高等数学第七章

第一、二节 向量及其运算

天津大学
数学学院
郭飞

§7.1-7.2 向量及其运算

一、空间直角坐标系

二、向量概念

三、向量的线性运算

四、利用坐标作向量的线性运算

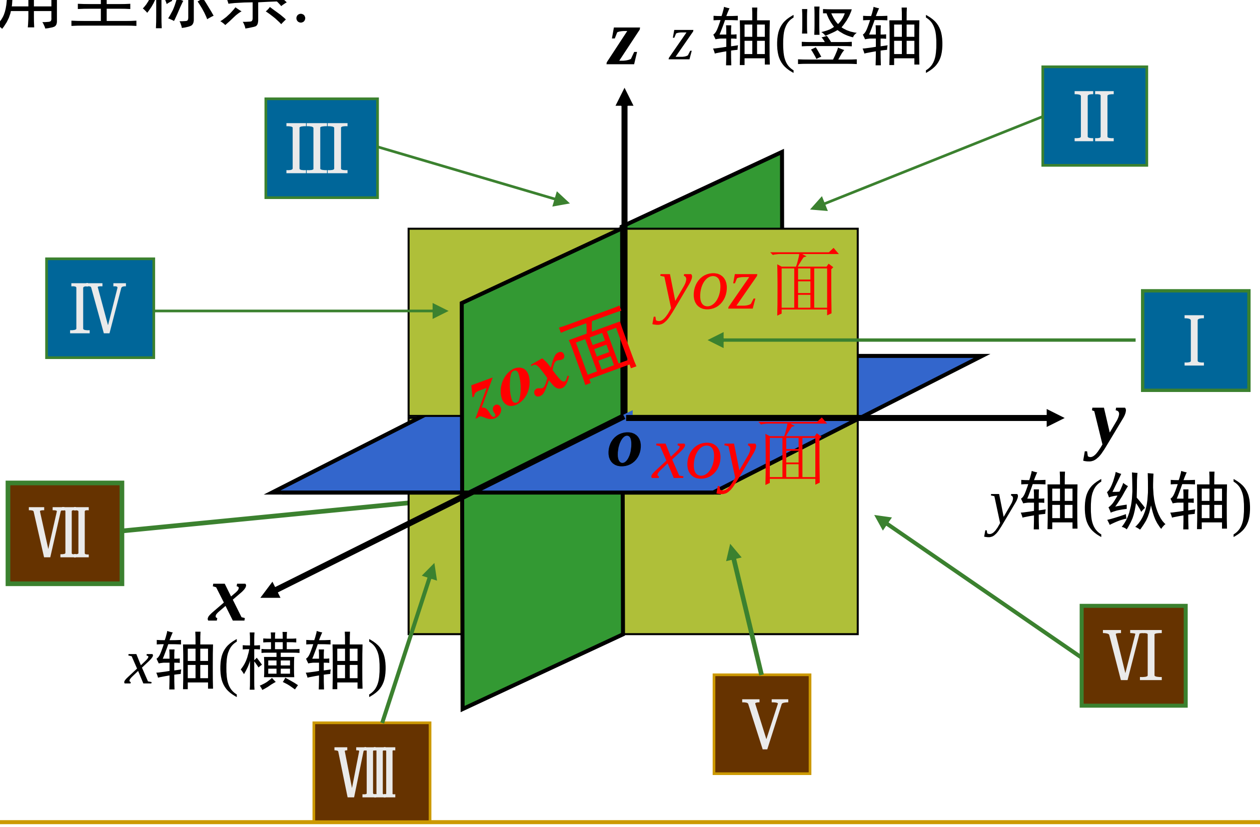
五、向量的模、方向解、投影

一、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的基本概念

过空间一定点 o ,由三条互相垂直的数轴按右手规则组成一个空间直角坐标系.

- 坐标原点
- 坐标轴
- 坐标面
- 卦限(八个)



在直角坐标系下

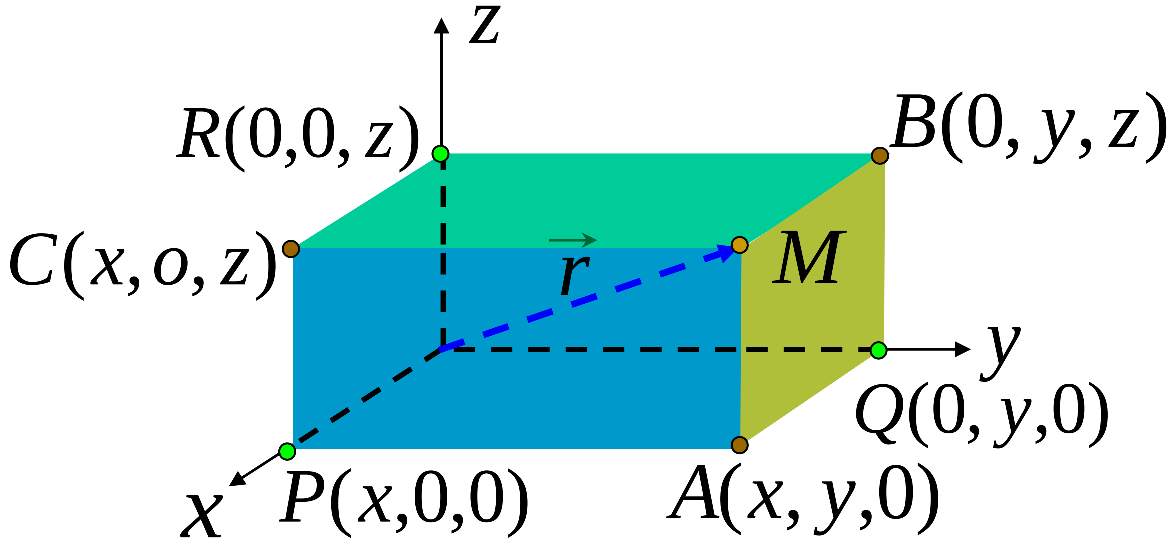
点 $M \xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组$(x, y, z) \xleftrightarrow{1--1}$ 向径 $\vec{r}$

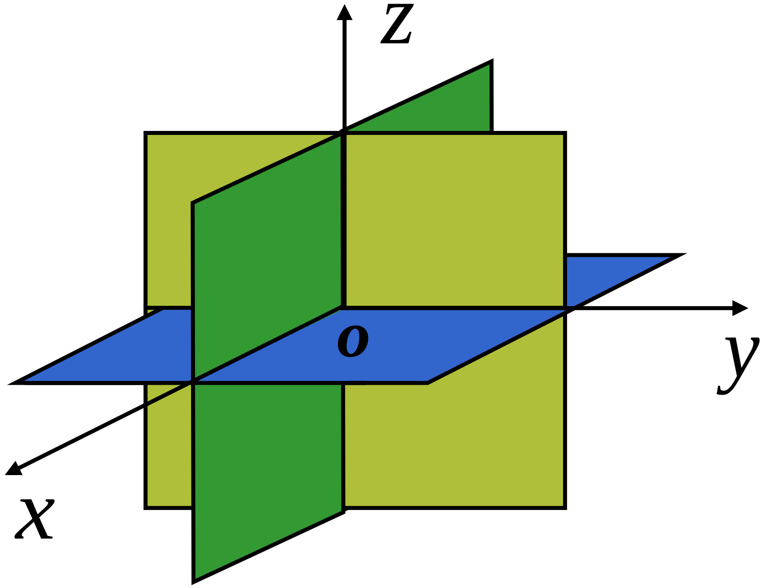
(称为点 M 的**坐标**)

特殊点的坐标：

原点 $O(0,0,0)$；　坐标轴上的点 P, Q, R；

坐标面上的点 A, B, C





坐标轴：

$$x\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$y\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$z\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

坐标面：

$$xoy\text{面} \leftrightarrow z = 0$$

$$yoz\text{面} \leftrightarrow x = 0$$

$$zox\text{面} \leftrightarrow y = 0$$

二、向量的概念

向量: 既有大小, 又有方向的量称为向量 (又称矢量).

表示法: 有向线段 $\overrightarrow{M_1 M_2}$, 或 $\vec{a}$,或 $\boldsymbol{a}$

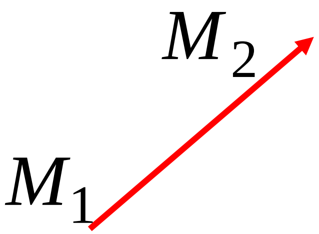
向量的模 : 向量的大小, 记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$, 或 $|\vec{a}|$, 或 $|\boldsymbol{a}|$.

向径 (矢径): 起点为原点的向量.

自由向量: 与起点无关的向量.

单位向量: 模为 1 的向量,作 $\vec{\boldsymbol{a}}^0$ 或 $\boldsymbol{a}^0$.

零向量: 模为 0 的向量, 记作 $\vec{0}$,或 $\mathbf{0}$.



若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$大小相等, 方向相同, 则称$\vec{a}$与$\vec{b}$相等, 记作$\vec{a}=\vec{b}$;

若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$方向相同或相反, 则称$\vec{a}$与$\vec{b}$平行, 记作$\vec{a}/\!/\vec{b}$; 规定: 零向量与任何向量平行;

与$\vec{a}$的模相同, 但方向相反的向量称为$\vec{a}$的负向量, 记作$-\vec{a}$;

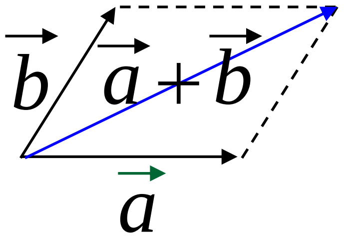
因平行向量可平移到同一直线上, 故两向量平行又称两向量共线 .

若 k (≥ 3)个向量经平移可移到同一平面上， 则称此 k 个向量共面 .

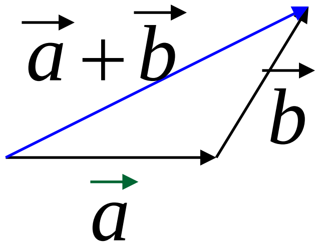
三、向量的线性运算

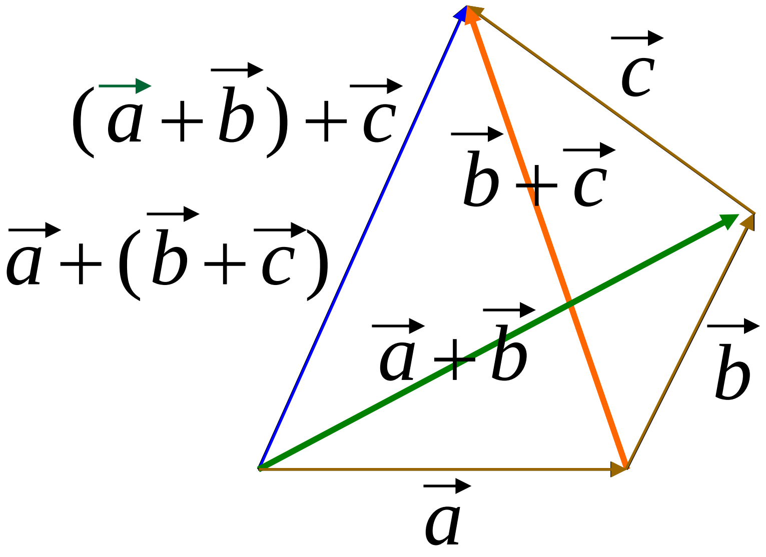
1. 向量的加法

平行四边形法则:



三角形法则:



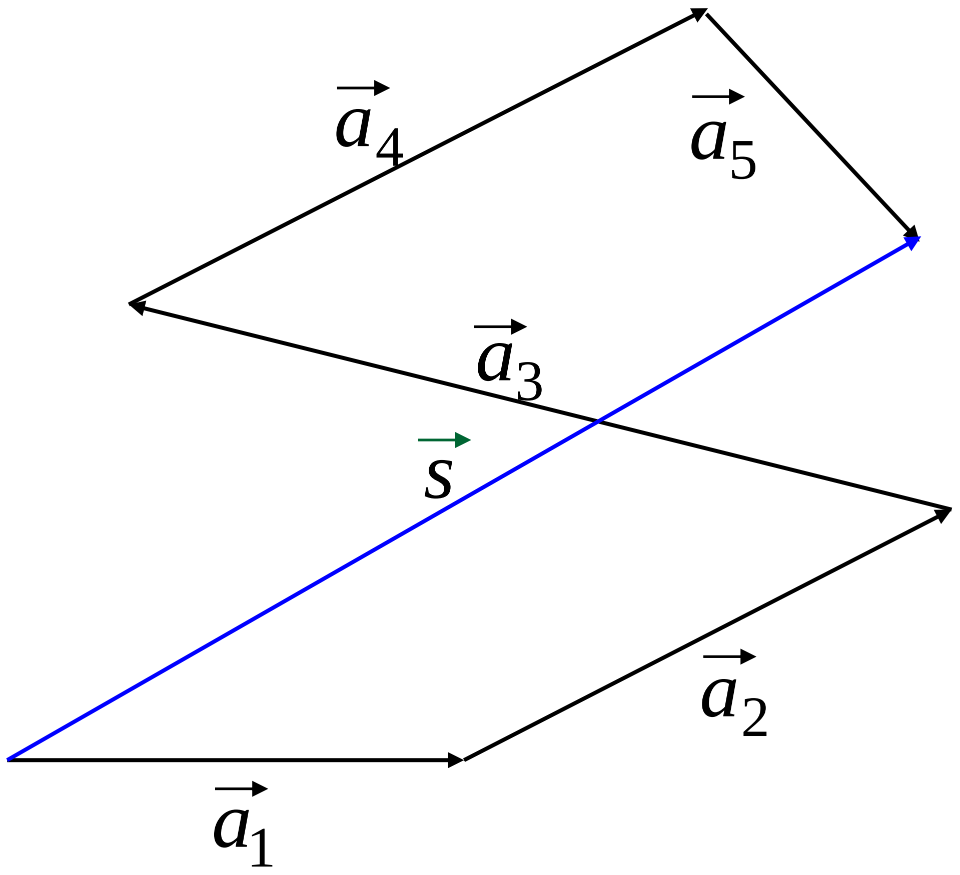


运算规律：交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

三角形法则可推广到多个向量相加 .

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5$$

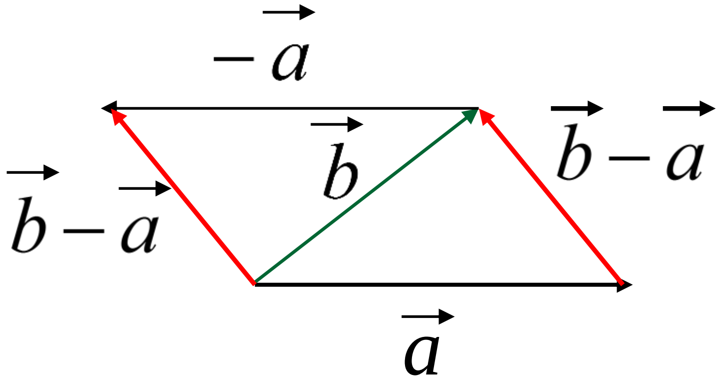


2. 向量的减法

$$\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$$

特别当$\vec{b}=\vec{a}$时，有

$$\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$



三角不等式

$$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

3. 向量与数的乘法

λ 是一个数 , λ 与 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量, 记作 $\lambda\vec{a}$.

规定 : $\lambda>0$ 时, $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向, $|\lambda\vec{a}|=\lambda|\vec{a}|$;

$\lambda<0$ 时, $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向, $|\lambda\vec{a}|=-\lambda|\vec{a}|$;

$\lambda=0$ 时, $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

总之: $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\,|\vec{a}|$

可见

$1\vec{a}=\vec{a}$;

运算律 : 结合律 $\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=\lambda\mu\vec{a}$

分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

若 $\vec{a}\neq\vec{0}$, 则有单位向量 $\vec{a}^{\circ}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$. 因此 $\vec{a}=|\vec{a}|\,\vec{a}^{\circ}$

定理1. 设 $\vec{a}$ 为非零向量，则

$$\vec{a} /\!/ \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b}=\lambda\vec{a} \quad (\lambda\text{ 为唯一实数})$$

证: "$\longrightarrow$". 设 $\vec{a} /\!/ \vec{b}$，取 $\lambda=\pm\,|\vec{b}| \big/ |\vec{a}|$，$\vec{a}$，$\vec{b}$ 同向时取正号，反向时取负号，则 $\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a}$ 同向，且

$$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\,|\vec{a}|=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}|=|\vec{b}|$$

故 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

再证数 λ 的唯一性．设又有 $\vec{b}=\mu\vec{a}$，则 $(\lambda-\mu)\vec{a}=\vec{0}$

而 $|\vec{a}|\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$.

"$\longleftarrow$" 已知 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, 则

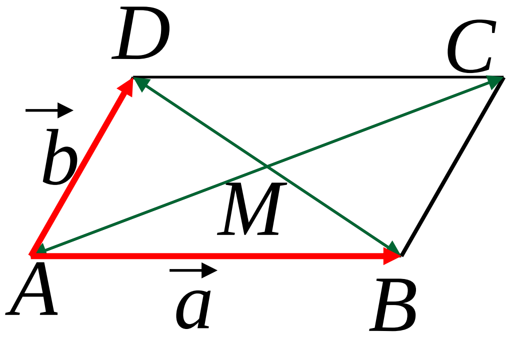
$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } \lambda=0 \text{ 时}, \ \vec{b}=\vec{0} \\ \text{当 } \lambda>0 \text{ 时}, \ \vec{a},\vec{b} \text{ 同向} \\ \text{当 } \lambda<0 \text{ 时}, \ \vec{a},\vec{b} \text{ 反向}\end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$$

例1. 设 M 为 $\square ABCD$ 对角线的交点, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}$.

解:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MA}$$

$$\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}=-2\overrightarrow{MB}$$



$$\therefore\ \overrightarrow{MA}=-\tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) \qquad \overrightarrow{MB}=-\tfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\overrightarrow{MC}=\tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) \qquad \overrightarrow{MD}=\tfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

四. 向量的坐标表示

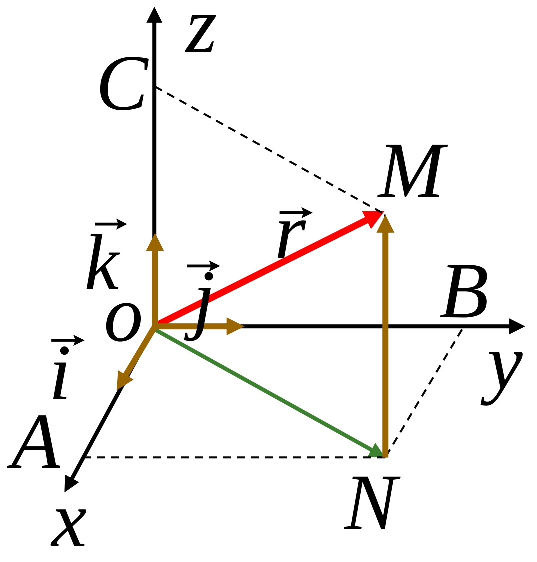
在空间直角坐标系下，任意向量 $\vec{r}$ 可用向径 $\overrightarrow{OM}$ 表示.

以 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别表示 x, y, z 轴上的单位向量，设点 M 的坐标为 $M(x, y, z)$，则

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i},\ \overrightarrow{OB} = y\vec{j},\ \overrightarrow{OC} = z\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$$



此式称为向量 $\vec{r}$ 的**坐标分解式**，

$x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ 称为向量 $\vec{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**.

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, λ 为实数，则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

平行向量对应坐标成比例:

当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时,

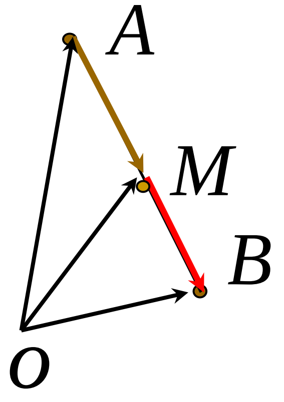
$$\vec{b}//\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_x&=\lambda a_x\\ b_y&=\lambda a_y\\ b_z&=\lambda a_z \end{aligned}}$$

例2. 已知两点$A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$及实数$\lambda\neq-1$，在AB直线上求一点M，使$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.（定比分点）

解: 设M的坐标为(x,y,z)，如图所示

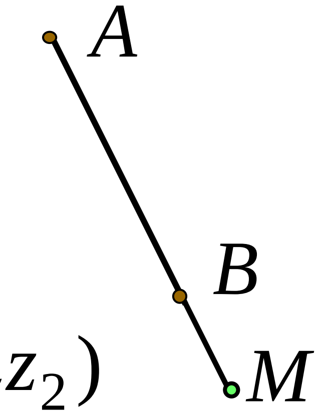


$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$$

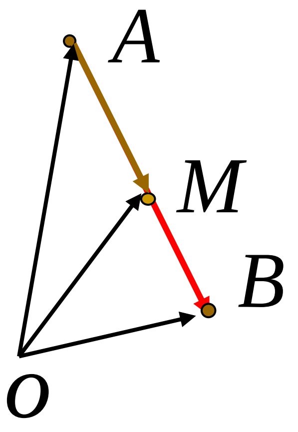


得 $$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})$$

即 $$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2)$$

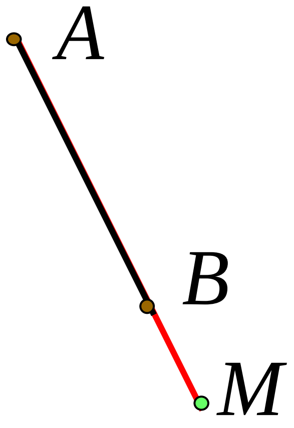
说明: 由 $(x,y,z)=\dfrac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2)$

得**定比分点公式:**



$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$



当 $\lambda=1$ 时, 点 M 为 AB 的中点 ,于是得

中点公式:

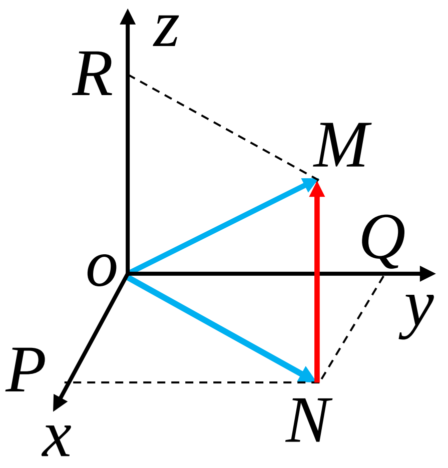
$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

五、向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

设 $\vec{r}=(x,y,z)$, 作 $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, 则有

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

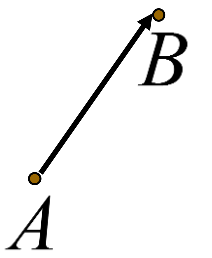


由勾股定理得

$$|\vec{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

对两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 与 $B(x_2,y_2,z_2)$, 因

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$



得两点间的距离公式:

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例3. 求证以 $M_1(4,3,1), M_2(7,1,2), M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形 .

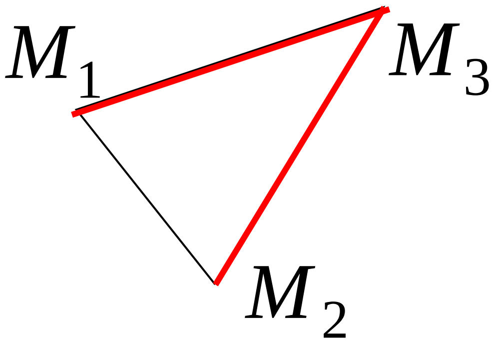
证:

$$\because\ |M_1M_2| = \sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$|M_2M_3| = \sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$|M_1M_3| = \sqrt{(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore\ |M_2M_3| = |M_1M_3|$$



即 $\Delta M_1M_2M_3$ 为等腰三角形 .

例4. 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 及 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 .

解: 设该点为 $M(0,0,z)$, 因为 $|MA|=|MB|$,

$$\sqrt{(-4)^2+1^2+(7-z)^2}=\sqrt{3^2+5^2+(-2-z)^2}$$

解得 $z=\frac{14}{9}$, 故所求点为 $M(0,0,\frac{14}{9})$.

思考:

(1) 如何求在 xoy 面上与 A , B 等距离之点的轨迹方程?

(2) 如何求在空间与 A , B 等距离之点的轨迹方程 ?

提示:

(1) 设动点为$M(x,y,0)$,利用$|MA|=|MB|$, 得

$$14x+8y+28=0,\text{ 且 } z=0$$

(2) 设动点为$M(x,y,z)$,利用$|MA|=|MB|$, 得

$$7x+4y-9z+14=0$$

例5. 已知两点$A(4,0,5)$和$B(7,1,3)$, 求 $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}^0$.

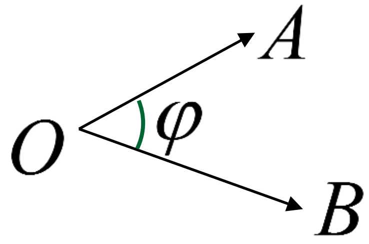
解: $$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}^0=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)$$

$$=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}\right)$$

2. 方向角与方向余弦

设有两非零向量$\vec{a},\vec{b}$,任取空间一点 O, 作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, 称 $\varphi=\angle AOB\ (0\le\varphi\le\pi)$ 为向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角.

记作 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\varphi$ 或 $(\widehat{\vec{b},\vec{a}})=\varphi$

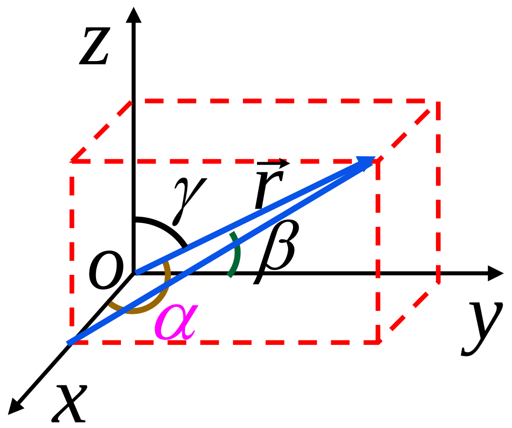


类似可定义向量与轴, 轴与轴的夹角 .

给定 $\vec{r}=(x,y,z)\ne\vec{0}$, 称 $\vec{r}$ 与三坐标轴正向的夹角 α,β,γ 为其**方向角**.

方向角的余弦称为其**方向余弦**.

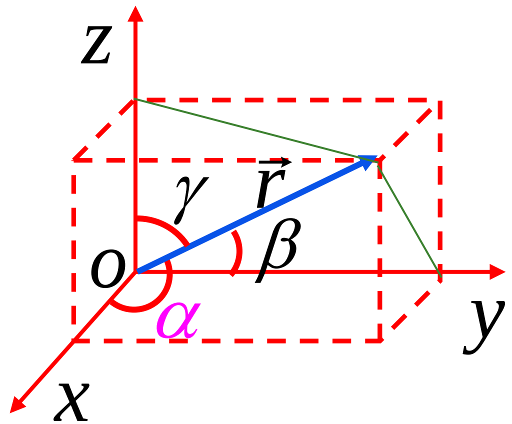
$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



方向余弦的性质：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

向量 $\vec{r}$ 的单位向量：

$$\vec{r}^{\circ} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

例6. 已知两点$M_1(2,2,\sqrt{2})$和$M_2(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模 、方向余弦和方向角 .

解: $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,\ 3-2,0-\sqrt{2})$

$=(-1,1,-\sqrt{2})$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}$$

例7. 设点 A 位于第一卦限,向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴 y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$, 且 $|\overrightarrow{OA}| = 6$, 求点 A 的坐标 .

解: 已知 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$, 则

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = \frac{1}{4}$$

因点 A 在第一卦限 , 故 $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, 于是

$$\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OA}^{\circ} = 6\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (3, 3\sqrt{2}, 3)$$

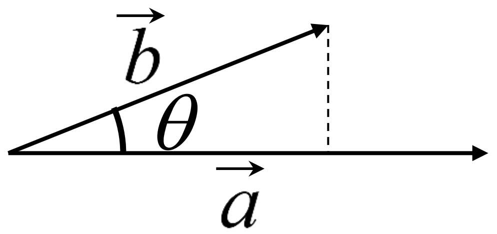
故点 A 的坐标为 $(3, 3\sqrt{2}, 3)$.

3. 夹角和投影

设向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 θ,

当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时, $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影为

$$|\vec{b}|\cos\theta \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \operatorname{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$$



故 $$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\operatorname{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$$

同理, 当 $\vec{b}\neq\vec{0}$ 时,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\operatorname{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$$