线性代数练习题及解答参考

2023 年 2 月

第一章　线性方程组

1．求解下列各线性方程组.

(1) $\begin{cases} 3x_1+x_2-5x_3=0, \\ x_1+3x_2-13x_3=-6, \\ 2x_1-x_2+3x_3=3, \\ 4x_1-x_2+x_3=3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11, \\ 5x_1+3x_2+6x_3-x_4=-1, \\ 3x_1-x_2+4x_3-2x_4=5, \\ -x_1-9x_2-4x_4=17; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ x_1-2x_2+4x_3=0, \\ 3x_1+8x_2-2x_3=0; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 3x_1-5x_2+5x_3-3x_4=0, \\ x_1-2x_2+3x_3-x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+2x_3-2x_4=0. \end{cases}$

解　(1) 对方程组的增广矩阵作初等行变换，有

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -13 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1-r_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -8 & -3 \\ 1 & 3 & -13 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-2r_1}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & 19 & 9 \\ 0 & -9 & 33 & 15 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4+9r_2]{r_3+5r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

由于 $r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=3$，所以方程组有唯一解，其唯一解为 $x_1=1, x_2=2, x_3=1$.

(2) 对方程组的增广矩阵作初等行变换，有

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{有限次}} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

由于 $r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=2<4$，所以方程组有无穷多解. 其同解方程组为 $\begin{cases} x_1=1-\frac{9}{7}x_3+\frac{1}{2}x_4, \\ x_2=-2+\frac{1}{7}x_3-\frac{1}{2}x_4, \end{cases}$ 则方程组的通解为

$$[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}=[1,-2,0,0]^{\mathrm{T}}+k_1\left[-\frac{9}{7},\frac{1}{7},1,0\right]^{\mathrm{T}}+k_2\left[\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,1\right]^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

(3) 对方程组的系数矩阵作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{有限次}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 $r(\boldsymbol{A})=2<3$，所以方程组有非零解. 其同解方程组为 $\begin{cases} x_1=-2x_3, \\ x_2=\quad x_3, \end{cases}$ 则方程组的通解为 $[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}=k[-2,1,1]^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

（4）对方程组的系数矩阵作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & -5 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{有限次}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 $r(\boldsymbol{A})=2<4$，所以方程组有非零解. 其同解方程组为 $\begin{cases} x_1=5x_3+x_4, \\ x_2=4x_3, \end{cases}$ 则方程组的通解为

$$[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}=k_1[5,4,1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[1,0,0,1]^{\mathrm{T}}，其中 k_1,k_2 为任意常数.$$

4. 当 p,q 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=p, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=q. \end{cases}$$

有解？并在有解时，求出它的全部解.

解 对方程组的增广矩阵施行初等行变换，有

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & p \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & q \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & p-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & q-5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-2 \end{array}\right].$$

当 $p=0,q=2$ 时，方程组有解. 其同解方程组为 $\begin{cases} x_1=-2+x_3+x_4+5x_5, \\ x_2=3-2x_3-2x_4-6x_5, \end{cases}$ 则方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.$$

2. 设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1. \end{cases}$$

已知 $[1,-1,1,-1]^{\mathrm{T}}$ 是该方程组的一个解，试求：

（1）方程组的全部解；（2）该方程组满足 $x_2=x_3$ 的全部解.

解 将 $[1,-1,1,-1]^{\mathrm{T}}$ 代入方程组，得 $\lambda=\mu$. 对方程组的增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 作初等行变换，得

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1 & \lambda & \lambda & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{\substack{r_3-r_1-r_2\\ r_1-\frac{1}{2}r_2}}\left[\begin{array}{cccc:c}0 & \lambda-\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{cccc:c}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & \lambda-\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1\end{array}\right]$$

当 $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$ 时，有 $\tilde{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right]$. 由于 $r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=3<4$，所以方程组有无穷多解. 其同解方程组为 $\begin{cases}x_1= \quad\; - x_4,\\ x_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_4,\\ x_3=\ \ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_4,\end{cases}$ 故方程组的全部解为

$$[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}=\left[0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right]^{\mathrm{T}}+k\left[-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right]^{\mathrm{T}}，其中 k 为任意常数.$$

当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，有 $\tilde{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$. 由于 $r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=2<4$，所以方程组有无穷多解. 其同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}+\ x_3-\frac{1}{2}x_4,\\ x_2=\ \ 1-3x_3-\ x_4,\end{cases}$ 故方程组的全部解为

$$[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}=\left[-\frac{1}{2},1,0,0\right]^{\mathrm{T}}+k_1[1,-3,1,0]^{\mathrm{T}}+k_2\left[-\frac{1}{2},-1,0,1\right]^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

（2）当 $\lambda\neq\frac{1}{2}$ 时，由于 $x_2=x_3$，即 $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_4=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_4$，解得 $x_4=1$，故方程组的解为

$$[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}=[-1,0,0,1]^{\mathrm{T}}.$$

当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，由于 $x_2=x_3$，即 $1-3x_3-x_4=x_3$，解得 $x_4=1-4x_3$，则同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-1+3x_3,\\ x_2=\qquad\ \ x_3,\\ x_4=\ \ 1-4x_3,\end{cases}$

故方程组的全部解为

$$[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}=[-1,0,0,1]^{\mathrm{T}}+k_3[3,1,1,-4]^{\mathrm{T}}，其中 k_3 为任意常数.$$

第二章　行列式 & 克拉默法则

1．利用行列式的定义确定行列式 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ 1 & 1 & 1 & x\end{vmatrix}$ 中 x^3 和 x^4 的系数.

解 含 x^3 项为 $-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$，其系数为 -1；含 x^4 项为 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，其系数为 2.

2. 计算下列行列式.

（1）$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 7 & 10\\ 3 & 5 & 11 & 16\\ 2 & -7 & 7 & 7\end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix}-ab & ac & ae\\ bd & -cd & de\\ bf & cf & -ef\end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix}a-b-c & 2a & 2a\\ 2b & b-c-a & 2b\\ 2c & 2c & c-a-b\end{vmatrix}$；

（5）$\begin{vmatrix}246 & 427 & 327\\ 1014 & 543 & 443\\ -342 & 721 & 621\end{vmatrix}$；　　（6）$\begin{vmatrix}a & b & c & d\\ a & b+a & c+b+a & d+c+b+a\\ a & b+2a & c+2b+3a & d+2c+3b+4a\\ a & b+3a & c+3b+6a & d+3c+6b+10a\end{vmatrix}$；

解　（1）用化三角形法.

$$\text{原式}\xlongequal[r_4-2r_1]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-3r_1}}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 4\\ 0 & -11 & 1 & -1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-11r_2]{r_3-r_2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -10 & -23\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+10r_3}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{vmatrix}=3.$$

（2）原式 $\xlongequal[r_3-r_4]{r_1-r_2}\begin{vmatrix}a & a & 0 & 0\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 0 & 0 & b & b\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{vmatrix}\xlongequal[c_4-c_3]{c_2-c_1}\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & 0\\ 1 & -a & 1 & 0\\ 0 & 0 & b & 0\\ 1 & 0 & 1 & -b\end{vmatrix}=a^2b^2.$

（3）原式 $=adf\begin{vmatrix}-b & c & e\\ b & -c & e\\ b & c & -e\end{vmatrix}=adfbce\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1}abcdef\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=4abcdef.$

（4）原式 $\xlongequal{r_1+r_2+r_3}\begin{vmatrix}a+b+c & a+b+c & a+b+c\\ 2b & b-c-a & 2b\\ 2c & 2c & c-a-b\end{vmatrix}\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}\begin{vmatrix}a+b+c & 0 & 0\\ 2b & -(a+b+c) & 0\\ 2c & 0 & -(a+b+c)\end{vmatrix}$

$=(a+b+c)^3$.

（5）原式 $\underset{c_2-c_3}{\overset{c_1+c_2+c_3}{=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1000&100&327\\2000&100&443\\1000&100&621\end{vmatrix}\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-2r_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1000&100&327\\0&-100&-211\\0&0&294\end{vmatrix}=-29400000$.

（6）原式 $\underset{r_2-r_1}{\overset{\substack{r_4-r_3\\r_3-r_2}}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&b+a&c+b+a\\0&a&b+2a&c+2b+3a\\0&a&b+3a&c+3b+6a\end{vmatrix}\underset{r_3-r_2}{\overset{r_4-r_3}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&b+a&c+b+a\\0&0&a&b+2a\\0&0&a&b+3a\end{vmatrix}$

$\overset{r_4-r_3}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&b+a&c+b+a\\0&0&a&b+2a\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^4$.

3. 计算下列各行列式.

（1）$\begin{vmatrix}a&a&\cdots&a&b\\a&a&\cdots&b&a\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a&b&\cdots&a&a\\b&a&\cdots&a&a\end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix}\lambda+a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&\lambda+a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2&\lambda+a_3&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&\lambda+a_n\end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix}a&a+h&a+2h&\cdots&a+nh\\-a&a&&&\\&-a&a&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&-a&a\end{vmatrix}$；

（5）$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\2&2^2&2^3&\cdots&2^n\\3&3^2&3^3&\cdots&3^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n^2&n^3&\cdots&n^n\end{vmatrix}$；　　（6）$\begin{vmatrix}2a&1&&&\\a^2&2a&1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&a^2&2a&1\\&&&a^2&2a\end{vmatrix}$.

解　（1）原式 $\underset{(j\geq 2)}{\overset{c_1+c_j}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}(n-1)a+b&a&\cdots&a&b\\(n-1)a+b&a&\cdots&b&a\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\(n-1)a+b&b&\cdots&a&a\\(n-1)a+b&a&\cdots&a&a\end{vmatrix}$

$\underset{(1\leq i\leq n-1)}{\overset{r_i-r_n}{=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&b-a\\0&0&\cdots&b-a&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&b-a&\cdots&0&0\\(n-1)a+b&a&\cdots&a&a\end{vmatrix}$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left[(n-1)a+b\right](b-a)^{n-1}.$$

（2）原式 $\xlongequal[(i\neq 2)]{r_i-r_2}\left|\begin{array}{cc:ccc} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{array}\right|=-2(n-2)!.$

（3）原式 $=(\lambda+\sum_{k=1}^{n}a_k)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & \lambda+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & \lambda+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & \lambda+a_n \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[(i\geq 2)]{r_i-r_1}(\lambda+\sum_{k=1}^{n}a_k)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda+\sum_{k=1}^{n}a_k).$$

（4）原式 $\xlongequal[(j\geq 2)]{c_1+c_j}\begin{vmatrix} (n+1)a+(1+2+\cdots+n)h & a+h & a+2h & \cdots & a+nh \\ 0 & a & & & \\ 0 & -a & a & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -a & a \end{vmatrix}$

$$=\left[(n+1)a+\tfrac{n(n+1)}{2}h\right]\begin{vmatrix} a & & & \\ -a & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -a & a \end{vmatrix}_{(n阶)}=\frac{(n+1)(2a+nh)}{2}a^n.$$

（5）原式 $\xlongequal[1\leq i\leq n]{r_i/i} n!V(1,2,\ldots,n)=\prod_{i=1}^{n}i!.$

（6）方法 1　将原行列式 D_n（n 为阶数）化为上三角行列式，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & 0 & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix}=(n+1)a^n.$$

方法 2 先将 D_n 按第 1 列展开，再将 D_n 的 $(1,2)$ 元的 $n-1$ 阶余子式按第 1 行展开得

$$D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}.$$

由于 $D_1=2a, D_2=3a^2$，且利用上述递推式可得

$$D_n-aD_{n-1}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=a^{n-2}(D_2-aD_1)=a^n,$$

因此 $D_n=aD_{n-1}+a^n=a^2D_{n-2}+2a^n=\cdots=a^{n-1}D_1+(n-1)a^n=(n+1)a^n$.

4. 已知行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&0&0\\0&2&0&0\\1&1&2&2\\4&5&3&7\end{vmatrix},$$

M_{ij} 和 A_{ij} 分别是 D 中 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式和代数余子式，试求：

(1) $A_{14}+2A_{24}+A_{34}+5A_{44}$；　　(2) $4M_{42}+2M_{43}+2M_{44}$.

解　(1) $A_{14}+2A_{24}+A_{34}+5A_{44}=\begin{vmatrix}3&1&0&1\\0&2&0&2\\1&1&2&1\\4&5&3&5\end{vmatrix}=0$；

(2) $4M_{42}+2M_{43}+2M_{44}=4A_{42}-2A_{43}+2A_{44}=\begin{vmatrix}3&1&0&0\\0&2&0&0\\1&1&2&2\\0&4&-2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1\\0&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&2\\-2&2\end{vmatrix}=48.$

5. 用克拉默法则求解下列各线性方程组：

(1) $\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8,\\x_1-3x_2-6x_4=9,\\2x_2-x_3+2x_4=-5,\\2x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0,\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}5x_1+6x_2=1,\\x_1+5x_2+6x_3=-2,\\x_2+5x_3+6x_4=2,\\x_3+5x_4+6x_5=-2,\\x_4+5x_5=-4.\end{cases}$

解　(1) 计算方程组的系数行列式 $D=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}=27\neq0$. 由克拉默法则，知方程组有唯一解.

依次计算

$$D_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81\Rightarrow x_1=\frac{D_1}{D}=3;$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108\Rightarrow x_2=\frac{D_2}{D}=-4;$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27\Rightarrow x_3=\frac{D_3}{D}=-1;$$

$$D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27\Rightarrow x_4=\frac{D_4}{D}=1.$$

(2) 计算方程组的系数行列式 $D=\begin{vmatrix}5&6&&&\\1&5&6&&\\&1&5&6&\\&&1&5&6\\&&&1&5\end{vmatrix}=\dfrac{3^6-2^6}{3-2}=665\neq 0$. 由克拉默法则，知方程组有唯一解. 计算

$$D_5=\begin{vmatrix}5&6&&&1\\1&5&6&&-2\\&1&5&6&2\\&&1&5&-2\\&&&1&-4\end{vmatrix}\overset{\text{按}\boldsymbol{c}_5}{\underset{\text{展开}}{=\!=}}1+2\cdot 5+2\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&0&1&5\\0&0&0&1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&0&1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}$$

$$=49+2\frac{3^4-2^4}{3-2}-4\frac{3^5-2^5}{3-2}=-665\Rightarrow x_5=\frac{D_5}{D}=-1;$$

将 $x_5=-1$ 代入方程组可得

$$x_4=-4-5x_5=1;\ \ x_3=-2-5x_4-6x_5=-1;$$
$$x_2=2-5x_3-6x_4=1;\ \ x_1=-2-5x_2-6x_3=-1.$$

6. 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+\quad x_2+\cdots+\quad x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+\quad 2x_n=0,\\ \cdots\cdots\\ nx_1+\quad nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0\end{cases}(n\geq 2).$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

解 方法 1 对方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}\xrightarrow[i\geq 2]{r_i-ir_1}\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & 0 & \cdots & 0\\ -3a & 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -na & 0 & 0 & \cdots & a\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}_1 .
$$

当 $a=0$ 时，$r(\boldsymbol{A})=1<n$，则方程组有非零解. 其同解方程组为 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，则方程组的通解为

$$
[x_1,x_2,\ldots,x_n]^{\mathrm{T}}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1} ,
$$

其中 $k_1,k_2,,\ldots,k_{n-1}$ 为任意常数，且

$$
\boldsymbol{\eta}_1=[-1,1,0,\ldots,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=[-1,0,1,0,\ldots,0]^{\mathrm{T}},\ldots,\boldsymbol{\eta}_{n-1}=[-1,0,\ldots,0,1]^{\mathrm{T}} .
$$

当 $a\neq 0$ 时，对矩阵 $\boldsymbol{B}_1$ 作初等行变换，有

$$
\boldsymbol{B}_1\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & \cdots & 1\\ -2 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -n & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-\sum\limits_{i=2}^{n}r_i}\begin{bmatrix}a+\frac{n(n+1)}{2} & 0 & \cdots & 0\\ -2 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -n & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}_2 .
$$

由 $\boldsymbol{B}_2$ 可知，当 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时，$r(\boldsymbol{A})=n-1<n$，则方程组有非零解. 其同解方程组为

$$
\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\ -3x_1+x_3=0,\\ \quad\cdots\cdots\\ -nx_1+x_n=0.\end{cases}
$$

选 x_1 为自由变量，则方程组的通解为 $[x_1,x_2,\ldots,x_n]^{\mathrm{T}}=k[1,2,\ldots,n]^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

方法 2 方程组的系数行列式为

$$
|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}=a^{n-1}(a+\tfrac{n(n+1)}{2}) .
$$

当 $|\boldsymbol{A}|=0$，即 $a=0$ 或 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时，则方程组有非零解；

当 $a=0$ 时，对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & \cdots & n\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}.
$$

其同解方程组为 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，则方程组的通解为

$$
[x_1,x_2,\ldots,x_n]^{\mathrm{T}}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1} ,
$$

其中$k_1,k_2,,\dots,k_{n-1}$为任意常数，且

$$\boldsymbol{\eta}_1=\left[-1,1,0,\dots,0\right]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=\left[-1,0,1,0,\dots,0\right]^{\mathrm{T}},\dots,\boldsymbol{\eta}_{n-1}=\left[-1,0,\dots,0,1\right]^{\mathrm{T}}.$$

当$a=-\frac{n(n+1)}{2}$时，对系数矩阵$\boldsymbol{A}$作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & 0 & \cdots & 0\\ -3a & 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -na & 0 & 0 & \cdots & a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -3 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

其同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\ -3x_1+x_3=0,\\ \quad\cdots\cdots\\ -nx_1+x_n=0.\end{cases}$$

选x_1为自由变量，则方程组的通解为$\left[x_1,x_2,\dots,x_n\right]^{\mathrm{T}}=k\left[1,2,\dots,n\right]^{\mathrm{T}}$，其中$k$为任意常数.

第三章 矩阵及其运算

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=[b_1,b_2,\dots,b_n]$，求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}[b_1,b_2,\dots,b_n]=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$；

$$\boldsymbol{BA}=[b_1,b_2,\dots,b_n]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}=b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n .$$

2. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\dots,d_n)$ 可交换，且 $d_1,d_2,\dots,d_n$ 两两互异，证明 $\boldsymbol{A}$ 是对角矩阵.

证 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，由 $\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{DA}$，得 $d_ia_{ij}=a_{ij}d_j$，因此 $a_{ij}(d_i-d_j)=0(i,j=1,2,\dots,n)$. 由 $d_1,d_2,\dots,d_n$ 两两互异，得 $a_{ij}=0(i\neq j)$，因此 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵.

3. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 0 & 2 & x+1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，求 $f(\boldsymbol{A})$.

解 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 0 & 2 & x+1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 2 & x+1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix}=x^2-2x-5$,

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 14 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}-5\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

4. 计算下列各题.

(1) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^m$；　　(2) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^m$；

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^m$；　　(4) $\begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} \end{bmatrix}_n^m$.

解　记被 m 次幂的方阵为 $\boldsymbol{A}$.

(1) $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{J}$，其中 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\lambda\boldsymbol{E}_3$ 与 $\boldsymbol{J}$ 可交换. 而 $\boldsymbol{J}^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{J}^3=\boldsymbol{O}$，进而 $\boldsymbol{J}^k=\boldsymbol{O}$，$k\ge 4$. 由二项式定理，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^m&=(\lambda\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{J})^m\\&=(\lambda\boldsymbol{E}_3)^n+m(\lambda\boldsymbol{E}_3)^{m-1}\boldsymbol{J}+\frac{m(m-1)}{2}(\lambda\boldsymbol{E}_3)^{m-2}\boldsymbol{J}^2\\&=\begin{bmatrix} \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \frac{1}{2}m(m-1)\lambda^{m-2} \\ 0 & \lambda^m & m\lambda^{m-1} \\ 0 & 0 & \lambda^m \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 因为 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$，我们猜想

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^m=\begin{bmatrix} \cos m\theta & -\sin m\theta \\ \sin m\theta & \cos m\theta \end{bmatrix}.$$

假设结论对 $m=k-1$ 时成立，即 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{k-1}=\begin{bmatrix} \cos(k-1)\theta & -\sin(k-1)\theta \\ \sin(k-1)\theta & \cos(k-1)\theta \end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix} \cos(k-1)\theta & -\sin(k-1)\theta \\ \sin(k-1)\theta & \cos(k-1)\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}.$$

由数学归纳法可知结论成立.

(3) 因为 $\boldsymbol{A}^2=4\boldsymbol{E}_4$，所以 $\boldsymbol{A}^m=\begin{cases}(\boldsymbol{A}^2)^{\frac{m-1}{2}}\boldsymbol{A}=2^{m-1}\boldsymbol{A}, & \text{当}m\text{为奇数时;}\\(\boldsymbol{A}^2)^{\frac{m}{2}}=2^m\boldsymbol{E}_4, & \text{当}m\text{为偶数时.}\end{cases}$

(4) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n-\frac{1}{n}\boldsymbol{J}$，其中 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$，此时 $\boldsymbol{J}^2=n\boldsymbol{J}$. 计算

$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{E}_n-\frac{1}{n}\boldsymbol{J})(\boldsymbol{E}_n-\frac{1}{n}\boldsymbol{J})=\boldsymbol{E}_n-\frac{2}{n}\boldsymbol{J}+\frac{1}{n^2}\boldsymbol{J}^2=\boldsymbol{E}_n-\frac{1}{n}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{A},$$

因此 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{A}^{m-2}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^{m-1}=\cdots=\boldsymbol{A}$.

5. 证明不存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n$.

证 假设存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n$. 等式两边方阵的迹相等，即

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}_n).$$

但 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})-\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})=0\neq n=\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}_n)$，矛盾！ 故不存在满足条件的矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$.

6. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，且 $|\boldsymbol{A}|=-1$，证明 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

证 因为

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|,$$

所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

7. 求下列矩阵的逆矩阵.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2\\8&5\end{bmatrix}$； (2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\4&3&3\\2&1&2\end{bmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$； (4) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-8&-4\\8&-1&4\\4&4&-7\end{bmatrix}$.

解 (1) $|\boldsymbol{A}|=-1$，$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}5&-2\\-8&3\end{bmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}=-\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}-5&2\\8&-3\end{bmatrix}$.

(2) 用初等变换法.

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&2&1&0&0\\4&3&3&0&1&0\\2&1&2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_2-4r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&2&1&0&0\\0&7&-5&-4&1&0\\0&3&-2&-2&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&2&1&0&0\\0&1&-1&0&1&-2\\0&3&-2&-2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-3r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&2&1&0&0\\0&1&-1&0&1&-2\\0&0&1&-2&-3&7\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&5&6&-14\\0&1&0&-2&-2&5\\0&0&1&-2&-3&7\end{array}\right]\xrightarrow{r_1+r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&3&4&-9\\0&1&0&-2&-2&5\\0&0&1&-2&-3&7\end{array}\right],$$

$$\therefore\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}3&4&-9\\-2&-2&5\\-2&-3&7\end{bmatrix}.$$

(3) 用初等变换法.

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}]=\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{r_2-r_3\\r_3-r_4}]{r_1-r_2}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&-1&0&0\\0&1&0&0&0&1&-1&0\\0&0&1&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right],$$

$$\therefore \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

（4）因为 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=81\boldsymbol{E}_3$，即 $\boldsymbol{A}(\frac{1}{81}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}_3$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{81}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{81}\begin{bmatrix}1&8&4\\-8&-1&4\\-4&4&-7\end{bmatrix}$.

8. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 可逆，并求 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}$.

证 由 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A})-5(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})+10\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{O},\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})-5(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})&=-10\boldsymbol{E},\\ (\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})&=-10\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

即 $[-\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})](\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，因此 $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 可逆，并且 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}=-\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})$.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明

（1）$\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆；

（2）$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

证 （1）必要性 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0, \boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆，因此 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆.

充分性 假设 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，则 $|\boldsymbol{A}|=0$. 由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 两边同时右乘 $(A^*)^{-1}$，得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 根据伴随矩阵的定义可知 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，这与 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆相矛盾，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

（2）分不同情况讨论：

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$. 由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，得 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n$，从而 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，则 $|\boldsymbol{A}|=0$. 由(1)知 $\boldsymbol{A}^*$ 也不可逆，因此 $|\boldsymbol{A}^*|=0=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

10. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 计算 $|\boldsymbol{A}_{3\times3}|=4$，在等式 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$ 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{A}(A^*\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X})\Rightarrow 2(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}.$$

由于

$$[2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{E}]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&0&0\\1&1&-1&0&1&0\\-1&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}r_1\\ \frac{1}{2}r_2}]{\substack{r_1+r_2\\ r_2+r_3}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-1&1&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_3+r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right],$$

所以$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，因此$\boldsymbol{X}=\dfrac{1}{2}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$.

11．设$\boldsymbol{A}_{m\times n}=\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n\right]$，求$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$.

解　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}.$$

12．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{bmatrix}$，求满足$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}_3$的所有矩阵$\boldsymbol{X}$.

解　记$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\\x_4&y_4&z_4\end{bmatrix}$，则

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}_3]=\left[\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&-3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-r_1}\left[\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&4&-3&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-4r_2]{r_1+2r_2}\left[\begin{array}{cccc:ccc}1&0&1&-2&1&2&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3}\left[\begin{array}{cccc:ccc}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right],$$

因此

$$\begin{cases}x_1=2-x_4,\\x_2=-1+2x_4,\\x_3=-1+3x_4,\end{cases}\quad\begin{cases}y_1=6-y_4,\\y_2=-3+2y_4,\\y_3=-4+3y_4,\end{cases}\quad\begin{cases}z_1=-1-z_4,\\z_2=1+2z_4,\\z_3=1+3z_4,\end{cases}$$

其中x_4,y_4,z_4为自由变量，故

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}2-k_1&6-k_2&-1-k_3\\-1+2k_1&-3+2k_2&1+2k_3\\-1+3k_1&-4+3k_2&1+3k_3\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}，其中k_1,k_2,k_3为任意常数.$$

13. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&4\\0&0&4&-3\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{2k}$.

解 对 $\boldsymbol{A}$ 进行分块 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3&4\\4&-3\end{bmatrix}$. 于是 $\boldsymbol{A}^{2k}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{2k}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{2k}\end{bmatrix}$.

下面求 $\boldsymbol{B}^{2k}$ 与 $\boldsymbol{C}^{2k}$.

记 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}=2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}$，其中 $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$. 而 $\boldsymbol{G}^2=\boldsymbol{O}$，因此 $\boldsymbol{G}^k=\boldsymbol{O},k\geq 3$. 显然 $2\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 可交换，则由二项式定理得

$$\boldsymbol{B}^{2k}=(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G})^{2k}=(2\boldsymbol{E})^{2k}+\mathrm{C}_{2k}^{1}(2\boldsymbol{E})^{2k-1}\boldsymbol{G}=4^k\boldsymbol{E}+k4^k\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}4^k&k4^k\\0&4^k\end{bmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{C}^2=25\boldsymbol{E}_2$，则 $\boldsymbol{C}^{2k}=25^k\boldsymbol{E}_2$，因此 $\boldsymbol{A}^{2k}=\begin{bmatrix}4^k&k4^k&0&0\\0&4^k&0&0\\0&0&25^k&0\\0&0&0&25^k\end{bmatrix}$.

14. 求下列矩阵的逆矩阵.

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&0&0\\8&5&0&0\\0&0&3&4\\0&0&5&7\end{bmatrix}$；　　（2）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}$.

解 （1）用分块法.

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&2&0&0\\8&-3&0&0\\0&0&7&-4\\0&0&-5&3\end{bmatrix}.$$

（2）用分块法.

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\\0&1&-1&0&0&0\\1&-1&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

15. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&3&2\\0&0&5&4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}$ 满足 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 计算 $|\boldsymbol{A}_{4\times4}|=-4, |\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=240\neq0$，则 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆. 在等式 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E}$ 两边同时右乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=-2(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}).$$

因为 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=-2\boldsymbol{E}$，因此

$$\boldsymbol{X}=-2\boldsymbol{A}^{-1}=-2\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}^{-1}=-2\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2&0&0\\-3&1&0&0\\0&0&-4&2\\0&0&5&-3\end{bmatrix}.$$

16. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，

（1）证明 $r(\boldsymbol{A})=1$ 的充分必要条件是存在非零列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$；

（2）若 $r(\boldsymbol{A})=1$，证明 $\boldsymbol{A}^m=(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^{m-1}\boldsymbol{A}$，其中 m 是正整数；

（3）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&6\\3&-6&9\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^m$，其中 m 是正整数.

证 （1）充分性. 设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\dots,a_n]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\dots,b_n]^{\mathrm{T}}$，由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是非零列向量，知 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 不全为零，$b_1,b_2,\dots,b_n$ 不全为零，因此 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=[a_ib_j]\neq\boldsymbol{O}$，从而 $r(\boldsymbol{A})\neq0$. 又 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，则 $r(\boldsymbol{A})\le r(\boldsymbol{\alpha})\le1$，故 $r(\boldsymbol{A})=1$.

必要性. 已知 $r(\boldsymbol{A})=1$，则存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}=\left(\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_1\\\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\right)\left([\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{O}]\boldsymbol{Q}\right).$$

记 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_1\\\boldsymbol{O}\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{O}]\boldsymbol{Q}$，则

$$r(\boldsymbol{\alpha})=r\left(\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_1\\\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\right)=r\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_1\\\boldsymbol{O}\end{bmatrix}=1,\quad r(\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=r\left([\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{O}]\boldsymbol{Q}\right)=r[\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{O}]=1$$

因此 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零列向量，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

（2）由（1）可知，存在非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\dots,a_n]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\dots,b_n]^{\mathrm{T}}$，其中 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 不全为零，$b_1,b_2,\dots,b_n$ 不全为零，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. 又由 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，从而

$$\boldsymbol{A}^m=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^m=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{m-1}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^{m-1}\boldsymbol{A}.$$

解 （3）$r(\boldsymbol{A})=1$，$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=6$，由（2）可知

$$\boldsymbol{A}^m=(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^{m-1}\boldsymbol{A}=6^{m-1}\boldsymbol{A}=6^{m-1}\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&6\\3&-6&9\end{bmatrix}.$$

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，证明 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

证 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，从而 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\le n$. 又有

$$n=r(2\boldsymbol{E})=r\left[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\right]\le r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}),$$

故 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

第 4 章　向量空间 & 线性方程组通解结构

1. 设 $\mathbb{R}^4$ 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,-1,-1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[0,2,4,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=[3,4,5,8]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=[-1,-2,-3,2]^{\mathrm{T}}$. 试判断$\boldsymbol{\alpha}_5$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示. 若能表示，表示式是否唯一.

解　设$\boldsymbol{\alpha}_5=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$，则

$$\begin{cases} x_1-x_2\qquad\quad+3x_4=-1,\\ 2x_1-x_2+2x_3+4x_4=-2,\\ 3x_1-x_2+4x_3+5x_4=-3,\\ x_1+x_2+\ \ x_3+8x_4=\ \ 2. \end{cases}$$

对其增广矩阵施行初等行变换，得

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c} 1&-1&0&3&-1\\ 2&-1&2&4&-2\\ 3&-1&4&5&-3\\ 1&1&1&8&2 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1&-1&0&3&-1\\ 0&1&2&-2&0\\ 0&2&4&-4&0\\ 0&2&1&5&3 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1&0&0&7&1\\ 0&1&0&4&2\\ 0&0&1&-3&-1\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right],$$

因为$r(\tilde{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=3<4$，所以线性方程组有无穷多解. 其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=\ \ 1-7x_4,\\ x_2=\ \ 2-4x_4,\\ x_3=-1+3x_4. \end{cases}$$

故$\boldsymbol{\alpha}_5$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示，但表示式不唯一，且

$$\boldsymbol{\alpha}_5=(1-7k)\boldsymbol{\alpha}_1+(2-4k)\boldsymbol{\alpha}_2+(-1+3k)\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4\text{，其中 }k\text{ 为任意常数.}$$

2. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，向量组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$能否由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示？证明你的结论；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示？证明你的结论.

解　(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示. 向量组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，其部分组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$也线性无关. 又$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，从而$\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示. 假设$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，而由(1)知$\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示. 与$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关矛盾，从而假设错误，得证结论成立.

3. 判断向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=[2,2,7,-1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[3,-1,2,4]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,3,1]^{\mathrm{T}}$的线性相关性，并说明理由.

解　$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix} 2&3&1\\ 2&-1&1\\ 7&2&3\\ -1&4&1 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} -1&4&1\\ 0&1&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0 \end{bmatrix}$. $r(\boldsymbol{A}_{4\times3})=3$，因此 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

4. 若$\mathbb{P}^n$中的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，证明

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_s,\dots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}=\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+\lambda_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_s$$

也线性无关.

证 设有数$k_1,k_2,\dots,k_{s-1}$，使得$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{\beta}_{s-1}=\mathbf{0}$，即

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_s)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_s)+\cdots+k_{s-1}(\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+\lambda_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_s)=\mathbf{0},$$

整理得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+(k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+\cdots+k_{s-1}\lambda_{s-1})\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}.$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_{s-1}=0$，从而$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\dots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}$线性无关.

5. 设向量$\boldsymbol{\beta}$可以由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，但向量$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$线性表示. 试证向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\alpha}_r$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}$有相同的秩.

证 由题设，知存在数$k_1,\dots,k_{r-1},k_r$，使得$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$. 若$k_r=0$，则$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$，表明$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$线性表示，与题设相矛盾！因此$k_r\neq 0$. 此时

$$\boldsymbol{\alpha}_r=-k_r^{-1}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}-\boldsymbol{\beta}),$$

即$\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}$线性表示，因此$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\alpha}_r$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}$等价，故两个向量组具有相同的秩.

6. 求下列向量组的秩以及它的一个极大线性无关组，并且把其余向量用该极大无关组线性表示.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-1,2,4]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[0,3,1,2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[3,0,7,14]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=[1,-1,2,0]^{\mathrm{T}}$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=[6,4,1,-1,2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,2,3,-4]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,4,-9,-16,22]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=[7,1,0,-1,3]^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{\alpha}_5=[1,3,5,6,-9]^{\mathrm{T}}$.

解 (1) 记$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$. 因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&-1\\2&1&7&2\\4&2&14&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{有限次}}\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的秩为3，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$是其一个极大无关组，且$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

(2) 记$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5]$. 因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}6&1&1&7&1\\4&0&4&1&3\\1&2&-9&0&5\\-1&3&-16&-1&6\\2&-4&22&3&-9\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&2&-9&0&5\\4&0&4&1&3\\6&1&1&7&1\\-1&3&-16&-1&6\\2&-4&22&3&-9\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4+r_1\\r_5-2r_1}]{\substack{r_2-4r_1\\r_3-6r_1}}\begin{bmatrix}1&2&-9&0&5\\0&-8&40&1&-17\\0&-11&55&7&-29\\0&5&-25&-1&11\\0&-8&40&3&-19\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_5]{r_5-r_2}\begin{bmatrix}1&2&-9&0&5\\0&-8&40&1&-17\\0&-11&55&7&-29\\0&5&-25&-1&11\\0&0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_5]{\substack{r_4+r_5\\ r_3-7r_5}}\begin{bmatrix}1&2&-9&0&5\\0&-8&40&0&-16\\0&-11&55&0&-22\\0&5&-25&0&10\\0&0&0&1&-1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&-5&0&2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是其一个极大无关组, 且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-5\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_4.$$

7. 设向量组(I)和向量组(II)的秩分别为 r_1 和 r_2. 试证若向量组(I)可由向量组(II)线性表示，则 $r_1\le r_2$.

证 若向量组(I)均为零向量，则 $r_1=0$，则 $r_1=0\le r_2$. 若向量组(II)均为零向量，则 $r_2=0$. 又(I)可由(II)线性表示，因此向量组(I)也均为零向量，故 $r_1=0=r_2$.

若向量组(I)和(II)都含有非零向量，则均有极大无关组，分别设为(III)和(IV). 由题设，知(III)可由(IV)线性表示，且(III)线性无关，因此(III)所含向量个数不能超过(IV)所含向量个数，即 $r_1\le r_2$.

8. 设 $r<n$，证明 $\mathbb{P}^n$ 的子集 $W=\{[a_1,a_2,\dots,a_r,0,\dots,0]^{\mathrm{T}}\mid a_1,a_2,\dots,a_r\in\mathbb{P}\}$ 是 $\mathbb{P}^n$ 的一个子空间，并求 W 的基和维数.

证 方法 1 $W=\{a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_r\boldsymbol{\varepsilon}_r\mid a_1,a_2,\dots,a_r\in\mathbb{P}\}=L(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_r)$ 是由 $\mathbb{P}^n$ 中的向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 生成的子空间. 又 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 线性无关，因此 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 是 W 的一个基，W 的维数为 r.

方法 2 显然 $\mathbf{0}\in W$，所以子集 W 是非空的.

任取 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\dots,a_r,0,\dots,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\dots,b_r,0,\dots,0]^{\mathrm{T}}\in W$，$k\in\mathbb{P}$，有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=[a_1+b_1,a_2+b_2,\dots,a_r+b_r,0,\dots,0]^{\mathrm{T}}\in W\text{，即加法封闭；}$$

$$k\boldsymbol{\alpha}=[ka_1,ka_2,\dots,ka_r,0,\dots,0]^{\mathrm{T}}\in W\text{，即数量乘法封闭.}$$

从而得证 W 是 $\mathbb{P}^n$ 的子空间.

又 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_r\in W$，对 $\forall\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\dots,a_r,0,\dots,0]^{\mathrm{T}}\in W$，有

$$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_r,0\cdots,0]^{\mathrm{T}}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_r\boldsymbol{\varepsilon}_r,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 线性无关，因此 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 是 W 的一个基，W 的维数为 r.

9. 求下列 $\mathbb{K}^3$ 的子空间的一个基及维数.

(1) $W_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,-1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,3,3]^{\mathrm{T}}$；

(2) $W_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，其中 $\boldsymbol{\beta}_1=[2,3,-1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=[1,2,2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=[1,1,-3]^{\mathrm{T}}$.

解 (1) $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&3\\1&-1&3\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{有限次}}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$,

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 W_1 的一个基，且 $\dim W_1=2$.

(2) $[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{有限次}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

则 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是 W_2 的一个基，且 $\dim W_2 = 2$.

10. 求下列齐次线性方程组的基础解系，并对(2)写出通解.

(1) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 0$；　　(2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 8x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 13x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

解 (1) 同解方程组为 $x_1 = -2x_2 - 3x_3 - \cdots - nx_n$. 方程组的通解为

$$\boldsymbol{X} = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1},$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ 为任意常数，且

$$\boldsymbol{\eta}_1 = [-2, 1, 0, \ldots, 0]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_2 = [-3, 0, 1, 0, \ldots, 0]^{\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{\eta}_{n-1} = [-n, 0, \ldots, 0, 1]^{\mathrm{T}}$$

为方程组的一个基础解系.

(2) 对方程组的系数矩阵作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 8 & 1 & -5 & 0 \\ 13 & -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -21 & -12 \\ 0 & 12 & -21 & 13 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -21 & -7 \\ 0 & 0 & -21 & -7 \end{bmatrix}.$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

由于 $r(\boldsymbol{A}) = 3 < 4$，所以方程组有非零解. 其同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -\frac{5}{3}x_4, \\ x_3 = -\frac{1}{3}x_4, \end{cases}$ 则方程组的通解为

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}} = k[0, -5, -1, 3]^{\mathrm{T}}，\text{其中 } k \text{ 为任意常数，}$$

且 $[0, -5, -1, 3]^{\mathrm{T}}$ 为方程组的一个基础解系.

11. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$，试求秩为 2 的 3 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$.

解 3 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，说明 $\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量都是齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&3\\-3&6&-9\\2&-4&6\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+2r_2]{r_2+3r_1}\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

由于 $r(\boldsymbol{A})=1$，所以方程组有非零解. 其同解方程组为 $x_1=2x_2-3x_3$. 取 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=[2,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=[-3,0,1]^{\mathrm{T}}$，所求的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 $\begin{bmatrix}2&-3&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$，满足 $r(\boldsymbol{B})=2$ 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 注意矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是不唯一的.

12. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

证 由题设知 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含有三个线性无关的解向量. 根据齐次线性方程组解的运算性质知 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 均为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解. 下面只需证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关. 令矩阵

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]&=[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1]\\&\xrightarrow{c_2-c_1}[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1]\\&\xrightarrow{c_2+c_3}[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1]\to[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1]\to[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1]=\boldsymbol{C}\end{aligned}$$

因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，因而向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，从而为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

13. 设齐次线性方程组

$$\text{(I)}\ \begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0,\\2x_1+3x_2+3x_3=0,\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}\quad 与\quad \text{(II)}\ \begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0,\\2x_1+b^2x_2+(c+3)x_3=0\end{cases}$$

同解，且设方程组(I)与(II)的系数矩阵分别为 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$.

(1) 求 $r(\boldsymbol{A}_1)$ 和 $r(\boldsymbol{A}_2)$； (2) 求参数 a,b,c 的值.

解 (1) 因为(I)与(II)同解，则 $r(\boldsymbol{A}_1)=r(\boldsymbol{A}_2)$，且 $r(\boldsymbol{A}_2)\le 2$. 对(I)的系数矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 施行初等行变换得

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&3\\1&1&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&-1&a-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&0&a-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-1\\0&0&a-2\end{bmatrix},$$

所以 $a=2,r(\boldsymbol{A}_1)=2,r(\boldsymbol{A}_2)=2$.

(2) 由(1)知方程组(II)的同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-3x_3,\\x_2=x_3,\end{cases}$ 把其代入方程组(II)中，得

$$\begin{cases}b+c=3,\\b^2+c=3.\end{cases}\quad 解得\ \begin{cases}b=1\\c=2\end{cases}\ 或\ \begin{cases}b=0\\c=3\end{cases}.$$

当$\begin{cases} b=1 \\ c=2 \end{cases}$时，(I)与(II)同解；而当$\begin{cases} b=0 \\ c=3 \end{cases}$时，(I)与(II)不同解，舍去.

14. 已知 4 元向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\5\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\a+2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\b+3\\5\end{bmatrix}.$$

讨论a,b取何值时，(1) $\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示；(2) $\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$唯一地线性表示，并写出此表示式.

解　设$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$，则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 + 4x_4 = b+3, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + (a+8)x_4 = 5. \end{cases}$$

对其增广矩阵作初等行变换，有

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&1&a&2&b+1\\0&2&-2&a+5&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&2&-1&0\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{array}\right]$$

(1) 当$a=-1$，$b\neq 0$时，由于$r(\boldsymbol{A})=2,\ r(\tilde{\boldsymbol{A}})=3$，所以方程组无解. 此时$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示；

(2) 当$a\neq -1$时，由于$r(\tilde{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=4$，所以方程组有唯一解. 此时$\boldsymbol{\beta}$可唯一地由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示，其表示式为$\boldsymbol{\beta}=-\dfrac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\dfrac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2+\dfrac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4$.

15. 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$. 已知线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$存在两个不同的解.

(1) 求参数λ,a的值；

(2) 求方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的通解.

解 (1) 由题设，知线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解，从而

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

解得$\lambda=1$或-1.

当$\lambda=1$时，$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&a\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&a\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$，由于$r(\tilde{\boldsymbol{A}})\neq r(\boldsymbol{A})$，所以方程组无解，与题设矛盾，故舍去；

当$\lambda=-1$时，$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}-1&1&1&a\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&-a-\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&a+2\end{array}\right]$，由于$r(\tilde{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})$，所以$a=-2$.

(2) 由(1)可知，当$\lambda=-1$，$a=-2$时，方程组有无穷多解. 其同解方程组为$\begin{cases}x_1=x_3+\frac{3}{2},\\x_2=\quad-\frac{1}{2},\end{cases}$ 则方程组的通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}$，其中$k$为任意常数.

16. 设$\boldsymbol{X}_1=[1,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_3=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的三个解向量，且$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$.

(1) 求其导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的通解；

(2) 求方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的通解

解 令$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{X}_1=[0,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{X}_3-\boldsymbol{X}_2=[0,0,1]^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{A\eta}_i=\boldsymbol{0}(i=1,2)$，即$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$都是方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解，且线性无关，因此$3-r(\boldsymbol{A})\geq2$，即$r(\boldsymbol{A})\leq1$. 又$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则$r(\boldsymbol{A})\geq1$，因此$r(\boldsymbol{A})=1$，即$3-r(\boldsymbol{A})=2$，故$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$是方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的基础解系. 从而导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的通解为

$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2=k_1[0,1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[0,0,1]^{\mathrm{T}},$$

其中k_1,k_2为任意常数；

方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的通解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_1+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2=[1,0,0]^{\mathrm{T}}+k_1[0,1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[0,0,1]^{\mathrm{T}},$$

其中k_1,k_2为任意常数.

17. 设矩阵$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4],\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为$n$元列向量，其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关. $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_3$，如果$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3+5\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的通解.

解 因为$2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3+5\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$，所以$[2,3,4,5]^{\mathrm{T}}$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的一个解. 又$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_3$,

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\xrightarrow{\text{列}}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{0}],$$

且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，因而$r(\boldsymbol{A})=3$，故齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的基础解系含有$4-r(\boldsymbol{A})=1$个解. 而$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$，所以$[1,-1,5,0]^{\mathrm{T}}$为方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 从而方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的通解为

$$\boldsymbol{X}=[2,3,4,5]^{\mathrm{T}}+k[1,-1,5,0]^{\mathrm{T}}，其中k为任意常数.$$

18. 已知非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1,\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1,\\ax_1+x_2+3x_3-bx_4=1\end{cases}$有 3 个线性无关的解.

(1) 证明方程组系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A})=2$；(2) 求参数a,b的值及方程组的通解.

证 (1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是所给的非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的 3 个线性无关的解，令

$$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\ \ \boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，且 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 线性无关，因此 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数为 $4-r(\boldsymbol{A})\ge 2$，即 $r(\boldsymbol{A})\le 2$.

又 $\boldsymbol{A}$ 有 2 阶子式 $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}\ne 0$，所以 $r(\boldsymbol{A})\ge 2$， 因此 $r(\boldsymbol{A})=2$.

解 (2) 对方程组的增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 施行行初等变换，得

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&-b&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&4-2a&4a-b-5&4-2a\end{array}\right].$$

因为 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以有 $\begin{cases}-2a+\ \ 4=0,\\4a-b-5=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=3.\end{cases}$ 代入原方程组中得到同解方程组

$$\begin{cases}x_1=2-2x_3+4x_4,\\x_2=-3+x_3-5x_4,\end{cases}$$

则方程组的通解为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-3\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}4\\-5\\0\\1\end{bmatrix}$，其中 k_1,k_2 为任意常数.

19. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，证明对任意 m 元列向量 $\boldsymbol{\beta}$，线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 总有解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=m$.

证 必要性 设对任意的 $\boldsymbol{\beta}$， $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 总有解，则对 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$， $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 有解，记作 $\boldsymbol{X}_i$，即 $\boldsymbol{AX}_i=\boldsymbol{\varepsilon}_i$，$i=(1,2,\cdots,m)$.

此时 $\boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\dots,\boldsymbol{X}_m\right]=\left[\boldsymbol{AX}_1,\boldsymbol{AX}_2,\dots,\boldsymbol{AX}_m\right]=\left[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_m\right]=\boldsymbol{E}_m$，因此

$$m=r(\boldsymbol{E}_m)=r\left(\boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\dots,\boldsymbol{X}_m\right]\right)\le r(\boldsymbol{A})\le\min\{m,n\},$$

故 $r(\boldsymbol{A})=m$.

充分性 设 $r(\boldsymbol{A})=m$，则对任意的 $\boldsymbol{\beta}$，有 $r(\boldsymbol{A})\le r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})\le\min(m,n+1)\le m$，因此 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=m$，故对任意的 $\boldsymbol{\beta}$， $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 总有解.

20. 设 γ_0 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是其导出组的一个基础解系.

(1) 证明 $\boldsymbol{\gamma}_0,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性无关.

(2) 证明 $\boldsymbol{\gamma}_0,\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解.

证 (1) 设有数 $k_0,k_1,\cdots,k_{n-r}$，使得

$$k_0\boldsymbol{\gamma}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}=\boldsymbol{0},\qquad (*)$$

等式的两端同时左乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$，得 $k_0\boldsymbol{A\gamma}_0+k_1\boldsymbol{A\eta}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{A\eta}_{n-r}=\boldsymbol{0}$，即 $k_0\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$. 因为 $\boldsymbol{\beta}\ne\boldsymbol{0}$，$\therefore k_0=0$；又因为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的导出组的基础解系，线性无关，由(＊)式知，

$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，所以$\boldsymbol{\gamma}_0,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$线性无关.

(2) 由题设$\boldsymbol{A\gamma}_0=\boldsymbol{\beta}$， $\boldsymbol{A\eta}_i=\boldsymbol{0},i=1,2,\cdots,n-r$，所以$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_i)=\boldsymbol{A\gamma}_0+\boldsymbol{A\eta}_i=\boldsymbol{\beta},i=1,2,$ $\cdots,n-r$，即$\boldsymbol{\gamma}_0,\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_{n-r}$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的解. 又假设存在$k_0,k_1,\cdots,k_{n-r}$，使得$k_0\boldsymbol{\gamma}_0+k_1(\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_1)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_{n-r})=\boldsymbol{0}$，整理得

$$(k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-r})\gamma_0+k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}=\boldsymbol{0}.$$

由(1)知$\boldsymbol{\gamma}_0,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$线性无关，得到$k_0=k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，即$\boldsymbol{\gamma}_0,\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_2,$ $\cdots,\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_{n-r}$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的$n-r+1$个线性无关的解.

21. 下面的子集合，是不是一个子空间？

(1) $\mathbb{R}^3$的子集$W=\left\{[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}\mid x_1+x_2+x_3=1\right\}$；

(2) 实空间$\mathbb{R}^{n\times n}$内，所有n阶实对称矩阵组成的子集合；

解 (1) 取$\boldsymbol{\alpha}=[1,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=[0,1,0]^{\mathrm{T}}\in W$，而$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=[1,1,0]^{\mathrm{T}}\notin W$，因此$W$不是$\mathbb{R}^3$的子空间.

(2) 因为$\boldsymbol{O}\in W$，所以W非空. 任取$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in W,k\in\mathbb{R}$，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$. 此时

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},$$
$$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A},$$

表明$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},k\boldsymbol{A}\in W$，因此$W$是$\mathbb{R}^{n\times n}$的子空间；

22. 求下列线性空间的一个基并指出其维数.

(1) $W=\left\{[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}\mid x_i\in\mathbb{R},\ x_1+x_2+x_3=0\right\}$；

(2) 数域$\mathbf{P}$上全体形如$\begin{bmatrix}0&a\\-a&b\end{bmatrix}$的二阶矩阵，对矩阵加法和数与矩阵的乘法所构成的线性空间；

(3) $\mathbf{R}^4$的子空间$W=\left\{[s+3t,s-t,2s-t,4t]^{\mathrm{T}}\mid s,t\in\mathbb{R}\right\}$.

解 (1) $W=\left\{[x_1,x_2,x_3]\mid x_i\in\mathbb{R},\ x_1+x_2+x_3=0\right\}$是齐次线性方程组$x_1+x_2+x_3=0$的解空间，所以$W$的维数是 2，方程组的基础解系$\boldsymbol{\eta}_1=[-1,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=[-1,0,1]^{\mathrm{T}}$是$W$的一个基.

(2) 对任意$a,b\in\mathbb{R}$，有$\begin{bmatrix}0&a\\-a&b\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=a\boldsymbol{A}_1+b\boldsymbol{A}_2$. 又矩阵$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$线性无关，所以$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$为一个基，且该线性空间的维数为 2.

(3) 对任意$s,t\in\mathbb{R}$，有$[s+3t,s-t,2s-t,4t]^{\mathrm{T}}=s[1,1,2,0]^{\mathrm{T}}+t[3,-1,-1,4]^{\mathrm{T}}$. 又向量组$[1,1,2,0]^{\mathrm{T}},[3,-1,-1,4]^{\mathrm{T}}$线性无关，从而为$W$的一个基，且$W$的维数是 2.