数学分析（新工科）

第四章 微分与导数

习题课

天津大学数学学院
郭飞

主要知识点：

一. 可微的定义：

若$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$,(注意：$A$与$\Delta x$无关!)

则称$y=f(x)$在x_0点可微，称$A\Delta x$为$y=f(x)$在x_0点的微分，

记为$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$或$\mathrm{d}f(x)\big|_{x=x_0}$.

二、导数的定义：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

注1: $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x.$

注2：可导 $\Leftrightarrow$ 可微，但导数 $\neq$ 微分！

注3：可导 $\Rightarrow$ 连续.

注4: $y = f(x)$在x_0可导 $\Leftrightarrow f_-'(x_0) = f_+'(x_0).$

注5：$f'(x_0)$是曲线$y = f(x)$在$(x_0, f(x_0))$处切线的斜率.

三. 求导法则:

1. 函数的和、差、积、商的求导法则:

$$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x),$$

$$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

2. 反函数的求导法则:

若$y=f(x)$在(a,b)上严格单调、可导且$f'(x)\neq 0$, 记$\alpha=\min\{f(a+),$ $f(b-)\}$, $\beta=\max\{f(a+),f(b-)\}$,则其反函数$x=f^{-1}(y)$在$(\alpha,\beta)$上可导，且$\left(f^{-1}(y)\right)'=\dfrac{1}{f'(x)}$.

3. 复合函数的求导法则：

函数$u=\varphi(x)$在x_0处可导，$y=f(u)$在点$u_0=\varphi(x_0)$处可导，

则复合函数$y=f(\varphi(x))$在x_0处可导，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\varphi(x))\Big|_{x=x_0}=f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0).$$

四. 隐函数求导、参量函数求导：

1. 隐函数求导：

设方程$F(x,y)=0$确定了一个可导隐函数$y=y(x)$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

视y为$y=y(x)$，两边对x求导，从中解出$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2. 参量函数求导：

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}; \quad \begin{cases} x=\varphi(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)}.$$

注意：二阶导不能理解成$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\psi''(t)\mathrm{d}t^2}{\varphi''(t)\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\psi''(t)}{\varphi''(t)}$！

五. 高阶导数与高阶微分:

求高阶导数的常用方法:

1. 数学归纳法

2. 莱布尼茨公式: $[f(x)g(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).$

3. 下一章讲的Taylor公式

求高阶微分的常用方法:

$$\mathrm{d}^n f(x)=f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$$

注意: 1. 高阶导数和高阶微分的符号;

2. 一阶微分具有形式不变性,但高阶微分不具有此性质!

所以需要特别注意复合函数的高阶微分!

典型例题：

导数定义

1. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+2020)$， 求$f'(0)$.

解： $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+2020)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}[(x+1)(x+2)\cdots(x+2020)]$$

$$=2020!$$

2. 设 $f(x)=\left(x^{2020}-1\right)\cdot g(x)$, 其中$g(x)$在 $x=1$处连续，求 $f(x)$在 $x=1$处的导数.

导数定义

解： $$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^{2020}-1\right)\cdot g(x)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}[\left(x^{2019}+x^{2018}+\cdots+x+1\right)g(x)]$$

$$=2020\cdot g(1)$$

3. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 点处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$, 求 $f'(2)$.

导数定义

解: $\because \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$,

$\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x)=0.$

又 $\because$ $f(x)$ 在 $x=2$ 点处连续，

$\therefore f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0.$

$$\therefore f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3.$$

4. 设 $f(x)$可导，求$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(x+h)-f^2(x)}{h}$.

导数定义

解: $$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(x+h)-f^2(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\left[f(x+h)+f(x)\right]\right\}$$

$$=2f'(x)f(x)$$

5. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且 $f(0)=1,\ f'(0)\neq 0$，$\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$，函数 $f(x)$满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$，试求 $f'(x)$

解：

$$f'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x)f(\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$$

$$=f(x)\cdot\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(\triangle x)-1}{\triangle x}=f(x)\cdot\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(\triangle x)-f(0)}{\triangle x}$$

$$=f(x)\cdot f'(0)$$

导数定义

6. 证明：设 $f(x)=|x-a|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $\varphi(a)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充要条件.

证明：
$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a^+}\frac{|x-a|\varphi(x)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\varphi(x)=\varphi(a),$$
$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a^-}\frac{|x-a|\varphi(x)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{-(x-a)\varphi(x)}{x-a}=-\lim_{x\to a^-}\varphi(x)=-\varphi(a),$$
$\therefore f(x)$ 在 $x=a$ 处可导 $\Leftrightarrow f'_-(a)=f'_+(a)\Leftrightarrow\varphi(a)=-\varphi(a)\Leftrightarrow\varphi(a)=0.$ 导数定义

7. 求$f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$的不可导点.

解：$f(x)=(x^2-x-2)|x(x+1)(x-1)|=(x-2)(x+1)|x(x+1)(x-1)|$，

显然$f(x)$仅可能在$x=0, x=-1, x=1$处不可导.

判断$x=0$：$f(x)=|x|(x-2)(x+1)|(x+1)(x-1)|$，利用6题结论，

由$\varphi(x)=(x-2)(x+1)|(x+1)(x-1)|$得：$\varphi(0)\neq 0$，

故$x=0$为不可导点；

判断$x=-1$：$f(x)=|(x+1)|(x-2)(x+1)|x(x-1)|$，利用6题结论，

由$\varphi(x)=(x-2)(x+1)|x(x-1)|$得：$\varphi(-1)=0$，

故$x=-1$为可导点；

类似地，可判断$f(x)$在$x=1$处不可导. 故$f(x)$有两个不可导点：0和1.

8. 设 $f(x)=|x^3-1|g(x)$，其中 $g(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $g(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的什么条件？

解： $f(x)=|x-1|g(x)|x^2+x+1|$，

利用6题结论，$\varphi(1)=0$是 $f(x)$在 $x=1$处可导的充要条件，其中 $\varphi(x)=g(x)\left|x^2+x+1\right|$，

即$g(1)=0$是 $f(x)$在 $x=1$处可导的充要条件.

9. 设 $g(x)$可导，$f(x)=g(x)(1+|\sin x|)$, 则 $g(0)=0$ 是 $f(x)$在 $x=0$ 处可导的什么条件?

导数定义

解：
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)(1+\sin x)-g(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}[\frac{g(x)-g(0)}{x}+g(x)\frac{\sin x}{x}]\ =g'(0)+g(0),$$
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)(1-\sin x)-g(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}[\frac{g(x)-g(0)}{x}-g(x)\frac{\sin x}{x}]=g'(0)-g(0),$$
$\therefore f(x)$在 $x=0$ 处可导 $\Leftrightarrow f'_-(0)=f'_+(0)\Leftrightarrow\ g'(0)+g(0)=g'(0)-g(0)\Leftrightarrow g(0)=0.$

10. 设 $f(0)=0$, 以下结果极限存在就能确定$f(x)$在$x=0$ 可导的是(B)

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}$ (B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}$ (C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$

解: (A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{2(1-\cos h)}=\lim\limits_{\triangle x\to 0^+}\dfrac{f(\triangle x)-f(0)}{2\triangle x}=\dfrac{1}{2}f'_+(0)$

(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{-(1-e^h)}=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{f(\triangle x)-f(0)}{-\triangle x}=-f'(0)$

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(2h)-f(0)}{h}-\dfrac{f(h)-f(0)}{h}\right)$ $(\infty-\infty?)$

反例: $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

$\boxed{\text{导数定义}}$

11. 设 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<0, \\ e^x-1, & x\geq 0, \end{cases}$ 确定常数 a,b, 使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

解: $\because$ 可导一定连续, $\therefore b=0$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{x}=a,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则有 $f'_-(0)=f'_+(0)$, $\therefore a=1$

再次强调：分段函数在分段点处的可导问题要用定义！

导数定义

12. 设 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<1 \\ x^2, & x\geq 1 \end{cases}$，确定常数 a和b, 使得 $f(x)$ 在 $x=1$处可导.

$\boxed{\text{导数定义}}$

解：$\because f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，

而$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax+b)=a+b, \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2=1, f(1)=1,$

$\therefore a+b=1,$

$$\because f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(ax+b)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{ax-a}{x-1}=a,$$

$f(x)$在 $x=1$处可导 $\Rightarrow f'_-(1)=f'_+(1)$, 故 $a=2$， 由 $a+b=1$ 得：$b=-1.$

13. 设 $f(x)=\max\{x,x^2\}$，$x\in(0,2)$, 求 $f'(x)$.　$\boxed{\text{求导函数}}$

解：$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 1, \\ x^2, & 1<x<2, \end{cases}$

当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=x,\ f'(x)=1;$

当 $x\in(1,2)$ 时，$f(x)=x^2,\ f'(x)=2x;$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x-1}=1$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

$\therefore f'(1)$不存在

则有

$$f'(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 2x, & 1<x<2 \end{cases}$$

14. $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ x^2, & x\le 0. \end{cases}$ (1) 求 $f'(x)$；(2) $f'(x)$在$x=0$是否连续？

解：(1) 当 $x>0$ 时，$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}+x^2\cdot(-\dfrac{1}{x^2})\cos\dfrac{1}{x}=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$,

当 $x<0$ 时，$f'(x)=2x$,

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}x=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

$\therefore f'(0)=0$, 则有 $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ 2x, & x\le 0. \end{cases}$

求导函数

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0,$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x})$不存在，

$\therefore f'(x)$在$x=0$不连续.

导函数连续性

14. $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x>0, \\ x^2, & x\le 0. \end{cases}$ (1) 求 $f'(x)$; (2) $f'(x)$在$x=0$是否连续？

15. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0, \end{cases}$ 分别讨论 α 取什么值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 点

(1)连续；(2)可微；(3)导函数连续.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}=0,\quad \therefore \alpha>0.$

(2) $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}\right)$存在, $\therefore \alpha>1.$

(3) 当 $x>0$ 时，$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x}$; $x<0$时，$f'(x)=0$; 且$f'(0)=0$,

$f(x)$的导函数连续 $\Rightarrow f'(x)$在$x=0$连续，故$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=f'(0)=0$,

即$\lim\limits_{x\to 0}(\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x})=0$, 故$\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x}=0, \therefore \alpha>2$.

16.已知 $y=\dfrac{\arccos x}{x}-\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$，求 $y'\big|_{x=\frac{1}{2}}$

初等函数求导

解： $y=\dfrac{\arccos x}{x}-\ln\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)+\ln x$

$$y'=\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x-\arccos x}{x^2}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)+\frac{1}{x}$$

$$=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}-\frac{\arccos x}{x^2}+\frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{x}$$

整理得：

$$y'=-\frac{\arccos x}{x^2}$$

则有 $y'\big|_{x=\frac{1}{2}}=-\dfrac{4}{3}\pi.$

17. 已知 $y=(\ln x)^{\cos x}$，其中 $x>1$, 求 $\mathrm{d}y$.

幂指函数求微分

解：$\ln y=\cos x\cdot\ln(\ln x)$

两边对 x 求导,

$$\frac{y'}{y}=-\sin x\cdot\ln(\ln x)+\cos x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x},$$

$$\therefore \mathrm{d}y=(\ln x)^{\cos x}\left(-\sin x\cdot\ln(\ln x)+\frac{\cos x}{x\ln x}\right)\mathrm{d}x.$$

18. 已知 $y=(\ln x)^x\cdot x^{\ln x}\ (x>1)$, 求 y'.

幂指函数求导

解：$\ln y = x\ln(\ln x)+\ln x\cdot\ln x$,

两边对 x 求导,

$$\frac{y'}{y}=\ln(\ln x)+x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}+2\ln x\cdot\frac{1}{x},$$

$$\therefore y'=(\ln x)^x\cdot x^{\ln x}\left(\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}+\frac{2}{x}\cdot\ln x\right).$$

19. 已知 $y=(\tan x)^x+x^{\sin\frac{1}{x}}\ (0<x<1)$, 求 y'.

幂指函数求导

解：令 $h=(\tan x)^x$, 令 $g=x^{\sin\frac{1}{x}}$,

两边取对数：$\ln h=x\ln(\tan x)$; $\ln g=\sin\dfrac{1}{x}\ln x$,

两边对 x 求导：$\dfrac{h'}{h}=\ln(\tan x)+\dfrac{x}{\tan x}\sec^2 x$; $\dfrac{g'}{g}=-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}\ln x+\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$,

$$\therefore\ y'=(\tan x)^x\left(\ln(\tan x)+\frac{x}{\tan x}\sec^2 x\right)+x^{\sin\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right).$$

20. 已知 $y=(x-5)\sqrt[5]{\dfrac{(x+1)(x-2)^3}{x^2(x-1)(x+2)^3}}$ ，求 y'.

$\boxed{\text{对数求导法}}$

解：$\ln|y|=\ln|x-5|+\dfrac{1}{5}\left[\ln|x+1|+3\ln|x-2|-2\ln|x|-\ln|x-1|-3\ln|x+2|\right]$,

两边对 x 求导,

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x-5}+\frac{1}{5(x+1)}+\frac{3}{5(x-2)}-\frac{2}{5x}-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{3}{5(x+2)},$$

$$\therefore y'=(x-5)\sqrt[5]{\frac{(x+1)(x-2)^3}{x^2(x-1)(x+2)^3}}\left[\frac{1}{x-5}+\frac{1}{5(x+1)}+\frac{3}{5(x-2)}-\frac{2}{5x}-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{3}{5(x+2)}\right].$$

21. 已知 $y=f\left(\frac{x}{1+x}\right)$，而 $f'(x)=\arcsin x$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$.

$\boxed{\text{复合函数求导}}$

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'\left(\frac{x}{1+x}\right)\frac{1+x-x}{(1+x)^2}$

$=\arcsin\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}$,

$\therefore \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\arcsin\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{24}$.

22. 设 $f(x),\ \varphi(x),\ \psi(x)$都是可导函数，

求函数 $y=f\left(\varphi(x^2)+\psi^2(x)\right)$的微分.

求复合函数的一阶微分

解：$\mathrm{d}y=f'\left(\varphi(x^2)+\psi^2(x)\right)\cdot\left[\varphi'(x^2)\cdot 2x+2\psi(x)\psi'(x)\right]\mathrm{d}x$

23. 已知 $f(x)$ 二次可导，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 f(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{d}x^2}$.

复合函数求导

解：$\dfrac{\mathrm{d} f(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{d}x} = f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x$,

$$\therefore \frac{\mathrm{d}^2 f(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\right]$$

$$= f''(\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x)^2 + f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x} f''(\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^x f'(\mathrm{e}^x).$$

24.已知 $f(x)$ 二次可导，求 $f\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 的二阶导数. 复合函数求导

解：$$\frac{\mathrm{d}f\left(\sin\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{d}x}=f'\left(\sin\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

$$\therefore\frac{\mathrm{d}^2f\left(\sin\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f'\left(\sin\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$=f''\left(\sin\frac{1}{x}\right)\left(\cos\frac{1}{x}\right)^2\frac{1}{x^4}+f'\left(\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^4}$$

$$+f'\left(\sin\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x^3}.$$

25. 设 $f(x)=\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$, 求 $f^{(n)}(0)$.

求高阶导数

解： $f(x)=-\ln(1-x)$

$$f'(x)=-\frac{1}{1-x}(-1)=(1-x)^{-1}$$

$$f''(x)=\left[(1-x)^{-1}\right]'=(-1)(1-x)^{-2}(-1)$$

$$f'''(x)=\left[(1-x)^{-1}\right]''=(-1)(-2)(1-x)^{-3}(-1)^{2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\left[(1-x)^{-1}\right]^{(n)}=(-1)(-2)\cdots[-(n-1)](1-x)^{-n}(-1)^{n-1}$$

$$=(n-1)!(1-x)^{-n},$$

则有 $f^{(n)}(0)=(n-1)!$

26. 设 $y=\dfrac{1}{2-x-x^2}$, 求 $y^{(10)}$. $\boxed{\text{求高阶导数}}$

解: $$\frac{1}{2-x-x^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{1-x}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2+x}\right)'=\left[(2+x)^{-1}\right]'=(-1)(2+x)^{-2}$$

$$\left(\frac{1}{2+x}\right)''=\left[(2+x)^{-1}\right]''=(-1)(-2)(2+x)^{-3}$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{1}{2+x}\right)^{(10)}=\left[(2+x)^{-1}\right]^{(10)}=(-1)^{10}10\,!(2+x)^{-11}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left[(1-x)^{-1}\right]'=(-1)(1-x)^{-2}(-1)$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)''=\left[(1-x)^{-1}\right]''=(-1)(-2)(1-x)^{-3}(-1)^2$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(10)}=\left[(1-x)^{-1}\right]^{(10)}=10\,!(1-x)^{-11}$$

则 $$y^{(10)}=\frac{10\,!}{3}\left(\frac{1}{(2+x)^{11}}+\frac{1}{(1-x)^{11}}\right)$$

26. 设 $y=\dfrac{1}{2-x-x^2}$, 求 $y^{(10)}$.　　$\boxed{\text{求高阶导数}}$

解: $$\frac{1}{2-x-x^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2+x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2+x}\right)'=\left[(2+x)^{-1}\right]'=(-1)(2+x)^{-2}$$

$$\left(\frac{1}{2+x}\right)''=\left[(2+x)^{-1}\right]''=(-1)(-2)(2+x)^{-3}$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{1}{2+x}\right)^{(10)}=\left[(2+x)^{-1}\right]^{(10)}=(-1)^{10}10!(2+x)^{-11}$$

则 $$y^{(10)}=\frac{10!}{3}\left(\frac{1}{(2+x)^{11}}+\frac{1}{(1-x)^{11}}\right)$$

27. 设 $y=\ln\left(3+7x-6x^2\right)$, 求 $y^{(n)}$ $\boxed{\text{求高阶导数}}$

解： $y=\ln(1+3x)(3-2x)=\ln|1+3x|+\ln|3-2x|$,

$$[\ln|1+3x|]'=\frac{3}{1+3x}=(1+3x)^{-1}\cdot 3$$

$$[\ln|1+3x|]''=(-1)(1+3x)^{-2}\cdot 3^2$$

$$[\ln|1+3x|]'''=(-1)(-2)(1+3x)^{-3}\cdot 3^3$$

$$\vdots$$

$$[\ln|1+3x|]^{(n)}$$
$$=(-1)(-2)\cdots[-(n-1)](1+3x)^{-n}\cdot 3^n$$
$$=(-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+3x)^{-n}\cdot 3^n$$

$$[\ln|2x-3|]'=\frac{2}{2x-3}=2(2x-3)^{-1}$$

$$[\ln|2x-3|]''=(-1)\times 2^2(2x-3)^{-2}$$

$$[\ln|2x-3|]'''=(-1)(-2)\times 2^3(2x-3)^{-3}$$

$$\vdots$$

$$[\ln|2x-3|]^{(n)}$$
$$=(-1)(-2)\cdots[-(n-1)](2x-3)^{-n}\cdot 2^n$$
$$=(-1)^{n-1}(n-1)!\,(2x-3)^{-n}\cdot 2^n$$

则 $$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{3^n}{(1+3x)^n}+\frac{2^n}{(2x-3)^n}\right)$$

28. 设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$, 求 $f^{(n)}(0)$.　　$\boxed{\text{求高阶导数}}$

解: $f^{(n)}(x)=\mathrm{C}_n^0 x^2\left[\ln(1+x)\right]^{(n)}+\mathrm{C}_n^1 2x\left[\ln(1+x)\right]^{(n-1)}+\mathrm{C}_n^2 2\left[\ln(1+x)\right]^{(n-2)}$,

$$\left[\ln(1+x)\right]^{(k)}=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},$$

$$\therefore f^{(n)}(0)=\mathrm{C}_n^2 2(-1)^{n-3}(n-3)!=\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2(-1)^{n-3}(n-3)!$$

$$=(-1)^{n-1}n(n-1)(n-3)!$$

学了Taylor公式后有更简单的做法.

29. 求 $y=\left(x^2-1\right)\sin x,\ y^{(24)}(0).$ $\boxed{\text{求高阶导数}}$

解：$y^{(n)}=\mathrm{C}_n^0\left(x^2-1\right)\sin^{(n)}x+\mathrm{C}_n^1 2x\sin^{(n-1)}x+\mathrm{C}_n^2\cdot 2\sin^{(n-2)}x$

$$=\left(x^2-1\right)\sin(x+\frac{n\pi}{2})+n\cdot 2x\sin[x+\frac{(n-1)\pi}{2}]$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\sin[x+\frac{(n-2)\pi}{2}],$$

$$\therefore y^{(24)}(0)=-\sin(12\pi)+\frac{24(24-1)}{2}\cdot 2\sin(11\pi)=0.$$

30. 已知 $y\ln\cos x = x\ln\sin y$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.　　隐函数求导

解： 视y为$y(x)$, 两边对 x 求导：

$$y'\ln\cos x + y\cdot\frac{1}{\cos x}(-\sin x) = \ln\sin y + \frac{x}{\sin y}\cos y\cdot y',$$

$$\therefore y' = \frac{\ln\sin y + y\tan x}{\ln\cos x - x\cot y}.$$

31. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{y}+6xy+x^{2}-1=0$ 确定, 求 $y''(0)$.

隐函数求二阶导

解：视y为$y(x)$, 两边对 x 求导：

$$e^{y}y'+6y+6xy'+2x=0, \quad (1)$$

(1) 式两边再对 x 求导：

$$e^{y}y'^{2}+e^{y}y''+12y'+6xy''+2=0. \quad (2)$$

当 $x=0$ 时, 由方程解得$y=0$, 代入(1)式得$y'(0)=0$,

从而由(2)式得$y''(0)=-2$.

32. 设$\begin{cases} x = \ln\cos t, \\ y = \sin t - t\cos t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}, \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}$. 参量函数求导、二阶导

解： $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{\cos t - (\cos t - t\sin t)}{\dfrac{-\sin t}{\cos t}} = -t\cos t,$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-(\cos t - t\sin t)}{\dfrac{-\sin t}{\cos t}} = \cos t(\cot t - t),$$

$$\therefore \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{6}(\sqrt{3} - \pi).$$

33. 已知方程组 $\begin{cases} x+t(t+1)=0, \\ te^{y}+y+1=0 \end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$，求曲线$y=y(x)$

在$t=0$ 对应点处的切线方程和法线方程.

解： 当 $t=0$ 时, $x(0)=0,\ y(0)=-1,$

方程组两边对 t 求导：

$$\begin{cases} x'(t)+1+2t=0, \\ \mathrm{e}^{y}+t\mathrm{e}^{y}y'(t)+y'(t)=0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'(0)=-1, \\ y'(0)=-\mathrm{e}^{-1}, \end{cases}$$

$$\therefore \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\frac{y'(0)}{x'(0)}=\mathrm{e}^{-1},$$

切线方程：$y+1=\mathrm{e}^{-1}x,$

法线方程：$y+1=-\mathrm{e}x.$

$\boxed{\text{参量函数求导、隐函数求导}}$

34. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3, & (1) \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$ 所确定, 求 $\left.\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=0}$

解： 当 $t=0$ 时, $x(0)=3,\ y(0)=1.$

由(1)式得：$x'(t)=6t+2,$

(2) 式两边对 x 求导, 得

$$e^y y'(t)\sin t + e^y \cos t - y'(t) = 0,$$

$$\Rightarrow y'(t) = \frac{e^y \cos t}{1-e^y \sin t},$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{e^y \cos t}{(1-e^y \sin t)(6t+2)} = \frac{e^y \cos t}{2(3t+1)(2-y)},$$

隐函数求导、
参量函数求导

$$\therefore \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \left[\frac{\mathrm{e}^y \cos t}{2(3t+1)(2-y)}\right]' \Big/ (6t+2)$$

$$= \frac{1}{4(3t+1)^3(2-y)^2}\{(3t+1)(2-y)[\mathrm{e}^y y'(t)\cos t - \mathrm{e}^y \sin t)] - \mathrm{e}^y \cos t[3(2-y) - (3t+1)y'(t)]$$

将$t=0$，$y(0)=1$代入$y'(t)=\dfrac{\mathrm{e}^y \cos t}{1-\mathrm{e}^y \sin t}$得$y'(0)=\mathrm{e}$，

$$\therefore \left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0} = \frac{2\mathrm{e}^2 - 3\mathrm{e}}{4}.$$

隐函数求导、
参量函数求导

35. 函数 $y=f(x)$ 在 x 处的函数增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, 若

$$\Delta y=\frac{x}{1+x}\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0),\ 则\ f'(1)=\underline{\qquad}.$$

解：由微分的定义知：$\mathrm{d}y=\dfrac{x}{1+x}\mathrm{d}x,$

微分的定义

由微分和导数的关系知:$f'(x)=\dfrac{x}{1+x},$

$$\therefore f'(1)=\frac{1}{2}.$$

36. 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，$\Delta y\big|_{x=x_0}=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, 则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y\big|_{x=x_0}-\mathrm{d}f(x)\big|_{x=x_0}}{\Delta x}=(\quad C \quad).$$

(A) $f'(x_0)$　(B) 1　(C) 0　(D) 不存在

解：由微分和导数的关系知: $f(x)$ 在 x_0 处可微,

由微分的定义知：$\Delta y\big|_{x=x_0}=\mathrm{d}f(x)\big|_{x=x_0}+o(\Delta x)(\Delta x\to 0).$

微分的定义

37. 若 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$,则当 $\Delta x\to 0$ 时，

该函数在 $x=x_0$ 点处的微分 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$ 是(　B　)

(A) 与 Δx 等价的无穷小　(B) 与 Δx 同阶但不是等价的无穷小

(C) 比 Δx 低阶的无穷小　(D) 比 Δx 高阶的无穷小

解：由微分和导数的关系知: $f(x)$ 在 x_0 处可微,

且 $\mathrm{d}f(x)\big|_{x=x_0}=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\Delta x$

$\boxed{\text{微分的定义}}$

38. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 确定，求$\mathrm{d}y\big|_{x=0}$.

解：视 y 为 $y(x)$，两边对 x 求导：

$$2^{xy}\ln 2(y+xy')=1+y' \qquad (1)$$

将 $x=0$ 代入方程得 $y=1$, 代入 (1) 式得

$$y'(0)=\ln 2-1,$$

$$\therefore \mathrm{d}y\big|_{x=0}=(\ln 2-1)\mathrm{d}x.$$

或者在方程两边同时求微分

隐函数的微分

39. 已知 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}$，求 (1) $\mathrm{d}y=$ ____ $\mathrm{d}(x^2)$； (2) $\mathrm{d}y=$ ____ $\mathrm{d}\sqrt{x}$

复合函数的微分

解法一：

$$(1)\quad \mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}=\mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(x^2);$$

$$(2)\ \mathrm{d}y=-\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(\sqrt{x}^4)=-\frac{4\mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{x^3}}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$=-\frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\sqrt{x}.$$

39. 已知 $y=e^{\sqrt{1-x^2}}$，求 (1) $dy=$ ____ $d(x^2)$； (2) $dy=$ ____ $d\sqrt{x}$

凑

解法二（不鼓励用此法！） $dy=e^{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$(1)\ d(x^2)=2xdx,$$

$$dy=e^{\sqrt{1-x^2}}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2xdx,\quad 故\ dy=-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}e^{\sqrt{1-x^2}}d(x^2)$$

$$(2)\ d\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx,$$

$$dy=e^{\sqrt{1-x^2}}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx,\quad 故\ dy=-\frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}e^{\sqrt{1-x^2}}d\sqrt{x}.$$

40. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\sin x$, 试求其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2}$.

解: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\dfrac{1}{-\mathrm{e}^{-x}\sin x+\mathrm{e}^{-x}\cos x}$,

$$\therefore \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{-\mathrm{e}^{-x}\sin x+\mathrm{e}^{-x}\cos x}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{-\mathrm{e}^{-x}\sin x+\mathrm{e}^{-x}\cos x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{\mathrm{e}^{-x}\sin x-2\mathrm{e}^{-x}\cos x-\mathrm{e}^{-x}\sin x}{\left(-\mathrm{e}^{-x}\sin x+\mathrm{e}^{-x}\cos x\right)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{2\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\left(-\mathrm{e}^{-x}\sin x+\mathrm{e}^{-x}\cos x\right)^3}.$$

反函数求导

41. 设 $y=f(x)=\sin x$, $x=t^2$, 求 d^2y.

高阶微分

解法一 先将 $x=t^2$ 代入 $y=f(x)$, 得 $y=\sin t^2$,

于是 $y'=2t\cos t^2$, $y''=2\cos t^2-4t^2\sin t^2$.

$$\mathrm{d}^2y=(2\cos t^2-4t^2\sin t^2)\,\mathrm{d}t^2.$$

解法二 $\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(f'(x)\mathrm{d}x)$

$=f''(x)\mathrm{d}x^2+f'(x)\mathrm{d}^2x$ (注意：此时x不是自变量而是中间变量!)

$=-\sin x\,\mathrm{d}x^2+\cos x\,\mathrm{d}^2x$ (注意此时$\mathrm{d}^2x\neq 0$!)

$=-\sin t^2\cdot(2t\,\mathrm{d}t)^2+\cos t^2\cdot 2\mathrm{d}t^2$

$=(2\cos t^2-4t^2\sin t^2)\mathrm{d}t^2$.

注意：如果将 $f'(x)\mathrm{d}^2x$ 漏掉就会产生错误.

42. 求$\mathrm{d}^2[f(u)g(u)]$.（课后题11(3)） $\boxed{\text{高阶微分}}$

解 $\mathrm{d}[f(u)g(u)]=[f'(u)g(u)+f(u)g'(u)]\mathrm{d}u$

$$\mathrm{d}^2[f(u)g(u)]=[f'(u)g(u)+f(u)g'(u)]\mathrm{d}^2u+[f'(u)g(u)+f(u)g(u)]'\mathrm{d}u^2$$

$$=[f'(u)g(u)+f(u)g'(u)]\mathrm{d}^2u+[f''(u)g(u)+2f'(u)g'(u)+f(u)g''(u)]\mathrm{d}u^2$$

当u是自变量时，$\mathrm{d}^2[f(u)g(u)]=[f''(u)g(u)+2f'(u)g'(u)+f(u)g''(u)]\mathrm{d}u^2$.

43. 求$\mathrm{d}^2\left(\dfrac{f(u)}{g(u)}\right)$.(课后题11(5))　　$\boxed{\text{高阶微分}}$

解　$$\mathrm{d}\left(\frac{f(u)}{g(u)}\right)=\frac{f'(u)g(u)-f(u)g'(u)}{g^2(u)}\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}^2\left(\frac{f(u)}{g(u)}\right)=\frac{f'(u)g(u)-f(u)g'(u)}{g^2(u)}\mathrm{d}^2u+\left(\frac{f'(u)g(u)-f(u)g'(u)}{g^2(u)}\right)'\mathrm{d}u^2$$

$$=\frac{f'(u)g(u)-f(u)g'(u)}{g^2(u)}\mathrm{d}^2u$$

$$+\frac{f''(u)g^2(u)-f(u)g(u)g''(u)-2f'(u)g'(u)g(u)+2f(u)(g'(u))^2}{g^3(u)}\mathrm{d}u^2$$