第六章　微分方程

第一节　　微分方程的基本概念

天津大学
数学学院
郭飞

第一节　微分方程的基本概念

一、引例 $\begin{cases}\text{几何问题}\\\text{物理问题}\end{cases}$

二、微分方程的基本概念

三、小结

一、引例

引例1 一曲线通过点(1, 2), 且在该曲线上任一点$M(x, y)$处的切线的斜率为$2x$, 求这曲线的方程.

解 设所求曲线的方程为$y=y(x)$, 则

$$\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{y}}{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}=\mathbf{2}\boldsymbol{x},$$

上式两端积分, 得

$$\boldsymbol{y}=\int \mathbf{2}\boldsymbol{x}\,\mathbf{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{2}+\boldsymbol{C} \quad (C\text{为任意常数})$$

因为曲线通过点(1, 2), 即当$x=1$时, $y=2$, 所以

$$2=1^2+C, \quad C=1.$$

因此, 所求曲线方程为 $y=x^2+1$.

引例2 列车在平直的线路上以20米 / 秒的速度行驶,当制动时列车获得加速度-0.4米 / 秒^2,问开始制动后多长时间后列车才能停住?以及列车在这段时间内行驶了多少路程?

解 设制动后 t 秒钟行驶 s 米, $s = s(t)$, 则

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -0.4, \\ s(0) = 0, \\ v(0) = s'(0) = 20, \end{cases}$$

$$\therefore v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -0.4t + C_1$$

$$s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$$

代入条件后知

$$C_1 = 20, \quad C_2 = 0$$

$$\boxed{\therefore v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -0.4t + 20,} \qquad \boxed{s(t) = -0.2t^2 + 20t,}$$

所以，开始制动到列车完全停住共需 $t = \dfrac{20}{0.4} = 50(\text{秒}),$

列车在这段时间内行驶了 $s = -0.2 \times 50^2 + 20 \times 50 = 500(\text{米}).$

二、微分方程的基本概念

含未知函数及其导数的方程叫做微分方程 .

分类 $\left\{\begin{array}{ll}\text{常微分方程：函数是一元函数} & \text{(本章内容)} \\ \text{偏微分方程：函数是多元函数} & \text{（专门一门课程）}\end{array}\right.$

方程中所含未知函数导数的最高阶数叫做微分方程的阶.

一般地 , n 阶常微分方程的形式是

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

或 $\quad y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ (n 阶显式微分方程)

微分方程的**解** — 使方程成为恒等式的函数.

通解 — 解中所含独立的任意常数的个数与方程的阶数相同.

特解 — 不含任意常数的解, 其图形称为**积分曲线.**

定解条件 — 确定通解中任意常数的条件.

n 阶方程的**初始条件(或初值条件):**

$$y(x_0)=y_0\,,\ y'(x_0)=y'_0\,,\cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

引例
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\\ y\big|_{x=1}=2\end{cases}$$

通解: $y=x^2+C$

特解: $y=x^2+1$

例1. 验证函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ (C_1, C_2为常数) 是微分方程 $\dfrac{d^2 x}{d t^2} + k^2 x = 0$ 的解，并求满足初始条件 $x\big|_{t=0} = A$, $\dfrac{d x}{d t}\Big|_{t=0} = 0$ 的特解 .

解: $\dfrac{d^2 x}{d t^2} = -C_1 k^2 \cos kt - C_2 k^2 \sin kt = -k^2 (C_1 \sin kt + C_2 \cos kt)$

$= -k^2 x$

这说明 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是方程的解 .

C_1, C_2 是两个独立的任意常数，故它是方程的通解.

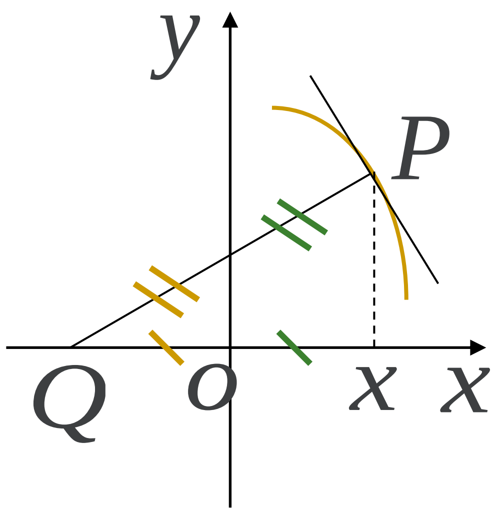
利用初始条件易得: $C_1 = A, C_2 = 0$, 故所求特解为 $x = A\cos kt$

例2. 已知曲线上点 $P(x,y)$ 处的法线与x 轴交点为 Q

且线段 PQ 被 y轴平分，求该曲线所满足的微分方程.

解：如图所示，点 $P(x,y)$处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$$



令 $Y=0$，得 Q 点的横坐标

$$X=x+yy'$$

$\therefore\quad x+yy'=-x$，即 $yy'+2x=0.$

积分曲线：微分方程的特解的图形.

积分曲线族：通解的图形.

三、小结

本节基本概念：

微分方程；

微分方程的阶；

微分方程的解；　通解；　特解；

初始条件；　初值问题；

积分曲线.

思考与练习

函数 $y=3e^{2x}$ 是微分方程 $y''-4y=0$ 的什么解?

解: $\because y'=6e^{2x}, \qquad y''=12e^{2x},$

$$y''-4y=12e^{2x}-4\cdot 3e^{2x}=0,$$

$\because y=3e^{2x}$ 中不含任意常数,

故为微分方程的特解.