第六章　微分方程

第二节　一阶微分方程

天津大学
数学学院
郭飞

第二节　一阶微分方程

一、可分离变量的微分方程

二、齐次方程

三、一阶线性微分方程

四、伯努利（Bernoulli）方程

五、小结和思考题

一阶微分方程的一般形式:

$$F(x, y, y') = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$$

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$$

一、可分离变量的微分方程

1. 标准形式：形如 $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$

或可化为形如 $g(y)dy = f(x)dx$

的方程称为可分离变量的微分方程.

例如 $\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 y^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y^{-\frac{4}{5}} dy = 2x^2 dx,$

讨论下列方程哪些是可分离变量的微分方程:

微分方程	分离变量	是否可分离变量
$y'=2xy$	$y^{-1}\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x$	是
$3x^2+5x-y'=0$	$\mathrm{d}y=(3x^2+5x)\mathrm{d}x$	是
$(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$	________	不是
$y'=1+x+y^2+xy^2$	$y'=(1+x)(1+y^2)$	是
$y'=10^{x+y}$	$10^{-y}\mathrm{d}y=10^{x}\mathrm{d}x$	是
$y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$	________	不是

可分离变量的微分方程的解法

分离变量: 将方程写成 $g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$ 的形式;

两端积分: $$\underbrace{\int g(y)\mathrm{d}y}_{G(y)} = \underbrace{\int f(x)\mathrm{d}x}_{F(x)}$$

则有 $$G(y) = F(x) + C$$

求显式解: 求方程由$G(y)=F(x)+C$所确定的隐函数

$y=F(x)$或$x=Y(y)$.

方程$G(y)=F(x)+C$, $y=F(x)$或$x=Y(y)$都是方程的通解,

其中$G(y)=F(x)+C$称为隐式(通)解.

例1. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解.

说明: 在求解过程中每一步不一定是同解变形，因此可能增、减解.

解: 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=3x^2\,\mathrm{d}x$

两边积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 3x^2\,\mathrm{d}x$

得 $\ln|y|=x^3+C_1$

或

$$\boxed{\ln|y|=x^3+\ln|C|}$$

即 $y=\pm\mathrm{e}^{x^3+C_1}=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^3}$

令 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$

$y=C\mathrm{e}^{x^3}$ （C 为任意常数）

（此式含分离变量时丢失的解 $y=0$）

例2. 解初值问题 $\begin{cases} xy\,\mathrm{d}x + (x^2+1)\,\mathrm{d}y = 0 \\ \underline{y(0)=1} \end{cases}$

解: 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y| = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \ln|C|$

即 $y\sqrt{x^2+1} = C$ （C 为任意常数）

由初始条件得 $C = 1$, 故所求特解为

$$y\sqrt{x^2+1} = 1$$

例3. 求下述微分方程的通解:

$$y' = \sin^2(x - y + 1)$$

解: 令 $u = x - y + 1$, 则

$$u' = 1 - y'$$

故有 $1 - u' = \sin^2 u$

即 $\sec^2 u \, \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$

解得 $\tan u = x + C$

所求通解: $\tan(x - y + 1) = x + C$ （C 为任意常数）

例4. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x+y}$ 的通解 .

解法 1 分离变量 $\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$

$$-\mathrm{e}^{-y}=\mathrm{e}^{x}+C$$

即 $$(\mathrm{e}^{x}+C)\mathrm{e}^{y}+1=0 \quad (C<0)$$

解法 2 令 $u=x+y$, 则 $u'=1+y'$

故有 $$u'=1+\mathrm{e}^{u}$$

积分 $$\int\frac{\mathrm{d}u}{1+\mathrm{e}^{u}}=x+C$$

$$\boxed{\int\frac{(1+\mathrm{e}^{u})-\mathrm{e}^{u}}{1+\mathrm{e}^{u}}\,\mathrm{d}u}$$

$$u-\ln(1+\mathrm{e}^{u})=x+C$$

所求通解: $\ln(1+\mathrm{e}^{x+y})=y-C$ （C 为任意常数）

例5. 若放射性元素铀的衰变速度与当时未衰变原子的含量 M 成正比，已知 $t=0$ 时铀的含量为 M_0，求在衰变过程中铀含量 $M(t)$ 随时间 t 的变化规律.

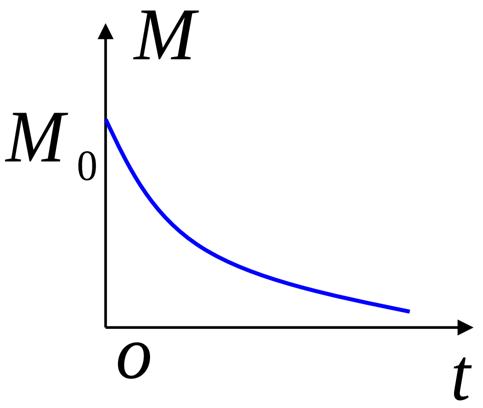
解: 根据题意，有
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\lambda M \quad (\lambda > 0) \\ M\big|_{t=0} = M_0 \quad \text{(初始条件)} \end{cases}$$

对方程分离变量，然后积分：$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}M}{M} = \int(-\lambda)\,\mathrm{d}t$

得 $\ln M = -\lambda t + \ln C$，即 $M = C\mathrm{e}^{-\lambda t}$

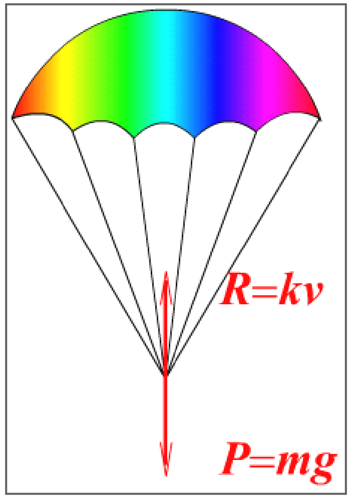
利用初始条件，得 $C = M_0$

故所求铀的变化规律为 $M = M_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$.



例6. 设降落伞从跳伞塔下落后所受空气阻力与速度成正比,并设降落伞离开跳伞塔时($t=0$) 速度为0,求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解: 根据牛顿第二定律列方程 $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv$



初始条件为 $v\big|_{t=0}=0$

对方程分离变量, 然后积分 : $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\int\frac{\mathrm{d}t}{m}$

得 $-\dfrac{1}{k}\ln(mg-kv)=\dfrac{t}{m}+C$ (此处 $mg-kv>0$)

利用初始条件, 得 $C=-\dfrac{1}{k}\ln(mg)$

代入上式后化简, 得特解 $v=\dfrac{mg}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t})$

t 足够大时 $v\approx\dfrac{mg}{k}$

二、齐次方程

1. 形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\dfrac{y}{x})$ 的方程叫做齐次方程 .

解法: 令 $\boldsymbol{u}=\dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}$, 则 $y=ux$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

代入原方程得 $$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$$

分离变量: $$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分, 得 $$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

积分后再用 $\dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}$ 代替 u, 便得原方程的通解.

例7. 解微分方程 $y^2 + x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$

解 原方程可写成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y^2}{xy - x^2} = \dfrac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x} - 1},$

令$u = \dfrac{y}{x}$,即$y = ux$,则 $u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{u^2}{u-1},$ 即, $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{u}{u-1}.$

分离变量, 得 $(1 - \dfrac{1}{u})\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分, 得 $u - \ln|u| + C = \ln|x|,$

或写成 $\ln|xu| = u + C.$

回代 $\ln|y| = \dfrac{y}{x} + C$. 所以，通解是 $y = C_1 e^{\frac{y}{x}}$ (C_1是任意常数)

例 8. 求解微分方程 $(x-y\cos\frac{y}{x})\mathrm{d}x+x\cos\frac{y}{x}\mathrm{d}y=0.$

解 令$u=\frac{y}{x}$,即$y=ux$,则 $\mathrm{d}y=x\mathrm{d}u+u\mathrm{d}x$,

$$\therefore (x-ux\cos u)\mathrm{d}x+x\cos u(u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u)=0,$$

化简，得$\cos u\,\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$,

解得,$\sin u=-\ln|x|+C$,

微分方程的解为 $\sin\frac{y}{x}=-\ln|x|+C.$

2、可化为齐次方程的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)\qquad (c^2+c_1^2\neq 0)$$

(1). 当 $\frac{a_1}{a}\neq\frac{b_1}{b}$ 时，作变换 $X=x-h, Y=y-k$ （h, k 为待定常数），

则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X, \mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$，原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=f\left(\frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}\right)$$

令 $\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases}$，解出 h, k

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=f\left(\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}\right)\qquad \text{(齐次方程)}$$

求出其解后，将 $X=x-h, Y=y-k$ 代入，即得原方程的解.

(2). 当 $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ 时，原方程可化为

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\right) \qquad (b \neq 0)$$

令 $v = ax + by$, 则 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a + bf\left(\frac{v+c}{\lambda v + c_1}\right)$$ (可分离变量方程)

例9. 求解 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+y+4}{x-y-6} \\ y\big|_{x=2} = -5 \end{cases}$

解: 令 $\begin{cases} h+k+4=0 \\ h-k-6=0 \end{cases}$ 得 $h=1,\ k=-5$

令 $X=x-1,\ Y=y+5$, 得 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \dfrac{X+Y}{X-Y}$

再令 $Y=Xu$, 得 $$\frac{1-u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}X}{X}$$

积分得 $$\arctan u - \tfrac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|CX|$$

代回原变量, 得原方程的通解:

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2\right]=\ln\left|C(x-1)\right|$$

利用 $y\big|_{x=2}=-5$ 得 $C=1$，故所求特解为

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}=\frac{1}{2}\ln\left[(x-1)^2+(y+5)^2\right]$$

例10. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x+y+1}{2x+2y-1}$

解: 令 $v(x)=x+y(x)$，则 $y(x)=v(x)-x$，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-1.$

原方程变为 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-1=-\dfrac{v+1}{2v-1}.$ 即

$$\frac{2v-1}{v-2}\mathrm{d}v=\mathrm{d}x.$$

其通解为 $2v+3\ln|v-2|=x+C.$

将 $v=x+y$ 代入上式，通解为

$$x+2y+3\ln|x+y-2|=C.$$

三、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程标准形式: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ → 自由项

若 $Q(x)\equiv 0$, **称为****一阶线性齐次方程**;

若 $Q(x)\not\equiv 0$, 称为**一阶线性非齐次方程**.

下列方程是否是(或能否化为)线性方程?

(1) $(x-2)\dfrac{dy}{dx}=y,\quad \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x-2}y=0,$ 是齐次线性方程.

(2) $3x^2+5x-y'=0,\quad \Rightarrow y'=3x^2+5x,$ 是非齐次线性方程.

(3) $y'+y\cos x=e^{-\sin x},$ 是非齐次线性方程.

(4) $\dfrac{dy}{dx}=10^{x+y},$ 不是线性方程.

1.解齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln|C|$

故通解为 $y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

例11. 求微分方程的 $(x-2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y$ 通解.

$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{1}{x-2}dx$

$\ln|y|=\ln|x-2|+\ln|c|$

$\Rightarrow y=C(x-2)$ ✓

解: 原方程可变为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{1}{x-2}y=0$

这是齐次线性方程. 由通解公式得原方程的通解为

$$y=Ce^{\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x}=Ce^{\ln(x-2)}=C(x-2).$$

2. 解非齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

用**常数变易法**: 作变换 $y(x)=c(x)\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$，则

$$c'(x)\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\cancel{-P(x)c(x)\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}+\cancel{P(x)c(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}=Q(x)$$

即 $$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

对应齐次方程通解 $y=\boxed{C}\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

两端积分得 $$c(x)=\int Q(x)\,\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C$$

故原方程的通解 $$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

即 $$y=\underbrace{C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}}$$

例11. 求方程的通解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{5/2}$.

$\underbrace{y'-\frac{2}{x+1}}_{P(x)}y=\underbrace{(x+1)^{\frac{5}{2}}}_{Q(x)}$

解: **方法一** 先解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=0$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{2\mathrm{d}x}{x+1}$

积分得 $\ln|y|=2\ln|x+1|+\ln|C|$，即 $y=C(x+1)^2$

用**常数变易法**求特解. 令 $y=c(x)\cdot(x+1)^2$，则

$$y'=c'(x)\cdot(x+1)^2+2c(x)\cdot(x+1)$$

代入非齐次方程得 $c'(x)=(x+1)^{1/2}$

解得 $c(x)=\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C$

故原方程通解为 $y=(x+1)^2\left[\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C\right]$

例11. 求方程的通解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{5/2}$.

方法二(公式法) 这里 $P(x)=-\dfrac{2}{x+1}$， $Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}$. $\to 3$

由通解公式得

$$y=e^{\int\frac{2}{x+1}dx}\left[\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-\int\frac{2}{x+1}dx}dx+C\right]$$

$$=(x+1)^2\left[\int(x+1)^{\frac{5}{2}}(x+1)^{-2}dx+C\right]=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right],$$

即 $$y=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right].=C\cdot(x+1)^2+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}$$

$$y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$ (公式)

例12. 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2(\ln y-x)}$

$x=x(y)$ 是未知函数 $\Longrightarrow x(y)=\cdots\cdots$

解: 可化为关于 x 的一阶线性方程（技巧）

$y'(x)+P(x)y(x)=Q(x)$ 关于 y 的一阶线性

$x'(y)+P(y)x(y)=Q(y)$ 关于 x 的一阶线性

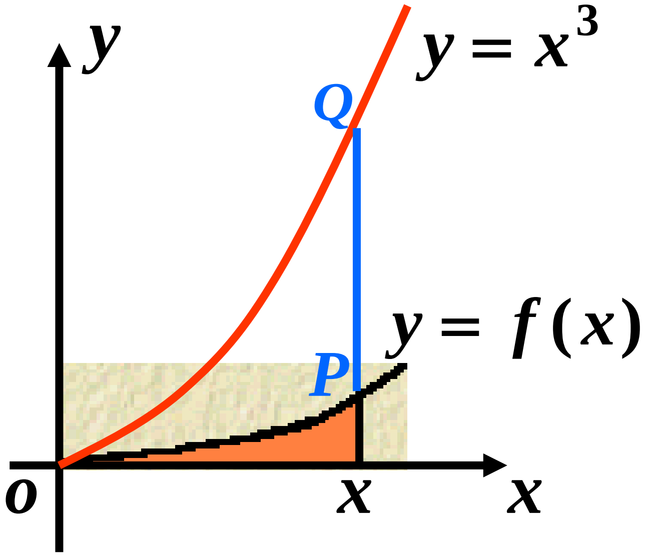
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{2}{y}x=\frac{2\ln y}{y}$$

这里 $\quad P(y)=\dfrac{2}{y},\quad Q(y)=\dfrac{2\ln y}{y}$

$$x=\mathrm{e}^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\left[\int Q(y)\mathrm{e}^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]$$

$$x=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\left[\int\frac{2\ln y}{y}\mathrm{e}^{\int\frac{2}{y}\mathrm{d}x}\mathrm{d}y+C\right]=\ln y-\frac{1}{2}+\frac{C}{y^2}$$

例13. 如图所示，平行于y轴的动直线被曲线 $y=f(x)$与 $y=x^3$ 截下的线段PQ之长数值上等于阴影部分的面积，求曲线 $y=f(x)$ 的表达式 .



解 $\int_0^x y\mathrm{d}x = x^3 - y,$ 两边求导得

$y' + y = 3x^2,$ 解此微分方程

$$y = \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\left(C + \int 3x^2 \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) = C\mathrm{e}^{-x} + 3x^2 - 6x + 6,$$

由 $y|_{x=0} = 0,$ 得 $C = -6,$

所求曲线为 $y = 3(-2\mathrm{e}^{-x} + x^2 - 2x + 2).$

四、伯努利 (Bernoulli)方程

1. 伯努利方程的标准形式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^{n}\quad(\,n\neq 0\;,1\,)$$

当$n=0,1$时， 方程为线性微分方程.

当$n\neq 0,1$时， 方程为非线性微分方程.

下列方程是否是(或能否化为)伯努利方程？

(1) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{3}y=\dfrac{1}{3}(1-2x)y^4$,　　是伯努利方程.

(2) $\dfrac{dy}{dx}=y+xy^5$, $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}-y=xy^5$,　　是伯努利方程.

(3) $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$, $\Rightarrow y'-\dfrac{1}{x}y=xy^{-1}$,　　是伯努利方程.

(4) $\dfrac{dy}{dx}-2xy=4x$,　　是线性方程, 不是伯努利方程.

伯努利方程的标准形式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^{n}\quad(n\neq 0,1)$$

2. 解法：需经过变量代换化为线性微分方程

解: 以 y^{n} 除方程两边，得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

令 $\boldsymbol{z=y^{1-n}}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$ (线性方程)

求出此方程通解后，换回原变量即得伯努利方程的通解.

例14. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

解: 令 $z=y^{-1}$, 则方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}=-a\ \ln x$$

其通解为 $$z=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-a\ln x)\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$$

将 $z=y^{-1}$代入, 得原方程通解:

$$yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$$

经过变量代换，某些方程可以化为变量可分离的方程，或化为已知其求解方法的方程.

例15. 求方程 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x+y}$$

解 令$u=x+y$，则原方程化为 $\frac{du}{dx}-1=\frac{1}{u}$， 即 $\frac{du}{dx}=\frac{u+1}{u}$.

分离变量，得 $\frac{u}{u+1}du=dx$,

两端积分得 $u-\ln|u+1|=x-\ln|C|$.

以$u=x+y$代入上式，得原方程的通解

$$y-\ln|x+y+1|=-\ln|C|,\qquad \text{或}\quad x=Ce^{y}-y-1.$$

例16. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x+y}$

解: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=x+y \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=y$

通解是 $\boldsymbol{x} = Ce^{-\int P(y)\,\mathrm{d}y}+\mathrm{e}^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\int Q(y)\mathrm{e}^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y$

$$=Ce^{\int 1\,\mathrm{d}y}+\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}y}\cdot\int y\mathrm{e}^{-\int 1\mathrm{d}y}\mathrm{d}y$$

$$=Ce^{y}+\mathrm{e}^{y}\cdot\int y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=Ce^{y}-y-1$$

说明:所给方程上面那个方法是用变量代换来解所给方程。也可变形关于x的一阶线性方程，然后按一阶线性方程的解法可求得通解.

思考与练习

判别下列方程类型:

提示:

(1) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \longrightarrow \dfrac{y-1}{y}\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 可分离 变量方程

(2) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(\ln y-\ln x) \longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$ 齐次方程

(3) $(y-x^3)\mathrm{d}x-2x\,\mathrm{d}y=0 \longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{1}{2x}y=-\dfrac{x^2}{2}$ 线性方程

(4) $2y\,\mathrm{d}x+(y^3-x)\,\mathrm{d}y=0 \longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{1}{2y}x=-\dfrac{y^2}{2}$ 线性方程

(5) $(y\ln x-2)\,y\,\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y \longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{2}{x}y=\dfrac{\ln x}{x}y^2$ 伯努利方程

五、小结

1. 可分离变量微分方程的求法步骤:

分离变量; 两端积分--隐式通解.

2. 齐次方程 $\dfrac{dy}{dx} = f(\dfrac{y}{x}).$

齐次方程的解法 令 $u = \dfrac{y}{x}.$

3. 可化成可分离变量方程或齐次方程的方程

1° 可化成可分离变量的方程： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax+by+c)$

令 $u = ax+by+c$

则 $u' = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a + by' = a + bf(u)$

2° 可化成齐次方程的方程： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$

若 $c_1 = c_2 = 0$， 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{a_1x+b_1y_1}{a_2x+b_2y}$. 为齐次方程.

若 c_1, c_2 不全为0
$$\begin{cases} \text{当} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2} = f(a_1x+b_1y). \quad \text{为}1^\circ. \\ \text{当} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \ \text{解} \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 = 0 \\ a_2x+b_2y+c_2 = 0 \end{cases} \text{得}(h,k). \ \text{令} \begin{cases} x = X+h \\ y = Y+k \end{cases} \end{cases}$$

化为 (X,Y) 坐标系下 $c_1 = c_2 = 0$ 的情况 .

4. 一阶线性微分方程

一阶线性齐次微分方程 $y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$;

一阶线性非齐次微分方程 令 $y = u(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$;

$$y = [\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C]e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

5. 伯努利方程

令 $y^{1-n} = z$;

几类一阶微分方程的解法

方 程 类 型	解 法 及 解 的 表 达 式
(1) 可分离变量的微分方程（简称“可”）可化为: $g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$	分离变量，两边积分 $\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$
(2) 齐次方程（简称“齐”） $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$	令 $y = ux \ (u = \frac{y}{x}) \Rightarrow x\mathrm{d}u = [f(u) - u]\mathrm{d}x$ $\ln\lvert x\rvert = \int \frac{\mathrm{d}u}{f(u) - u} + \ln\lvert C\rvert.$ 化为“可”
(3) 一阶线性方程（简称“一”） $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$	用常数变易法，得通解: $y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C)$
(4) 伯努利方程（简称“贝”） $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0,1)$	令 $z = y^{1-n}$ 化为“一”: $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$

思考与练习

1. 求微分方程的通解 $y' = \dfrac{\cos y}{\cos y \sin 2y - x \sin y}$

解：

$$\because \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\cos y \sin 2y - x \sin y}{\cos y} = \sin 2y - x \tan y,$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + x \tan y = \sin 2y,$$

$$\therefore x = \mathrm{e}^{\ln(\cos y)}\left[\int \sin 2y \cdot \mathrm{e}^{-\ln(\cos y)} \mathrm{d}y + C\right]$$

$$= \cos y\left[\int \frac{2\sin y \cos y}{\cos y} \mathrm{d}y + C\right] = \cos y\left[C - 2\cos y\right].$$

2. 求一连续可导函数 $f(x)$ 使其满足下列方程:

$$f(x)=\sin x-\underbrace{\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}$$

令 $u = x - t$

提示: $f(x)=\sin x-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$

则有 $\begin{cases} f'(x)+f(x)=\cos x \\ f(0)=0 \end{cases}$

利用公式可求出

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x-\mathrm{e}^{-x})$$

3. 设有微分方程 $y' + y = f(x)$，其中

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

试求此方程满足初始条件 $y\big|_{x=0} = 0$ 的连续解.

解: 1) 先解定解问题 $\begin{cases} y' + y = 2, & 0 \le x \le 1 \\ y\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$

利用通解公式，得

$$y = e^{-\int dx}\left(\int 2e^{\int dx}\,dx + C_1\right)$$

$$= e^{-x}(2e^{x} + C_1) = 2 + C_1 e^{-x}$$

利用 $y\big|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = -2$

故有 $y = 2 - 2e^{-x}\quad (0 \le x \le 1)$

2） 再解定解问题 $\begin{cases} y' + y = 0, \quad x > 1 \\ y\big|_{x=1} = y(1) = 2 - 2e^{-1} \end{cases}$

此齐次线性方程的通解为 $y = C_2 e^{-x} \quad (x \geq 1)$

利用衔接条件得 $C_2 = 2(e-1)$

因此有 $y = 2(e-1)e^{-x} \quad (x \geq 1)$

3） 原问题的解为

$$y = \begin{cases} 2(1 - e^{-x}), & 0 \leq x \leq 1 \\ 2(e-1)e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

15、设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$；　　(2) 求曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

15、**【参考解答】**：(1) **【思路一】** 微分方程为非齐次一阶线性微分方程，所有由通解计算公式，有

$$y=e^{-\int x\,\mathrm{d}x}\left(\int e^{-\frac{x^2}{2}}e^{\int x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int e^{-\frac{x^2}{2}}e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int 1\,\mathrm{d}x+C\right)=e^{-\frac{x^2}{2}}(x+C)$$

15、设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$；　　(2) 求曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

【思路二】 考虑常数变易法，计算 $y'+xy=0$ 的通解，分离变量并两端积分，得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int x\,\mathrm{d}x,\ \ln|y|=-\frac{x^2}{2}+C_1,$$

整理得 $y=Ce^{-\frac{x^2}{2}}$. 令 $y^*=u(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$，则

$$y^{*\prime}=e^{-\frac{x^2}{2}}u'(x)-e^{-\frac{x^2}{2}}xu(x),$$

代入 $y'+xy=e^{-\frac{x^2}{2}}$，得 $e^{-\frac{x^2}{2}}u'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$，即 $u'(x)=1$，所以 $u(x)=x+C$，即微分方程的通解为

$$y=e^{-\frac{x^2}{2}}(x+C),$$

代入初值条件 $y(0)=0$，得 $C=0$，即最终特解为

$$y(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

15、设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$；　　(2) 求曲线 $y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

【思路三】改写微分方程表达式，得原方程等价于

$$\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(y' + xy\right) = \left(y\mathrm{e}^{x^2/2}\right)' = 1$$

两端积分得 $y\mathrm{e}^{x^2/2} = x + C$，即 $y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x + C\right)$，代入初始条件即得 $y(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.