高等数学第七章

第四节 平面方程

天津大学
数学学院
郭飞

§7.4　平面方程

一、平面的方程

二、平面的夹角

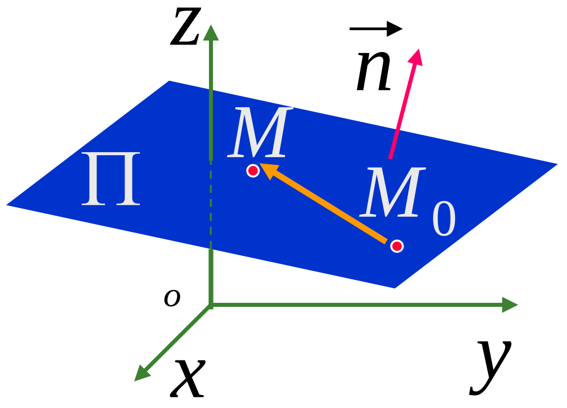
三、点到平面的距离

四、内容小结、思考与练习

一、平面的方程

1.点法式方程

设一平面通过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n}=(A, B, C)$, 求该平面Π的方程.



任取点 $M(x,y,z)\in\Pi$, 则有

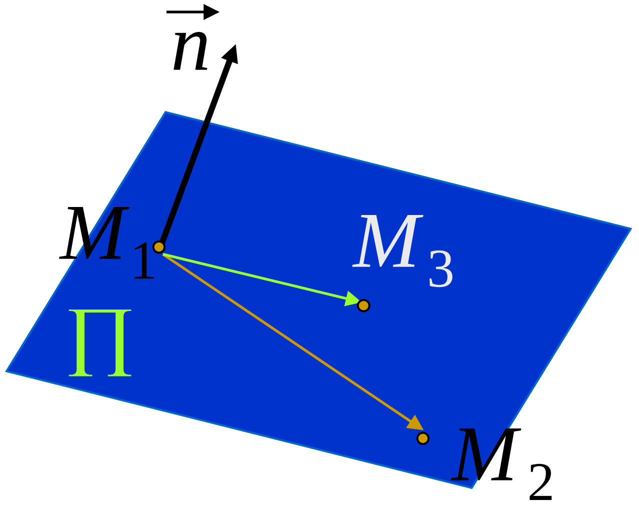
$\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}$ 故 $\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad ①$$

称①式为平面Π的**点法式方程**, 称 $\vec{n}$ 为平面 Π 的**法向量**

例1. 求过三点 $M_1(2,-1,4), M_2(-1,3,-2), M_3(0,2,3)$ 的平面 Π 的方程.



解: 取平面 Π 的法向量为

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (14, 9, -1)$$

又 $M_1 \in \Pi$, 利用点法式得平面 Π 的方程

$$14(x-2) + 9(y+1) - (z-4) = 0$$

即

$$14x + 9y - z - 15 = 0$$

$$M_1(2,-1,4),\qquad M_2(-1,3,-2),\qquad M_3(0,2,3)$$

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 4 & -6\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=(14,9,-1)$$

说明： 此平面的**三点式方程**也可写成

$$\begin{vmatrix}x-2 & y+1 & z-4\\ -3 & 4 & -6\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=0$$

平面的三点式： 过三点 $M_k(x_k, y_k, z_k)$ $(k=1,2,3)$

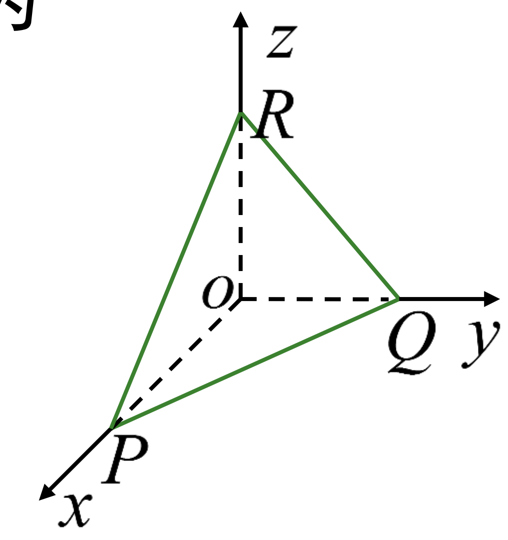
的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

特别,当平面与三坐标轴的交点分别为

$$P(a,0,0),\ Q(0,b,0),\ R(0,0,c)$$

时, 平面方程为



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ (a,b,c\neq 0)$$

此式称为平面的**截距式方程**.

分析:利用三点式

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0$$

按第一行展开得 $(x-a)bc-y(-a)c+zab=0$

即 $bcx+acy+abz=abc$

2. 平面的一般方程

设有三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0\ (A^2+B^2+C^2\neq 0) \qquad ②$$

任取一组满足上述方程的数 x_0, y_0, z_0, 则

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

以上两式相减 , 得平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

显然方程②与此点法式方程等价,因此方程②的图形是法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$的平面, 此方程称为**平面的一般方程.**

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

特殊情形

- 当 $D = 0$ 时, $Ax + By + Cz = 0$ 表示**通过原点**的平面;
- 当 $A = 0$ 时, $By + Cz + D = 0$ 的法向量

  $\vec{n} = (0, B, C) \perp \vec{i}$, **平面平行于 x** 轴;
- $Ax+Cz+D = 0$ 表示 **平行于 y 轴**的平面;
- $Ax+By+D = 0$ 表示 **平行于 z 轴**的平面;
- $Cz + D = 0$ 表示**平行于 xoy 面** 的平面;
- $Ax + D =0$ 表示**平行于 yoz 面** 的平面;
- $By + D =0$ 表示**平行于 zox 面** 的平面.

例2. 求通过 x 轴和点(4, – 3, – 1) 的平面方程.

解: 因平面通过 x 轴 , 故 $A = D = 0$

设所求平面方程为

$$By + Cz = 0$$

代入已知点 $(4, -3, -1)$ 得 $C = -3B$

化简,得所求平面方程

$$y - 3z = 0$$

求平面方程常用两种方法:

(1) 用平面的点法式方程.

主要是利用条件用向量代数的方法找出平面的一个法向量.

(2) 用平面的一般方程

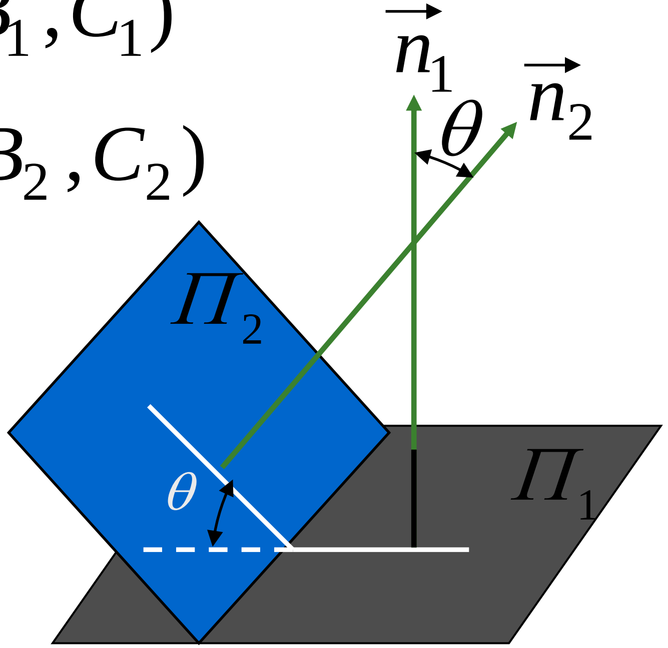
· 利用条件定出其中的待定的常数,此方法也称待定常数法.

二、平面的夹角

两平面法向量的夹角(常为锐角)称为两平面的夹角.

设平面Π_1的法向量为 $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$

平面Π_2的法向量为 $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$



则两平面夹角θ的余弦为

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

即

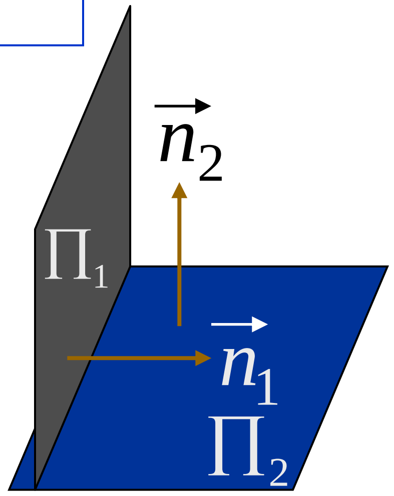
$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}+C_1^{\,2}}\ \sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}+C_2^{\,2}}}$$

$$\Pi_1: n_1=(A_1, B_1, C_1)$$
$$\Pi_2: n_2=(A_2, B_2, C_2)$$
$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

特别有下列结论：

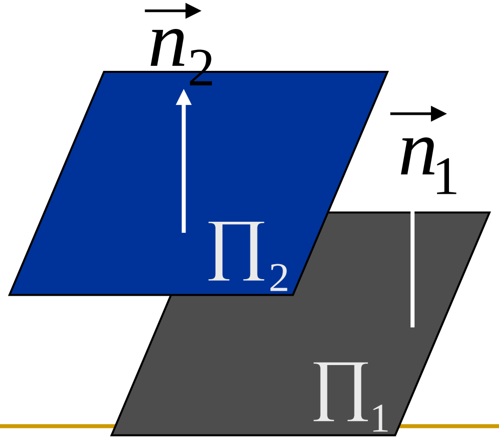
(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

$$\Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$



(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2$

$$\Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$



$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

例3. 研究以下各组里两平面的位置关系

$$(1)\ -x + 2y - z + 1 = 0, \quad y + 3z - 1 = 0$$

解 $\cos\theta = \dfrac{|-1\times 0 + 2\times 1 - 1\times 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}}$,

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{60}}$ 两平面相交,

夹角 $\theta = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{60}}$.

(2) $2x-y+z-1=0,\quad -4x+2y-2z-1=0$

解 $\vec{n}_1=(2,-1,1),\quad \vec{n}_2=(-4,2,-2)$

$$\Rightarrow \frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2},$$ 两平面平行

$\because M(1,1,0)\in \Pi_1, M(1,1,0)\notin \Pi_2$

$\therefore$ 两平面平行但不重合.

(3) $2x-y-z+1=0,\quad -4x+2y+2z-2=0$

解 $$\because \frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2},$$ 两平面平行

$\because M(1,1,0)\in \Pi_1, M(1,1,0)\in \Pi_2$ $\therefore$ 两平面重合

例4. 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$和 $M_2(0,1,-1)$, 且垂直于平面$\prod$: $x+y+z=0$, 求其方程 .

解: 设所求平面的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$,则所求平面方程为 $A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2} \Longrightarrow -A+0\cdot B-2C=0, \text{即 } A=-2C$$

$$\vec{n}\perp\Pi \text{的法向量} \Longrightarrow A+B+C=0, \text{故}$$

$$B=-(A+C)=C$$

因此有 $-2\cancel{C}(x-1)+\cancel{C}(y-1)+\cancel{C}(z-1)=0 \quad (C\neq 0)$

约去C, 得 $-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$

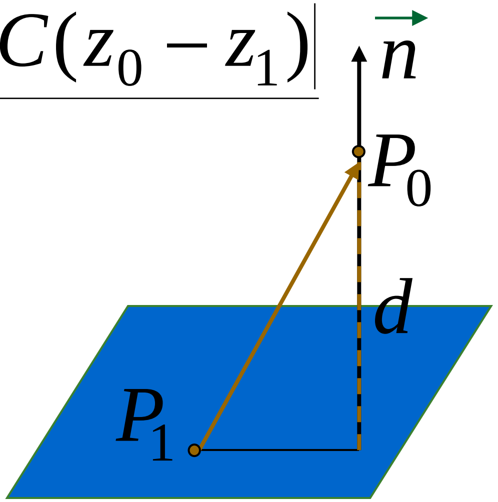
即 $2x-y-z=0$

三、点到平面的距离

例5. 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点,求 P_0 到平面的距离d .

解:设平面法向量为$\vec{n}=(A, B, C)$, 在平面上取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$,则P_0 到平面的距离为

$$d=\left|\mathrm{Prj}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{P_1P_0}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



$$\Big\downarrow\; Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(点到平面的距离公式)

填空

例6. 点$M_0(1,1,1)$到平面$2x+2y-z+10=0$的距离为($\frac{13}{3}$).

解

$$d=\frac{|2\times1+2\times1+(-1)\times1+10|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{13}{3}$$

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

例7. 一平面与平面$20x-4y-5z+7=0$平行且相距6个单位，求这平面方程.

解　设所求平面为 $20x-4y-5z+D=0$

在已知平面 $20x-4y-5z+7=0$ 上任取一点

$(0,\frac{7}{4},0)$. $\quad \frac{|-7+D|}{\sqrt{400+16+25}}=6$, $|-7+D|=126.$

$\Rightarrow\ D=133$ 或 $D=-119$

故所求平面为 $20x-4y-5z+133=0$

或 $\quad 20x-4y-5z-119=0$

内容小结

1.**平面**基本方程:

一般式 $$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

点法式 $$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

截距式 $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (abc \neq 0)$$

三点式 $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

2.平面与平面之间的关系

平面 $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad \vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$

平面 $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\quad \vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$

垂直: $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

平行: $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

夹角公式: $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

思考与练习

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + c^2}}$$

选择题

1．两平行平面 Π_1 与 Π_2 间距离为（ A ），Π_1, Π_2 的方程分别为：

$$19x - 4y + 8z + 21 = 0,\ 19x - 4y + 8z + 42 = 0$$

(A) 1　　(B) $\frac{1}{2}$

(C) 2　　(D) 21

提示　$\because \Pi_1 // \Pi_2$,

$\therefore$ 可在 Π_1 上任取一点 $(0, 0, -\frac{21}{8})$.

2.已知平面通过点$(k, k, 0)$与$(2k, 2k, 0)$,其中$k \neq 0$,

且垂直于xOy平面,则该平面的一般式方程

$Ax + By + Cz + D = 0$的系数必满足(a).

(a) $A = -B, C = D = 0$;   (b) $B = -C, A = D = 0$;

(c) $C = -A, B = D = 0$;   (d) $C = A, B = D = 0$.

解 将$(k,k,0)$与$(2k,2k,0)$代入

$Ax + By + Cz + D = 0$中,分别得 $\boxed{Ak + Bk + D = 0}$

$\boxed{2Ak + 2Bk + D = 0} \Rightarrow D = 0,\ A = -B,$

$C = 0.$