3.4 闭区间上的连续函数 (2)

一致连续：

1. 回顾定义：$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta=\delta(\varepsilon)>0$, $\forall x', x''\in I$, 只要 $|x'-x''|<\delta$ 就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

$\Rightarrow$ 连续.

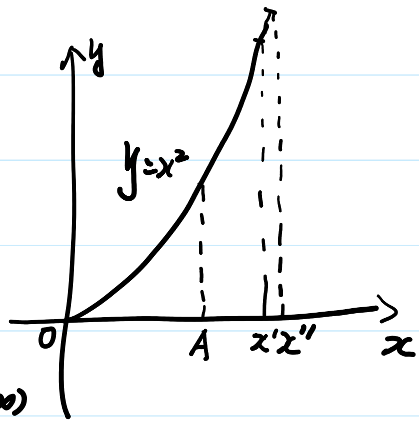
2. 一致连续的充要条件

定理3.4.5. f 在区间 I 上一致连续

$\Longleftrightarrow$ $\forall$ 任何点列 $\{x_n'\}$, $\{x_n''\}$, 只要满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$

就有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$.

Ex3.4.7 证明 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续，但在 $[0,A]$ $(A>0)$ 上一致连续.



证明：(1) 非一致连续.

$x_n'=n$，$x_n''=n+\frac{1}{n}$，则 $x_n', x_n''\in[0,+\infty)$

满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$. 但是

$|f(x_n')-f(x_n'')| = (n+\frac{1}{n})^2-n^2 = 2+\frac{1}{n^2} \to 2 \ (n\to\infty)$

$\therefore$ $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续.

(2) 一致连续.

$\forall x', x''\in[0,A]$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2A}>0$. 当 $|x'-x''|<\delta$ 时，有

$|f(x')-f(x'')| = |x'^2-x''^2| = (x'+x'')|x'-x''| \le 2A|x'-x''| < \varepsilon$.

由定义可证. 证毕.

注：f, g 均在 I 上一致连续 $\Rightarrow$ $\begin{cases} f(x)/g(x) \text{ 在 } I \text{ 上一致连续} \\ f(x)\cdot g(x) \text{ 在 } I \text{ 上一致连续} \end{cases}$

注: f, g 均在 I 上一致连续 $\not\Rightarrow$ $f(x)\cdot g(x)$ 在 I 上一致连续

反例: 若 $f(x)=g(x)=x$. $I=[0,+\infty)$. $\not\Rightarrow$ $f(x)\cdot g(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

若 $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续

$\Rightarrow$ $f(x)/g(x)=x^2$ 在 $[1,+\infty)$ 上非一致连续.

3. 闭区间上连续与一致连续等价.

定理3.4.6. (Cantor定理) 若 $f\in C[a,b]$ 连续 $\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上一致连续

$\Rightarrow$ 连续 $\Leftrightarrow$ 一致连续 (闭区间)

证明: 反证法: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非一致连续. 由定理3.4.5可知

存在两个点列 $\{x_n'\}, \{x_n''\} \subset [a,b]$, 虽然 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))\neq 0$.

$\because \{x_n'\} \subset [a,b]$

$\therefore$ B-W定理知 $\{x_n'\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}'\} \to \xi\in[a,b]$. $(k\to\infty)$

取 $\{x_n''\}$ 的子列 $\{x_{n_k}''\}$, 则

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}'' = \lim_{k\to\infty}\left[(x_{n_k}''-x_{n_k}')+x_{n_k}'\right] = 0+\xi=\xi.$$

由 $f\in C[a,b]$ 可知

$$\lim_{k\to\infty}(f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')) = f(\xi)-f(\xi)=0.$$

与 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))\neq 0$ 矛盾! 证毕.

回顾: $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上连续 但非一致连续.

说明: 开区间上连续 $\not\Rightarrow$ 一致连续

4. 有限开区间上一致连续的充要条件.

定理3.4.7 设 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 内连续，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续

$\Longleftrightarrow$ $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 均存在.

证明：$\Longleftarrow$ $\because$ $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 存在

$$\therefore \text{定义 } F(x)=\begin{cases} f(a+0), & x=a, \\ f(x), & x\in(a,b), \\ f(b-0), & x=b, \end{cases}$$

则 $F(x)\in C[a,b]$. $\xrightarrow{\text{Cantor}}$ $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续

$\Longrightarrow$ $\because$ $f(x)$ 在 (a,b) 一致连续

$\therefore$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta(\varepsilon)>0$, $\forall x', x''\in(a,b)$, $|x'-x''|<\delta$ 时有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. ①

对任意收敛于 a（大于 a）的数列 $\{x_n\}\subset(a,b)$, 由 Cauchy 收敛准则，

$\Rightarrow$ 对上述 $\delta>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, $\forall m,n>N$, 有 $|x_m-x_n|<\delta$. ②

由①②可知，$m,n>N$ 时，有 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$.

$\Rightarrow$ 说明点列 $\{f(x_n)\}$ 是基本点列.

$\therefore$ $\{f(x_n)\}$ 收敛

由海涅定理 知 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在.

同理 $f(b-0)$ 存在. 证毕.

注：(1) 定理3.4.7 仅对有限开区间 (a,b) 成立. 对无限开区间不成立！

如 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致连续. 但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$ 均不存在！

$f(x)=x$. 在 $(-\infty,+\infty)$ · · · · · $\lim\limits_{x\to\infty} x$ 不存在.

(2). P99.5. $f\in C[a,+\infty)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$（有限数）.

$\Rightarrow$ f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

$(a,b]$. $[b,c)$

注:① 一致连续性具有区间可加性 (习题课上讲)

② $f\in C(-\infty,+\infty)$ 且为周期函数. 则 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续. (习题课)

作业: P99 11. 12. 14. 15.