第六章　微分方程

第四节　线性微分方程解的结构

天津大学

数学学院

郭飞

第四节　线性微分方程解的结构

一、线性齐次方程解的结构

二、线性非齐次方程解的结构

三、小结与思考练习

n 阶线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=f(x).$$

$$\begin{cases} f(x)\not\equiv 0 \text{ 时，称为非齐次方程；} \\ f(x)\equiv 0 \text{ 时，称为齐次方程.} \end{cases}$$

一阶线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$

二阶线性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+P(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+Q(x)y=f(x)$

当 $f(x)=0$时，二阶线性齐次微分方程

当 $f(x)\neq 0$时，二阶线性非齐次微分方程

一、线性齐次方程解的结构程

定理1.（叠加原理） 若函数$y_1(x)$，$y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

的两个解，则$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ （C_1,C_2为任意常数）也是该方程的解.

证: 将$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 代入方程左边，得

$$[C_1y_1''+C_2y_2'']+P(x)[C_1y_1'+C_2y_2']+Q(x)[C_1y_1+C_2y_2]$$

$$=C_1[y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1]+C_2[y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2]$$

$$=0$$

证毕

说明:

$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 不一定是所给二阶方程的通解.

例如, $y_1(x)$ 是某二阶齐次方程的解, 则

$$y_2(x) = 2\,y_1(x)\text{ 也是齐次方程的解}$$

但是 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = (C_1 + 2\,C_2)y_1(x)$

为解决通解的判别问题, 下面引入函数的线性相关与线性无关概念.

定义： 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数，若存在**不全为 0** 的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in I$$

则称这 n 个函数在 I 上**线性相关**，否则称为**线性无关**.

例如， $1, \cos^2 x, \sin^2 x$，在 $(-\infty, +\infty)$ 上都有

$$1 - \cos^2 x - \sin^2 x \equiv 0$$

故它们在任何区间 I 上都**线性相关**；

又如， $1, x, x^2$，若在某区间 I 上 $k_1 + k_2 x + k_3 x^2 \equiv 0$，

则根据二次多项式至多只有两个零点，可见 k_1, k_2, k_3 必须全为 0，

故 $1, x, x^2$ 在任何区间 I 上都 **线性无关.**

两个函数在区间 I 上线性相关与线性无关的**充要条件**:

$y_1(x), y_2(x)$线性相关 $\rightleftarrows$ 存在不全为0的 k_1, k_2 使

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \equiv 0$$

$$\rightleftarrows \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv -\frac{k_2}{k_1}$$

(不妨设 $k_1 \neq 0$)

$y_1(x), y_2(x)$ 线性无关 $\rightleftarrows \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv$ 常数

可微函数 y_1, y_2 $\overset{\text{线性无关}}{\rightleftarrows}$ $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$ (证明略)

思考: 若 $y_1(x), y_2(x)$中有一个恒为 0, 则 $y_1(x), y_2(x)$ 必线性 **相关**

定理 2. 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程的两个线性无关特解,

则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ $(C_1, C_2$为任意常数$)$ 是该方程的 通解,

且任何解都能写成上述形式.

例如, 方程 $y'' + y = 0$ 有特解 $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$, 且

$\frac{y_2}{y_1} = \tan x \not\equiv$ 常数, 故方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

推论. 若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 n 阶齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0$$

的 n 个线性无关解, 则方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n \quad (C_k \text{为任意常数})$$

例如， $y''+y=0, \Rightarrow y_1=\cos x,\ \ y_2=\sin x,$

因为 $\dfrac{y_2}{y_1}=\tan x \neq$ 常数，所以，通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x.$

推论. 若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 n 阶齐次方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

的 n 个线性无关解, 则方程的通解为

$$y=C_1y_1+\cdots+C_ny_n \quad (C_k\text{为任意常数})$$

二、线性非齐次方程解的结构

定理 3. 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ ①

的一个特解, $Y(x)$ 是相应齐次方程的通解, 则

$$y=Y(x)+y^*(x) \quad ②$$

是非齐次方程的通解 .

证: 将 $y=Y(x)+y^*(x)$ 代入方程①左端, 得

$$(Y''+\underline{y^{*\prime\prime}})+P(x)(Y'+\underline{y^{*\prime}})+Q(x)(Y+\underline{y^*})$$

$$=(y^{*\prime\prime}+P(x)y^{*\prime}+Q(x)y^*)+(Y''+P(x)Y'+Q(x)Y)=f(x)+0=f(x)$$

故 $y=Y(x)+y^*(x)$ 是非齐次方程的解, 又 Y 中含有两个独立任意常数,

因而 ② 也是通解 .

证毕

例如， 方程 $y'' + y = x$ 有特解 $y^* = x$

对应齐次方程 $y'' + y = 0$ 有通解

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

因此该方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$$

复习：一阶线性方程解的结构

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

通解：

$$y = \underbrace{C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}Y} + \underbrace{\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解 } y^*}$$

此性质为一般线性非齐次方程通解的结构的共同性质.

定理 4. 给定 n 阶非齐次线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$$

设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是对应齐次方程的 **n** 个线性无关特解,

$y^*(x)$ 是非齐次方程的特解，则非齐次方程的通解为

$$y=\underline{C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)}+y^*(x)$$

$$=Y(x)+y^*(x)$$

齐次方程通解　　非齐次方程特解

定理 5. 设二阶线性非齐次方程的自由项 $f(x)$ 是几个函数之和，如

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

而 y_1^* 与 y_2^* 分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解，那么 $y_1^* + y_2^*$ 是原方程的特解.

解的叠加原理

定理 6. 设 $y_k^*(x)\ (k=1,2,,n)$ 分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_k(x)\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

的特解，则 $y=\sum_{k=1}^{n} y_k^*$ 是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

的特解. （非齐次方程之解的叠加原理）

例1. 设线性无关函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 是任意常数，则该方程的通解是（ D ）.

$\cancel{(A)}$ $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$;

$\cancel{(B)}$ $C_1y_1 + C_2y_2 + (C_1 + C_2)y_3$;

(C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 + C_1 + C_2)y_3$;

(D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$. （考研 ）

提示: (C) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) - y_3$

(D) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$

$y_1 - y_3, y_2 - y_3$ 都是对应齐次方程的解，二者线性无关．（反证法可证）

例2. 已知微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 有三个解 $y_1 = x,\ y_2 = \mathrm{e}^x,\ y_3 = \mathrm{e}^{2x}$，求此方程满足初始条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$ 的特解 .

解： $y_2 - y_1,\ y_3 - y_1$ 是对应齐次方程的解，且

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{\mathrm{e}^x - x}{\mathrm{e}^{2x} - x} \neq \text{常数}$$

因而线性无关，故原方程通解为

$$y = C_1(\mathrm{e}^x - x) + C_2(\mathrm{e}^{2x} - x) + x$$

代入初始条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$，得 $C_1 = -1,\ C_2 = 2$，

故所求特解为 $y = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x$.

例3. 已知 $y_1=3, y_2=3+x^2, y_3=3+x^2+\mathrm{e}^x$是微分方程

$$(x^2-2x)y''-(x^2-2)y'+(2x-2)y=6(x-1)$$

的解，求其对应的齐次方程的通解.

解:因为y_1，y_2，y_3 都是微分方程的解,

$\therefore y_3-y_2=\mathrm{e}^x, y_2-y_1=x^2$, 是对应齐次方程的解,

所求通解为 $y=C_1\left(y_3-y_2\right)+C_2\left(y_2-y_1\right)$

$$=C_1\mathrm{e}^x+C_2x^2.$$

三、小结

主要内容 线性方程解的结构；

线性相关与线性无关；

思考与练习

1.(16数一)设 $y_1=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}, y_2=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$

是$y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，则 $q(x)=$

解：根据解的叠加原理，说明$y_1-y_2=2\sqrt{1+x^2}$是一阶线性齐次

方程$y'+p(x)y=0$的解，解得$p(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$.

根据解的结构，说明$y=(1+x^2)^2$是一阶线性非齐次方程

$y'-\dfrac{x}{1+x^2}y=q(x)$的解，解得$q(x)=3x(1+x^2)$.