第二十七次课

2022年11月9日　　8:00

第五章 微分中值定理及其应用

5.1 微分中值定理

教学内容：1. 三大微分中值定理（重点）

2. 应用（难点）

二. 中值定理的应用

1. 单调性与一阶导的关系.

定理5.1.5. 设 $f\in C[a,b]$, $f\in D(a,b)$，则

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单增（或单减）$\Longleftrightarrow$ $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$. $\forall x\in[a,b]$.

推论1. $f\in C[a,b]$, $f\in D(a,b)$，则

若 $\begin{cases} f'(x)>0 \quad (\forall x\in(a,b)), & \text{则 } f(x) \text{ 在 } (a,b) \text{ 上严格单增. (反之, 未必. 如 } y=x^3) \\ f'(x)<0. \ (\forall x\in(a,b)), & \text{则 - - - - - 单减 (反之, 未必. 如 } y=-x^3) \end{cases}$

推论2. 设 $f\in C[a,b]$, $f(x)$ 在 (a,b) 内除有限个点导数为0或不可导外

有 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$），则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单增（减）.

定理5.1.5' 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单增

$\Longleftrightarrow$ $f'(x)\geq 0$ $(\forall x\in(a,b))$，且在 (a,b) 的任何一个开子区间上 $f'(x)$ 不恒等于0.

证明："$\Rightarrow$"

$\Leftarrow$

2. 零点问题、一致连续性问题、等式和不等式的证明

Ex5.1.4　证明 $f(x)=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

Ex5.1.5.　证明: 幂函数 $y=x^{\alpha}$ ($0<\alpha<1$) 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

Ex5.1.6　设 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$, 证明: $\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$

证明:

注:

Ex5.1.7 (课后题26)　设 $f\in D(a,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

Ex5.1.8 证明：$0<x<\frac{\pi}{2}$时，有 $\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$.

证明：设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & 0<x\le\frac{\pi}{2}, \\ 1, & x=0\end{cases}$ 则 $f\in C[0,\frac{\pi}{2}]$，$f\in D(0,\frac{\pi}{2})$ 且

Ex5.1.9 证明：$\forall n\in\mathbb{N}^*$，证明 $e^x>1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$ $(x>0)$

证明：用数学归纳法：先证：$n=1$时成立，即 $e^x>1+x$. $(x>0)$

设 $e^x>1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{k!}x^k$ $(x>0)$，下证

$$e^x>1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{(k+1)!}x^{k+1}$$

3. 凸函数（二阶导数的应用）（难点）

定义5.1.2　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对 I 中任意两点 x_1，x_2 和 $\forall \lambda \in (0,1)$，都有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 是区间 I 上的下凸函数

若 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为 I 上的严格下凸函数