10月13日课作业

作业1：习题2.1的第1题（1）；第3题

作业2：　设

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + 7x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = q. \end{cases}$$

试讨论 p, q 为何值时，方程组有解或无解，并在有解时，求其通解（即一般解）.

第二章 线性代数初步

2.1线性方程组与子空间（高斯消元法）

2.2线性映射与矩阵（同构）

2.3矩阵的秩（子空间，极大无关组和秩，基和维数，线性方程组解的结构

矩阵秩的运算性质）

2.3矩阵（初等矩阵和可逆矩阵）

§2.1 线性方程组与子空间

一、　　子空间

数域$\mathbb{P}$上全体n元向量的集合记为：

$$\mathbb{K}^n=\left\{ (a_1,a_2,\cdots,a_n) \mid a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{K}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} \middle| \; a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{K}\right\}$$

$\boldsymbol{n}$ 元向量的线性运算

定义 设$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\in\mathbb{K}^n,\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]\in\mathbb{K}^n$，规定：

(1) $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$ 当且仅当 $a_i=b_i,\quad i=1,2,\cdots,n;$

(2) 加法运算：

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=[a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n]\in\mathbb{K}^n;$$

(3) 数乘运算：$\forall k\in\mathbb{P},\ \forall\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\in\mathbb{K}^n$,规定

$$k\boldsymbol{\alpha}=[ka_1,ka_2,\cdots,ka_n]\in\mathbb{K}^n$$

$\mathbb{K}^n$是$\mathbb{K}$-线性空间（向量空间），满足：

1、线性运算封闭性

1、加法封闭性

$$\forall \boldsymbol{\alpha} = [a_1, a_2, \cdots, a_n] \in \mathbb{K}^n,$$

$$\forall \boldsymbol{\beta} = [b_1, b_2, \cdots, b_n] \in \mathbb{K}^n,$$

有 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n] \in \mathbb{K}^n$

2、数乘封闭性

$$\forall k \in \mathbb{P}, \forall \boldsymbol{\alpha} = [a_1, a_2, \cdots, a_n] \in \mathbb{K}^n,$$

有 $k\boldsymbol{\alpha} = [ka_1, ka_2, \cdots, ka_n] \in \mathbb{K}^n$

2、八条运算律

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3) $\exists \mathbf{0}=[0,0,\cdots,0]\in\mathbb{K}^n$,

$s.t.\ \forall \boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{K}^n, \boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$; (加法单位元)

(4) $\forall \boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\in\mathbb{K}^n$,

$\exists -\boldsymbol{\alpha}=[-a_1,-a_2,\cdots,-a_n]\in\mathbb{K}^n$,

$s.t.\ \boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$; (加法逆元)

(5) $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$;

(7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;

(8) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

$\mathbb{K}^n$的非空子集，如果关于$\mathbb{K}^n$的线性运算也满足封闭性和8项规定，则也是$\mathbb{K}$-线性空间（向量空间），称之为$\mathbb{K}^n$的子空间.

命题1（子空间）

设W是$\mathbb{K}^n$的非空子集，若满足：

1、加法封闭性　$\forall \boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\in W$，$\forall \boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]\in W$，有

$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in W$

2、数乘封闭性　$\forall \lambda\in\mathbb{K},\forall \boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\in W$，有

$\lambda\boldsymbol{\alpha}=[ka_1,ka_2,\cdots,ka_n]\in W$

则W是$\mathbb{K}^n$的子空间，记为$W<\mathbb{K}^n$.

典型例题：

1、$\mathbb{K}^{n\text{-}1}$是$\mathbb{K}^n$的子空间（错误）． 但 $\overline{\mathbb{K}^n}=\{(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 0) | \ a_i \in \mathbb{K}\} < \mathbb{K}^n$.

2、$\mathbb{R}^3$中的超平面$L_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

是$\mathbb{R}^3$的2维子空间.

假设$(a_{11}, a_{12}, a_{13}) \neq 0$,如果$a_{11} \neq 0$，则 φ: $L_1 \to \mathbb{R}^2$， $(x_1, x_2, x_3) \to (x_2, x_3)$

是$\mathbb{R}$-向量空间的同构.

$$\varphi^{-1}: \ \mathbb{R}^2 \to L_1, \quad (x, y) \to (-\frac{a_{12}}{a_{11}}x - \frac{a_{13}}{a_{11}}y, x, y)$$

所以L_1是$\mathbb{R}^3$的子空间，但它是2维的.

3、若W_1和W_2均为$\mathbb{K}^n$的子空间，则$W_1 \cap W_2$也是$\mathbb{K}^n$的子空间.

4、$m \times n$齐次线性方程组的“解空间”$V = L_1 \cap L_2 \cap \cdots \cap L_m$也是$\mathbb{K}^n$的子空间.

它的“维数”又是多少呢？

二、矩阵及其初等变换

1、矩阵概念的引入

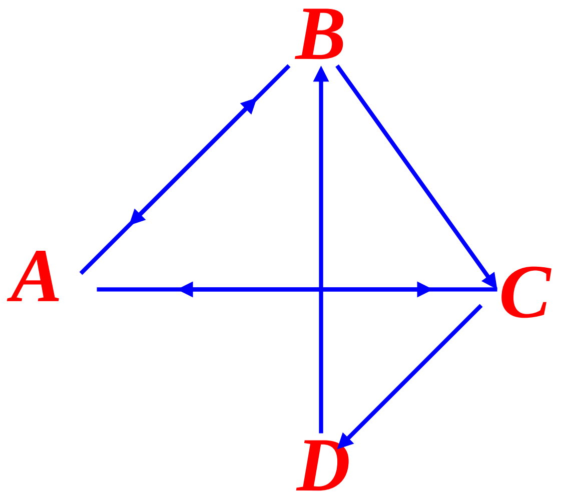
线性方程组当未知量个数给定后，解取决于系数和常数项。

系数与常数项按原位置可排为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

对线性方程组的研究可转化为对这张表的研究.

2. 某航空公司在A,B,C,D四城市之间开辟了若干航线 ,如图所示表示了四城市间的航班图,如果从A到B有航班,则用带箭头的线连接 A 与B.



四城市间的航班图情况常用表格来表示:

到站

发站

	A	B	C	D
A		√	√	
B	√		√	
C	√			√
D		√		

其中 √ 表示有航班.

为了便于计算,把表中的 √ 改成1,空白地方填上0,就得到一个数表:

	A	B	C	D
A		√	√	
B	√		√	
C	√			√
D		√		

0	1	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

这个数表反映了四城市间交通联接情况.

矩阵的定义

定义 给定$m\times n$个数 $a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，将它们按一定次序排成一个$m$行$n$列的矩形数表，再加括号，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵A的(i,j)元

称为一个m行n列的矩阵，简称为$m\times n$矩阵。记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$.

这$m\times n$个数称为A的元素,简称为元.

矩阵相等的概念

若矩阵$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$与$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$是同型矩阵，且对应元相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相等,记作$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

注：两个矩阵的行数相等, 列数相等时, 称为同型矩阵.

矩阵的转置

把矩阵 A 的行依次变为同序数的列得到的新矩阵，叫做 A 的转置矩阵，记作 A^{T} .

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\4&5&8\end{pmatrix}$, $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\2&8\end{pmatrix}$;

$B=\begin{pmatrix}18&6\end{pmatrix}$, $B^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}18\\6\end{pmatrix}$.

A^{T} 与 A 的关系?

（1） 型的变化：$m\times n\to n\times m$

（2） (i,j)元的变化：$a_{ij}'=a_{ji}$

2、矩阵的三类初等变换

定义 下面三种变换称为矩阵的初等行变换:

(I) 对调两行（对调 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$）；（初等对换变换）

(II) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去.

(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，记作 $r_i + kr_j$).（初等倍乘变换）

(II) 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行的所有元素，记作：$r_i \times k$

（初等倍加变换）

同理可定义矩阵的初等列变换(所用记号是把“r”换成“c”).

定义 矩阵的初等列变换与初等行变换统称为初等变换.

初等变换的逆变换仍为初等变换, 且变换类型相同.

$r_i \leftrightarrow r_j$ 逆变换 $r_i \leftrightarrow r_j$;

$r_i \times k$ 逆变换 $r_i \times (\frac{1}{k})$ 或 $r_i \div k$;

$r_i + kr_j$ 逆变换 $r_i + (-k)r_j$ 或 $r_i - kr_j$.

$$
\boldsymbol{A} \rightarrow \begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\boldsymbol{A} \rightarrow \begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \text{第}i\text{列} & & \text{第}j\text{列} & &
\end{array}
\end{array}
$$

把$\boldsymbol{A}$的第 i，j 两行对调，

记为$r_i \leftrightarrow r_j$.

把 A的第 i，j 两列对调，

记为$c_i \leftrightarrow c_j$.

$$A \xrightarrow{r_i \times k} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

把 $\boldsymbol{A}$的第 i 行乘上非零常数 k，记为 $r_i \times k$.

$$A \to \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & ka_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

把 $\boldsymbol{A}$的第 j 列乘上 非零常数k $(c_j \times k)$.

$$A \xrightarrow{r_i + kr_j} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

把 A的第 j 行乘 k 加到第 i 行上去 $(r_i + kr_j)$.

将 A 的第 j 列的 k 倍加到第 i 列上去，记为 $c_i + kc_j$.

$$
A \to \begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1i} + ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2i} + ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mi} + ka_{mj} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

$\uparrow$

第 i 列

例1 仅用矩阵的初等行变换将矩阵$\boldsymbol{B}$化为单位阵；

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 5 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

解：$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 5 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-5r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&0&7\\0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&7\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{7}}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{7}}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_3$$

定义 （行阶梯形矩阵）

定义要点：

（1）下一行的主元只能出现在上一行主元的右侧；

（2）全零行位于非零行的下方.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}$$

注:非零行的第一个非零元称为该行的主元.

若行阶梯形矩阵$\boldsymbol{R}$的每一行的主元均为1，且这些主元所在列的其它元素都为0，则还称$\boldsymbol{R}$为行简化阶梯形矩阵.

例2　用矩阵的初等行变换将下面的矩阵化 为行阶梯形矩阵，并进一步化为行简化阶梯阵。

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 2 & -8 & \vdots & 17 \\ 2 & -5 & 3 & \vdots & 3 \\ 1 & 7 & -5 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

解：$A=\begin{bmatrix} -3 & 2 & -8 & \vdots & 17 \\ 2 & -5 & 3 & \vdots & 3 \\ 1 & 7 & -5 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 & \vdots & 2 \\ 2 & -5 & 3 & \vdots & 3 \\ -3 & 2 & -8 & \vdots & 17 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 7 & -5 & 2\\ 0 & -19 & 13 & -1\\ 0 & 23 & -23 & 23\end{array}\right]\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{23}}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 7 & -5 & 2\\ 0 & -19 & 13 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 7 & -\mathbf{5} & \mathbf{2}\\ 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{1}\\ 0 & -19 & \mathbf{13} & -\mathbf{1}\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+\mathbf{19}r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 7 & -5 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -6 & 18\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & -5\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -3\end{array}\right]$$

命题1 任何矩阵$\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$,总可经过有限次初等行变换化为行阶梯形和行简化阶梯形矩阵.

三、$m\times n$ 线性方程组

(1) 分类$\begin{cases}\text{齐次线性方程组;}\\\text{非齐次线性方程组.}\end{cases}$

$m\times n$非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots,\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

其中$\boldsymbol{\beta}=[\,b_1,b_2,\cdots,b_m\,]^{\mathrm{T}}\neq 0.$

$m\times n$齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots, \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$$

(2) 一个解（向量）：$\boldsymbol{X}=[\ x_1,x_2,\cdots,x_n\ ]^{\mathrm{T}}$

(3) 特解

(4) 通解（一般解）：线性方程组全体解向量的集合

(5) 线性方程组的同解: $\begin{cases}\text{未知量个数相同}\\ \text{且解集合相同}\end{cases}$

$$\tilde{A} = [\,A\,,\,\beta\,] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix}$$

称A为系数矩阵，$\tilde{A} = [A, \beta]$为 增广矩阵

其中$\beta = [\,b_1, b_2, \cdots, b_m\,]^{\mathrm{T}}$称为常数项向量.

消元法解线性方程组

分析：用消元法解下列方程组的过程.

引例　求解线性方程组

$$
\begin{cases}
2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\
4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \div 2 \\
3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, & ④
\end{cases}
\qquad (1)
$$

解

$$(1)\ \xrightarrow[③\div 2]{①\leftrightarrow ②}\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=4, & ① \\ 2x_1-x_2-x_3+x_4=2, & ② \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=2, & ③ \\ 3x_1+6x_2-9x_3+7x_4=9, & ④ \end{cases} \quad (\tilde{A}_1)$$

$$\xrightarrow[④-3①]{\substack{②-③\\ ③-2①}}\begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & =4, & ① \\ & 2x_2 & -2x_3 & +2x_4 & =0, & ② \\ & -5x_2 & +5x_3 & -3x_4 & =-6, & ③ \\ & 3x_2 & -3x_3 & +4x_4 & =-3, & ④ \end{cases} \quad (\tilde{A}_2)$$

$$\xrightarrow[\substack{③+5② \\ ④-3②}]{② \times \frac{1}{2}} \begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 4, & ① \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0, & ② \\ & & & 2x_4 & = -6, & ③ \\ & & & x_4 & = -3, & ④ \end{cases} \qquad (\tilde{A}_3)$$

$$\xrightarrow[④-2③]{③ \leftrightarrow ④} \begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 4, & ① \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0, & ② \\ & & & x_4 & = -3, & ③ \\ & & & 0 & = 0, & ④ \end{cases} \qquad (\tilde{A}_4)$$

$$\xrightarrow[\text{①}-\text{③}]{\text{②}-\text{③}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 7, & \text{①} \\ x_2 - x_3 = 3, & \text{②} \\ x_4 = -3, & \text{③} \end{cases} \qquad (\tilde{A}_5)$$

$$\xrightarrow{\text{①}-\text{②}} \begin{cases} x_1 - x_3 = 4, & \text{①} \\ x_2 - x_3 = 3, & \text{②} \\ x_4 = -3, & \text{③} \end{cases} \qquad (\tilde{A}_6)$$

于是解得 $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = x_3 + 4} \\ \boldsymbol{x_2 = x_3 + 3} \\ \boldsymbol{x_4 = -3} \end{cases}$ 其中x_3**任意取值**.

或令$x_3 = k$,方程组的解可记作

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+4 \\ k+3 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}$$

其中k为任意常数.

小结：

1.上述解方程组的方法称为消元法．消元过程中只用到如下三种变换：

（1）交换方程次序；

（ ⓘ与ⓙ位置对换）

（2）以不等于 0 的数乘某个方程；

（以 ⓘ$\times k$ 替换ⓘ ）

（3）一个方程的k倍加到另一个方程上去．

（以 ⓘ$+k$ⓙ 替换 ⓘ）

2. 上述三种变换都是可逆的.

$$\text{若}(A)\xrightarrow{ⓘ\leftrightarrow ⓙ}(B),\ \text{则}(B)\xrightarrow{ⓘ\leftrightarrow ⓙ}(A);$$

$$\text{若}(A)\xrightarrow{ⓘ\times k}(B),\ \text{则}(B)\xrightarrow{ⓘ\div k}(A);$$

$$\text{若}(A)\xrightarrow{ⓘ+kⓙ}(B),\ \text{则}(B)\xrightarrow{ⓘ-kⓙ}(A).$$

由于三种变换都是可逆的，所以变换前的方程组与变换后的方程组是同解的．故这三种变换是同解变换．

注：线性方程组经初等变换后得到的新方程组与原方程组同解.

$m \times n$非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \cdots\cdots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

引理2.1.1

设方程组（$*$）$'$ 是由方程组（$*$）经消元变换后得到的方程组，则

(1) （$*$）$'$ 有解 $\Leftrightarrow$（$*$）有解；

（2）$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}$是（$*$）$'$ 的解 $\Leftrightarrow$ α是（$*$）的解；

定理2.1.1（高斯消元法）

经过有限次初等变换，方程组（*）可简化为行阶梯形方程组$\overline{(*)}$，其中$\overline{(*)}$具有如下特点：当$i<k$时，$\overline{(*)}$的第i个方程中第一个出现的系数不为0的变量的系数a_{ij_i}列指标j_i严格小于第k个方程中第一个出现的系数不为0的变量的系数a_{kj_k}列指标j_k.

$$
\begin{cases}
x_1 + \overline{a_{12}}x_2 + \cdots + \overline{a_{1n}}x_n = \overline{b_1}, \\
\qquad x_{j_2} + \overline{a_{2\,j_2+1}}x_{j_2+1} + \cdots + \overline{a_{2n}}x_n = \overline{b_2}, \\
\qquad \cdots\cdots \\
\qquad\qquad x_{j_r} + \overline{a_{j_r+1}}x_{j_r+1} + \cdots + \overline{a_{rn}}x_n = \overline{b_r}, \\
\qquad\qquad\qquad 0 = \overline{b_{r+1}}
\end{cases}
\qquad \overline{(*)}
$$

$(*)$和$\overline{(*)}$有如下特点：

(1) 其中的每一个方程都是$(*)$中方程的线性组合；

(2)$(*)$中存在r（$\leq m$）个方程，使得$(*)$中其它方程可由这r个方程通过线性组合生成；

（3）$r \leq \min\{m, n\}$

推论2.1.1

(1) 非齐次线性方程组$(*)$有解$\Leftrightarrow \overline{(*)}$有解$\Leftrightarrow \bar{b}_{r+1}=0$；

（2）如果$(*)$有解，即$\bar{b}_{r+1}=0$，则

方程组$(*)$有唯一解$\Leftrightarrow \bar{b}_{r+1}=0$且$r=n.$

方程组$(*)$有无穷多解$\Leftrightarrow \bar{b}_{r+1}=0$且$r<n.$

因为在上述变换过程中，仅仅只对方程组的系数和常数进行运算，未知量并未参与运算．若记

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = [A \mid \beta] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & \vdots & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & \vdots & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & \vdots & 9 \end{pmatrix}$$

则对方程组（*）的变换完全可以转换为对方程组（*）的增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的初等行变换．

用矩阵的初等行变换 解方程组（*）：

$$\tilde{A}=[A\,|\,\beta]=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & \vdots & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & \vdots & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & \vdots & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & \vdots & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & \vdots & 9 \end{pmatrix}=\tilde{A}_1$$

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+x_4=2, \\ x_1+x_2-2x_3+x_4=4, \\ 4x_1-6x_2+2x_3-2x_4=4, \\ 3x_1+6x_2-9x_3+7x_4=9, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=4, \\ 2x_1-x_2-x_3+x_4=2, \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=2, \\ 3x_1+6x_2-9x_3+7x_4=9, \end{cases}$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & \vdots & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & \vdots & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & \vdots & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & \vdots & -3 \end{pmatrix} = \tilde{\boldsymbol{A}}_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3, \end{cases}$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_2 = \left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3+5r_2 \\ r_4-3r_2}]{r_2\times\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) = \tilde{\boldsymbol{A}}_3$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_3 - 2r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} = \tilde{\boldsymbol{A}}_4$$

$$\tilde{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}_5$$

$\tilde{A}_5$ 对应的方程组为 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$

令$x_3 = k, k$为任意常数，则方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k+4\\k+3\\k\\-3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\3\\0\\-3\end{pmatrix},\quad \text{其中}k\text{为任意常数.}$$

高斯消元法（矩阵消元法）

- 第一步: 写出方程组的增广矩阵;
- 第二步:对增广阵进行矩阵的初等行变换,化为行阶梯形矩阵;
- 第三步: 若有解,进一步化为行简化阶梯形矩阵,写出对应的同解方程组,并写出向量形式的通解.

例1
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 17, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 2. \end{cases}$$

解

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = [A \;\vdots\; \beta] = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -8 & \vdots & 17 \\ 2 & -5 & 3 & \vdots & 3 \\ 1 & 7 & -5 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 & \vdots & 2 \\ 2 & -5 & 3 & \vdots & 3 \\ -3 & 2 & -8 & \vdots & 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 & \vdots & 2 \\ 0 & -19 & 13 & \vdots & -1 \\ 0 & 23 & -23 & \vdots & 23 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -6 & \vdots & 18 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & \vdots & -5\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -3\end{bmatrix}=\mathrm{R}=\left[\mathrm{R} \quad \vdots\, \beta'\right]$$

同解方程组为
$$\begin{cases} x=1,\\ y=-2,\\ z=-3.\end{cases}$$

得唯一解为 $(1,-2,-3)^{\mathrm{T}}$

例2 求解方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 9x_2 + 9x_3 + 7x_4 = -1. \end{cases}$

解 $$\tilde{\boldsymbol{A}} = [\boldsymbol{A} \ \vdots \ \beta] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & \vdots & 2 \\ 6 & -7 & 4 & 3 & \vdots & 3 \\ 9 & -9 & 9 & 7 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & \vdots & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -5 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -6 \end{bmatrix} = [R \ \vdots \ \beta'] = R$$

该方程组无解.

解的存在及个数的判定

1、非齐次方程组

$m\times n$非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \cdots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

其中A, $\tilde{\boldsymbol{A}} = [A, \beta]$分别为(1.3)的系数矩阵，增广矩阵.

$$\tilde{\boldsymbol{R}} = \left[\begin{array}{cccccccccccc|c}
c_{11} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & c_{2j_2} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{rj_r} & * & \cdots & c_{rn} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right]$$

$$= [\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\beta}'].$$

若$d_{r+1}=0$且$r(R)<n$,称$x_1, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$为主变量,选取其余$n-r$个未知量$x_{j_{r+1}}, \cdots, x_{j_n}$为自由未知量,继续化为行简化阶梯阵，则有同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - \left(c_{1j_{r+1}} x_{j_{r+1}} + \cdots + c_{1j_n} x_{j_n}\right), \\ x_{j_2} = d_2 - \left(c_{2j_{r+1}} x_{j_{r+1}} + \cdots + c_{2j_n} x_{j_n}\right), \\ \qquad \cdots, \\ x_{j_r} = d_r - \left(c_{rj_{r+1}} x_{j_{r+1}} + \cdots + c_{rj_n} x_{j_n}\right), \end{cases}$$

令$x_{j_{r+1}}, \cdots, x_{j_n}$任意取值，则可得到通解.

非齐次线性方程组解的存在及个数的判定

定理1 设$m\times n$非齐次线性方程组(*)的增广矩阵$\tilde{A}=\left[\boldsymbol{A} \vdots \beta\right]\to\tilde{\boldsymbol{R}}=\left[\boldsymbol{R} \vdots \beta'\right]$，其中$\boldsymbol{A}$为系数阵，其对应的行阶梯形矩阵$\boldsymbol{R}$的非零行有$r$个，$\tilde{\boldsymbol{R}}$为$\tilde{A}$对应的行阶梯形矩阵. 记$\boldsymbol{R}$的非零行个数为$r(\boldsymbol{R})=r$，$\tilde{\boldsymbol{R}}$的非零行个数为$r(\tilde{\boldsymbol{R}})$，则

（1）$\bar{b}_{r+1}\neq 0\Leftrightarrow r(\boldsymbol{R})\neq r(\tilde{\boldsymbol{R}})\Leftrightarrow$非齐次方程组(*)无解；

$\bar{b}_{r+1}=0\Leftrightarrow r(\boldsymbol{R})=r(\tilde{\boldsymbol{R}})\Leftrightarrow$非齐次方程组(*)有解.

（2）特别地，

方程组(*)有唯一解$\Leftrightarrow\bar{b}_{r+1}=0$且$r=n\Leftrightarrow r(\boldsymbol{R})=r(\tilde{\boldsymbol{R}})=n$.

方程组(*)有无穷多解$\Leftrightarrow\bar{b}_{r+1}=0$且$r<n\Leftrightarrow r(\boldsymbol{R})=r(\tilde{\boldsymbol{R}})=r<n$.

矩阵消元法

- 第一步: 写出方程组的增广矩阵;
- 第二步:对增广阵进行矩阵的初等行变换,化为行阶梯形矩阵，并判断解的存在性及个数;
- 第三步: 若有解,进一步化为行简化阶梯形矩阵,写出对应的同解方程组,并写出向量形式的通解.

例3　求解方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2. \end{cases}$$

解　对增广矩阵$\tilde{A}$施行初等行变换：

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & \vdots & -1/2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

$r(\boldsymbol{A}) = r(\tilde{A}) = 2 < 4$, 故方程组有无穷多解, 并有

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = x_2 + x_4 + 1/2,} \\ \boldsymbol{x_3 = \quad\quad 2x_4 + 1/2.} \end{cases}$$

于是所求通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, (k_1, k_2 \in \mathbb{P}).$$

齐次线性方程组解的判定

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

系数阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

解的个数的判定

推论1 设数域$\mathbb{K}$上的$m\times n$齐次线性方程组的系数阵

$A\xrightarrow{\text{矩阵的初等行变换}}R$（行阶梯阵），则

① $r(\boldsymbol{R})=n\Leftrightarrow(2)$只有零解；

② $r(\boldsymbol{R})<n\Leftrightarrow(2)$有无穷多解，从而有非零解

推论2 若设$m<n$,则$m\times n$齐次线性方程组必有非零解。

例3 求下述齐次线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

解 对系数矩阵A作初等行变换，变为行阶梯矩阵，有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$r(\boldsymbol{R})=2<4$, 该方程组有非零解，同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{7}x_3 + \dfrac{3}{7}x_4, \\ x_2 = \dfrac{5}{7}x_3 + \dfrac{4}{7}x_4. \end{cases}$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{7}k_1 + \dfrac{3}{7}k_2 \\ \dfrac{5}{7}k_1 + \dfrac{4}{7}k_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$ 其中k_1, k_2为任意常数.

例5

讨论a为何值时方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -2, \end{cases}$$

（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解，并求其通解.

解

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1+2a \end{array}\right]$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & -2\\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 3\\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & \vdots & 4+2a\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & -2\\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 3\\ 0 & 0 & (2+a)(1-a) & \vdots & 2(2+a)\end{bmatrix}$$

当$a\neq 1$且$a\neq -2$时，$r=3$, 故方程组有唯一解.

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & -2\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 3/(a-1)\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2/(1-a)\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & \vdots & 2/(a-1)\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1/(a-1)\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2/(1-a)\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1/(a-1)\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1/(a-1)\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2/(1-a)\end{bmatrix}$$

故原方程组的解为 $\boldsymbol{X}=[\frac{1}{a-1},\frac{1}{a-1},-\frac{2}{a-1}]^{\mathrm{T}}$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 0 & (2+a)(1-a) & 2(2+a) \end{array}\right]$$

当$a=1$时， $\tilde{\boldsymbol{A}} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$r(\tilde{R}) \neq r(R)$,故方程组无解.

当$a=-2$时，

$$\tilde{\boldsymbol{A}} \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

因此 $r(\tilde{R}) = r(\boldsymbol{R}) = 2 < 3$, 故方程组无穷多解. 同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 1, \\ x_2 = x_3 - 1 \end{cases}$$

故原方程组的通解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k-1 \\ k-1 \\ k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 其中$k$为任意常数.

线性方程组的向量方程

$m\times n$非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots, \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

有矩阵形式$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$，其中$A$, $\tilde{A}=[A,\beta]$分别

为(1)的系数矩阵，增广矩阵，$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$.

$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_m]^{\mathrm{T}}$.

若记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$=\left[A^{(1)}, \quad A^{(2)}, \quad \cdots \quad , A^{(n)}\right],$$

则上述方程组（2）可写成向量方程形式

$$x_1\boldsymbol{A}^{(1)}+x_2\boldsymbol{A}^{(2)}+\cdots+x_n\boldsymbol{A}^{(n)}=\boldsymbol{\beta}.$$

其中$\boldsymbol{A}^{(1)}$，$\boldsymbol{A}^{(2)},\cdots$，$\boldsymbol{A}^{(n)}$是$\boldsymbol{A}$的列向量组.

结论：

方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$有解

$\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}$可由系数阵的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表出；

$\Leftrightarrow$向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$等价；

齐次线性方程组解的判定

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1\boldsymbol{A}^{(1)} + x_2\boldsymbol{A}^{(2)} + \cdots + x_n\boldsymbol{A}^{(n)} = 0.$$

结论：

齐次方程组 $x_1\boldsymbol{A}^{(1)}+x_2\boldsymbol{A}^{(2)}+\cdots+x_n\boldsymbol{A}^{(n)}=0$ 仅有零解

$\Leftrightarrow$ 系数阵的列向量组$\boldsymbol{A}^{(1)},\boldsymbol{A}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{A}^{(n)}$线性无关.

齐次方程组 $x_1\boldsymbol{A}^{(1)}+x_2\boldsymbol{A}^{(2)}+\cdots+x_n\boldsymbol{A}^{(n)}=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ 系数阵的列向量组$\boldsymbol{A}^{(1)},\boldsymbol{A}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{A}^{(n)}$线性相关.

齐次线性方程组解的性质及结构

1、齐次线性方程组解的性质

（1）若η_1,η_2是$AX=0$的解，则$\eta_1+\eta_2$也是$AX=0$的解；

（2）若η是$AX=0$的解，则$k\eta,(k\in\mathbf{P})$也是$AX=0$的解.

注1 齐次线性方程组解的线性组合还是解；

注2 $AX=0$的解集

$$N(A)=\left\{X\in\mathbf{P}^n \,\middle|\, AX=\mathbf{0}\right\}$$

是$\mathbb{K}^n$的子空间，称之为$AX=0$的解空间.

2、齐次方程组的基础解系（解空间的基）

1） 基础解系的定义

定义　齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解时，如果解向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 满足以下两个条件：

(1) $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性无关；

(2) $AX=0$ 的任一解都可由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性表出，

则称向量组 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 为方程组 $AX=0$ 的一个基础解系。

注：当 $r(A)<n$（即 $N(A)\neq\{0\}$）时，基础解系必存在.

当$r(\boldsymbol{A}_{m\times n})<n$时，$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$有非零解，基础解系存在.

如果$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$为齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的一个基础解系,则$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的通解可表示为:

$$\boldsymbol{X}=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_t$是任意常数.

- 需要解决的问题：
- 基础解系中有多少个解向量？
即dimN(A)=？
- 如何求基础解系？

二、非齐次线性方程组解的性质及结构

1．非齐次线性方程组解的性质

(1)设 $\boldsymbol{X}_1$ 及 $\boldsymbol{X}_2$ 都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解,则 $\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2$ 为导出的齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(2) 设$\boldsymbol{X}_0$是方程 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解,η是导出组 $AX=\boldsymbol{0}$ 的解,则 $\boldsymbol{X}_0+\eta$ 是方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的解.

2．非齐次线性方程组的通解

定理

当$r(\boldsymbol{R})=r(\tilde{\boldsymbol{R}})=r<n$时，$\boldsymbol{AX}=\beta$的通解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r},$$

其中$\boldsymbol{X}_0$为$\boldsymbol{AX}=\beta$的一个特解，

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$为导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，

$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任意常数.

例5　求下述方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \\ 8 & 3 & 4 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 3 & \frac{23}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由$\mathrm{r}(R)=\mathrm{r}\left(R\right)=2<5$,知方程组有无穷多解.

且原方程组等价于方程组

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{2}x_3+2x_5-\dfrac{9}{2}, \\ x_2=-\dfrac{1}{2}x_3-x_4-3x_5+\dfrac{23}{2} \end{cases}$$

令 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$,得$x_1 = -\frac{9}{2}, x_2 = \frac{23}{2}$.

求得特解 $\begin{bmatrix}-9/2, & 23/2, & 0, & 0, & 0\end{bmatrix}^T$

下面求导出组的基础解系，令

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

代入 $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}x_3 + 2x_5, \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}x_3 - x_4 - 3x_5 \end{cases}$

得导出组的一个基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

所以方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-9/2\\23/2\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3$为任意常数.

另一种解法

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&\vdots&7\\3&1&2&1&-3&\vdots&-2\\0&2&1&2&6&\vdots&23\\8&3&4&3&-1&\vdots&12\end{pmatrix}\xrightarrow[\sim]{}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&7\\0&-2&-1&-2&-6&-23\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1/2&0&-2&-9/2\\0&1&1/2&1&3&23/2\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则原方程组等价于方程组

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}x_3 + 2x_5 - \dfrac{9}{2} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}x_3 - x_4 - 3x_5 + \dfrac{23}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3/2 + 2x_5 - 9/2 \\ x_2 = -x_3/2 - x_4 - 3x_5 + 23/2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

所以方程组的通解为

$$x = k_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9/2 \\ 23/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

10月13日课作业