第二次课

2022年9月6日 8:30

§1.2 映射与函数

教学内容：1. 映射与函数的概念（中学已讲，略讲）

2. 单射、满射、复合映射（重点反三角函数）

3. 函数的表示（重点讲分段函数）

4. 函数的性质（重点讲有界与无界）

一、映射与函数

定义 1.2.1 设 X, Y 是两个给定的集合，若按照某种规则 f，使得对 X 中的每一个元素 x，都有 Y 中唯一的 y 与之对应，则称 f 是从 X 到 Y 的一个映射，记为

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y \end{aligned}$$

注意：X, Y 不一定是数集.

当 X, Y 是数集时，f 称为函数

x 称为原像（自变量），y 称为 x 在 f 下的像

X 称为 f 的定义域，记为 D_f，像的全体称为 f 的值域，记为 R_f，即

$$R_f = f(X) = \{ y \in Y \mid y = f(x), x \in X \}.$$

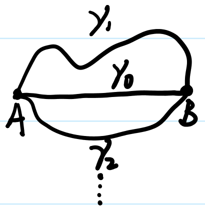
映射相等 $\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{定义域相同} \\ \text{对应关系相同} \;(\Longleftrightarrow \text{值域相同}). \end{cases}$

Ex1.2.1 设Γ是位于曲面上的联接两个固定点的光滑曲线的集合. 对应关系如下:

$$f: \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$\gamma \longmapsto |\gamma| \quad (\gamma\text{的长度})$$

注: Γ中使$f(\gamma)$最小的γ称为"测地线"(黎曼几何)

如:



线段

γ_0是$\mathbb{R}^2$标准度量下的测地线

未必是Finsler度量下的...

补充: Descartes (笛卡尔) 乘积

对于任意两个集合A, B, 在A中任取元素x, B中任取元素y, 组成一个数对(x,y), 这些有序数对的全体组成的新集合称为集合A与B的Descartes乘积, 记为$A\times B$. 即

$$A\times B = \{(x,y) \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

Ex1.2.2 $A = \{$红, 绿, 蓝$\}$ (面料颜色)

$B = \{$抽纱、提花、印染、刺绣$\}$ (工艺), 则

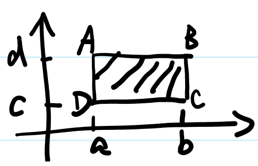
$A\times B =$

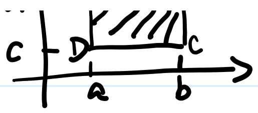
常用的D-乘积: 直角坐标系

① $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$ 平面坐标系

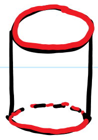
② $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$. 空间坐标系.

③ 矩形域ABCD =





④ 圆柱面



EX1.2.3. 空间质点的位置由 (x,y,z) 确定，一般依赖时间 t.

质点的运动可由映射来描述：

$$f: T \to \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$
$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

如果是 3 个质点的运动，则

$$f: T \to \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^9$$
$$t \mapsto (x_1(t), y_1(t), z_1(t), x_2(t), y_2(t), z_2(t), x_3(t), y_3(t), z_3(t)).$$

二. 映射的简单分类：

若 $f: X \to Y$ 是一个映射.

1° 单射 (injection)：$\forall x_1, x_2 \in X$，只要 $f(x_1)=f(x_2)$ 就有 $x_1 = x_2$

(或 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$) 称 f 为单射.

2° 满射 (surjection)：若 $R_f = Y$，称 f 为满射.（或"到上" onto）

3° 双射 (bijection)：若 f 既单又满（又称"一一对应"）称 f 为"双射".

此时 f 有逆映射

$$f^{-1}: Y \to X$$
$$y \mapsto x \ (\text{满足 } y = f(x))$$

$$\Rightarrow (f^{-1})^{-1} = f$$

注：有时也用 f^{-1} 表示原像集，并不代表 f 可逆.

反函数：$y=f(x) \to x=f^{-1}(y) \xrightarrow{\text{交换}x,y} y=f^{-1}(x)$

$x\in D_f$ $\quad$ $y \in R_f$ $\quad$ $x \in R_f$

$x\in D_f$ $\qquad$ $y\in R_f$ $\qquad$ $x\in R_f$

如：$y=x^2+1\ (x>0) \Rightarrow x=\sqrt{y-1}$

∴其反函数为 $y=\sqrt{x-1}\ \ (x>1)$

∴ $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于 $y=x$ 对称！

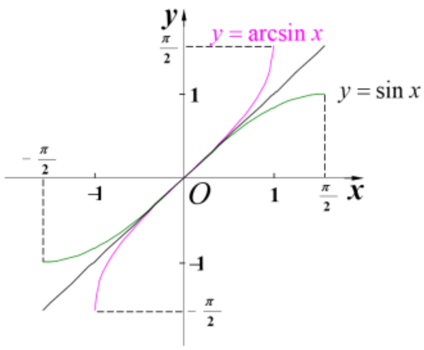
结论：严格单调的函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$，且两者具有相同的单调性（请自证，以后可直接用）

四类反三角函数 ☆

$1^\circ\ y=f(x)=\arcsin x,$

$D_f=[-1,\ 1], V_f=[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}].$

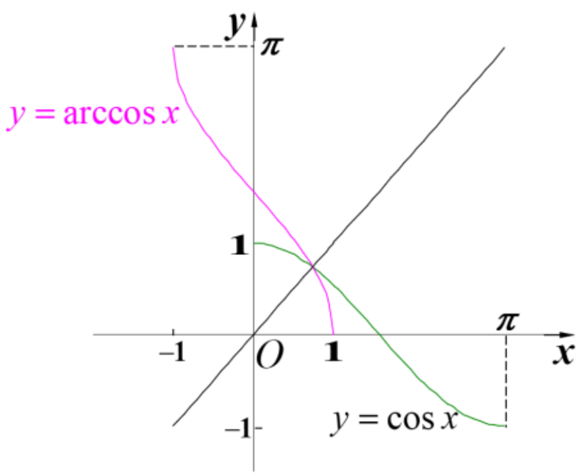
有界，严格单调增的奇函数。



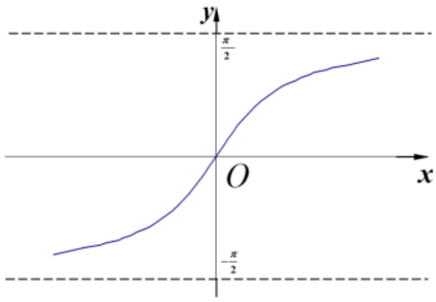
$2^\circ\ y=f(x)=\arccos x,$

$D_f=[-1,\ 1], V_f=[0,\pi]$

是严格单调减函数。



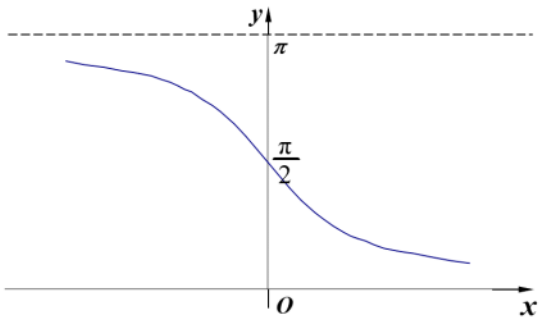
$$3^{\circ}\ y = f(x) = \arctan x,$$
$$D_f = (-\infty,\ +\infty), V_f = (\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$



是严格单调增的奇函数；

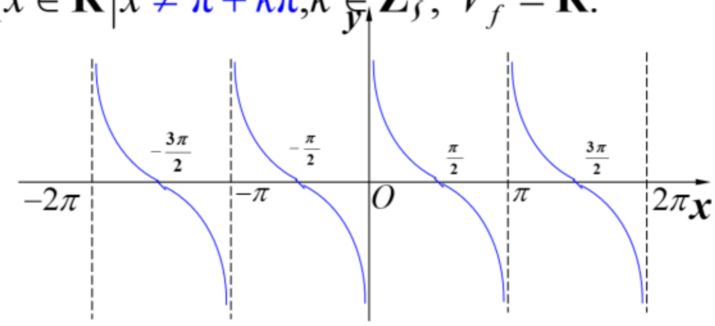
有两条水平渐近线 $y=-\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{2}.$

$$4^{\circ}\ y = f(x) = \operatorname{arc}\cot x,$$
$$D_f = (-\infty,\ +\infty), V_f = (0,\ \pi).$$



严格单调减。

$$4^{\circ}\ y = f(x) = \cot x,$$
$$D_f = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}\},\ V_f = \mathbf{R}.$$



无界、 $T=\pi$ **的周期函数，在** $(k\pi,\ \pi+k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$ **内严格单调减。**

(4) 常用的反三角函数恒等式:

$$\sin(\arcsin x)=x,\ x\in[-1,1];\qquad \arcsin(\sin x)=x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right];$$
$$\cos(\arccos x)=x,\ x\in[-1,1];\qquad \arccos(\cos x)=x,\ x\in[0,\pi];$$
$$\tan(\arctan x)=x,\ x\in\mathbf{R};\qquad \arctan(\tan x)=x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right);$$
$$\cot(\operatorname{arccot}x)=x,\ x\in\mathbf{R};\qquad \operatorname{arccot}(\cot x)=x,\ x\in(0,\pi);$$
$$\arcsin(-x)=-\arcsin x,\ x\in[-1,1];\qquad \arctan(-x)=-\arctan x,\ x\in\mathbf{R};$$
$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x,\ x\in[-1,1];\qquad \operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot}x,\ x\in\mathbf{R};$$
$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\ x\in[-1,1];\qquad \arctan x+\operatorname{arccot}x=\frac{\pi}{2},\ x\in\mathbf{R}.$$

三、复合映射（复合函数）

$$x \xrightarrow[\text{内层}]{f} u=f(x) \xrightarrow[\text{外层}]{g} y=g(f(x))$$

$R_f \subset D_g$（或 $R_f \cap D_g \neq \phi$）

EX1.2.4 可以用函数 $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$ $(x>0)$ 而迭代，即

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)\quad (x_1=1)$$

计算出 $\sqrt{2}$ 来.（严格证明在第二章完成）

注(2) 复合运算不满足交换律，即 $f\circ g \neq g\circ f$.

例如,

四、初等函数

基本初等函数（六类）

(1) 常值函数 $y=C$

(2) 幂函数 $y=x^{\alpha}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$

(3) 指数函数 $y=a^{x}$ $(a>0且a\neq1)$

(4) 对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0且a\neq1)$

(5) 三角函数（6个）

$y=\sin x$、$y=\cos x$. $y=\tan x$. $y=\cot x$

大学中常用 $\begin{cases} y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x} \\ y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$

(6) 反三角函数（4个）

$y=\arcsin x$. $y=\arccos x$. $y=\arctan x$. $y=\operatorname{arccot} x$.

由基本初等函数经过有限次的四则运算或复合产生的函数称为<u>初等函数</u>

五. 函数的几类表示.

1. 分段函数