第二十六次课

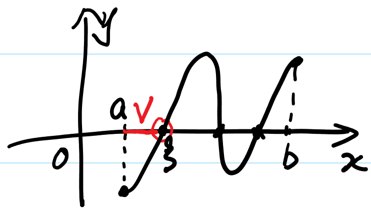
2022年11月6日 9:18

期中考试解答

证明零点定理 （用确界原理）

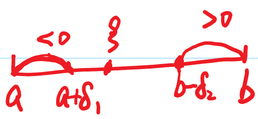
$f\in C[a,b]$, $f(a)\cdot f(b)<0$. 则 $\exists\, \xi\in(a,b)$, s.t. $f(\xi)=0$.

证明：不妨设 $f(a)<0$, $f(b)>0$.



$V=\{x\in[a,b]\mid f(x)<0\}\subset[a,b]$ 有界

令 $\xi=\sup V$. 下证 $f(\xi)=0$ ②, $\xi\in(a,b)$ ①.



① 由 $f(x)$ 的连续性, $f(a)<0 \Rightarrow \exists\,\delta_1>0$, $\forall x\in[a,a+\delta_1]$ 有 $f(x)<0$;

\- - - - $f(b)>0 \Rightarrow \exists\,\delta_2>0$, $\forall x\in[b-\delta_2,b]$ 有 $f(x)>0$.

$\therefore\ a<a+\delta_1\le\xi\le b-\delta_2<b$ 即 $\xi\in(a,b)$.

② 取 $x_n\in V\ (n=1,2,\cdots)$ $x_n\to\xi\ (n\to\infty)$

$\xi=\sup V$ $\begin{cases} x_n\in V,\ x_n\le\xi \\ \varepsilon_n=\frac{1}{n}>0,\ \exists\, x_n\in V\ \text{s.t.}\ x_n>\xi-\frac{1}{n} \end{cases}$

$\{x_n\}$: $\xi-\frac{1}{n}<x_n<\xi. \Rightarrow x_n\to\xi.$

由 $f(x_n)<0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\le 0$

由 f 的连续性 $\Rightarrow f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 交换 $\therefore f(\xi)\le 0$.

(+极限的保号性)

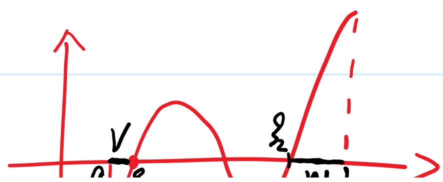
若 $f(\xi)<0$, 由 $f(x)$ 的连续性可知 $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=f(\xi)<0$

$\exists\,\delta>0$, 只要 $x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$ 就有 $f(x)<0$.

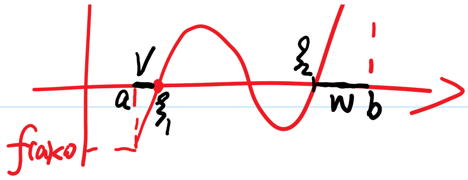
这与 $\xi=\sup V$ 矛盾 $\Rightarrow f(\xi)=0$. 证毕

思考：若定义 $W=\{x\in[a,b]\mid f(x)>0\}$,

$\xi=\inf W$ 行不行？



$\xi_2 = \inf W$ 行不行？



作业：

PPT上的第四章习题课