§2.4 初等矩阵与可逆矩阵

定义 2.5.1 设$A = (a_{ij})_{m\times n}$, 则矩阵$B = (b_{ij})_{n\times m}$, 其中$b_{ij} = a_{ji}$, 称为A的转置矩阵(或简称A的转置), 记为${}^tA$: 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}, \text{则}\ {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

结论　转置运算的性质

1、基本运算性质　$(A^T)^T = A$; $(\lambda A)^T = \lambda A^T$; $(A+B)^T = A^T + B^T$; $(AB)^T = B^T A^T$.

2、$r(A^T) = r(A)$　($r(A^T) = r_c(A^T) = r_r(A) = r(A)$)

3、矩阵的初等变换不改变矩阵的秩 ($A \xrightarrow{\text{列}} B$, 则 $A^T \xrightarrow{\text{行}} B^T \Rightarrow$ $\begin{array}{ccc} r_r(A^T) & = & r_r(B^T) \\ \| & & \| \\ r(A^T) & & r(B^T) \\ \| & & \| \\ r(A) & & r(B) \end{array}$)

例 2.5.1 $I_n = (a_{ij})_{n\times n}$, 其中$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$称为$n$阶单位矩阵. A是单位矩阵$\Leftrightarrow$ $\varphi_A : K^n \to K^n$是恒等映射.

例 2.5.2 $diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = (a_{ij})_{n\times n}$, 其中$a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$称为对角矩阵. 如果$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$, 则它称为纯量矩阵, 此时显然有$diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \lambda \cdot I_m$.

例 2.5.3 $E_{ij} \in M_n(K)$表示在(i, j)处元素是1, 而其他处都为0的矩阵, 称为矩阵单位. 因为, 任一矩阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$均可唯一表成$A = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}$.

定理 2.5.1 设$A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(K)$. 则

$$A = \lambda I_n \Leftrightarrow \forall B \in M_n(K), A \cdot B = B \cdot A.$$

初等矩阵

定义2.4.2　n阶单位阵经过一次矩阵的初等行变换或列变换所得到的矩阵称为n阶初等矩阵，即

$$\boldsymbol{I}_n \xrightarrow[\text{行或列}]{\text{一次初等变换}} \boldsymbol{B}\text{为一个初等矩阵}$$

初等矩阵的类型及表示方法

(I) 初等对换矩阵 $\boldsymbol{F}_{s,t}$ ， 即对调 $\boldsymbol{I}_n$ 的某两行或某两列.

$$
\boldsymbol{I}_n \xrightarrow[\text{或} c_i \leftrightarrow c_j]{r_i \leftrightarrow r_j}
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
= \boldsymbol{F}_{i,j}
$$

（II）初等倍加矩阵 $\boldsymbol{F}_{s,t}(\lambda)$

即将$\boldsymbol{I}_n$的某行(列)的$k \neq 0$倍加到另一行(列)上去.

$$I_n \xrightarrow[\text{或 } c_j+kc_i]{r_i+kr_j} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 & \cdots & k && \\ &&& \ddots &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第}\boldsymbol{i}\text{行} \\ \\ \leftarrow \text{第}\boldsymbol{j}\text{行} \\ \\ \\ \end{array} = \boldsymbol{F}_{i,j}[\lambda]$$

(III)初等倍乘矩阵 $\boldsymbol{F}_s(\lambda),\ \lambda\neq 0.$

即以数 $\lambda\neq 0$ 乘单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$ 的第s行(或第t列)

$$\boldsymbol{I}_n \xrightarrow[\text{或}c_i\times k]{r_i\times k} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第}\,i\,\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{array} = \boldsymbol{F}_i(\lambda)$$

命题2.4.3 （初等矩阵的性质）

（1）初等矩阵的转置矩阵仍为同类型的初等阵.

（2）揭示初等矩阵乘法与矩阵的初等变换的关系.

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & ka_{34} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & k & \\ & & & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} & a_{34} \end{bmatrix}
$$

结论： 以 $F_i(k)$左乘矩阵 A,

$$F_i(k)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \leftarrow 第\ \boldsymbol{i}\ 行$$

相当于以数 $\boldsymbol{k}$ 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 $\boldsymbol{i}$ 行 $(\boldsymbol{r_i}\times\boldsymbol{k})$;

以 $F_i(k)$ 右乘 矩阵 A, 其结果相当于以数 k 乘 A的第 i 列 $(c_i\times k)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & k & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} & a_{14} + ka_{24} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{31} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

结论 以 $F_{j,i}[k]$ 左乘矩阵 A,

$$F_{j,i}[k]\,\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

把 A 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行上去 $(r_i + kr_j)$.

类似地，以 $F_{j,i}[k]$ 右乘矩阵 A，其结果相当于把 A 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列上去 $(c_j + kc_i)$.

$$\boldsymbol{A} F_{j,i}[k]$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} + ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} + ka_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} + ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} & a_{34} \end{bmatrix}$$

命题 2.5.3 (1)${}^tF_{s,t} = F_{s,t}, {}^tF_{s,t}(\lambda) = F_{t,s}(\lambda), {}^tF_s(\lambda) = F_s(\lambda)$,

(2)设$A = (a_{ij})_{m\times n}, F_{s,t}, F_{s,t}(\lambda), F_s(\lambda)$是$m$阶初等矩阵.

则(I) $F_{s,t}\cdot A$是交换A的第s行与第t行所得矩阵.

(II) $F_{s,t}(\lambda)\cdot A$是将A的第s行乘λ加到第t行所得矩阵.

(III) $F_s(\lambda)\cdot A$是将A的第s 行乘以非零常数所得矩阵.

$$F_{s,t}\cdot A = [A_1, \cdots, A_{s-1}, A_t, A_{s+1}, \cdots, A_{t-1}, A_s, A_{t+1}, \cdots, A_n].$$

$$F_{s,t}(\lambda)\cdot A = [A_1, \cdots, A_s, \cdots, A_{t-1}, A_t + \lambda A_s, A_{t+1}, \cdots, A_n].$$

$$F_s(\lambda)\cdot A = [A_1, \cdots, A_{s-1}, \lambda A_s, A_{s+1}, \cdots, A_n].$$

同理对列的初等变换也成立(右乘n阶初等矩阵):

$$A \cdot F_{s,t} = [A^{(1)}, \cdots, A^{(s-1)}, A^{(t)}, A^{(s+1)}, \cdots, A^{(t-1)}, A^{(s)}, A^{(t+1)}, \cdots, A^{(n)}].$$

$$A \cdot F_{s,t}(\lambda) = [A^{(1)}, \cdots, A^{(s)} + \lambda A^{(t)}, \cdots, A_{(t-1)}, A_{(t)} \cancel{+ \lambda A_{(s)}}, A_{(t+1)}, \cdots, A_{(n)}].$$

$$A \cdot F_{s}(\lambda) = [A^{(1)}, \cdots, A^{(s-1)}, \lambda A^{(s)}, A^{(s+1)}, \cdots, A^{(n)}].$$

例 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^m$.

解法3 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{A}=F_{2,1}(3)^{m-1}\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow[m-1\text{次相同的行倍加变换}]{r_1+3r_2}\boldsymbol{A}^m$$

由此得

$$\boldsymbol{A}^m=\begin{pmatrix}1 & 3+(m-1)\cdot 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3m\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad (m\geq 2).$$

矩阵的相抵（等价）关系

定义 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$,若$\boldsymbol{A}$可以经过有限次初等变换变成$\boldsymbol{B}$，则称$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相抵（或等价），记作 $\boldsymbol{A}\cong \boldsymbol{B}$.

注1 矩阵的相抵关系满足

（1）反身性：$A\cong A$;

（2）对称性：$A\cong B\Rightarrow B\cong A$;

（3）传递性：$A\cong B$，$B\cong C\Rightarrow A\cong C$.

在数学上称满足以上三条性质的关系为等价关系. 因而，矩阵的相抵关系是一个等价关系.

注2 相抵的矩阵秩相等.

定理 2.5.2 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$的秩$r(A)=r$, 则存在m阶初等矩阵$P_1,\cdots,P_s$和n阶初等矩阵$Q_1,\cdots,Q_t$, 使得

$$P_sP_{s-1}\cdots P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中I_r是r阶单位矩阵, 另外三个0分别表示$r\times(n-r)$, $(m-r)\times r$和$(m-r)\times(n-r)$阶零矩阵.

注：相抵标准形只由矩阵的秩和型所确定

相抵标准形(最简形):

(1) 若 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=0$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{P}^{m\times n}, \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}\ \ (\neq m, n, 0)$, 则

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行、列变换}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}.$$

(3) 若 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{P}^{m\times n}, \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=n$, 则 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{仅用初等行变换}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$;

(4) 若 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{P}^{m\times n}, \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=m$, 则 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{仅用初等列变换}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$;

矩阵相抵的条件

矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相抵

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等变换}} \boldsymbol{B}$;(定义)

$\Leftrightarrow$ 存在m阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，n阶可逆矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$;

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的相抵标准形相同;

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$同型,且$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})$.

可逆矩阵

可逆矩阵的概念、判定、性质；

求逆矩阵的方法；

解矩阵方程.

一、可逆矩阵的概念

定义 2.5.3 方阵$A \in M_n(K)$称为可逆(或可逆矩阵). 如果存在$B \in M_n(K)$使$AB = BA = I_n$, 其中B是满足上述等式的唯一矩阵. 所以B称为A的逆(或A的逆矩阵)记为$B = A^{-1}$.

显然，可逆矩阵一定是方阵，并且

注 若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的.

$\boldsymbol{A}$的逆矩阵记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

定理 2.5.3 对任意$A \in M_n(K)$, 令$\varphi_A : K^n \to K^n$是A对应的K-线性映射, 则下述论断等价.

(1)存在$B \in M_n(K)$使$AB = I_n$;

(2)$\varphi_A : K^n \to K^n$是满射;

(3)$r(A) = n$(此时称A非退化);

(4)$\varphi_A : K^n \to K^n$是单射;

(5)$\varphi_A : K^n \to K^n$是双射;

(6)A是可逆矩阵.

(1)存在$B \in M_n(K)$使$AB = I_n$;

(2)$\varphi_A : K^n \to K^n$是满射;

(3)$r(A) = n$(此时称A非退化);

(4)$\varphi_A : K^n \to K^n$是单射;

(5)$\varphi_A : K^n \to K^n$是双射;

(6)A是可逆矩阵.

(1)存在$B \in M_n(K)$使$AB = I_n$;

(2)$\varphi_A : K^n \to K^n$是满射;

(3)$r(A) = n$(此时称A非退化);

(4)$\varphi_A : K^n \to K^n$是单射;

(5)$\varphi_A : K^n \to K^n$是双射;

(6)A是可逆矩阵.

逆矩阵的运算性质

(1) 若$\boldsymbol{A}$可逆,则$\boldsymbol{A}^{-1}$亦可逆,且$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}.$

(2) 若$\boldsymbol{A}$可逆,$\boldsymbol{k}\neq 0$, 则 $\boldsymbol{k}\boldsymbol{A}$可逆,且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}.$

(3) 若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

注1　推广 $(A_1A_2\cdots A_s)^{-1}=A_s^{-1}A_{s-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}.$

注2　若A为可逆矩阵，规定 $A^{-m}=(A^{-1})^m.$

(4) 若A可逆，则A^{T}可逆，且$\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}.$

(5) 若A可逆,则有$|A^{-1}|=|A|^{-1}.$

注3　一般地，$A+B$未必可逆，且

$$(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$$

命题 2.5.4 (1)初等矩阵都是可逆矩阵, 且它们的逆也是初等矩阵:

$$F_{s,t}^{-1}=F_{s,t}, F_{s,t}(\lambda)^{-1}=F_{s,t}(-\lambda), F_s(\lambda)^{-1}=F_s(\lambda^{-1}).$$

(2)如果$A_1, A_2, \cdots, A_m$是可逆矩阵，则它的乘积$A = A_1 A_2 \cdots A_m$也是可逆矩阵，且$A^{-1} = A_m^{-1} A_{m-1}^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

(3)任何可逆矩阵A都可写成初等矩阵的乘积.

(4)如果$B \in M_m(K), C \in M_n(K)$分别是$m$阶和$n$阶可逆矩阵，则对任意$A \in M_{m\times n}(K)$，有$r(BAC) = r(A)$.

求逆矩阵的方法

1、分离因子法

2、初等变换法

1、分离因子法

例1　设方阵A满足方程$A^2-A-2E=0$,证明:$A, A+2E$都可逆,并求它们的逆矩阵.

证明　由$A^2-A-2E=0$,

得$A(A-E)=2E \quad \Rightarrow A\frac{1}{2}(A-E)=E$

A^{-1}

故A可逆. 且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$.

又由$A^2-A-2E=0$

$\Rightarrow (A+2E)(A-3E)+4E=0$

$$\Rightarrow (A+2E)\left[-\frac{1}{4}(A-3E)\right]=E$$

$$(A+2E)^{-1}$$

故$A+2E$可逆.

且$(A+2E)^{-1}=-\dfrac{1}{4}(A-3E)$

例2

设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$，并且$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}_4+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{A})$,

求$(\boldsymbol{E}_4+\boldsymbol{B})^{-1}$.

答案：

$$(\boldsymbol{E}_4+\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

例3

设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，满足$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$. 试证$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$可逆，并且

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}.$$

证　因为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}).$$

所以由推论3.3.5，$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$可逆，且

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}.$$

例3.3.11 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$， 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解　由于

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}=9\boldsymbol{E}_3,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{9}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

2、初等（行）变换法

原理　可逆阵的行简化阶梯阵为单位阵. 从而

$$\left[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}_n\right] \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \left[\boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{A}^{-1}\right]$$

或

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{bmatrix}$$

例1 设

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

问当a,b,c,d满足什么条件时矩阵$\boldsymbol{A}$可逆？当$\boldsymbol{A}$可逆时，求$\boldsymbol{A}^{-1}$.

例 2.5.5 求矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&2\\1&1&1&-1\\1&0&-2&-6\end{pmatrix}$的逆矩阵$A^{-1}$.

例如 求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\2&-1&1\end{bmatrix}$的逆矩阵.

思考题： 将矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}$分解为初等矩阵的乘积.

解： 将矩阵$\boldsymbol{A}$进行初等行变换，化为单位阵，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+3r_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-1)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_3$$

每一次初等行变换对应一个初等矩阵，则

$$\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_3,$$

其中$\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{E}_3[2+1(3)]=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{E}_3[2,3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{P}_3=\boldsymbol{E}_3[2(-1)]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{P}_4=\boldsymbol{E}_3[3(-1)]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_3^{-1}\boldsymbol{P}_4^{-1}$, （$\boldsymbol{P}_i^{-1},i=1,2,3,4$仍为初等矩阵）

其中$\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{E}_3[2+1(-3)]=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3^{-1}=\boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{P}_4^{-1}=\boldsymbol{P}_4$.

初等行变换法解第1型矩阵方程

原理　可逆阵的行简化阶梯阵为单位阵. 从而

$$\left[\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}\right]\xrightarrow{\text{有限次初等行变换}}\left[\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\right]$$

拓展　系数阵可逆的矩阵方程

1型　$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}$,　其中 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵.

2型　$\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{C}$　其中 $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵.

3型　$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$　其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵.

许多矩阵方程最终可归结为上述简单方程, 求解的基本原则是先化简, 后计算.

例 1 设矩阵$\boldsymbol{X}$ 满足$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

求矩阵$\boldsymbol{X}$.

解 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$,

$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$,

$$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0，\ \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\text{可逆}.$$

$$[\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&1&0\\0&1&2&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&1&-3\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&-1\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\therefore \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$

例2　设三阶矩阵A, B满足关系：

$$A^{-1}BA = 6A + BA, \text{且} A = \begin{pmatrix} 1/2 & & O \\ & 1/4 & \\ O & & 1/7 \end{pmatrix} \text{求} B.$$

解　$A^{-1}BA - BA = 6A$

$$\Rightarrow (A^{-1} - E)BA = 6A \Rightarrow (A^{-1} - E)B = 6E$$

$$\Rightarrow B = 6(A^{-1} - E)^{-1}.$$

例（附加题） 设$A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$，且$r(A)=n$，证明：

（1）存在m阶可逆阵B，使得$BA=\begin{bmatrix} I_n \\ O \end{bmatrix}$；

（2）存在$n\times m$矩阵C（左伪逆），使得$CA=I_n$.

注：（1）说明列满秩的矩阵仅用初等行变换就可化为相抵标准形，（2）说明存在左伪逆矩阵；同理，行满秩的矩阵仅用初等列变换就可化为相抵标准形，且存在右伪逆矩阵。

即，若$A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$，$r(A)=m$，则

$(1)'$ 存在n阶可逆阵Q，使得$AQ=\begin{bmatrix} I_m & O \end{bmatrix}$；

$(2)'$ 存在$n\times m$阶矩阵D，使得$AD=I_m$.