数学分析（新工科）

第5章 微分中值定理

习 题 课

数学学院
郭飞

内容提要

1.微分中值定理： Rolle定理，Lagrange定理及其推论，Cauchy定理，Taylor定理。

深刻理解微分中值定理，
掌握微分中值定理的证明，
会用微分中值定理证明有关结论（包括等式、不等式）、求极限。

微分中值定理及其相互关系

罗尔定理

$f(a) = f(b)$

拉格朗日中值定理

$$f'(\xi) = 0$$

$$F(x) = x$$
$$f(a) = f(b)$$

$$F(x) = x$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$n = 0$$

柯西中值定理

泰勒中值定理

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

2. L'Hospital法则:两种基本不定式 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$,其它几种不定式形式的转化和求解,使用注意事项.

熟练地使用**L'Hospital**法则求不定式的极限。

3.函数单调性的判定:

$f(x)$在 I 内严格单调增(减)

$\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 (\leq 0)$ 且$f(x)$的驻点不构成区间。

会判定函数的单调性、求出单调区间,利用函数的单调性证明不等式及函数零点的惟一性。

4.函数的极值：极值、极值点的概念（注意极值的局部性、极值点的内部性），极值点的必要条件（可能的极值点），极值点的两个充分条件。

会求函数的极值。

5.函数的最大值与最小值

会求函数的最大最小值（包括实际问题的最大、最小值），会利用最大、最小值证明不等式、方程根的存在性。

6.曲线的凹凸性与拐点：上凸和下凸函数的定义以及判定，拐点概念及判定。

会判定函数的凹凸性、拐点，会利用凹凸性证明不等式。

7.曲线的渐近线

会求曲线的渐近线。

8.求极限的方法：

（1）极限的定义；

（2）利用重要极限；

（3）利用函数的连续性；

（4）利用极限存在准则（夹逼准则、单调有界准则和cauchy收敛准则）；

（5）利用等价无穷小代换；

（6）使用L’Hospital法则（注意三个条件）；

（7）利用微分中值定理（Lagrange和P-型余项的Taylor公式）；

（8）适当的改变极限过程，例如将极限过程趋于无穷的变为趋于0，或者将非零的极限过程变为趋于0，见后面的例子。

9.不等式的证明方法：

（1）初等方法（略）；

（2）利用函数的最大最小值；

（3）利用函数的单调性；

（4）利用微分中值定理（包括Taylor公式）；

（5）利用函数的凹凸性。

熟记带佩亚诺余项如下的麦克劳林公式：极限过程为 $x \to 0$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)\,,$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + o(x^{2m})\,,$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m+1})\,,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n)\,,$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}x^n + o(x^n)\,.$$

最好还能记住下述带佩亚诺余项的麦克劳林公式：

极限过程为 $x \to 0$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4),$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4),$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

1. 填空题：

$$(1)\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{x^3}=\underline{\qquad \frac{4}{3} \qquad}.$$

解 $\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{3x^2}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{6x}=\frac{4}{3}.$$

(2) $y=\arctan x-\mathrm{e}^x$在$[0,\ 1]$上的最大值是$\underline{\quad -1 \quad}$.

解 $\because \forall x\in(0,\ 1],\ y'=\frac{1}{1+x^2}-\mathrm{e}^x<0,\therefore\ y$在$[0,\ 1]$上严格递减，故$y_{\max}=y(0)=-1.$

(3) $y=\mathrm{e}^{-x^2}$在区间$\underline{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$内是上凸曲线。

解 $y'=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$, $y''=2(2x^2-1)\mathrm{e}^{-x^2}$,

仅当$2x^2-1<0$即$|x|<\frac{\sqrt{2}}{2}$时, $y''<0$, 故其上凸区间为

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(4) $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 的斜渐近线为 $\underline{\quad y=x-5 \quad}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1=k,$

而 $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3-x(x+1)^2}{(x+1)^2}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-5,$

$\therefore$ 斜渐近线方程为 $y=x-5.$

(5) $(P153.7)\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=$ $\underline{\ \ a\ \ }$ $(a\neq 0)$.

解法1： 令$f(x)=\arctan(ax)$,则$f'(x)=\dfrac{a}{1+(ax)^2}$.

对$f(x)$在$\left[\dfrac{1}{n+1},\ \dfrac{1}{n}\right]$上使用Lagrange中值定理，得

$$\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}=\frac{a}{1+(a\xi_n)^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

其中$\dfrac{1}{n+1}<\xi_n<\dfrac{1}{n}$. 显然，当$n\to\infty$时$\xi_n\to 0$,故

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{an^2}{1+(a\xi_n)^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=a\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2}{n(n+1)}\frac{1}{1+(a\xi_n)^2}\right]=a.$$

(5) $(P153.7)\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=$ __a__ $(a\neq 0)$.

解法2： 令$f(x)=\arctan x$, 则$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

改变极限过程，并使用Lagrange中值定理

$$原式=\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan ax-\arctan\frac{ax}{x+1}}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\frac{ax-\frac{ax}{x+1}}{1+\xi^2}$$

(其中$\dfrac{ax}{x+1}<\xi<ax$. 显然，当$x\to 0^+$时, $\xi\to 0$)

$$=a\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{(1+x)\left(1+\xi^2\right)}=a.$$

令$y=\dfrac{1}{x}$，然后用海涅定理。

2. 选择

（1）设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=A>0,$$

则 $f(x)$在x_0点[B].

（A）有极大值；　　（B）有极小值；

（C）无极值；　　（D）不能判定是否取得极值。

解　由极限的保号性知,$\forall x\in \mathring{U}(x_0)$,有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}>0,$

$\Rightarrow f(x)-f(x_0)>0,\Rightarrow f(x)>f(x_0)$,即在$x_0$点有极小值。

（2）方程 $x^3-3x+1=0$ 在区间 $(0,\ 1)$ 内[B].

（A）无实根；（B）有惟一实根；

（C）有两个实根；（D）有三个实根。

解　令 $f(x)=x^3-3x+1$, 则$f\in C[0,\ 1]$.

$\because\ f(0)=1>0,\ f(1)=-1<0, \therefore\ f(x)=0$在$(0,\ 1)$内至少有一个根；又由

$$f'(x)=(x^3-3x+1)'=3x^2-3=3(x^2-1)<0$$

知，$f(x)$在$(0,\ 1)$内严格递减，所以此方程在$(0,\ 1)$内有且仅有一个根。

（3）设曲线方程为 $y=\dfrac{\sin x}{x}+\arctan(1-\sqrt{x})$，则[B].

（A）曲线没有渐近线；

（B）$y=-\dfrac{\pi}{2}$ 是曲线的渐近线；

（C）$x=0$是曲线的渐近线；

（D）$y=\dfrac{\pi}{2}$是曲线的渐近线。

解　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\dfrac{\pi}{2}$，所以 $y=-\dfrac{\pi}{2}$，是曲线的水平渐近线。

（4）设$f(x)$和$g(x)$在$[a,\ b]$上都可导且恒正$(a<b)$，若$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)<0$，则当$x\in(a,\ b)$时，不等式[C].

(A) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>\dfrac{f(a)}{g(a)}$成立；

(B) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>\dfrac{f(b)}{g(b)}$成立；

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$成立；

(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$成立.

解 $\because [f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)<0,$

$\therefore f(x)g(x)$在$(a,\ b)$内严格递减，故不等式

$$f(x)g(x)>f(b)g(b)$$

成立。

(5)若在$[0,\ 1]$上$f''(x)>0$,则$f'(0),\ f'(1),\ f(1)-f(0)$或$f(0)-f(1)$的大小顺序是[B].

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$;

(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$;

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$;

(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

解 由Lagrange中值定理，得

$$f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)=f'(\xi),0<\xi<1.$$

$\because\ f''(x)>0,\therefore\ f'(x)$严格递增，故$f'(1)>f'(\xi)>f'(0)$,

即 $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

典型例题

- 求极限
- 用微分中值定理、单调性、凹凸性证明等式和不等式
- 方程解的个数问题和极值（最值）问题
- 构造辅助函数专题(难点)

一、求极限

（一）、使用Taylor展式求极限时要注意：

1.极限过程是$x \to x_0$时要将函数在点x_0展开，而在0点展开最方便，所以可做变量代换$t=x-x_0$,在0点展开。

2.极限过程是$x \to \infty$时可做变量代换$t=x^{-1}$; 然后将函数在0处展开。

3.关于展到几阶，要观察分子和分母，当分母是x^n时，将分子展到n阶；当分母是其它函数时，分子和分母同时展到Taylor多项式第一次出现相同的次数为止（或者各自展开到第一次出现非零项）。

例1.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^x+1\right)-2(e^x-1)}{x^2\sin x}$

解：分子不能用无穷小等价代换。

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\left(e^x+1\right)-2(e^x-1)}{x^2\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)+1\right)-2\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)-1\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{x^3}{2}+o(x^3)\right)-\left(\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}{x^3}=\frac{1}{6}$$

例2.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x-x}{x\sin x}$

解：$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2),\quad x\to 0$

$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$，$x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\dfrac{x^2}{2}-1+\dfrac{x^2}{2}-x+o(x^2)}{x^2}$$

$$=1.$$

例3.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\cos x-1\right)+x^2}{x(x-\sin x)}$

解：分子不能用无穷小等价代换。

$$2\left(\cos x-1\right)=2\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)=-x^2+\frac{x^4}{12}+o(x^4),\ \ x\to 0$$

$$x-\sin x=\frac{x^3}{3!}+o(x^3),\ \ x\to 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{2\left(\cos x-1\right)+x^2}{x(x-\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^4}{12}+o(x^4)}{\dfrac{x^4}{6}+o(x^4)}=\frac{1}{2}.$$

练习：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2\left[x+\ln(1-x)\right]}=$ $\underline{\quad\dfrac{1}{6}\quad}$.

解 $\because \cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$

$$-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^2+o(x^4)\right]$$

$$=-\frac{x^4}{12}+o(x^4),x\to 0$$

$$x^2\left[x+\ln(1-x)\right]=x^2\left[x-x-\frac{x^2}{2}-o(x^2)\right]=-\frac{x^4}{2}+o(x^4),$$

$$\therefore \text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}=\frac{1}{6}.$$

练习：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2(1-\ln(1+x))}{x}$ $=$ ___0____.

（2011年全国数学竞赛）

提示：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2(1-\ln(1+x))}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}^2}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^2\ln(1+x)}{x}$$

$=\mathrm{e}^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}-1}{x}+\mathrm{e}^2$ (后面使用无穷小等价代换)

（二）、使用洛比达法则求极限时的注意事项

（1）使用的条件，

（2）结合其他求极限的方法，尤其是等价无穷小代换

（3）遇到非零因式先求出非零因式的极限后，再使用洛比达法则比较简单。例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\left(e^x-1\right)}{(1+\cos x)x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\left(e^x-1\right)}{x^2}$$

后面可以用洛比达法则，也可以使用Taylor展开式

例4　设 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解　当$x\neq 0$时,

$$f'(x)=\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}\right]'=\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\right]'$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\left[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\right]$$

$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right];$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]}{1}$$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]\quad(\infty-\infty)$$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x} = -\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= -\frac{\mathrm{e}}{2};$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{1}{x(1+x)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right], & x \neq 0, \\ -\dfrac{\mathrm{e}}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

上述做法比较麻烦，使用等价无穷小代换是最简单的做法，请自行试试。

（三）、适当改变极限过程，尤其在求斜渐近线时

例5.求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$ $(\infty-\infty)$

解：令 $t=\dfrac{1}{x}$, $x\to\infty$ 时 $t\to 0$,

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}-\frac{t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)}{t^2}\right]=\frac{1}{2}$$

例6.求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-x\right)$ $(\infty-\infty)$

解：令$t=\dfrac{1}{x}, x \to +\infty$时$t \to 0^+$,

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-x\right)=\lim_{t \to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}}-\frac{1}{t}\right)$$

$$=-\lim_{t \to 0^+}\frac{\sqrt{1-t^2}-1}{t\sqrt{1-t^2}}=\lim_{t \to 0^+}\frac{\frac{1}{2}t^2}{t}=0$$

二、证明等式或不等式（有些难题）

例7. 若$f\in C[a,\ b], f\in D(a,\ b), (0<a<b)$,则

$\exists\xi\in(a,\ b)$,s.t. $\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$.

试分别用Rolle定理和Cauchy定理证明之。

证[用Rolle定理]：令 $\varphi(x)=\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}\dfrac{1}{x}-\dfrac{f(x)}{x}$,

则 $\varphi\in C[a,\ b], \varphi\in D(a,\ b)$,且$\varphi(a)=\varphi(b)=\dfrac{f(b)-f(a)}{a-b}$,

由Rolle定理知，$\exists\xi\in(a,\ b)$,s.t

$$\varphi'(\xi)=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}\frac{-1}{\xi^2}-\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0,$$

即 $$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

证[用Cauchy定理]：

因为要证的等式等价于 $$\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{\dfrac{-1}{\xi^2}},$$

故取$g(x)=\dfrac{f(x)}{x},\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$.

易知$g(x),\varphi(x)$在$[a, b]$上满足Cauchy定理条件，故

$\exists\xi\in(a, b)$, s. t. $$\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{\dfrac{-1}{\xi^2}},$$

即$\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$.

作业. 若$f \in C[a,\ b], f \in D(a,\ b), (0 < a < b)$,则

$\exists \xi \in (a,\ b)$, s.t. $3\xi^2 \left(f(b) - f(a) \right) = \left(b^3 - a^3 \right) f'(\xi).$

例8. 设$f \in D^2[a,b]$, $f'(a)=f'(b)=0$, 试证：$\exists \xi \in (a,b)$使得

$$|f''(\xi)| \ge 4\left|\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}\right|.$$

证明:(Taylor展式:同一值在不同点展开)

将$f(\frac{a+b}{2})$分别在$x=a$和$x=b$处展开得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \xi_1 \in (a,\frac{a+b}{2}).$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \xi_2 \in (\frac{a+b}{2},b).$$

两式相减得$f(b)-f(a)=\frac{1}{2}\left(f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

两式相减得$f(b)-f(a)=\frac{1}{2}\left(f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

$$\therefore \left|f(b)-f(a)\right| \le \frac{1}{2}\left(\left|f''(\xi_1)\right|+\left|f''(\xi_2)\right|\right)\frac{(a-b)^2}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{2}\left(\left|f''(\xi_1)\right|+\left|f''(\xi_2)\right|\right) \ge 4\frac{\left|f(b)-f(a)\right|}{(a-b)^2}.$$

令$\left|f''(\xi)\right| = \max\{\left|f''(\xi_1)\right|,\left|f''(\xi_2)\right|\}$,则有

$$\left|f''(\xi)\right| \ge 4\frac{\left|f(b)-f(a)\right|}{(a-b)^2}.$$

例9. 设$f \in D^2[0,1], f(0)=f(1)$，且$\forall x \in (0,1)$有$|f''(x)| \le A$

试证：$\forall x \in (0,1)$有 $|f'(x)| \le \dfrac{A}{2}$.

证明:（**Taylor**展式:不同值在同一点展开）

将$f(y)$在x处展开, 得$f(y)=f(x)+f'(x)(y-x)+\dfrac{1}{2}f''(\xi)(y-x)^2$,

令$y=0$, $f(0)=f(x)-f'(x)x+\dfrac{1}{2}f''(\xi_1)x^2$, $\xi_1 \in (0,x)$,

令$y=1$, $f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\dfrac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2$, $\xi_2 \in (x,1)$,

两式相减得:$f'(x)=\dfrac{1}{2}\left[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2\right]$.

$\therefore |f'(x)| \le \dfrac{A}{2}\left[x^2+(1-x)^2\right] \le \dfrac{A}{2}$.

2014年全国大学生数学竞赛题.

设$f \in D^2[0,1]$, 且$\forall x \in [0,1]$有$|f(x)| \le A, |f''(x)| \le B$

试证：$\forall x \in (0,1)$有 $|f'(x)| \le 2A + \dfrac{B}{2}$.

例10. 若$f\in D^2[0,\ 1]$, $f(0)=f(1)=0$, $\min\{f(x)|x\in[0,\ 1]\}=-1$,

证明：$\exists\xi\in(0,\ 1)$, s.t. $f''(\xi)\ge 8$.

（**Taylor**展式:不同值在同一点展开）

证明：设$\min\{f(x)|x\in[0,\ 1]\}=f(a)=-1$, 则$a\in(0,\ 1)$, $f'(a)=0$.

将$f(x)$在a处展开, 得$f(x)=f(a)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)^2$,

令$x=0$, $0=f(0)=f(a)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)a^2$, $\xi_1\in(0,a)$,

令$x=1$, $0=f(1)=f(a)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-a)^2$, $\xi_2\in(a,1)$,

$$\Rightarrow f''(\xi_1)=\frac{2}{a^2},\ f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-a)^2},$$

$$\Rightarrow a<\frac{1}{2}\text{时}f''(\xi_1)>8;\quad a\ge\frac{1}{2}\text{时}f''(\xi_2)\ge 8.$$

例11. 若$f(x)$在$[-1,\ 1]$三阶连续可导, $f(1)=1,\ f(-1)=0,\ f'(0)=0$

证明：则$\exists\xi\in(-1,\ 1)$, s.t. $f'''(\xi)=3$.　　(2011年全国竞赛题)

证明:（***Taylor***展式:不同值在同一点展开）

将$f(x)$在0处展开, 得$f(x)=f(0)+\dfrac{1}{2}f''(0)x^2+\dfrac{1}{3!}f'''(\xi)x^3$,

令$x=1$, $1=f(1)=f(0)+\dfrac{1}{2}f''(0)+\dfrac{1}{3!}f'''(\xi_1)$, $\xi_1\in(0,1)$,

令$x=-1$, $0=f(-1)=f(0)+\dfrac{1}{2}f''(0)-\dfrac{1}{3!}f'''(\xi_2)$, $\xi_2\in(-1,0)$,

两式相减$\Rightarrow f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=6$,

$m\le\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3\le M$, 其中$m, M$分别是$f'''(x)$在$[\xi_2,\xi_1]$

的最小和最大值，介值定理$\Rightarrow$存在$\xi\in(\xi_2,\xi_1)\subset(-1,1)$,

使得$f'''(\xi)=3$.

例 12. 设 $f(x)$ 在$[a,\ b]$上连续，在$(a,\ b)$内$f''(x)<0$. 证：

$$\forall x\in(a,\ b),有\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

解　作辅助函数 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a},a<x\le b.$ 则

$$\varphi'(x)=\frac{f'(x)}{x-a}-\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}\ \overset{\text{中值公式}}{=\!=\!=}\ \frac{f'(x)}{x-a}-\frac{f'(\xi)}{x-a},a<\xi<x.$$

由$f''(x)<0$,可知$f'(x)$严格递减，于是$f'(x)<f'(\xi)$,故 $\varphi'(x)<0$,从而$\varphi(x)$严格递减，故$\forall x\in(a,\ b)$,有$\varphi(x)>\varphi(b)$,

即

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

例 12. 设 $f(x)$ 在$[a, b]$上连续，在(a, b)内$f''(x)<0$. 证：

$$\forall x\in(a,\ b),\text{有}\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

也可以用其他方法：

$f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$是严格上凸函数

$$\Leftrightarrow f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)>\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

使用定义法（此时，条件可以减弱，可以去掉“连续”的条件。）

$x\in(a,\ b)$,记$x=\lambda a+(1-\lambda)b,\lambda\in\left(0,1\right)$,则

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)-f(a)}{\lambda a+(1-\lambda)b-a}$$

$$>\frac{\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)-f(a)}{(1-\lambda)\left(b-a\right)}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

例13. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,c)$ 上具有严格单调减的导数 $f'(x)$, 且 $f(0)=0$, 证明:对于满足不等式$0<a<b<a+b<c$ 的 a, b 恒有不等式 $f(a+b)<f(a)+f(b)$.

证法一:(**Lagrange**定理)

由 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 及 $[b,a+b]$ 上“可导必连续”知,

$f(x)$在 $[0,a]$ 及 $[b,a+b]$ 上分别满足**Lagrange**定理条件, 有

$$f(a)=f(a)-f(0)=f'(\xi_1)a, \qquad \xi_1\in(0,a),$$

$$f(a+b)-f(b)=f'(\xi_2)a, \qquad \xi_2\in(b,a+b),$$

因为 $0<\xi_1<a<b<\xi_2<a+b$, 且 $f'(x)$ 为严格单调减,所以

$$f(a+b)-f(b)=f'(\xi_2)a<f'(\xi_1)a=f(a).$$

结论得证.

例13. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,c)$ 上具有严格单调减的导函数 $f'(x)$, 且 $f(0)=0$, 证明:对于满足不等式$0<a<b<a+b<c$ 的 a, b 恒有不等式 $f(a+b)<f(a)+f(b)$.

证法二：令 $F(x)=f(x+b)-f(x)-f(b)$，其中 $0<x<c-b$,

$$则F'(x)=f'(x+b)-f'(x).$$

由于 $f'(x)$ 在区间 $[0,c]$ 上严格单调减，从而

$$f'(x+b)<f'(x), \quad 即\ F'(x)<0.$$

$F(x)$ 在区间 $[0,c-b]$ 上连续，在 $(0,c-b)$ 内可导且 $F'(x)<0$,

所以，$F(x)$ 在区间 $[0,c-b]$ 上严格单调减，

$F(a)<F(0)=f(b)-f(0)-f(b)=-f(0)=0$,即

$$F(a)=f(a+b)-f(a)-f(b)<0,$$

亦即 $$f(a+b)<f(a)+f(b).$$

例14. 设$f \in D(a,b), c_1, c_2 \in (a,b)$, 且$c_1 < c_2, f(c_1) = f(c_2)$, $f'(c_1)f'(c_2) > 0$, 证明: 至少存在两点$\xi_1, \xi_2 \in (c_1, c_2)$使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.

证明:(介值定理和*Rolle*中值定理） 不妨设$f'(c_1) > 0, f'(c_2) > 0$.

由$f_+'(c_1) = \lim\limits_{x \to c_1+} \dfrac{f(x) - f(c_1)}{x - c_1} > 0$和保号性定理知存在$x_1 \in (c_1, c_1 + \delta)$

使得$\dfrac{f(x_1) - f(c_1)}{x_1 - c_1} > 0$, 从而$f(x_1) > f(c_1)$.

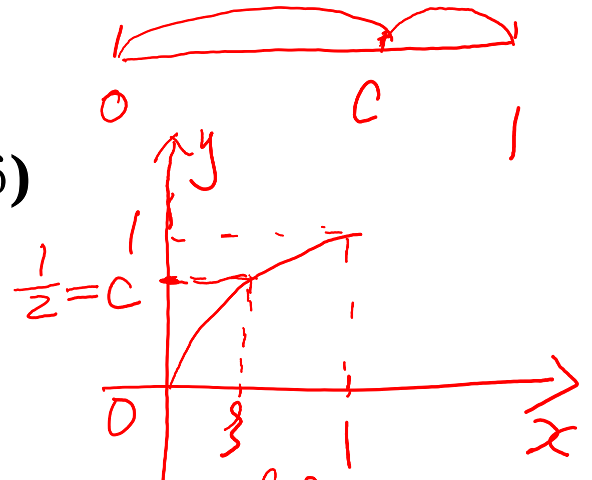
同理,由$f_-'(c_2) = \lim\limits_{x \to c_2-} \dfrac{f(x) - f(c_2)}{x - c_2} > 0$知存在$x_2 \in (c_2 - \delta, c_2)$使得

$f(x_2) < f(c_2)$.所以有 $f(x_2) < f(c_2) = f(c_1) < f(x_1)$.

由介值性定理知存在$\eta \in (x_1, x_2)$使得$f(\eta) = f(c_2) = f(c_1)$.

分别在$[c_1, \eta]$和$[\eta, c_2]$上应用*Rolle*中值定理得结论.

例15. 设 $f \in D[0,1]$ 且 $f(0)=0,\ f(1)=1$，证明在区间 $(0,1)$ 内有 $x_1,\ x_2$ 存在，使得 $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2$. (这个结果可以推广到例16)



证明：（利用介值定理+Lagrange中值定理）

因为 $f \in D[0,1]$，所以 $f \in C[0,1]$，且 $f(0)=0,\ f(1)=1$

由介值定理可知，至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{2}$

$f(x)$ 在区间 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上分别应用Lagrange中值定理：

$f(\xi)-f(0)=f'(x_1)\xi,$ $\quad 0<x_1<\xi$

$f(1)-f(\xi)=f'(x_2)(1-\xi),$ $\quad \xi<x_2<1$

即 $\quad \dfrac{1}{f'(x_1)}=2\xi,\qquad \dfrac{1}{f'(x_2)}=2(1-\xi)$

所以 $\quad \dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2.$

$f(\xi)=c$

$[0,\xi],\ [\xi,1]$

$c=f(\xi)-f(0)=f'(x_1)\xi \Rightarrow \underline{\dfrac{1}{f'(x_1)}}=\dfrac{\xi}{c}$

$1-c=f(1)-f(\xi)=f'(x_2)(1-\xi) \Rightarrow \underline{\dfrac{1}{f'(x_2)}}=\dfrac{1-\xi}{1-c}$

$\dfrac{\xi}{c}+\dfrac{1-\xi}{1-c}=\underbrace{\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{1-c}\right)}_{=0}\xi+\dfrac{1}{1-c}=2$

$c=1-c \Rightarrow c=\dfrac{1}{2}$

例16. 设 $f\in D[0,1]$ 且 $f(0)=0,\ f(1)=1$，证明：对任意正数 a,b，在区间 $(0,1)$ 内有 $x_1\neq x_2$，使得 $\dfrac{a}{f'(x_1)}+\dfrac{b}{f'(x_2)}=a+b.$

证明：（介值定理+Lagrange中值定理）

因为 $f\in D[0,1]$，所以 $f\in C[0,1]$，且 $f(0)=0,\ f(1)=1$

由介值定理可知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}.$

分别在区间 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上应用Lagrange中值定理，

$$\frac{a}{a+b}=f(\xi)-f(0)=f'(x_1)\xi,\qquad 0<x_1<\xi$$

$$\frac{b}{a+b}=f(1)-f(\xi)=f'(x_2)(1-\xi),\qquad \xi<x_2<1$$

即 $$\frac{a}{f'(x_1)}=(a+b)\xi,\qquad \frac{b}{f'(x_2)}=(a+b)(1-\xi)$$

所以 $$\frac{a}{f'(x_1)}+\frac{b}{f'(x_2)}=a+b.$$

$$\begin{cases} C=f(\xi)-f(0)=f'(x_1)\xi \\ 1-C=f(1)-f(\xi)=f'(x_2)(1-\xi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{f'(x_1)}+\frac{b}{f'(x_2)}=\frac{a}{C}\xi+\frac{b}{1-C}(1-\xi)$$

$$=\underbrace{\left(\frac{a}{C}-\frac{b}{1-C}\right)}_{=0}\xi+\frac{b}{1-C}=a+b$$

$$\frac{a}{C}=\frac{b}{1-C}\Rightarrow C=\frac{a}{a+b}$$

例17. 设$f(x)\ge 0$,且在$[a,b]$上的任何子区间内不恒为0,又$f\in D^2(a,b)$且$f''(x)>0$.证明:最多只能有一点$\xi\in(a,b)$使得$f(\xi)=0$.

证明:(*Lagrange*中值定理)

反证,若有两点$x_1<x_2\in(a,b)$使得$f(x_1)=f(x_2)=0$,则由**Rolle**定理知

存在$\xi_1\in(x_1,x_2)$使得$f'(\xi_1)=0$.

因$f(x)\ge 0$,且在$[a,b]$上得任何子区间内不恒为0,故存在$\xi_2\in(\xi_1,x_2)$

使得$f(\xi_2)>0$.

在$[\xi_2,x_2]$上应用*Lagrange*中值定理:存在$\eta\in(\xi_2,x_2)$使得

$$f'(\eta)=\frac{f(x_2)-f(\xi_2)}{x_2-\xi_2}=\frac{-f(\xi_2)}{x_2-\xi_2}<0=f'(\xi_1),\eta>\xi_1,$$

而由$f''(x)>0$知$f'(\eta)>f'(\xi_1)$,得到矛盾.

例18. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f(1)=f(0)=0$,

求证:(1) 存在 $\xi_1\in(0,1)$，使得 $\xi_1^2 f'(\xi_1)+2\xi_1 f(\xi_1)=0$,

(2)存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $4\xi f'(\xi)+\xi^2 f''(\xi)+2f(\xi)=0$.

证明：(**Rolle**定理) 令 $F(x)=x^2 f(x)$, (可利用积分构造辅助函数)

则 $F'(x)=x^2 f'(x)+2xf(x)$,

$F''(x)=4xf'(x)+x^2 f''(x)+2f(x)$,

$$F'(x)=x^2f'(x)+2xf(x)$$

$$\Rightarrow F(x)=\int\left(x^2f'(x)+2xf(x)\right)dx$$

$$=\int x^2\,df(x)+2\int xf(x)dx$$

$$=x^2f(x)-2\int f(x)x\,dx+2\int xf(x)dx$$

$$=x^2f(x)$$

(1) $F\in C[0,1]$, $F\in D(0,1)$, 且 $F(0)=F(1)=0$,由**Rolle**定理,

存在点 $\xi_1\in(0,1)$，$F'(\xi_1)=0$.

(2) 由 $F'(0)=0=F'(\xi_1)$,函数 $F'(x)$ 在区间 $[0,\xi_1]$ 上应用**Rolle**定理,

存在点 $\xi\in(0,\xi_1)\subset(0,1)$，使得 $F''(\xi)=0$.

例19. 设 $f\in \mathbf{C}[0,+\infty)$, $f\in \mathbf{D}(0,+\infty)$, $f(0)=0$，且对

$\forall x\in(0,+\infty)$有 $|f'(x)|\le M$.证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=0.$

证明:(*lagrange*定理+夹逼准则)

在$[0,x]$上由*lagrange*定理知存在$\xi\in(0,x)\subset(0,+\infty)$使得

$$0\le\left|\frac{f(x)}{x^2}\right|=\left|\frac{f(x)-f(0)}{x^2}\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{x}\right|\le\frac{M}{|x|}.$$

由夹逼准则得结论.

例20. 设在区间 $[0,a]$ 上 $|f''(x)|\le M$，且在区间 $(0,a)$ 内 $f(x)$ 取得最大值，试证 $|f'(0)|+|f'(a)|\le aM$.

证明：（最值定理+**Lagrange**定理）

设 $f(x)$ 在点 $x=x_0\ (x_0\in(0,a))$ 取得最大值，则必有 $f'(x_0)=0$.

$f'(x)$ 在 $[0,x_0]$ 及 $[x_0,a]$ 上应用**Lagrange**定理，有

$$f'(x_0)-f'(0)=x_0f''(\xi_1),\qquad \xi_1\in(0,x_0) \qquad (1)$$

$$f'(a)-f'(x_0)=(a-x_0)f''(\xi_2),\quad \xi_2\in(x_0,a) \qquad (2)$$

从而

$$|f'(0)|=x_0|f''(\xi_1)|\le x_0M,$$

$$|f'(a)|=(a-x_0)|f''(\xi_2)|\le(a-x_0)M,$$

由上两式相加，得

$$|f'(0)|+|f'(a)|\le aM.$$

注:(1)、(2)还可以看做是 $f'(x)$ 在0点的**Taylor**展开式

例21．试证：$\forall x>0, \forall y>0,$ 且 $x \neq y,$ 恒有

$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x\ln x+y\ln y}{2}>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}$$

证　令 $f(t)=t\ln t, t\in(0,\ +\infty),$ 则 $f'(t)=\ln t+1.$

$\because\ f''(t)=\dfrac{1}{t}>0\ \ (\forall t>0)$，故 $f(x)$ 为下凸函数，所以

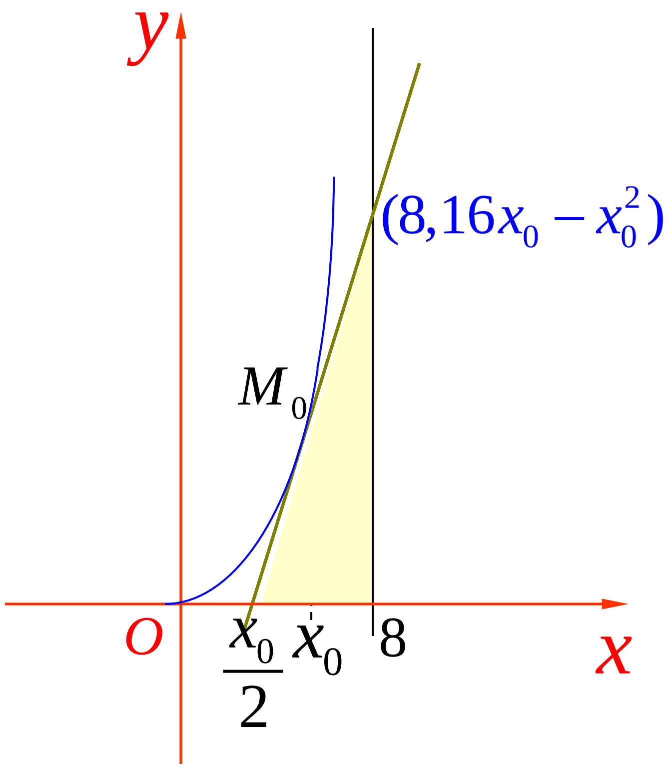
$\forall x>0, \forall y>0,$ 且 $x\neq y,$ 恒有

$$\frac{x\ln x+y\ln y}{2}>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2},$$

即 $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}.$

三、方程解的个数问题和极值（最值）问题

例22. 在曲线 $y=x^2, x\in(0,\ 8]$ 上求一点 $M_0(x_0,y_0)$ 使点 M_0 处的切线与 $y=0$ 及 $x=8$ 所围成的三角形的面积最大，求 M_0 的坐标。



解 $k=y'(x_0)=2x_0.$

切线方程为

$$y-y_0=2x_0(x-x_0),$$

即

$$y=2x_0x-x_0^2, x_0\in(0,\ 8].$$

切线与 $y=0$ 的交点为 $\left(\frac{x_0}{2},0\right)$，

与 $x=8$ 的交点为 $(8,16x_0-x_0^2)$

所围三角形面积为

$$S = S(x_0) = \frac{1}{2}\left(8 - \frac{x_0}{2}\right)(16x_0 - x_0^2)$$

$$= \frac{1}{4}x_0(16 - x_0)^2, \ x_0 \in (0,\ 8].$$

令$S'(x_0) = \frac{1}{4}(16 - x_0)(16 - 3x_0) = 0$，得惟一驻点$x_0 = \frac{16}{3}$.

由问题的实际意义可知，有最大值而无最小值，故 $x_0 = \frac{16}{3}$ 也就是

最大值点，此时 $y_0 = \frac{256}{9}$，即所求点为 $M_0\left(\frac{16}{3}, \frac{256}{9}\right)$.

例23. 证明方程 $x^2 = x\sin x + \cos x$ 恰有两个不同的实根。

证　令 $f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续。

$$f\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} > 0,\ f(0) = -1 < 0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} > 0,$$

故 $f(x)$ 至少有两个实零点，即原方程至少有两个实根。

又 $f'(x) = 2x - \sin x - x\cos x + \sin x = x(2 - \cos x),\ x \in \mathbf{R}.$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 0.$

因为当 $x < 0$ 时 $f'(x) < 0,\ f(x)$ 严格递减，故方程至多只有一个小于零的实根；而当 $x > 0$ 时 $f'(x) > 0$，故方程至多只有一个大于零的实根。

所以方程恰有两个不同的实根。

另证：令$f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$，则$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续。

令$f'(x)=x(2-\cos x)=0$得惟一驻点$x=0$. 因为$f''(x)=2-\cos x+x\sin x$, $f''(0)=1>0$，故$f(0)=-1$是极小值也是最小值；而$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，因此方程$f(x)=0$至少有两个不同的实根：$\xi_1\in(-\infty, 0)$, $\xi_2\in(0, +\infty)$.

又因为在$(-\infty, 0)$内$f'(x)<0$，即$f(x)$在$(-\infty, 0)$内严格递减，而在$(0, +\infty)$内$f'(x)>0$，即$f(x)$在$(0, +\infty)$内严格递增，所以方程至多有两个不同的实根。

综上可得方程$x^2=x\sin x+\cos x$恰有两个不同的实根。

*四、构造辅助函数专题

例1.设$f \in C[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，

证明：(1) $\exists \xi \in (\frac{1}{2},1)$使得$f(\xi)=\xi$.

(2)对任意实数λ，$\exists \eta \in (0,\xi)$，使得$f'(\eta)-\lambda(f(\eta)-\eta)=1$.

-1

$\Rightarrow F'(x)-\lambda F(x)=0$

思路：(1)构造辅助函数$F(x)=f(x)-x$,

则$F \in C[0,1]$, $F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}>0$，$F(1)=-1<0$,

由零点定理得证。

(1) $F(x)=f(x)-x$.

(2) $F'(x)-\lambda F(x)$

$G(x)=e^{-\lambda x}F(x)=e^{-\lambda x}(f(x)-x)$.

$G'(x)=e^{-\lambda x}(-\lambda)F(x)+e^{-\lambda x}F'(x)$

$=e^{-\lambda x}(F'(x)-\lambda F(x))$

$f'(x)+f(x)=0$

令$F(x)=e^{x}f(x)$

例1.设$f \in C[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，

证明：(1) $\exists \xi \in (\frac{1}{2},1)$使得$f(\xi)=\xi$.

(2)对任意实数λ，$\exists \eta \in (0,\xi)$，使得$f'(\eta)-\lambda(f(\eta)-\eta)=1$.

(2)思路：将要证的结果变为

$$\left[(f(x)-x)'-\lambda(f(x)-x)\right]\Big|_{x=\eta}=0,$$

构造函数$G(x)=e^{-\lambda x}\left(f(x)-x\right)$，在$\eta$点的导数为零可推出结果.

$G(x)$在$[0,\xi]$上应用*Rolle*定理得证.

例2.设$f \in D[0,+\infty)$, $0 \le f(x) \le \dfrac{x}{1+x^2}$，证明：$\exists \xi \in (0,+\infty)$使得

$$f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{\left(1+\xi^2\right)^2}.$$

思路：构造辅助函数$F(x) = \dfrac{x}{1+x^2} - f(x) \ge 0$,要证：$F'(\xi)=0$.

对无限区间上要证$F'(\xi)=0$，方法有：

其一，在无限区间上选取一个或两个特殊点，在有限区间上应用***Rolle***定理.

其二，选取特殊点，在有限区间上应用***Fermat***定理(即，可导的极值点是驻点）.

本题用第二种方法.

例2.设$f \in D[0,+\infty), 0 \le f(x) \le \dfrac{x}{1+x^2}$，证明：$\exists \xi \in (0,+\infty)$使得

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{\left(1+\xi^2\right)^2}.$$

证明：由题意知$f(0)=0$. 令$F(x)=\dfrac{x}{1+x^2}-f(x)$，则$F(x)\ge 0$.

若$F(x)\equiv 0$，则结论得证. 若$F(x)$不恒为0，则存在点a使得

$F(a)=M>0$,由夹逼准则知道$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$，

从而存在充分大的$b(>a)$使得$x>b$时$0\le F(x)<\dfrac{M}{2}=F(b)$.

在$[0, b]$上考虑函数$F(x)$：$F\in C[0, b]$，而有最大值(不小于M)，

而$F(0)=0$，$F(a)=M>0$，$F(b)=\dfrac{M}{2}>0$，从而最大值在$(0,b)$内

一点ξ处达到，由费马定理知$F'(\xi)=0$.

例3.设$f\in \mathbf{C}[0,1]$, $f\in D(0,1)$, $f(0)=0$, 证明：对任意α,

$\exists\xi\in(0,1)$使得$\underline{\dfrac{\alpha f'(\xi)}{f(\xi)} \cancel{=} - \dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}}$. $=0$

$F'(x)=\dfrac{\alpha f'(x)}{f(x)}-\dfrac{f'(1-x)}{f(1-x)}$

$F(x)=\displaystyle\int\frac{\alpha f'(x)}{f(x)}dx-\int\frac{f'(1-x)}{f(1-x)}dx$

$=\alpha\displaystyle\int\frac{df(x)}{f(x)}+\int\frac{df(1-x)}{f(1-x)}$

$=\alpha\ln|f(x)|+\ln|f(1-x)|$

$=\ln|f(x)^{\alpha}\cdot f(1-x)|$

$G(x)=e^{F(x)}$

$G'(x)=e^{F(x)}\cdot \underline{F'(x)}$

思路：观察到$F(x)=\ln f^{\alpha}(x)+\ln f(1-x)$在$\xi$点的导数如果等于零，结果得证。但$F(x)$不满足*Rolle*定理的条件。需要修改函数$F(x)=\ln f^{\alpha}(x)\cdot f(1-x)$为

$\mathbf{G}(x)=f^{\alpha}(x)\cdot f(1-x)$，在[0,1]上应用*Rolle*定理得证。

例4.设$f\in C[0,1]$, $f\in D(0,1)$, $f(1)=0$, 证明：$\exists\xi\in(0,1)$

使得$f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\tan\xi}$.

思路：将要证的结果变为$\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\dfrac{\cos\xi}{\sin\xi}=0$, 我们发现

它恰是函数$F(x)=\ln f(x)+\ln\sin x$在ξ点的导数为零。

但$F(x)$不满足*Rolle*定理的条件，需要修改函数为

$G(x)=f(x)\sin x$，在$[0,1]$上应用*Rolle*定理得证。

例5. 证明 $\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0)$.

证: 设 $\varphi(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$，则$\varphi(0) = 0$

$$\varphi'(x) = 1 + \ln(1+x) - \frac{1}{1+x^2} > 0 \qquad (x>0)$$

故 $x>0$ 时, $\varphi(x)$单调增加，从而$\varphi(x) > \varphi(0) = 0$

即 $$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0)$$

思考: 证明 $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} < \dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$ $(0<x<1)$ 时, 如何设辅助函数更好？

提示: $\varphi(x) = (1+x)\ln(1+x) - \sqrt{1-x^2}\arcsin x$

例6. 设$f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 且 $\boldsymbol{f(x)+f'(x)>0}$,

证明$f(x)$至多只有一个零点.

证: 设 $\phi(x)=e^x f(x)$ 则

$$\phi'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]\quad>0$$

故$\phi(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续单调递增, 从而至多只有一个零点.

又因 $e^x>0$, 因此$f(x)$也至多只有一个零点.

思考: 若题中$\boldsymbol{f(x)+f'(x)>0}$ 改为 $f(x)-f'(x)<0$, 其它不变时, 如何设辅助函数?

$$\boxed{\phi(x)=e^{-x}f(x)}$$

补充题（自己练习）

例1. 证明：当 $x>0$时，有 $(x^2-1)\ln x \geq (x-1)^2$.

证法1

$$\because (x^2-1)\ln x \geq (x-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\ln x \geq (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \leq \dfrac{x-1}{x+1}, & 0<x<1, \\ \ln x \geq \dfrac{x-1}{x+1}, & x \geq 1. \end{cases}$$

$\therefore$ 令$f(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}\ (x>0)$, $f(1)=0$. 因为$\forall x>0$

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0$, 故$f(x)$严格递增。

于是，当$0<x<1$时，$f(x)<f(1)=0$, 即 $\ln x<\dfrac{x-1}{x+1}$;

而当 $x\geq 1$时，$f(x\geq f(1)=0$, 即$\ln x\geq\dfrac{x-1}{x+1}$.

总之，当$x>0$ 时，有 $(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2$.

证法2　令 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2, x>0$. $f(1)=0$.

$$\because\ f'(x)=2x\ln x-x+2-\frac{1}{x},(\forall x>0),\ f'(1)=0;$$

$$f''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2},(\forall x>0),\ f''(1)=2;$$

$f'''(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x^3}$，当$0<x<1$时$f'''(x)<0$，$f''(x)$严格递减，当$x\ge 1$时$f'''(x)>0$，$f''(x)$严格递增，故$f''(1)=2$是$f''(x)$的最小值，即$\forall x>0$,有$f''(x)\ge f''(1)=2>0$,从而$f'(x)$严格递增。

于是，当$0<x<1$时$f'(x)<f'(1)=0$, $f(x)$严格递减，当$x\ge 1$时$f'(x)\ge f'(1)=0$, $f(x)$严格递增，故$f(1)=0$是最小值，所以$\forall x>0$,有$f(x)\ge f(1)=0$,即

$$(x^2-1)\ln x\ge (x-1)^2\ (\forall x>0).$$

例2. 设 $f(x)$ 在 $N(0,\delta)$ 内有连续的一阶导数，且 $f(0)\neq 0$, $f'(0)\neq 0$, 若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小量，试确定 a,b 的值。

解法1　由题设，得

$$\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0,\\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}\\ \qquad =(a+2b)f'(0)=0,\end{cases}$$

$$\because\ f(0)\neq 0,\ f'(0)\neq 0,\ \therefore \begin{cases}a+b-1=0,\\ a+2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2,\\ b=-1.\end{cases}$$

解法2 ［使用带Peano型余项的Maclaurin公式］

因为 $f(x)$ 在 $N(0,\delta)$ 内有连续的一阶导数，故有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x),\forall x\in N(0,\delta).$$

$\because h\to 0,\therefore$ 可设 $|h|<\dfrac{\delta}{2}$,即$h,2h\in N(0,\delta)$,于是得

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+o(h),$$
$$f(2h)=f(0)+2f'(0)h+o(h).$$

故$af(h)+bf(2h)-f(0)=(a+b-1)f(0)+(a+2b)f'(0)+o(h).$

由$af(h)+bf(2h)-f(0)$是比h高阶的无穷小，得

$$\begin{cases}a+b-1=0,\\ a+2b=0,\end{cases}$$ 故$a=2,b=-1.$

例3. 函数 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$\exists c\in(a,b)$，使得$f(c)>0$.试证:存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)<0$.

证法一：因 $f(x)$ 在区间 $[a,c]$ 及 $[c,b]$ 上应用Lagrange定理，

从而有$$0<\frac{f(c)}{c-a}=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\xi_1),\qquad \xi_1\in(a,c),$$

$$0>\frac{-f(c)}{b-c}=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(\xi_2),\qquad \xi_2\in(c,b).$$

由 $f(x)$在 (a,b) 内二阶可导知 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]\subset(a,b)$ 上满足Larange定理条件，从而有

$$\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}=f''(\xi)<0,\qquad \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b),$$

例3. 函数 $f(x) \in C[a,b]$，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$, $\exists\, c\in(a,b)$, 使得$f(c)>0$.试证:存在$\xi\in(a,b)$, 使得$f''(\xi)<0$.

证法二：(Taylor展式)将$f(x)$在$x_0=c$处展为一阶泰勒公式

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-c)^2,$$ 其中ξ介于c和x之间.

若$f'(c)\le 0$，在上式中取$x=a$,得

$$f(a)=f(c)+f'(c)(a-c)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(a-c)^2,\quad \xi_1\in(a,c),$$

因$f(a)=0, f(c)>0, f'(c)\le 0, a-c<0$,于是有 $f''(\xi_1)<0$;

若$f'(c)>0$,取$x=b$,得

$$f(b)=f(c)+f'(c)(a-c)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(a-c)^2,\xi_2\in(c,b),$$

因为$f(b)=0, f(c)>0, f'(c)>0, b-c>0$,于是有$f''(\xi_2)<0$.

综上所述，存在$\xi\in(a,b)$,使得$f''(\xi)<0$.

例3. 设$f \in D^2[a,b], f(a)=f(b)=0, \exists c \in (a,b), f(c)>0,$
试证：$\exists \xi \in (a,b)$使得$f''(\xi)<0.$

证明3：分别将$f(a)$和$f(b)$在c处展开得

$$0=f(a)=f(c)+f'(c)(a-c)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-c)^2, \xi_1 \in (a,c),$$

$$0=f(b)=f(c)+f'(c)(b-c)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-c)^2, \xi_2 \in (c,b),$$

消去$f'(c)$得

$$f(c)\left(\frac{1}{a-c}-\frac{1}{b-c}\right)+\frac{1}{2}\left[f''(\xi_1)(a-c)-f''(\xi_2)(b-c)\right]=0$$

$$\because f(c)>0, \frac{1}{a-c}-\frac{1}{b-c}<0,$$

$$\therefore f''(\xi_1)(a-c)-f''(\xi_2)(b-c)>0,$$

$f''(\xi_1)(a-c)-f''(\xi_2)(b-c)>0,$ 两边同时除以$(a-c)(b-c)$

整理得

$$\frac{f''(\xi_1)}{b-c}+\frac{f''(\xi_2)}{c-a}<0,$$

故$f''(\xi_1)$与$f''(\xi_2)$之间至少一个小于0.

例4. 证明：若 $f(x)\geq 0$ 则 $\varphi(x)=cf^2(x)(c>0$为常数$)$ 与$f(x)$有相同的极值点。

证 设 x_0是 $f(x)$ 的极值点（不妨设是极大值点），则存在

$N(x_0)$, s.t. $\forall x\in N(x_0)$, 有$f(x)<f(x_0)$. $\because c>0, f(x)\geq 0$,

$\therefore \forall x\in N(x_0)$, 有$cf^2(x)<cf^2(x_0)$, 即$\varphi(x)<\varphi(x_0)$,

故x_0也是$cf^2(x)$的极大值点。

反之，若x_0是$cf^2(x)$的极大值点，则$\exists N(x_0)$, s.t.

$\forall x\in N(x_0)$, 有$cf^2(x)<cf^2(x_0)$. $\because c>0, f(x)\geq 0$,

$\therefore \forall x\in N(x_0)$, 有$f(x)<f(x_0)$. 故$x_0$也是$f(x)$的极大值点。