§ 2.3节　习题课

天津大学数学学院

线性代数及其应用课程教学团队

定义3.2.1 设 V 是 $\mathbb{K}^n$ 的非空子集. 如果满足条件:

(1)$\forall \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in V$, 有$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V$(称$W$关于 $\mathbb{K}^n$ 的加法封闭);

(2)$\forall k \in \mathbb{K}$, $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, 有$k\boldsymbol{\alpha} \in V$(称$W$关于 $\mathbb{K}^n$的数量乘法封闭),

则称V是$\mathbb{K}^n$的一个线性子空间, 简称子空间, 记为$V < \mathbb{K}^n$.

注 $\mathbb{K}^n$的非空子集W是$\mathbb{K}^n$的子空间

$$\Leftrightarrow \forall k, l \in \mathbb{K}, \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W, \text{有 } k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} \in W.$$

例 证明集合 $\mathrm{W} = \{[a-b, a+b, 3b]^{\mathrm{T}} \mid \forall a, b \in \mathrm{R}\}$ 是 R^3的一个子空间.

例3 已知向量组

$$\alpha_1=[1,2,3]^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=[-1,-2,-3]^{\mathrm{T}},\ \alpha_3=[0,2,4]^{\mathrm{T}},\quad \alpha_4=[3,4,5]^{\mathrm{T}},$$

试判断向量α_4是否可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？若能表示，表示关系是否唯一，如何计算全部线性表示关系式？

解法1 观察可知$\boldsymbol{\alpha}_4=3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$,所以可以表示；
又$\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$,所以表法不唯一.

解法2 设$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{x}_3\boldsymbol{\alpha}_3$,这是一个非齐次线性方程组，考察该方程组解的情况.

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{\alpha}_3, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

即 $$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}$$ 或 $$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r(\tilde{\boldsymbol{R}})=r(\boldsymbol{R})=2<3$, **方程组有无穷多解，通解为**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k+3 \\ k \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \forall k\in\mathbb{K}$$

因此**向量**α_4**可由**$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$**线性表示,但表示式不唯一**，有无穷多种线性表示关系，全部的线性表示式为

$$\boldsymbol{\alpha}_4=(\boldsymbol{k}+3)\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{k}\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\forall \boldsymbol{k}\in\mathbb{K}$$

结论:

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s=\begin{bmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ns}\end{bmatrix};\ \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}\in\mathbb{K}^n$.则

$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ 存在数 $x_1,x_2,\cdots,\ x_s$，使得$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s$.

$\Leftrightarrow n\times s$ 非齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}$有解.

(即 $\boldsymbol{A}_{n\times s}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$有解,其中$\boldsymbol{A}_{n\times s}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_s]$,

$\boldsymbol{X}=[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_s]^{\mathrm{T}}$)

线性相关性判定

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m=\begin{bmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{nm}\end{bmatrix}\in\mathbb{K}^n.$

则列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关（线性无关）

$\Leftrightarrow n\times m$齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$,

即 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 有非零解（仅有零解）,其中$\boldsymbol{A}_{n\times m}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m]$.

定理3.3 设向量组$(\mathrm{I}):\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，而$(\mathrm{II}):\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关，则

1）β可由(I)线性表示；2）表示法必惟一.

推论1 设$(\mathrm{I}):\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，而$\alpha_{s+1}$不能由$(\mathrm{I})$线性表示，则扩充组$(\mathrm{II}):\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$也线性无关.

（习题2.3的第7题要用这个结论）

向量组间的线性表示与等价

定义　设(I): $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$;　(II): $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 是两个向量组. 如果(II)中每个向量都可由(I)线性表示，则称组(II)可由组(I)线性表示.

如果(I)与(II)可以互相线性表示，则称组(I)与组(II)等价，记作(I)$\cong$(II).

基本引理

引理3.3 设$\mathbb{K}^n$中向量组(I): $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$可由(II): $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表示. 则

(1) 如果$s > r$,则组(I): $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$一定线性相关;

(2) 如果(I): $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$线性无关, 则必有$s \leq r$.

推论 等价的线性无关组必包含有相同个数的向量.

向量组的秩

定义 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的极大无关组所含向量的个数称为该向量组的秩. 记为$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$.

规定 只含有零向量的向量组秩为0.

练习题1:

试证明: 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = s$.

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) < s$.

注：若干结论（作业）

⑴ 若向量组(I)的秩为r，则(I)中任r个线性无关的向量都是 组(I)的极大无关组.

（2）若向量组(I)可由(II)线性表示，则$r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{II})$.

（3） 等价向量组有相同的秩.

例2.3.6

设$\varphi_{\boldsymbol{A}}:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$是由矩阵$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$确定的$\mathbb{K}-$线性映射，则

$\varphi_{\boldsymbol{A}}$的像

$$\operatorname{Im}\varphi_{\boldsymbol{A}}=\varphi_{\boldsymbol{A}}(\mathbb{K}^n)=\{x_1\boldsymbol{A}^{(1)}+x_2\boldsymbol{A}^{(2)}+\cdots+x_n\boldsymbol{A}^{(n)}\,\big|\,x_i\in\mathbb{K}\}$$

是$\mathbb{K}^m$的子空间$\left\langle \boldsymbol{A}^{(1)},\boldsymbol{A}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{A}^{(n)}\right\rangle$,即$\boldsymbol{A}$的列空间，故$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im}\varphi_{\boldsymbol{A}})=r_C(\boldsymbol{A})$;

而$\varphi_{\boldsymbol{A}}$的核

$$\ker\varphi_{\boldsymbol{A}}=\varphi_{\boldsymbol{A}}^{-1}(0)=\{\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\ldots,x_n]^T\,\big|\,x_i\in\mathbb{K}\}$$

是$\mathbb{K}^m$的子空间，同时也是齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=0$ 的解空间.

矩阵的秩

矩阵的行秩与列秩是矩阵的秩的两种刻画。

定理2.3.2 $\boldsymbol{A}$ 的行秩 $r_r(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$ 的列秩 $r_c(\boldsymbol{A})$.

定义3 称 $\boldsymbol{A}$ 的行秩 $r_r(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$ 的列秩 $r_c(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

由定理3.2的证明过程可知：

结论　**初等行变换不改变矩阵的列向量之间的线性相关性.**

若$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \bar{\boldsymbol{A}}$（行阶梯矩阵），则二者行空间相等，秩相等.

设行阶梯矩阵$\bar{\boldsymbol{A}}$有r个非零行，则这r个非零行一定线性无关，从而构成$\bar{\boldsymbol{A}}$的行空间的基，因此行阶梯阵$\bar{\boldsymbol{A}}$的秩为r(且等于$\bar{\boldsymbol{A}}$的非零行个数).

由于初等行变换不改变$\boldsymbol{A}$的行空间，所以，计算$\boldsymbol{A}$的秩，只需将

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \bar{\boldsymbol{A}}\text{（行阶梯矩阵）},$$

则有$r(\boldsymbol{A}) = r_r(\boldsymbol{A}) = r_r(\bar{\boldsymbol{A}}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) = \bar{\boldsymbol{A}}$的非零行个数.

例2.3.4 求向量组$\alpha_1=[1,0,-1,1]^T$，$\alpha_2=[2,1,-2,0]^T, \alpha_3=[-2,-1,0,1]^T$, $\alpha_4=[0,-1,2,1]^T$，$\alpha_5=[0,0,-2,1]^T$的秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.(或求子空间$\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle$的基和维数）

解 将所给向量构成一个 4×5 的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 并进行初等行变换

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_3',\boldsymbol{\alpha}_4',\boldsymbol{\alpha}_5'] = \boldsymbol{R}.\end{aligned}$$

因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{R})=3$, 所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 3.

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个极大无关组, 并且有

$$\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3.$$

非齐次线性方程组解的存在及个数的判定

定理2.3.3 ①非齐次方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$有解$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})$.

$r(\boldsymbol{A})\neq r(\tilde{\boldsymbol{A}})\Leftrightarrow$ 无解;

② 当$r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=n$时,有惟一解;

③ 当$r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})<n$时,有无穷多解。

非齐次线性方程组解的判定

记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$=[\boldsymbol{\alpha}_1, \quad \boldsymbol{\alpha}_2, \quad \cdots \quad ,\boldsymbol{\alpha}_n],$

则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 可写成向量方程形式

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}.$$

延伸：

$$\text{方程组 } x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta} \text{ 有解}$$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta}$可由系数阵的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性表出；

$\Leftrightarrow$向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$与向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}$等价；

$\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta})$

$\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\tilde{\boldsymbol{A}})$

齐次线性方程组解的判定

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

若记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则上述方程组（2）可写成矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$.

定义　称齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的导出组.

① $r(\boldsymbol{A})=n \Leftrightarrow \boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 仅有零解;

② $r(\boldsymbol{A})<n \Leftrightarrow \boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 有无穷多解，从而有非零解.

齐次方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$ 仅有零解

$\Leftrightarrow$ 系数阵的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关;

$\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\mathrm{n}$

$\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{n}$

齐次方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ 系数阵的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关;

$\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)<\mathrm{n}$

$\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})<\mathrm{n}$

齐次线性方程组解的性质及结构

1、齐次线性方程组解的性质

（1）若η_1,η_2是$AX=0$的解，则$\eta_1+\eta_2$也是$AX=0$的解；

（2）若η是$AX=0$的解，则$k\eta,(k\in\mathbb{K})$也是$AX=0$的解.

注1 齐次线性方程组解的线性组合还是解；

注2 $AX=0$的解集

$$\ker(\varphi_A)=\left\{X\in\mathbb{K}^n \,\middle|\, AX=0\right\}$$

是$\mathbb{K}^n$的子空间，称之为$AX=0$的解空间。

注：当 $\ker(\varphi_A)\neq\{0\}$(即$r(A)<n$)时，基必存在.

齐次方程组的基础解系（解空间的基）

1） 基础解系的定义

定义4　齐次线性方程组 $AX=0$有非零解时，如果解向量$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$满足以下两个条件：

(1) $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性无关；

(2) $AX=0$的任一解都可由$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性表出，

则称向量组$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$为方程组$AX=0$ 的一个基础解系。

当$r(\boldsymbol{A}_{m\times n})<n$时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$有非零解，基础解系存在.

如果$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$为齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系,则$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的通解可表示为:

$$\boldsymbol{X}=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_t$是任意常数.

2）基础解系的求法

求解$m\times n$齐次线性方程组$AX=0$可分三步：

1) 对系数矩阵A作初等行变换，先将其化为行阶梯形矩阵.

2) 如果$r\left(A_{m\times n}\right)=r<n$，继续作初等行变换，将$A$化为行简化阶梯形矩阵$R$.

3) 选取主变量 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$ 为主变量，则得一般解

$$\begin{cases} x_{j_1} = -c_{1j_{r+1}} x_{j_{r+1}} - \cdots - c_{1j_n} x_{j_n}, \\ x_{j_2} = -c_{2j_{r+1}} x_{j_{r+1}} - \cdots - c_{2j_n} x_{j_n}, \\ \cdots, \\ x_{j_r} = -c_{rj_{r+1}} x_{j_{r+1}} - \cdots - c_{rj_n} x_{j_n}, \end{cases}$$

其中 $x_{j_{r+1}}, \cdots, x_{j_n}$ 任意取值.

不失一般性，不妨设$x_1, x_2, \cdots, x_r$为主变量，$x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$为自由变量（共计$n-r$个），则

$$A \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$AX=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

从而，通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n \\ \vdots \\ -b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n \\ \vdots \\ -b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n \\ 1\cdot x_{r+1}+0\cdot x_{r+2}\cdots+0\cdot x_n \\ \vdots \\ 0\cdot x_{r+1}+0\cdot x_{r+2}\cdots+1\cdot x_n \end{bmatrix} = x_{r+1}\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+2}\begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

则通解为

$$X = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$，为任意常数.

(1) 显然, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是原方程组的$n-r$个解;

(2) 易证 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$, 线性无关;

(3) 且通解

$$\boldsymbol{X} = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$, 为任意常数;

因此$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{AX} = 0$的一个基础解系, 且

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker(\varphi_{\boldsymbol{A}}) = n - r(\boldsymbol{A}).$$

齐次线性方程组解的结构

综上： ① $\dim\ker(\boldsymbol{A}) = n - r_r(A) = \dim_K(\ker(\varphi_A))$;

② 当 $r(A) = n$时，$AX = 0$仅有零解；

③当$r(\boldsymbol{A})<n$时，$\boldsymbol{AX}=0$有无穷多解,从而有非零解.称解空间$N(\boldsymbol{A})$的任一个基为$\boldsymbol{AX}=0$的一个基础解系,

$\boldsymbol{AX}=0$的通解为

$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r},$$

其中$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$为$\boldsymbol{AX}=0$的一个基础解系,$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任意常数.

$$A_{m\times n}X=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

基础解系的另一取法

可对$x_{r+1},\cdots,x_n$取下列 $n-r$ 组数：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

分别代入$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n \end{cases}$

依次得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix}.$

从而求得原方程组的 $n-r$ 个解:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例2　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & -3\\0 & -1 & 1 & -3 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & -2\\0 & 1 & -1 & 3 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因为$r(\boldsymbol{A})=2<5$ **故方程组有无穷多解，**

且基础解系中含有3个解向量.

同解方程组为$\begin{cases}x_1=-2x_3-x_4+2x_5,\\x_2=x_3-3x_4+x_5\end{cases}$

令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

得原方程组的一个基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故原方程组的通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$.

其中k_1, k_2, k_3为任意常数.

例**6**：已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是齐次线性方程组$AX=0$的一个基础解系，证明$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$也是$AX=0$的一个基础解系.

习题2.3的第6题

求线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=0 \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=0 \\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$$
的基础解系。

非齐次线性方程组解的性质及结构

1．非齐次线性方程组解的性质

(1)设 $\boldsymbol{X}_1$ 及 $\boldsymbol{X}_2$ 都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解，则 $\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2$ 为导出的齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(2) 设$\boldsymbol{X}_0$是方程 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解，η是导出组 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{X}_0+\eta$ 是方程组 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 的解.

非齐次线性方程组的通解

定理

当$r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=\mathrm{r}<n$时，$\boldsymbol{AX}=\beta$有通解

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r},$$

其中$\boldsymbol{X}_0$为$\boldsymbol{AX}=\beta$的一个特解，

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$为导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，

$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任意常数.

例5　求下述方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \\ 8 & 3 & 4 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$,得$x_1 = -\frac{9}{2}, x_2 = \frac{23}{2}$.

求得特解 $\left[-9/2,\quad 23/2,\quad 0,\quad 0,\quad 0\right]^{\mathrm{T}}$

下面求导出组的基础解系，令

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

代入 $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + 2x_5, \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - x_4 - 3x_5 \end{cases}$

得导出组的一个基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

所以方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-9/2\\23/2\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{k_1},\boldsymbol{k_2},\boldsymbol{k_3}$为任意常数.

$$
\rightarrow\begin{pmatrix}
1 & 0 & \tfrac{1}{2} & 0 & -2 & -\tfrac{9}{2} \\
0 & 1 & \tfrac{1}{2} & 1 & 3 & \tfrac{23}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

由$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\tilde{A})=2<5$,知方程组有无穷多解.

且原方程组等价于方程组

$$
\begin{cases}
x_1=-\dfrac{1}{2}x_3+2x_5-\dfrac{9}{2}, \\
x_2=-\dfrac{1}{2}x_3-x_4-3x_5+\dfrac{23}{2}
\end{cases}
$$

习题课（2.3节）

例**6**： 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是齐次线性方程组$AX=0$的一个基础解系，证明$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$也是$AX=0$的一个基础解系.

习题2.3的第6题

求线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=0 \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=0 \\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$$
的基础解系。

1、设$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的解向量，且$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，求$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的通解。

解 由题设知$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$为三元方程组，且有无穷多解，又$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,故$1\leq r(A)\leq 2$,即$r(A)=1$或2.

令$\eta_1=X_2-X_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\eta_2=X_3-X_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，显然$\eta_1$，$\eta_2$线性无关，故$r(A)=1$，且$\eta_1$，$\eta_2$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的基础解系，从而$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的通解为

$$X=X_1+k_1\eta_1+k_2\eta_2，其中k_1,k_2为任意常数.$$

3、已知4阶方阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$均为4维列向量，其中$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$.如果$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组$AX=\beta$的通解.

解法1 令 $\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}$，则由$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 代入上式，得

$$(2x_1+x_2-3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(x_4-1)\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$$

由$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，知

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 = 0, \\ -x_1 + x_3 = 0, \\ x_4 - 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 + 3, \\ x_3 = x_1, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

解得通解为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + k\boldsymbol{\eta} = [0, \quad 3, \quad 0, \quad 1]^{\mathrm{T}} + k[1, \quad -2, \quad 1, \quad 0]^{\mathrm{T}},$$

其中k为任意常数.

解法2 因为$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，且$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，所以$r(\boldsymbol{A})=3$，且$\eta=[1,-2,1,0]^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解.

又$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，故$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$有解，因此$r(\tilde{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=3<4$，从而$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解，且$X_0=[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}$为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的一个特解，

通解为 $$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0+k\boldsymbol{\eta}=[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}+k[1,-2,1,0]^{\mathrm{T}},$$

其中k为任意常数.

例 1 设向量组(Ⅰ) $=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$，(Ⅱ) $=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\4\\2\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\a\\-1\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}2\\7\\3\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\3\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}3\\10\\4\\b\end{bmatrix}.$$

(1) a,b 取何值时，向量组(Ⅱ)可由(Ⅰ)线性表示？

(2) a,b 取何值时，向量组(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示？

(3) a,b 取何值时，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)线性等价？

解 $[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3; \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3]$

$$=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 3 & 10 \\ 2 & 0 & a & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & b \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-4r_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & a & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array}\right] = [\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2', \boldsymbol{\alpha}_3; \boldsymbol{\beta}_1', \boldsymbol{\beta}_2', \boldsymbol{\beta}_3'].$$

记$(\mathrm{I}') = \{\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2', \boldsymbol{\alpha}_3'\}$，$(\mathrm{II}') = \{\boldsymbol{\beta}_1', \boldsymbol{\beta}_2', \boldsymbol{\beta}_3'\}$，则

(1) (II)可由(I)线性表示$\Leftrightarrow(\mathrm{II}')$可由$(\mathrm{I}')$线性表示$\Leftrightarrow b-2=0 \Leftrightarrow b=2$；

(2) (I)可由(II)线性表示$\Leftrightarrow(\mathrm{I}')$可由$(\mathrm{II}')$线性表示$\Leftrightarrow a-1=0 \Leftrightarrow a=1$；

(3) $(\mathrm{I}) \cong (\mathrm{II}) \Leftrightarrow a=1$且$b=2$.

例 2 设 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}=4$， $r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5\}=3$， 求 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4+\alpha_5\}$.

解 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}=4 \Rightarrow \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$线性无关

$\Rightarrow \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$线性无关，且 α_4 不能由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表示；

$r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5\}=3 \Rightarrow \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5\}$线性相关

$\Rightarrow \alpha_5$ 可由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表示.

可知 $\alpha_4+\alpha_5$ 不能由无关组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表示，从而

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4+\alpha_5\}\text{线性无关} \Rightarrow r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4+\alpha_5\}=4.$$

例2.3.8 求 R^4 的子空间

$$W=\{[a+b+2c,b+c,-b-c+d,d]^{\mathrm{T}}\mid\forall a,b,c,d\in\mathrm{R}\}$$

的一个基及其维数.

解 显然

$$
\begin{aligned}
W &= \left\{ a\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d\in\mathbb{R} \right\} \\
&= L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4),
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,-1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[2,1,-1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=[0,0,1,1]^{\mathrm{T}}$.

由

$$
[\boldsymbol{\alpha}_1.\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]=\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&-1&-1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{R},
$$

可知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1.\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{R})=3$, 且 $\boldsymbol{R}$ 的第 1,2,4 列所构成的向量组线性无关, 因此对应的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 W 的一个基, $\dim W=3$.

习题2.3的第1题

证明下面关于"线性相关"，"线性无关"的结论：

(a) 如果 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 中的一部分向量线性相关，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关。

(b) 任何一组向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，如果包含零向量，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关。

(b) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 其中有一个向量是其余向量的线性组合。

(c) 如果 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出。

习题2.3的第2题

证明：$\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,1,2)$，$\alpha_3=(1,2,3)$ 是 R^3 的一组基，并求 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使 $\beta=(6,9,14)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$。

习题2.3的第7题

设 U, V 是两个子空间，如果 $U \subseteq V$，则 $\dim_K(U) \leq \dim_K(V)$

且 $\dim_K(U) = \dim_K(V) \Longleftrightarrow U = V$.

可利用引理3.3证明

$\mathbb{K}$-线性映射

定义2.1　设$\mathbb{K}$是一个（数）域，映射$\boldsymbol{f}:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$称为$\mathbb{K}$-线性映射，如果

(1) $\forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{K}^n$, 有 $f(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=f(\boldsymbol{\alpha})+f(\boldsymbol{\beta})$;

(2) $\forall \boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{K}^n,\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{K}^n$, 有$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha})$.

注：$\boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{f}(-\alpha)=-\boldsymbol{f}(\alpha)$.

习题2.3的第3题

$$\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,$$

$$\varphi_A(x) = x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \cdots + x_n A^{(n)} \in \mathbb{K}^m, \quad x \in \mathbb{K}^n$$

$\varphi_A(\mathbb{K}^n) = A$的列空间$< A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)} >$

设 $\varphi_A: K^n \to K^m$ 是由矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 确定的 K-线性映射.

证明:(1) φ_A 的像 $\varphi_A(K^n) = \{\varphi_A(x) \mid \forall x \in K^n\}$ 是 K^m 的子空间

且 $\dim_K(\varphi_A(K^n)) = r_c(A)$.

(2) φ_A 的核 $\ker(\varphi_A) = \{x \in K^n \mid \varphi_A(x) = 0\}$ 是 K^n 的子空间

且 $\dim_K(\ker(\varphi_A)) = n - r_r(A)$.

习题2.3的第4题

设 $f: K^n \longrightarrow K^m$ 是任意 K-线性映射，令 $\dim_K(\ker(f)) = s$，$\dim_K(f(K^n)) = t$. 证明：$\dim_K(K^n) = s + t$ (i.e. $n = s+t$).

(提示：令 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in \ker(f)$ 是一组基，$\beta_1, \cdots, \beta_t \in K^n$ 使 $f(\beta_1), \cdots, f(\beta_t) \in f(K^n)$ 是一组基. 证明：$\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t \in K^n$ 是一组基.)

备注：也可根据第8题的结论，取$\mathbf{U} = \mathbf{K}^n$ 即可得到第4题的结论。

习题2.3的第5题

利用习题3和习题4证明：$r_r(A)=r_c(A)$.(即行秩=列秩的另一证明).

根据第**4**题的结论，$n=\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)=\dim_{\mathbb{K}}(\ker(\varphi_A))+\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(\varphi_A))$

根据第**3**题的结论$\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(\ker(\varphi_A))=n-r_r(A),\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(\varphi_A))=r_c(A)$

$\Rightarrow n=n-r_r(A)+r_c(A)\Rightarrow r_r(A)=r_c(A)$

复习　单射（定义1.6）：映射 $f: X \to Y$ 称为单射，如果 $\forall a \neq b \in X \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.

$f: X \to Y$ 为单射 $\Leftrightarrow$ 如果 $f(a) = f(b)$，则必有 $a = b$.

满射：映射 $f: X \to Y$ 称为满射，如果对 $\forall y \in Y$, 都至少存在一个 $x \in X$, 使得 $f(x) = y$.

$f: X \to Y$ 为满射 $\Rightarrow f(X) = Y$.

习题2.3的第8题

设 U, V 是子空间，$f: U \to V$ 是 K-线性映射.

证明：(1) f 是单射 $\Longleftrightarrow$ $\ker(f) = \{0\}$.

(2) f 是满射 $\Longleftrightarrow$ $\dim_K f(U) = \dim_K(V)$.

(3) (推广习题4). $\dim_K(U) = \dim_K \ker(f) + \dim_K f(U)$.

（第8题的（3）可以覆盖第4题）

8(3) 证明 $\dim_K(U)=\dim_K\ker(f)+\dim_K f(U)$.

设 $\dim_K\ker(f)=s$, $\dim_K f(U)=t$ 往证 $\dim_K U=s+t$.

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是 $\ker(f)$ 的一组基, 由于 $U\xrightarrow{f}\underline{f(U)}$ 是满射 ($\because \forall y\in f(U), \exists x\in U$ 使 $f(x)=y$)($f(U)$的定义)

所以总存在 $\beta_1,\cdots,\beta_t\in U$, 使 $f(\beta_1),\cdots,f(\beta_t)$ 是 $f(U)$ 的一组基.

断言 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 是 U 的一组基, 这只需证明两点:

(i) 首先证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性无关.

设 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+l_1\beta_1+\cdots+l_t\beta_t=0$, (*)

则 $k_1f(\alpha_1)+\cdots+k_sf(\alpha_s)+l_1f(\beta_1)+\cdots+l_tf(\beta_t)=0$

因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s\in Ker(f)$, 所以 $f(\alpha_i)=0$ $i=1,\cdots,s$.

故 $l_1f(\beta_1)+\cdots+l_tf(\beta_t)=0$

又 $f(\beta_1),\cdots,f(\beta_t)$ 线性无关. 所以上式成立当且仅当 $l_i=0$ $i=1,\cdots,t$

从而 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$, 由 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 是 $ker(f)$ 的基知 $k_1=\cdots=k_s=0$

(ii) 其次证明 $U=\langle \alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\rangle$.

$\forall \alpha\in U$，则 $f(\alpha)\in f(U)$. 从而

$$f(\alpha)=\lambda_1 f(\beta_1)+\cdots+\lambda_t f(\beta_t) \underset{\text{由}f\text{是}k\text{-线性映射}}{=\!=\!=} f(\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_t\beta_t)$$

$$\Rightarrow f\Big(\alpha-\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\beta_i\Big)=0 \Rightarrow \alpha-\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\beta_i\in \ker(f)=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_s\rangle$$

从而 $\alpha-\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\beta_i=\sum_{i=1}^{s}\mu_i\alpha_i$，即

$$\alpha=\sum_{i=1}^{s}\mu_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\beta_i$$

这说明 $\alpha\in\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\rangle$

由 α 的任意性知 $U=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\rangle$.

习题2.3的第9题

设 $A\in M_{m\times s}(K)$，$B\in M_{s\times n}(K)$. $\varphi_A: K^s\to K^m$，$\varphi_B: K^n\to K^s$ 是它们定义的K-线性映射。$\varphi_{A\cdot B}=\varphi_A\cdot\varphi_B: K^n\longrightarrow K^m$. 试证明：

(1) $\varphi_{AB}(K^n)\subseteq\varphi_A(K^s)$，(2) $\ker(\varphi_B)\subseteq\ker(\varphi_{AB})$

(3) $r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}$.

(1) $\varphi_B: K^n \to K^s$, $\varphi_A: K^s \to K^m$, $\varphi_{AB}: K^n \to K^m$.

$\varphi_B(K^n) \subseteq K^s \Rightarrow \varphi_A(\varphi_B(K^n)) \subseteq \varphi_A(K^s)$

而 $\varphi_{AB}(K^n) = \varphi_A(\varphi_B(K^n))$ 所以 $\varphi_{AB}(K^n) \subseteq \varphi_A(K^s)$.

(2) $\forall x \in \ker(\varphi_B)$, 有 $\varphi_B(x) = 0$. 从而

$\varphi_{AB}(x) = \varphi_A(\varphi_B(x)) = \varphi_A(0) = 0 \Rightarrow x \in \ker(\varphi_{AB})$,

所以 $\ker(\varphi_B) \subseteq \ker(\varphi_{AB})$.

(3) $r(AB) = r_c(AB) \xlongequal{\text{由3题(1)知}} \dim_K(\varphi_{AB}(K^n))$

$r(A)=r_c(A)=\dim_K(\varphi_A(K^s))$, $r(B)=\dim_K(\varphi_B(K^n))$,

首先由本题的(1)知 $\varphi_{AB}(K^n)\subseteq\varphi_A(K^s) \xRightarrow[\text{由第7题结论}]{} \dim_K(\varphi_{AB}(K^n))\le\dim_K(\varphi_A(K^s))$

从而 $r(AB)\le r(A)$.

其次，记 $U=\varphi_B(K^n)$，则 $\varphi_{AB}(K^n)=\varphi_A(\varphi_B(K^n))=\varphi_A(U)$，

由第8题结论知。($\dim_K U=\dim_K\ker(\varphi_A)+\dim_K\varphi_A(U)$)

$$r(B)=\dim_K U\ge\dim_K\varphi_A(U)=\dim_K\varphi_{AB}(K^n)=r(AB).$$

综上，$r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$.

证法1

或由9(2)知 $\ker(\varphi_B) \subseteq \ker(\varphi_{AB})$，所以由7题结论知

$$\dim_K(\ker(\varphi_B)) \le \dim_K(\ker(\varphi_{AB}))$$

又由3题(2)知 $\dim_K \ker\varphi_B = n - r(B)$，$\dim_K(\ker\varphi_{AB}) = n - r(AB)$

所以 $r(B) \ge r(AB)$.

证法2

习题2.3的第10题

$A, B, \varphi_A, \varphi_B$ 如上题. 设 $U = \varphi_B(K^n)$, $V = \varphi_{AB}(K^n)$.

$f = \varphi_A|_U : U \longrightarrow K^m$ 表示 φ_A 在 $U \subset K^s$ 的限制映射 (i.e. $\forall x \in U$, $f(x) = \varphi_A(x)$). 证明: (1) $f: U \to K^m$ 是 K-线性映射, 且 $f(U) = V$.

(2) ~~ker(f) 至 ker(φ_A)~~ 则, $\ker(f) \subseteq \ker(\varphi_A)$.

(3) 利用习题8 (3), 证明 $r(A) + r(B) - s \leq r(AB)$.

10. $f=\varphi_A|_U: U\to K^m$，其中 $U=\varphi_B(K^n)\subseteq K^s$，$\varphi_B: K^n\to K^s$.

即 $\forall x\in U$，有 $f(x)=\varphi_A(x)$. $\qquad\qquad \varphi_A: K^s\to K^m$.

证明 (1)：记 $V=\varphi_{AB}(K^n)$，$\boxed{\text{证明 } f: U\to K^m \text{ 是 } K\text{-线性映射，且 } f(U)=V.}$

$\forall x, y\in U$，有 $f(x+y)=\varphi_A(x+y)=\varphi_A(x)+\varphi_A(y)=f(x)+f(y)$；

$\forall \lambda\in K$，$x\in U$，有 $f(\lambda x)=\varphi_A(\lambda x)=\lambda\varphi_A(x)=\lambda f(x)$

$\therefore$ f 是 K-线性映射.

$\forall y\in f(U)$，则 $\exists\, x\in U$，使 $f(x)=y=\varphi_A(x)\in\varphi_A(U)=\varphi_A(\varphi_B(K^n))=V$

所以 $f(U)\subseteq V$，

$\forall z\in V=\varphi_{AB}(K^n)$，则 $\exists\, x\in K^n$，使 $z=\varphi_{AB}(x)=\varphi_A(\underbrace{\varphi_B(x)}_{\in U=\varphi_B(K^n)})\in\varphi_A(U)=f(U)$

所以 $V\subseteq f(U)$

故 $f(U)=V$.

(2) $\ker(f)\subseteq\ker(\varphi_A)$

(2) 证明 $\ker(f) \subseteq \ker(\varphi_A)$

证：$\forall \alpha \in \ker(f)$，则 $\alpha \in U$，且 $f(\alpha) = \varphi_A(\alpha) = 0$. $\Rightarrow \alpha \in \ker(\varphi_A)$.

(3) 利用习题8(3)证明 $r(A)+r(B)-s \le r(AB)$。

证：由习题3结论知 $r(A)=\dim_K \varphi_A(K^s)$， $r(B)=\dim_K \varphi_B(K^n)=\dim_K U$.

$$r(AB)=\dim_K \varphi_{AB}(K^n)=\dim_K V$$

$$r(A)+r(B)-s \le r(AB)$$

$$\Leftrightarrow \dim_K \varphi_A(K^s)+\dim_K U-s \le \dim_K V$$

$$\Leftrightarrow \dim_K \varphi_A(K^s)+\underbrace{\overset{\shortparallel}{\dim_K}\ker f+\dim_K f(U)}-s \le \dim_K V \quad （由第8题之(3)）$$

$\Leftrightarrow \dim_K \varphi_A(K^s) + \dim_K \ker(f) \le s$ （因为 $f(U)=V$，$\dim_K f(U)=\dim V$）

$\Leftrightarrow \dim_K \varphi_A(K^s) + \dim_K \ker(f) \le \dim_K \ker\varphi_A + \dim_K \varphi_A(K^s)$

（再次由8题和(3) $\varphi_A: K^s \to K^m$，故

$s = \dim_K K^s = \dim_K \ker\varphi_A + \dim_K \varphi_A(K^s)$）

$\Leftrightarrow \dim_K \ker(f) \le \dim_K \ker\varphi_A$）

而由~~本题~~ 例(2)知 $\ker(f) \subseteq \ker(\varphi_A)$，所以 $\dim_K \ker(f) \le \dim_K \ker\varphi_A$）成立。

由7题结论

习题2.3的第11题

设 U, V 是 K^m 的子空间，证明：(1) 集合 $V+U=\{\alpha+\beta \mid \alpha\in V, \beta\in U\}$ 也是 K^m 的子空间，(2) $V\cap U$ 也是 K^m 的子空间.

(3) $\dim_K(V+U)\le \dim_K(V)+\dim_K(U)$.

11. (1) $\forall\ x,\ x' \in U+V$，不妨设 $x=\alpha+\beta,\ x'=\alpha'+\beta'$，

其中 $\alpha,\ \alpha' \in U,\ \beta,\ \beta' \in V$，则

$$x+x' = (\alpha+\beta)+(\alpha'+\beta') = (\alpha+\alpha')+(\beta+\beta') \in U+V$$

$\forall \lambda \in K,\ \lambda x = \lambda(\alpha+\beta) = \lambda\alpha+\lambda\beta \in U+V.$

$\therefore\ U+V$ 是 K^m 的子空间.

(2) $\forall \alpha, \alpha' \in U\cap V$，则 $\alpha, \alpha' \in U$ 且 $\alpha, \alpha' \in V$.

因为 U, V 为 K^n 的子空间，所以 $\alpha+\alpha' \in U$ 且 $\alpha+\alpha' \in V$,

从而 $\alpha+\alpha' \in U\cap V$.

$\forall \lambda \in K$，有 $\lambda\alpha \in U$ 且 $\lambda\alpha \in V$，从而 $\lambda\alpha \in U\cap V$.

故 $U\cap V$ 也是 K^n 的子空间.

(3) 设 $\dim U = s$, $\dim V = t$,

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是 U 的一组基, $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 是 V 的一组基.

则 $\forall\, x \in U+V$, $\exists\, \alpha \in U, \beta \in V$ 使 $x = \alpha + \beta$.

显然 x 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t$ 线性表示.

从而 $U+V$ 的基也可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t$ 线性表示. 由引理3.3

$$\dim_K(U+V) \le s+t = \dim_K U + \dim_K V.$$

习题2.3的第12题

设 $A, B \in M_{m\times n}(K)$，证明：$r(A+B) \le r(A) + r(B)$.

（提示：设 $\varphi_A, \varphi_B : K^n \to K^m$，证明 φ_{A+B} 的像在 $\varphi_A(K^n)+\varphi_B(K^n)$ 中）.

i.e. $Im(\varphi_{A+B}) \subset Im(\varphi_A) + Im(\varphi_B)$.

设 $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_{A+B} : K^n \to K^m$ ∴ $\varphi_{A+B}($

由由 3 题(2)知 $r(A+B) = r_C(A+B) = \dim(\varphi_{A+B}(K^n))$

$r(A) = r_C(A) = \dim \varphi_A(K^n)$,

$r(B) = r_C(B) = \dim \varphi_B(K^n)$.

故故只需证 $\dim \varphi_{A+B}(K^n) \leq \dim \varphi_A(K^n) + \dim \varphi_B(K^n)$.

由由 7 题知 只需证 $\varphi_{A+B}(K^n) \subseteq \varphi_A(K^n) + \varphi_B(K^n)$

事实上，$\forall\, y \in \varphi_{A+B}(K^n)$，则 $\exists\, x \in K^n$，使

$$y = \varphi_{A+B}(x) = (A+B)x = Ax + Bx$$

$$= \varphi_A(x) + \varphi_B(x)$$

$$\in \varphi_A(K^n) + \varphi_B(K^n).$$

$$\therefore\ \varphi_{A+B}(K^n) \subseteq \varphi_A(K^n) + \varphi_B(K^n).$$

谢谢！