

### 例1. 求下列方程的通解

$$(1) \quad y' + \frac{1}{y^2} e^{y^3+x} = 0; \quad (2) \quad xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y ;$$

$$(3) \quad y' = \frac{1}{2x - y^2} ; \quad (4) \quad y' = -\frac{6x^3 + 3xy^2}{3x^2y + 2y^3}.$$

### 例2. 求下列方程的通解:

$$(1) \quad \underline{xy' + y = y(\ln x + \ln y)}$$

$$(2) \quad \underline{2x \ln x dy + y(y^2 \ln x - 1)dx = 0}$$

$$(3) \quad y' = \frac{3x^2 + y^2 - 6x + 3}{2xy - 2y}$$

## 练习题:

1. 求以  $(x + C)^2 + y^2 = 1$  为通解的微分方程.

2. 求下列微分方程的通解:

$$(1) xy' + y = 2\sqrt{xy}$$

$$(2) xy' \ln x + y = ax(\ln x + 1)$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2(\ln y - x)}$$

$$(4) \frac{dy}{dx} + xy - x^3 y^3 = 0$$

$$(5) (y^4 - 3x^2) dy + xy dx = 0$$

## 二、解微分方程应用问题

1. 已知某曲线经过点 $(1, 1)$ , 它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标, 求它的方程.

## 三、

4. 求下列微分方程的通解

$$(1) \ y y'' - y'^2 - 1 = 0, \quad (2) \ y'' + 2y' + 5y = \sin 2x.$$

5. 设  $f(x)$  二阶导数连续, 且满足方程

$$f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t) f(t) dt$$

求  $f(x)$  .

**思考:** 设  $\phi'(x) = e^x + \sqrt{x} \int_0^{\sqrt{x}} \phi(\sqrt{x}u) du$ ,  $\phi(0) = 0$ ,  
如何求  $\phi(x)$ ?

**补充:** 1. 具有特解  $y_1 = e^{-x}$   $y_2 = 2xe^{-x}$   $y_3 = 3e^x$

的三阶常系数线性齐次微分方程是 答( B )

(A)  $y''' - y'' - y' + y = 0$  (B)  $y''' + y'' - y' - y = 0$

(C)  $y''' - y'' + y' - y = 0$  (D)  $y''' + y'' - y' + y = 0$

2. 方程  $y^{(4)} - y = e^x + 3\sin x$  的特解应设为 答(D)

(A)  $Ae^x + B\sin x$  (B)  $Ae^x + B\cos x + C\sin x$

(C)  $Axe^x + B\cos x + C\sin x$  (D)  $x(Ae^x + B\cos x + C\sin x)$

3.(06考研)函数  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x e^x$  满足的方程是

(A)  $y'' - y' - 2y = 3x e^x$       (B)  $y'' - y' - 2y = 3e^x$

(C)  $y'' + y' - 2y = 3x e^x$       (D)  $y'' + y' - 2y = 3e^x$

答(D)