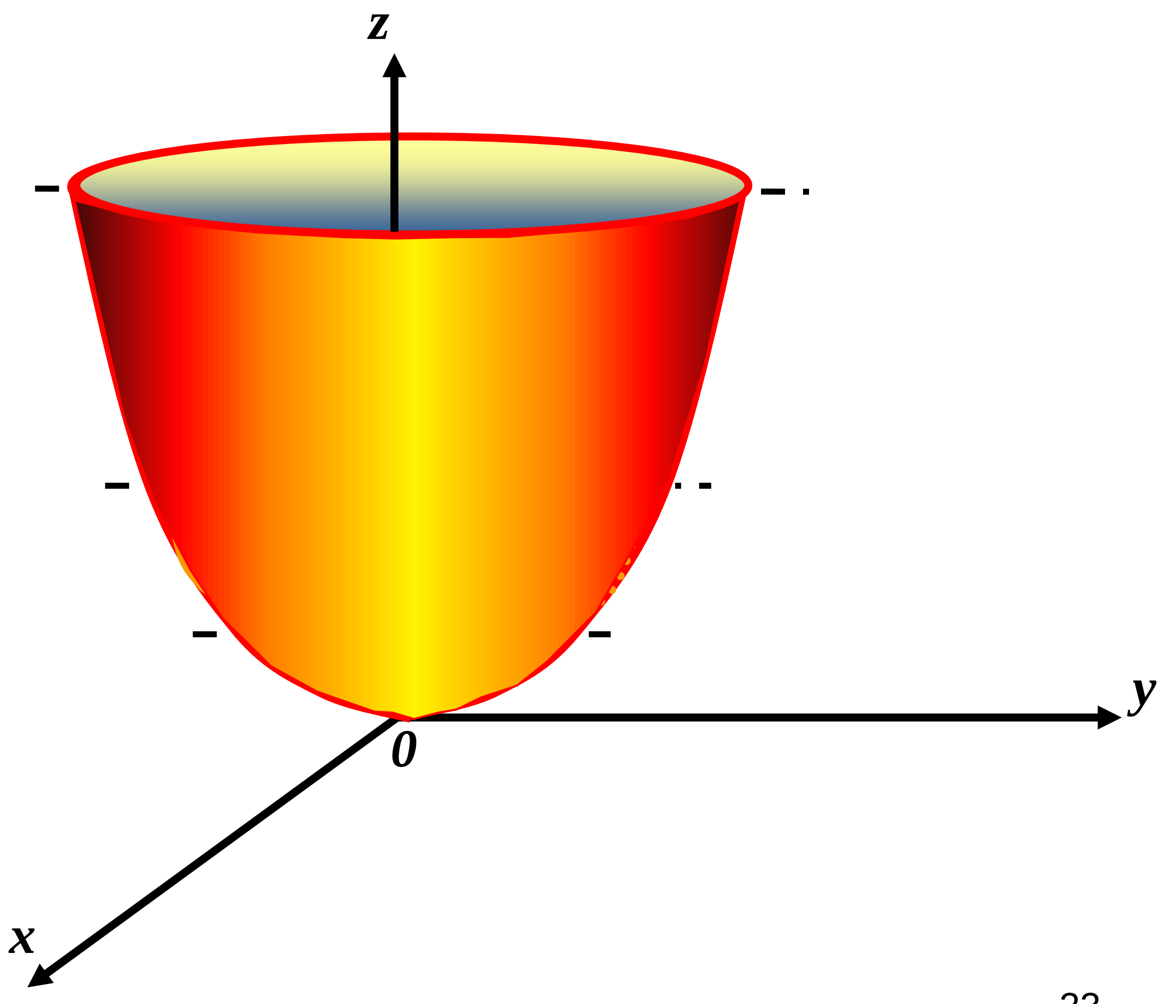
$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2z$$

截痕法

用$z=a$截曲面

用$y=b$截曲面

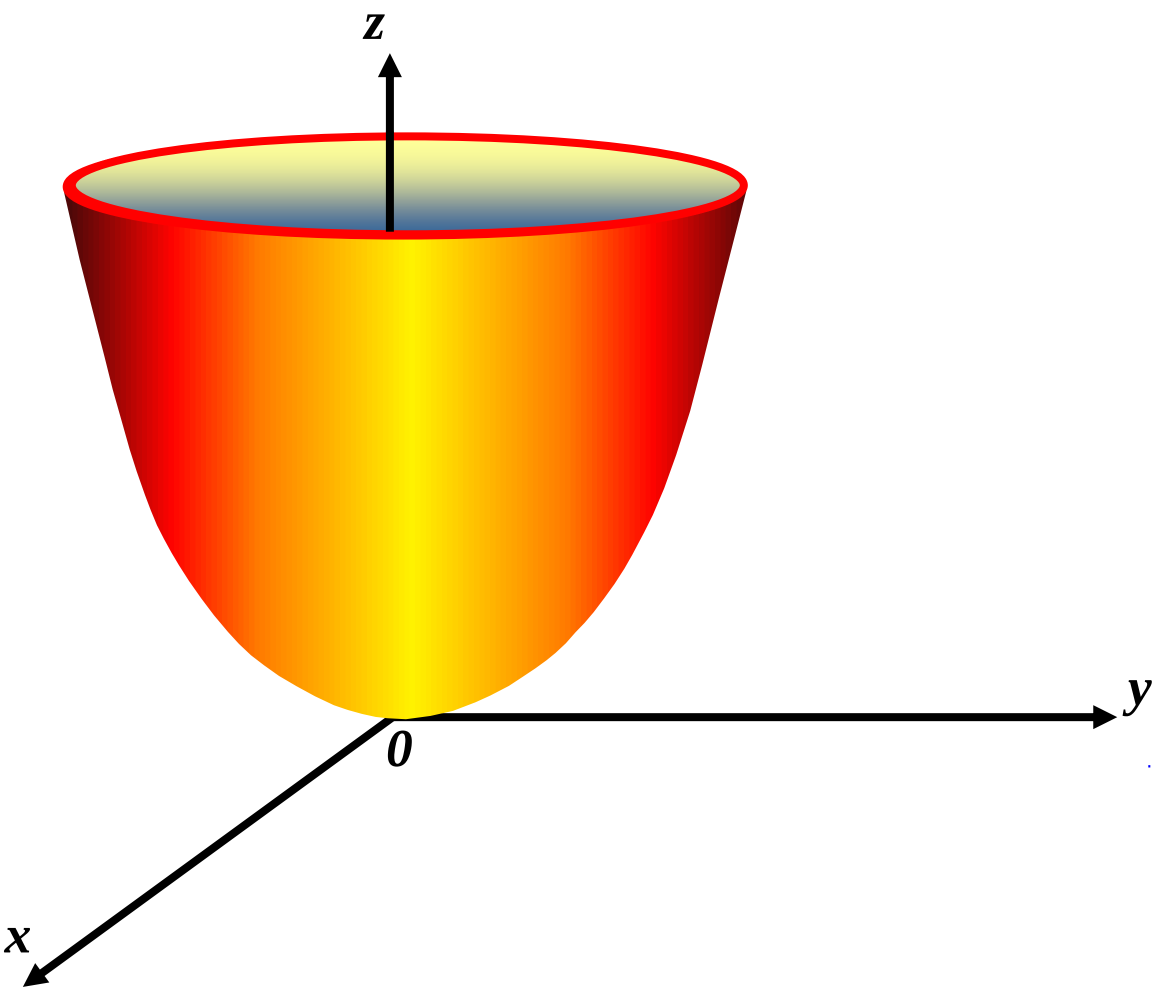
用$x=c$截曲面



2. 抛物面

(1). 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2z$$



截痕法

用$z=a$截曲面

用$y=b$截曲面

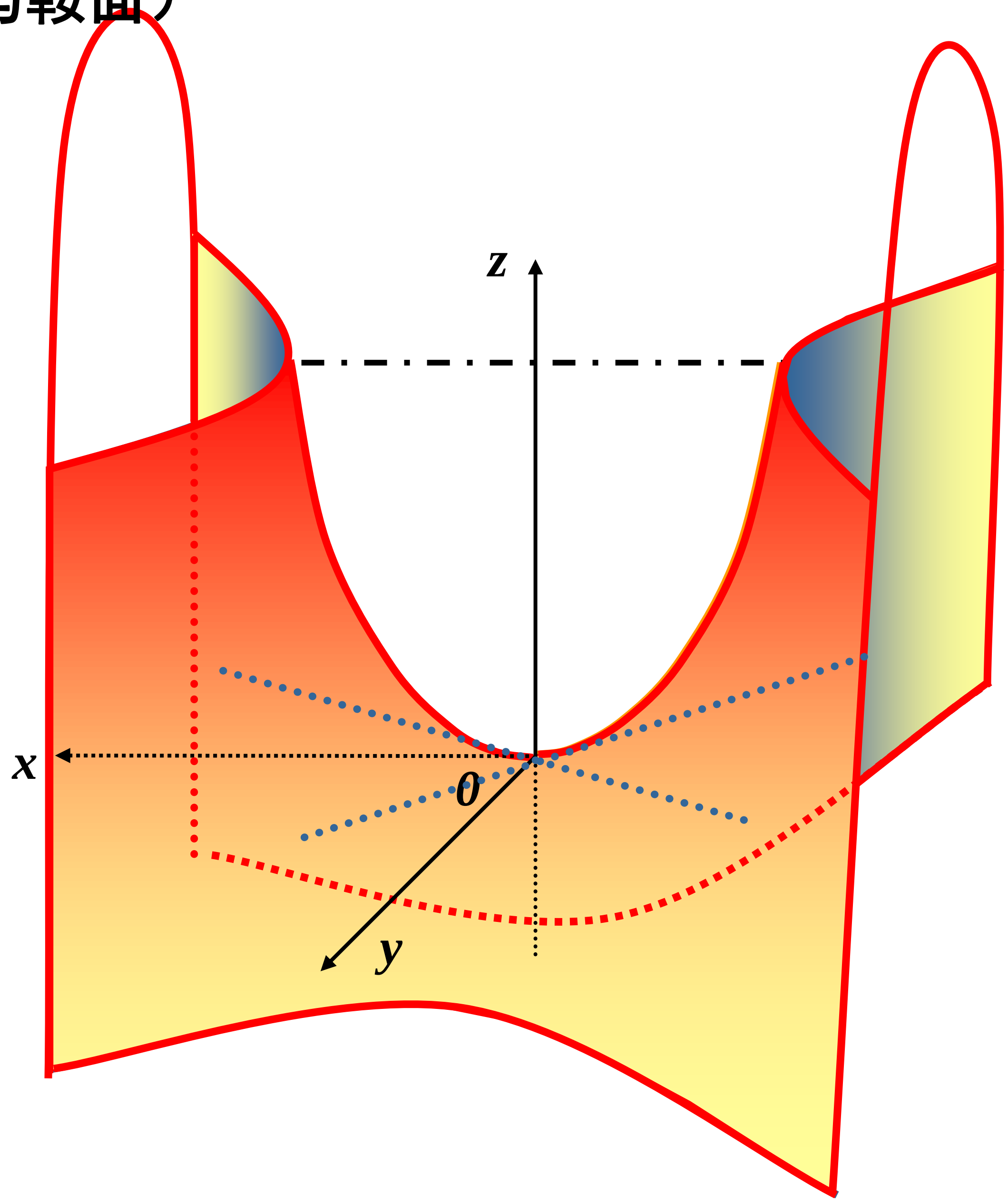
用$x=c$截曲面

补充：旋转抛物面

(2). 双曲抛物面（马鞍面）

$$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=z$$

截痕法



用$z=a$截曲面

用$y=0$截曲面

用$x=b$截曲面

(2). 双曲抛物面（马鞍面）

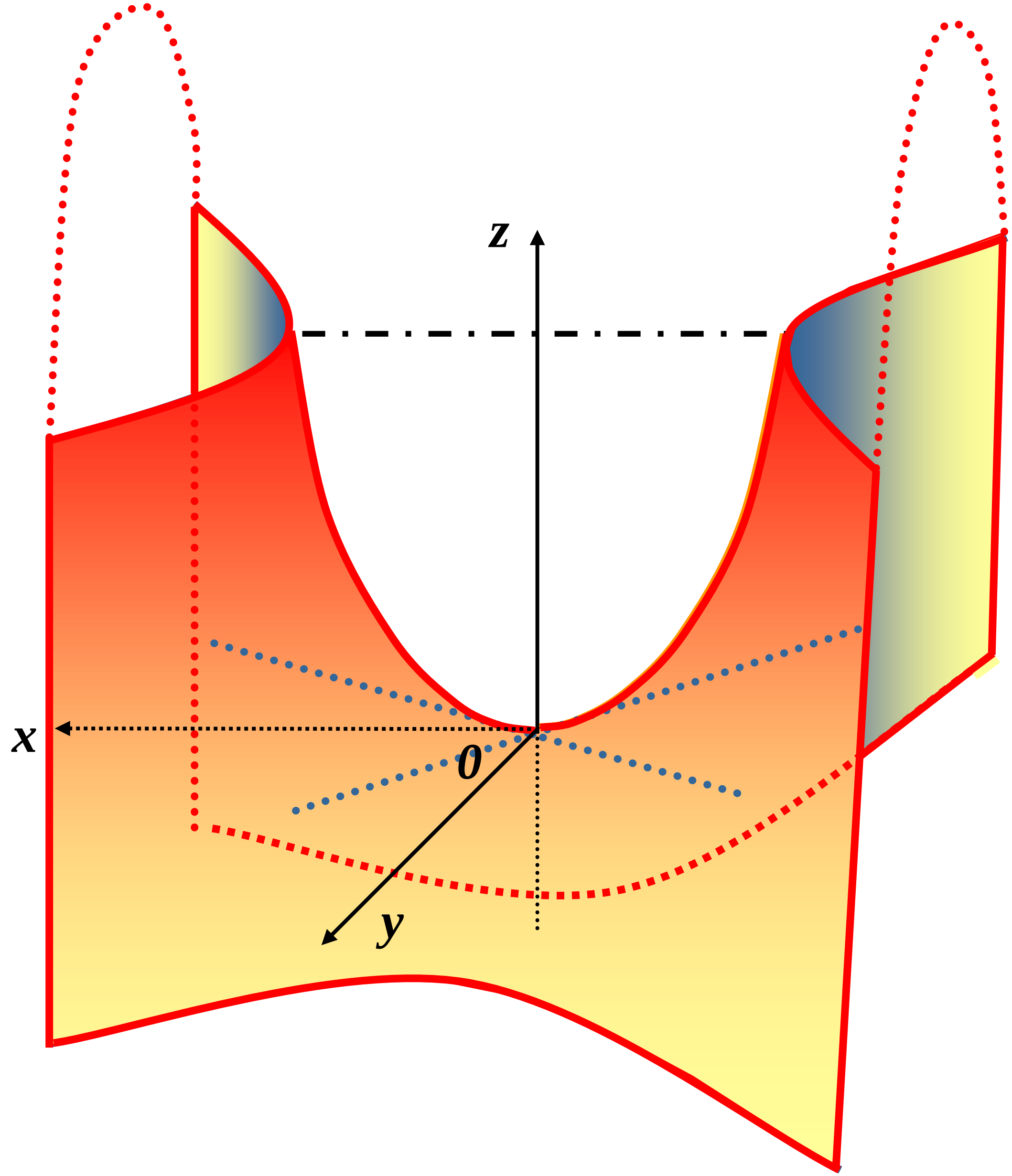
$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = z$$

截痕法

用$z = a$截曲面

用$y = 0$截曲面

用$x = b$截曲面



(2). 双曲抛物面（马鞍面）

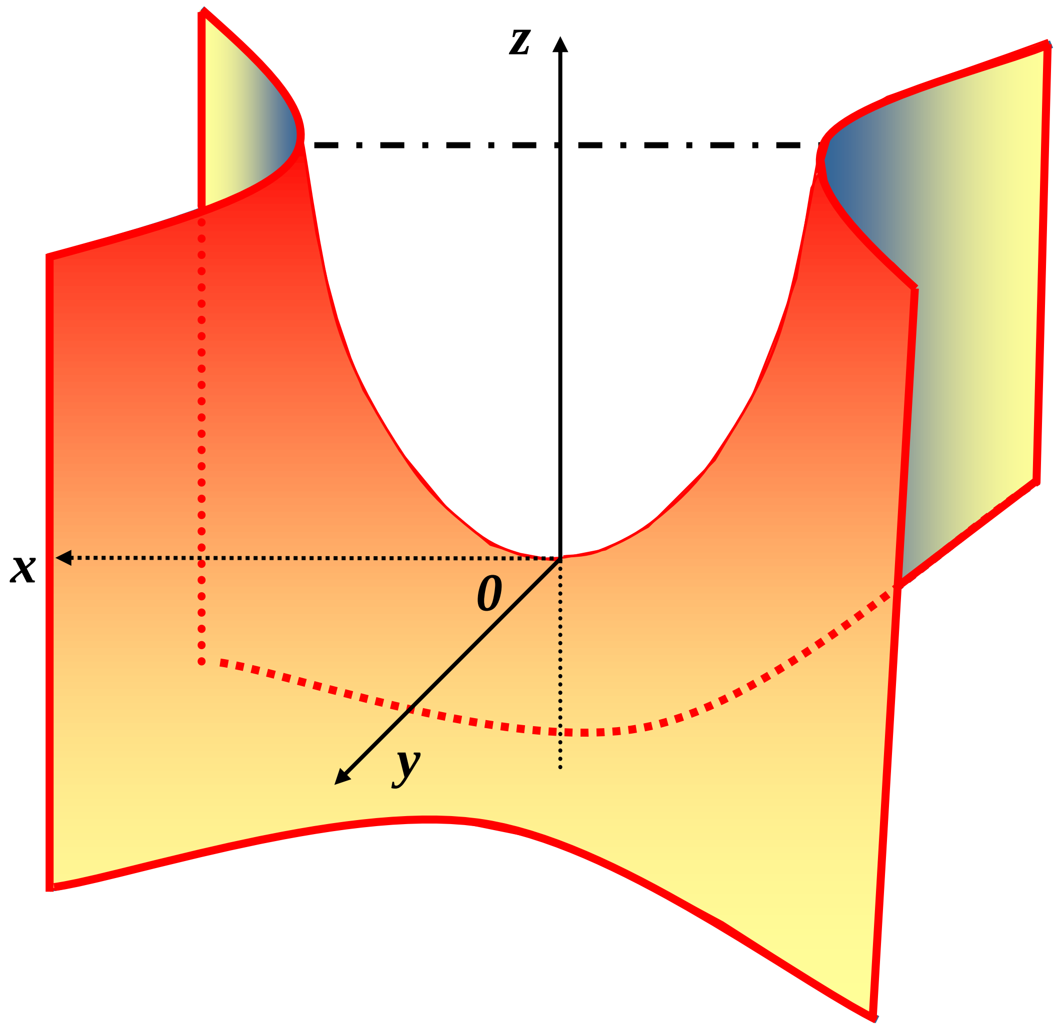
$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = z$$

截痕法

用$z = a$截曲面

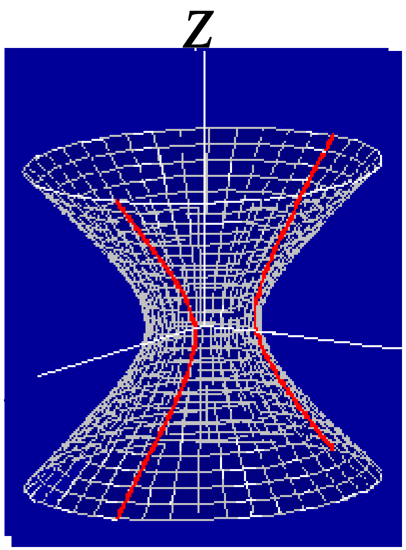
用$y = 0$截曲面

用$x = b$截曲面



3. 双曲面

(1)单叶双曲面



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \ (a,b,c \text{ 为正数})$$

平面 $z = z_1$ 上的截痕为 椭圆.

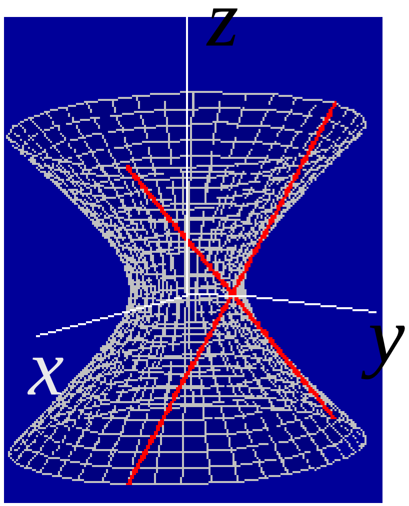
平面 $y = y_1$上的截痕情况:

1) $|y_1| < b$ 时, 截痕为双曲线:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_1{}^2}{b^2} \\ y = y_1 \end{cases}$$

(实轴平行于x 轴;
虚轴平行于z 轴)

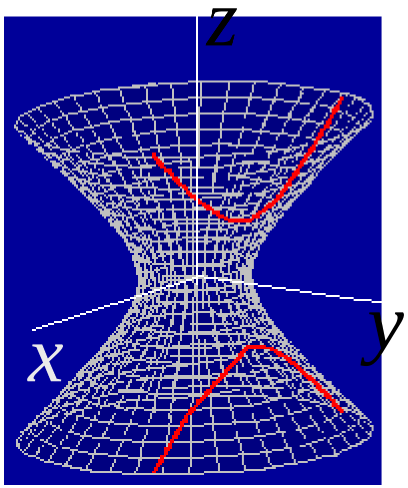
2) $|y_1| = b$ 时, 截痕为相交直线:



$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} \pm \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = b \ (\text{或} -b) \end{cases}$$

3) $|y_1| > b$时, 截痕为双曲线:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = \underline{1 - \dfrac{y_1{}^2}{b^2}} < 0 \\ y = y_1 \end{cases}$$

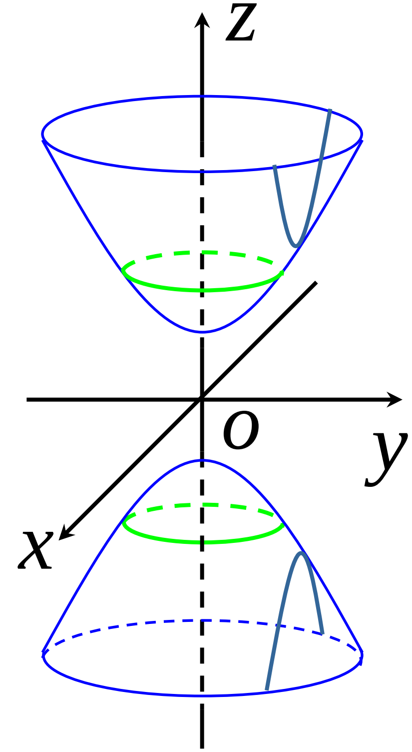


(实轴平行于z 轴;

虚轴平行于x 轴)

(2) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a,b,c\text{ 为正数})$$



平面 $y=y_1$ 上的截痕为 **双曲线**

平面 $x=x_1$ 上的截痕为 **双曲线**

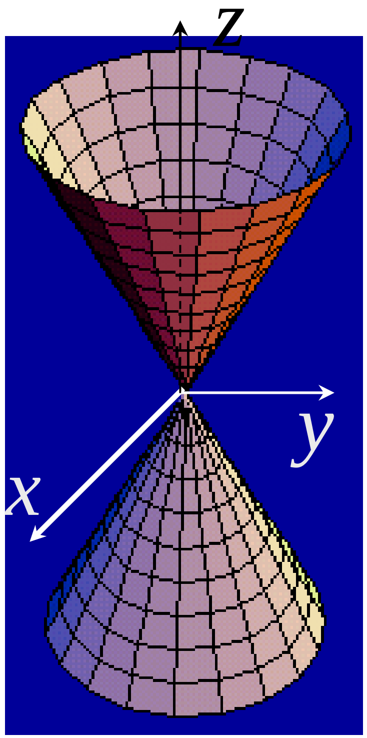
平面 $z=z_1\ (|z_1|>c)$上的截痕为 **椭圆**

注意单叶双曲面与双叶双曲面的区别:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\begin{cases}1 & \text{单叶双曲面}\\ -1 & \text{双叶双曲面}\end{cases}$$

4. 椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2 \quad (a, b\text{ 为正数})$$



在平面 $z=t$ 上的截痕为 **椭圆**

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1,\ \ z=t \qquad ①$$

在平面 $x=0$ 或 $y=0$ 上的截痕为过原点的两直线 .

可以证明, 椭圆①上任一点与原点的连线均在曲面上.

(椭圆锥面也可由圆锥面经 x 或 y 方向的伸缩变换得到)

备课纸上的例题3-例题5

内容小结

1. 空间曲面 $\longleftrightarrow$ 三元方程 $F(x, y, z) = 0$

- 球面 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$
- 旋转曲面

如, 曲线 $\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面:

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

- 柱面

如,曲面 $F(x, y) = 0$ 表示母线平行 z 轴的柱面.

又如,椭圆柱面, 双曲柱面, 抛物柱面等 .

2. 二次曲面 $\longleftrightarrow$ 三元二次方程

- 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- 抛物面: 椭圆抛物面 双曲抛物面
  $(p,q$ 同号$)$
  $$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \qquad -\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$$
- 双曲面: 单叶双曲面 双叶双曲面
  $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$
- 椭圆锥面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$