高等数学第七章

第五节 直线方程

天津大学
数学学院
郭飞

§7.5　直线方程

一、直线方程

二、线面间的位置关系

三、平面束问题

四、点到直线的距离

五、内容小结、思考与练习

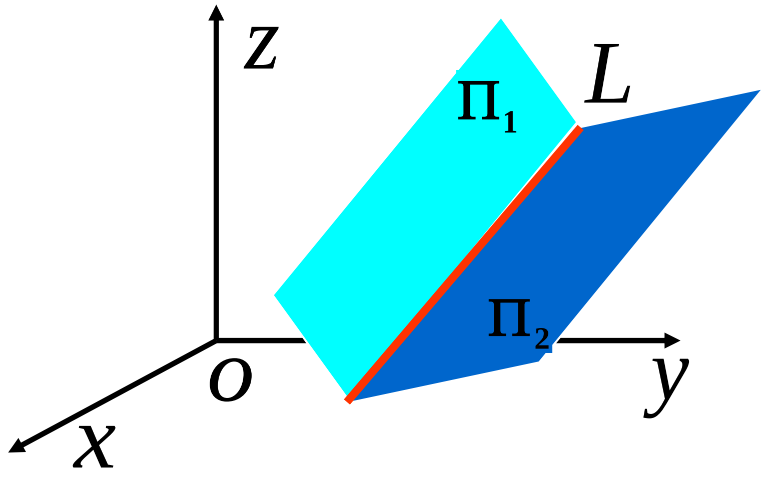
一、直线方程

1. 一般式方程

直线可视为两平面交线，因此其一般式方程

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}}$$

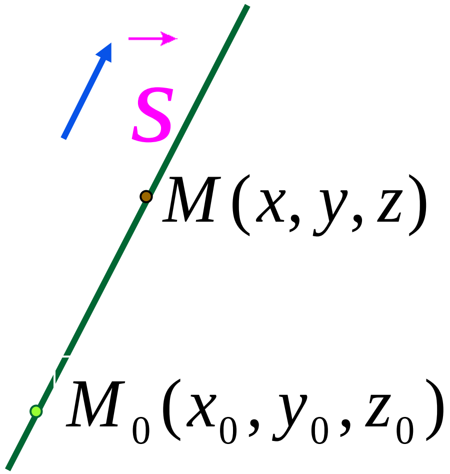
(不唯一)



2. 对称式方程（标准方程）

已知直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$和它的方向向量 $\vec{s}=(m, n, p)$，设直线上的动点为 $M(x, y, z)$

则 $\overrightarrow{M_0M} \,//\, \vec{s}$



故有

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}}$$

此式称为直线的**对称式方程**(也称为**点向式方程**)

说明: 某些分母为零时, 其分子也理解为零.

例如, 当 $m=n=0,\ p\neq 0$ 时, 直线方程为 $\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$

3. 参数式方程

设 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

得参数式方程：

$$\boxed{\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}}$$

例5.用对称式及参数式表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

解题思路: 先找直线上一点;

再找直线的方向向量.

例5.用对称式及参数式表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

解:先在直线上找一点.

令 $x=1$, 解方程组 $\begin{cases} y+z=-2 \\ y-3z=6 \end{cases}$ 得 $y=0,\ z=-2$

故 $(1,0,-2)$是直线上一点 .

再求直线的方向向量 $\vec{s}$.

交已知直线的两平面的法向量为

$$\vec{n}_1=(1,1,1),\qquad \vec{n}_2=(2,-1,3)$$

$$\because\quad \vec{s}\perp\vec{n}_1,\vec{s}\perp\vec{n}_2\qquad \therefore\quad \vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$$

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=(4,-1,-3)$$

故所给直线的对称式方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$ $=t$

参数式方程为 $\begin{cases}x=1+4t\\ y=-t\\ z=-2-3t\end{cases}$

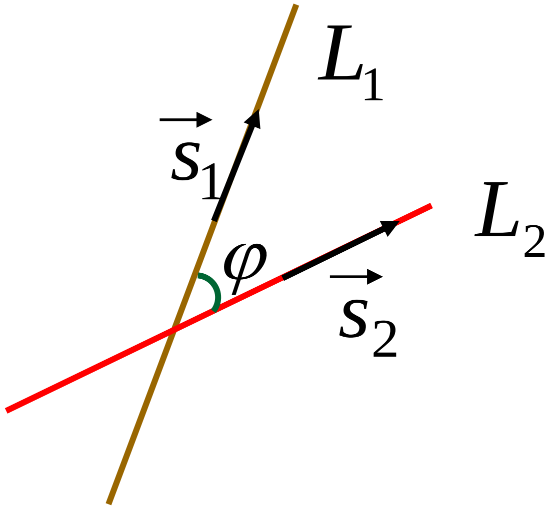
例5.用对称式及参数式表示直线 $\begin{cases}x+y+z+1=0\\ 2x-y+3z+4=0\end{cases}$

已在直线上找一点 $(1,0,-2)$

二、线面间的位置关系

1. 两直线的夹角

两直线的夹角指其方向向量间的夹角(不大于90度)



设直线 L_1 , L_2 的方向向量分别为

$$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1),\ \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$$

则两直线夹角 φ 满足

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$$

$$= \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\ \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

特别有:

$$(1)\ \ L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$$

$$\Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

$$(2)\ \ L_1 // L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 // \vec{s}_2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

例6. 求以下两直线的夹角

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1} \qquad L_2: \begin{cases} x+y+2=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$$

解: 直线 L_1的方向向量为 $\vec{s}_1 = (1, -4, 1)$

直线 L_2 的方向向量为 $\vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, -2, -1)$

二直线夹角φ的余弦为

$$\cos\varphi = \frac{|1\times 2 + (-4)\times(-2) + 1\times(-1)|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

从而 $\varphi = \frac{\pi}{4}$

数学一考研填空

1\. 与直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$ 及 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$

都平行且过原点的平面方程为（ $x-y+z=0$ ）.

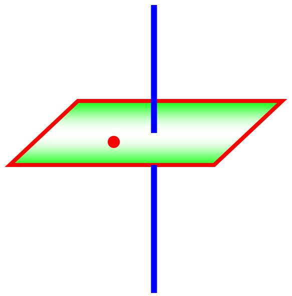
提示 平面过原点

法向量 $\vec{n}=(0,1,1)\times(1,2,1)=(1,-1,1)$

由点法式方程即可得.

数学一考研填空

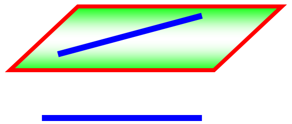
2. 过点$(1,2,-1)$且与直线$\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$垂直的



平面方程是($\mathbf{x-3y-z+4=0}$).

提示 $\vec{n}=(-1,3,1)$

3. 过直线$L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$且平行于



直线$L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$的平面方程为($\mathbf{x-3y+z+2=0}$).

提示 $\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=(1,0,-1)\times(2,1,1)=(1,-3,1)$

点$(1,2,3)$

数学一考研 选择

4. 两直线$L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$与$L_2:\begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$的夹角为(C).

$A.\dfrac{\pi}{6}$ $B.\dfrac{\pi}{4}$ $C.\dfrac{\pi}{3}$ $D.\dfrac{\pi}{2}$

提示 $\vec{s}_1=(1,-2,1)$

$\vec{s}_2=(1,-1,0)\times(0,2,1)=(-1,-1,2)$

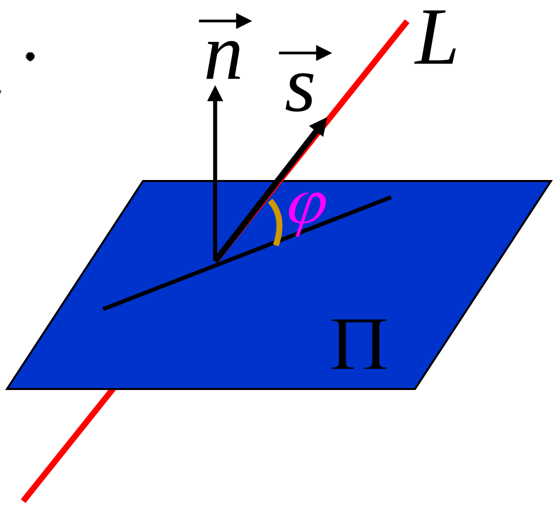
两直线的夹角公式:

$$\cos(\widehat{L_1,L_2})=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

2. 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线所夹锐角 φ 称为直线与平面间的夹角;

当直线与平面垂直时,规定其夹角 $\pi/2$.



设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$

平面 Π 的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$

则直线与平面夹角 φ 满足

$$\sin\varphi=\cos(\widehat{\vec{s},\vec{n}})$$

$$=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

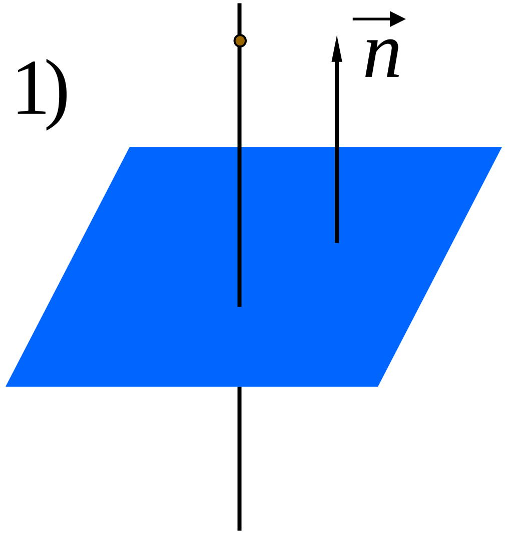
特别有:

(1) $L \perp \Pi \iff \vec{s} \,//\, \vec{n} \iff \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$

(2) $L \,//\, \Pi \iff \vec{s} \perp \vec{n} \iff Am + Bn + Cp = 0$

例7. 求过点(1,−2 , 4) 且与平面 $2x - 3y + z - 4 = 0$ 垂直的直线方程.

解: 取已知平面的法向量 $\vec{n} = (2, -3, 1)$ 为所求直线的方向向量.



则直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}$$

数学一考研选择

设直线L为$\begin{cases} x+3y+2z+1=0, \\ 2x-y-10z+3=0, \end{cases}$

平面Π为$4x-2y+z-2=0$,则(C).

A. L平行于Π　　B. L在Π上

C. L垂直于Π　　D. L与Π斜交

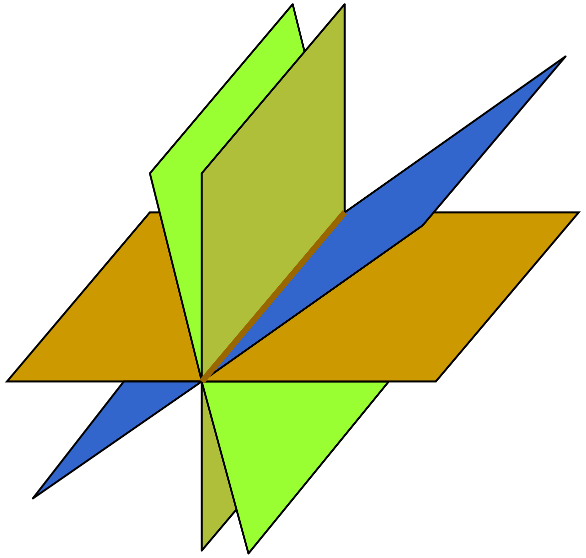
提示　$\vec{s}=(m, n, p)=(1,3,2)\times(2,-1,-10)$

$=(-28,14,-7) \,//\, (4,-2,1)$

三、平面束

过直线

$$L:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$



的平面束方程

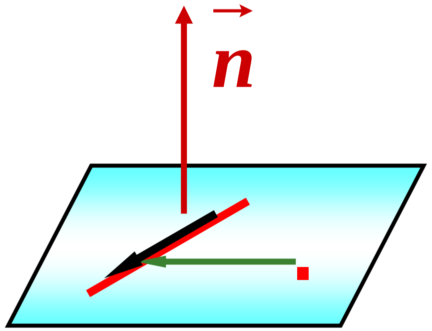
$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1) \\ +\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

$(\lambda_1,\lambda_2$ 不全为0$)$

例8. 求过直线 $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ 和点$(1,1,-1)$的平面方程.

解: 过已知直线的平面束方程为

$$x+y-z+\lambda(x-y+z-1)=0 \quad (1)$$



将点 $(1,1,-1)$ 代入(1)中, 得

$$1+1+1+\lambda(1-1-1-1)=0 \Rightarrow \lambda=\frac{3}{2}$$

将 $\lambda=\frac{3}{2}$ 代入(1)中, 得 $5x-y+z-3=0$

思考: 还有别的方法吗?

试比较哪种方法简单?

例9. 求过直线: $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0, \end{cases}$ 且与平面

$x-4y-8z+12=0$ 组成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

解: 过已知直线的平面束方程为

$$x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0,$$

即 $(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0,$

其法向量 $\vec{n}_1=(1+\lambda,5,1-\lambda)$

又已知平面的法向量 $\vec{n}_2=(1,-4,-8).$

求过直线：$\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0, \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 组成 $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$ 角的平面方程.

$\vec{n}_1=(1+\lambda,5,1-\lambda)$

$\vec{n}_2=(1,-4,-8)$

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

$$=\frac{|(1+\lambda)\cdot 1+5\cdot(-4)+(1-\lambda)\cdot(-8)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}}$$

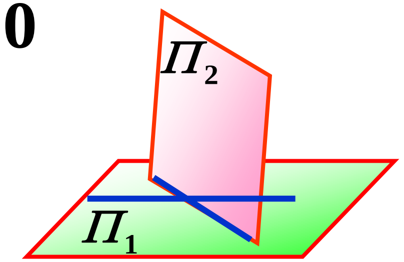
即 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{|\lambda-3|}{\sqrt{2\lambda^2+27}}$，　由此得 $\lambda=-\dfrac{3}{4}$.

代回平面束方程为　$x+20y+7z-12=0.$

$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0,$

例10. 求通过直线$L:\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$的两个互相垂直的平面,其中一个平面平行于直线$x=y=z$. 上海交大考研题

解: 设平面束方程 $x+y+\lambda(x-y+z-2)=0$



即 $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+\lambda z-2\lambda=0$

$$\vec{n}_1=(1+\lambda,1-\lambda,\lambda)$$

设平行于直线$x=y=z$的平面为Π_1,

由 $(1+\lambda)+(1-\lambda)+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-2$

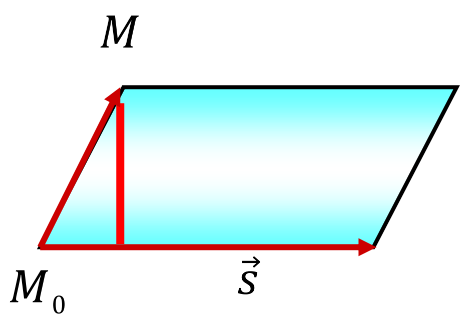
平面Π_1方程 $x-3y+2z-4=0$;

平面Π_2方程 $4x+2y+z-2=0$.

由 $(1+\lambda)-3(1-\lambda)+2\lambda=0 \quad \Rightarrow \lambda=\dfrac{1}{3}$

四、点到空间直线的距离

已知点$M(x,y,z)$和直线L: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$,



求点M到直线L的距离d.

设$M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$, L的方向向量$\vec{s}=(m,n,p)$,则

$\left|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M}\right|$是以$\vec{s}$和$\overrightarrow{M_0M}$为邻边的平行四边形的面积,记为$S$, 所以

$$S=\left|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M}\right|=\left|\vec{s}\right|d$$

$$\therefore d=\frac{\left|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M}\right|}{\left|\vec{s}\right|}.$$

内容小结

1. 空间直线方程

一般式 $$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

对称式 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

参数式 $$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases} \qquad (m^2+n^2+p^2\neq 0)$$

2. 线与线的关系

直线 L_1: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, $\vec{s}_1=(m_1, n_1, p_1)$

直线 L_2: $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, $\vec{s}_2=(m_2, n_2, p_2)$

$$L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \Longleftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

$$L_1 // L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

夹角公式: $\cos\varphi=\dfrac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$

3. 面与线间的关系

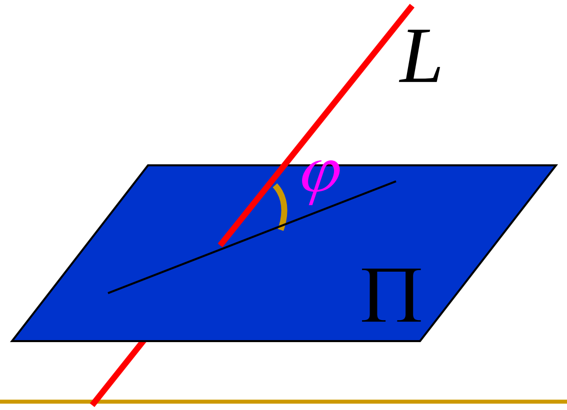
平面 Π： $Ax+By+Cz+D=0,\ \vec{n}=(A,B,C)$

直线 L： $\dfrac{x-x}{m}=\dfrac{y-y}{n}=\dfrac{z-z}{p},\quad \vec{s}=(m,n,p)$

$$L\perp\Pi \Longleftrightarrow \vec{s}\times\vec{n}=\vec{0} \Longleftrightarrow \frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$$

$$\mathrm{L}\,//\,\Pi \Longleftrightarrow \vec{s}\cdot\vec{n}=0 \Longleftrightarrow mA+nB+pC=0$$

夹角公式： $\sin\varphi=\dfrac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$



思考与练习　　作直线与定直线相交

1. 过已知点$M_0(-1,2,-3)$作一直线,使之满足

(1)与向量$\vec{a}=(6,-2,-3)$垂直;

(2)与直线$L_1:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}$相交,

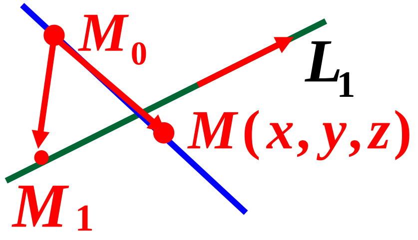
求此直线方程.

解: L_1方向向量$\vec{s}_1=(3,2,-5)$,点$\boldsymbol{M_1(1,-1,3)}$在$\boldsymbol{L_1}$上,

由$\boldsymbol{M_0}$及$\boldsymbol{L_1}$所确定的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+3 \\ \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

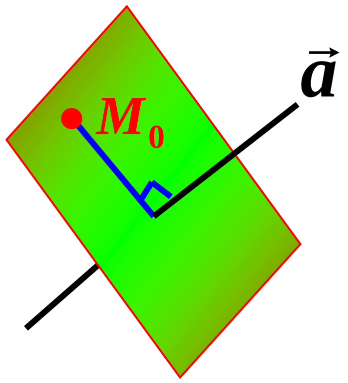
$$\boxed{3(x+1)+28(y-2)+13(z+3)=0}$$



即 $\boxed{3(x+1)+28(y-2)+13(z+3)=0}$

过M_0且垂直于$\vec{a}$的平面方程:

$$\boxed{6(x+1)-2(y-2)-3(z+3)=0}$$



故所求方程:

$$\begin{cases} 3(x+1)+28(y-2)+13(z+3)=0 \\ 6(x+1)-2(y-2)-3(z+3)=0 \end{cases}$$

即 $$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{6}$$

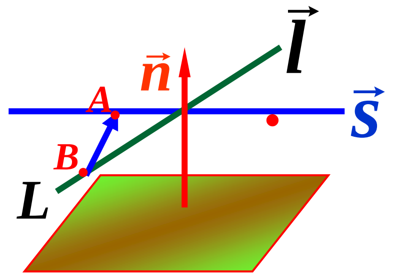
2. 如何求异面直线的公垂线的长?

设直线 L_1, L_2 为两异面直线, 它们分别过点 M_1, M_2,其方向向量分别为 $\vec{s}_1, \vec{s}_2$.

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2)|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$

3. 过一点且与一已知平面平行, 与一已知直线相交的直线方程.

解: 为了确定所求直线的方向向量 $\vec{s}$, $\vec{s}$ 应注意垂直于已给平面的法线向量 $\vec{n}$, 即有



$$\boxed{\vec{s}\cdot\vec{n}=0} \qquad \cdots\cdots(a)$$

由于已知直线l与所求直线相交, 因此在l上取一已知点B, 它与欲求直线上任一点A的连线AB必与l, $\vec{s}$ 共面, 即有

$$\boxed{(\vec{s}\times\vec{l})\cdot\overrightarrow{AB}=0} \qquad \cdots\cdots(b)$$

由(a),(b)联立解得$\vec{s}$, 则由对称式求出所给直线.