第七章　　向量代数与空间解析几何

平面解析几何通过坐标系将平面上的点与二元有序实数组之间建立了一一对应关系，从而使联系着两个变量的函数 $y = f(x)$ 有了直观的几何意义，使我们可以用代数和微积分的方法来研究平面中的某些几何问题．本章将要介绍的空间解析几何是利用坐标系建立空间中的点与三元有序实数组的对应关系，从而使我们能够通过代数方程来描述曲面与空间曲线，可以用代数和微积分的方法来研究曲面与空间曲线.

本章首先建立空间直角坐标系，然后介绍应用极为广泛的向量概念、向量的运算及其坐标表示，并以向量为工具讨论空间的平面与直线，最后介绍一些重要的曲面和空间曲线.

第一节　　空间直角坐标系

在空间中取定一点 O, 以 O 为公共原点作三条互相垂直且具有相同长度单位的数轴，依次记为 x 轴、y 轴和 z 轴．这就建立了一个 **空间直角坐标系**，记为 $Oxyz$．点 O 称为 **坐标原点**．x 轴、y 轴和 z 轴分别称为 **横轴**、**纵轴** 和 **竖轴**, 并把它们统称为 **坐标轴**．通常规定三个坐标轴的正向顺序符合右手规则，即若右手手掌贴近 z 轴，大拇指指向 z 轴正向，则当右手的其余四个手指从 x 轴正向出发握拳时只需旋转 $\frac{\pi}{2}$ 的角度便与 y 轴正向同向 (见图 7–1)．符合右手规则的空间直角坐标系称为 **右手系**．在本书中，如无特别说明，所使用的空间直角坐标系都是右手系.

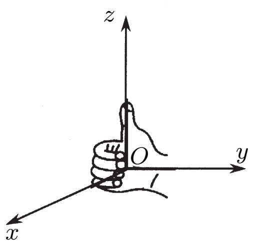

图 7–1

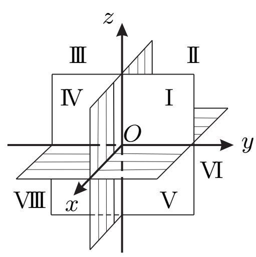

图 7–2

空间直角坐标系的三条坐标轴中任意两条确定一张平面，称其为 **坐标面**．由 x 轴和 y 轴确定的平面称为 **坐标面 $\boldsymbol{xOy}$**, 由 y 轴和 z 轴确定的平面称为 **坐标面$\boldsymbol{yOz}$**, 由 z 轴和 x 轴确定的平面称为 **坐标面$\boldsymbol{zOx}$**．三张坐标面把空间分割出了八个部分，每一个部分称为一个 **卦限**．图 7–2 中分别用 I, Ⅱ, $\cdots$, Ⅷ 表示第一卦限，第二卦限，$\cdots$, 第八卦限.

设 P 是空间中一点．过 P 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，它们与坐标轴交点依次为 A, B, C(见图 7–3)．设这三个交点在各自坐标轴上的坐标分别为 x, y 和 z．于是得到一个三元有序数组 (x, y, z)．这个有序数组由 P 点唯一确定．反之，对于任何一个三元有序数组 (x, y, z), 在三个坐标轴上分别找出坐标为 x, y 和 z 的三个点．过这三个点分别作垂直于坐标轴的平面，三张

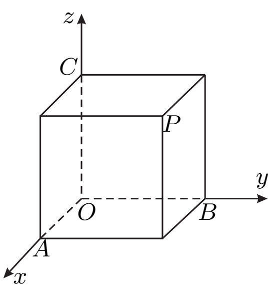

图 7–3

平面交于一点 P. 这个点 P 由数组 (x,y,z) 唯一确定. 按照这种方法可以建立空间中的点与三元有序数组之间的一一对应关系. 因此可以用三元有序数组表示点. 与点 P 对应的数组 (x,y,z) 称为点 P 的 **坐标**, 记为 $P(x,y,z)$, 数 x, y 和 z 分别称为点 P 的 **横坐标**、**纵坐标** 和 **竖坐标**.

显然, 原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$. x 轴、y 轴和 z 轴上点的坐标分别具有形式 $(x,0,0)$, $(0,y,0)$ 和 $(0,0,z)$. 坐标面 xOy 上点的坐标形如 $(x,y,0)$, 其中 (x,y) 是点在 xOy 坐标平面中的坐标. 同样, 坐标面 yOz 上点具有形如 $(0,y,z)$ 的坐标, 坐标面 zOx 上点具有形如 $(x,0,z)$ 的坐标. 各个卦限内的点的坐标符号如下表所示:

卦限	I	II	III	IV
坐标符号	$(+,+,+)$	$(-,+,+)$	$(-,-,+)$	$(+,-,+)$
卦限	V	VI	VII	VIII
坐标符号	$(+,+,-)$	$(-,+,-)$	$(-,-,-)$	$(+,-,-)$

给定两点 P 和 Q, 如果线段 PQ 垂直于坐标面 xOy 且被其所平分, 则称 P 和 Q **关于坐标面 xOy 对称**.

类似地可定义两点关于坐标面 yOz 对称及关于坐标面 zOx 对称.

若已知 P 点的坐标为 (x,y,z), 则 P 点关于坐标面 xOy 的对称点的坐标为 $(x,y,-z)$, P 点关于坐标面 yOz 的对称点的坐标为 $(-x,y,z)$, P 点关于坐标面 zOx 的对称点的坐标为 $(x,-y,z)$.

给定两点 P 和 Q, 如果线段 PQ 与 x 轴垂直相交且被 x 轴平分, 则称 P 和 Q **关于 x 轴对称**.

类似地可定义两点关于 y 轴对称和关于 z 轴对称.

点 $P(x,y,z)$ 关于 x 轴的对称点的坐标为 $(x,-y,-z)$, 关于 y 轴的对称点的坐标为 $(-x,y,-z)$, 关于 z 轴的对称点的坐标为 $(-x,-y,z)$.

如果线段 PQ 通过原点且被其所平分, 则称 P 与 Q **关于原点对称**. $P(x,y,z)$ 关于原点的对称点的坐标为 $(-x,-y,-z)$.

过点 P 作直线段垂直于坐标面 xOy, 则称垂足 P' 为 P**在坐标面 xOy 上的投影点**(见图 7–4). 若已知点 $P(x,y,z)$, 则 $P'(x,y,0)$. 类似地, 可定义 P 在坐标面 yOz 上的投影点和在坐标面 zOx 上的投影点, 并可由 P 的坐标确定其投影点的坐标.

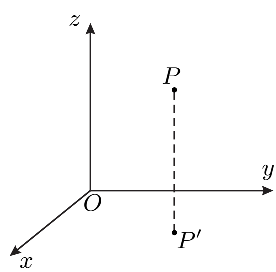

图 7–4

给定两点 $P(x_1,y_1,z_1)$ 和 $Q(x_2,y_2,z_2)$, 过 P 和 Q 分别作垂直于坐标轴的平面得一长方体, 如图 7–5 所示. 因为 A, B 和 C 的坐标分别为 $(x_1,y_1,0)$, $(x_2,y_2,0)$ 和 (x_2,y_2,z_1), 所以

$$PC = AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

于是

$$PQ = \sqrt{PC^2 + CQ^2}$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

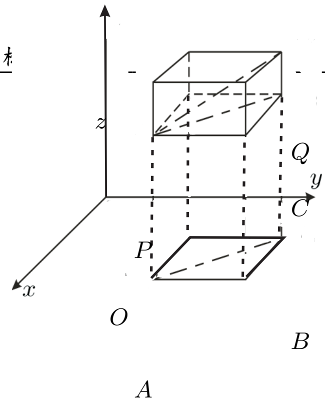

图 7–5

这是空间中两点间的距离公式. 特别地, 若 Q 为坐标原点, 则得到点 $P(x, y, z)$ 到原点的距离公式

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1 验证以原点 $O(0,0,0)$, 点 $A(1,-2,2)$ 和点 $B(3,-1,0)$ 为顶点的三角形为等腰三角形，但不是等边三角形.

解 由两点间距离公式得

$$OA = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3,$$
$$OB = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{10},$$
$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (-1+2)^2 + (0-2)^2} = 3.$$

从而 $OA \neq OB$, $OA = AB$, 三角形 AOB 为等腰三角形，但不是等边三角形.

例 2 已知两点 $A(-4,1,7)$ 与 $B(3,5,-2)$, 在 z 轴上求一点 P, 使 $AP = BP$.

解 因为点 P 在 z 轴上，所以它的坐标可写成 $(0,0,z)$ ，由两点间距离公式得

$$AP = \sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{66 - 14z + z^2},$$
$$BP = \sqrt{(0-3)^2 + (0-5)^2 + (z+2)^2} = \sqrt{38 + 4z + z^2}.$$

因 $AP = BP$, 故

$$\sqrt{66 - 14z + z^2} = \sqrt{38 + 4z + z^2}.$$

由此解得 $z = \dfrac{14}{9}$. 所求的点为 $P(0, 0, \dfrac{14}{9})$.

习　题　7 − 1

1. 在空间直角坐标系中指出下列各点所在的卦限：

$$A(3,-1,1),\quad B(-3,2,-1),\quad C(-3,-2,-1),$$
$$D(3,-2,-1),\quad E(-3,-2,1),\quad F(-3,2,1).$$

2. 指出下列各点在空间直角坐标系中所处的特殊位置：

$$A(0,1,-2),\quad B(0,0,-2),\quad C(1,-1,0),$$
$$D(3,0,-2),\quad E(3,0,0),\quad F(0,-2,0).$$

3. 求点 $P(3,-1,2)$ 关于原点、各坐标轴、各坐标面的对称点的坐标.
4. 求点 $P(4,-3,5)$ 到坐标原点、各坐标轴、各坐标面的距离.
5. 在 x 轴上求一点 P, 使它到点 $A(1,3,-4)$ 的距离为 5 .
6. 在坐标面 yOz 上求与三点 $A(3,1,2)$, $B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距的点.
7. 证明以 $A(4,1,9)$, $B(10,-1,6)$, $C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

第二节　向量及其线性运算

一　向量概念

客观世界中有这样一类量，它们既有大小又有方向，例如位移、速度、加速度和力等，这种既有大小又有方向的量称为 **向量** 或 **矢量** .

通常用黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 或用 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\cdots$ 表示向量. $\boldsymbol{a}$ 的大小称为 $\boldsymbol{a}$ 的 **模**, 记为 $|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量称为 **单位向量**. 模等于 0 的向量称为 **零向量**, 记为 $\mathbf{0}$. 零向量没有确定的方向，其方向也可看成是任意的.

在几何上用有向线段，即有方向的线段表示向量 (见图 7–6). 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点， B 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$.

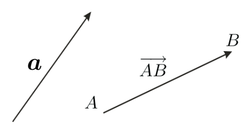

图 7–6

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **相等**, 记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 据此可知，大小相等且方向相同的向量，不论它们的起点是否相同都视为同一个向量. 这种只由大小和方向确定而与起点无关的向量称为 **自由向量**. 本书将只研究自由向量.

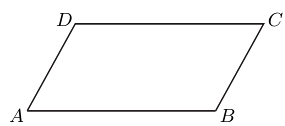

图 7–7

例如，在图 7–7 所示的平行四边形 $ABCD$ 中， $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反而模相等的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的 **负向量**, 记为 $-\boldsymbol{a}$. 在图 7–7 中，$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}$.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**, 并记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 例如，对于图 7–7 所给的平行四边形， $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{AD}$. 两个平行向量经过平行移动可使它们处于同一条直线上，而向量经平行移动后所得的向量与原来向量相等，所以两个向量平行也称为两个向量 **共线**.

二　向量的线性运算

1. 加法

将物理学中使用的力、速度等的合成法则加以抽象，我们给出向量加法的定义.

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是二非零向量，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行. 任取一点 A, 作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, 则以 AB 和 AD 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的对角线向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之 **和**, 记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图 7–8).

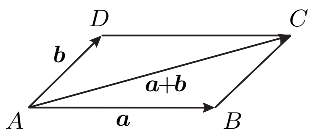

图 7–8

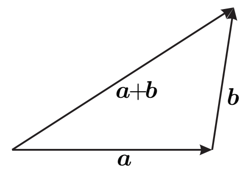

图 7–9

上述确定二向量之和的方法称为 **平行四边形法**.

在图 7–8 中，因为 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, 所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 因此， $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和又是将 $\boldsymbol{b}$ 的起点接到 $\boldsymbol{a}$ 的终点上，以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点、$\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 (见图 7–9). 这种求和的方法称为 **三角形法**.

如果二非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，则当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同时，规定 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是与它们同向且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 的向量；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反时，规定 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是与它们中模较大的同向且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$ 的向量.

对任意向量 $\boldsymbol{a}$, 规定 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$.

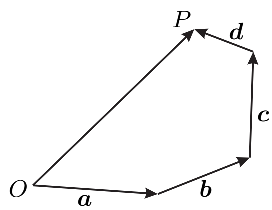

图 7–10

求两个向量之和的三角形法，可以推广到求多个向量之和. 若有三个或三个以上空间向量，则通过平移将第二个向量的起点接在第一个向量的终点上，将第三个向量的起点接在第二个向量的终点上，如此继续，将这些向量连接起来，然后由第一个向量的起点向最后一个向量的终点作向量，这个向量便是这些向量的和向量. 如图 7–10 所示，有

$$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}.$$

这种求多个向量之和的方法称为 **折线法**.

不难看出，向量加法满足如下的运算性质：

(1) 交换律： $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律： $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

2. 减法

给定向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 称 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之 **差**, 记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

给定两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 从点 O 作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 则由图 7–11 不难看出，以向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 为起点，向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 为终点的向量 $\overrightarrow{BA}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差.

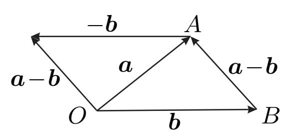

图 7–11

根据三角形两边之和大于第三边的原理，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|, \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中前一个不等式等号仅在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时成立，后一个不等式等号仅在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时成立.

3. 数乘向量

定义 7.1 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}\lambda$, 它的模为 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$, 它的方向是当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

数乘向量具有下列运算性质：

(1) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;

(2) $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$;

(3) 结合律： $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(4) 分配律： $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加法、减法及数乘向量的运算统称为向量的 **线性运算**.

若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，记为 $\boldsymbol{a}^0$. 由此得到 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$. 因此 $\boldsymbol{a}$ 可表示为它的模与其同向的单位向量之积.

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量, 若存在实数 λ 使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$, 则由数乘向量的定义知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反，此时向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行. 反之，若两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，则当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时有 $\boldsymbol{a}=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}$, 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时有 $\boldsymbol{a}=-\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}$, 因此必存在实数 λ 使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$. 综合以上讨论得到：

定理 7.1 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是存在实数 $\lambda\neq0$ 使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

三 向量的坐标

前面我们用有向线段表示向量，用几何方法给出向量的线性运算，这在实际应用上常常是很不方便的. 为了解决这一问题，我们将借助于空间直角坐标系，把向量用有序的实数组来表示，进而可以用代数的方法研究向量.

在空间直角坐标系中，起点与坐标原点 O 重合、终点位于点 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的 **向径** 或 **矢径** .

在空间直角坐标系中，点与其坐标 —- 三元有序实数组是一一对应的，从而向径与三元有序实数组也是一一对应的. 因此可用三元有序实数组表示向径. 若 P 点的坐标为 (x,y,z), 则称 (x,y,z) 为 **向径 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标**, 并记为

$$\overrightarrow{OP}=(x,y,z).$$

对于空间直角坐标系中的任意一个向量 $\boldsymbol{a}$, 如果将其平移使它的起点与坐标原点重合，此时终点 P 的坐标为 (x,y,z), 则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}$, 而 $\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$. 因此，数组 (x,y,z) 称为 **向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标**, 并记为

$$\boldsymbol{a}=(x,y,z),$$

向量的坐标是与其相等的向径的坐标.

根据向量坐标的定义知, 两个向量相等的充分必要条件是它们的坐标相等, 零向量的坐标为 $(0,0,0)$, 向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 的模为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示与 x 轴、y 轴、z 轴的正向同向的单位向量，并称其为 **基本单位向量**. 不难看出

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\quad \boldsymbol{j}=(0,1,0),\quad \boldsymbol{k}=(0,0,1).$$

给定向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$, 过点 (x,y,z) 作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的三个平面，与坐标轴分别交于点 $A(x,0,0)$, $B(0,y,0)$, $C(0,0,z)$(见图 7–12), 则

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}.$$

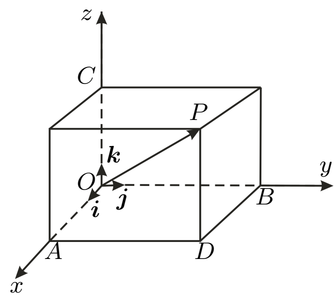

图 7–12

由多边形法则可知

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

于是 $\boldsymbol{a}$ 可借助于基本单位向量表示为

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

这称为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的 **分解式**.

应用上述分解式, 向量加法、减法和数乘向量的运算都可归结为向量坐标的相应运算. 事实上，我们有如下结论:

定理 7.2 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$, λ 为一常数，则

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2),\\&\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1).\end{aligned}$$

证 根据向量的运算性质

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\pm(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}\\&=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2).\\\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k}\\&=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1).\end{aligned}$$

□

例 1 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, 求 $|3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$.

解　因

$$
\begin{aligned}
3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b} &= 3(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k})-2(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\\
&= 6\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}-6\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}\\
&= -11\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k},
\end{aligned}
$$

故

$$|3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}| = \sqrt{(-11)^2+11^2} = 11\sqrt{2}.$$

定理 7.3　已知两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$, 则

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).$$

证　由图 7-13 易见

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}\\
&= (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1). \qquad \square
\end{aligned}
$$

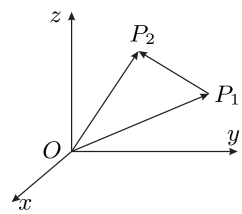

图 7–13

定理 7.4　非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ 与 $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ 平行的充分必要条件是 x_1,y_1,z_1 与 x_2,y_2,z_2 成比例.

证明　充分性. 据定理条件知，存在数 $\lambda\neq 0$, 使得

$$x_1=\lambda x_2,\quad y_1=\lambda y_2,\quad z_1=\lambda z_2.$$

于是

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}=\lambda(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})=\lambda\boldsymbol{b}.$$

因此 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行.

必要性. 因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，所以存在数 $\lambda\neq 0$ 使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$. 因此 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 即有

$$(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})-\lambda(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})=\boldsymbol{0}.$$

由此得到

$$(x_1-\lambda x_2)\boldsymbol{i}+(y_1-\lambda y_2)\boldsymbol{j}+(z_1-\lambda z_2)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.$$

于是得到

$$x_1=\lambda x_2,\quad y_1=\lambda y_2,\quad z_1=\lambda z_2. \qquad \square$$

四　向量的方向角与方向余弦

非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角 α,β,γ $(0\le\alpha,\beta,\gamma\le\pi)$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的 **方向角**, 并称 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的 **方向余弦**. 向量的方向角或方向余弦完全确定了向量的方向. 由图 7–14 不难看出

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

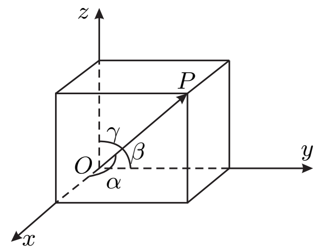

图 7–14

据此又得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

从而向量 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量.

例 2 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 因 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,1,-\sqrt{2})$, 故

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2,$$
$$\cos\alpha=\frac{-1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=\frac{-\sqrt{2}}{2},$$
$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

例 3 已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$, 求方向与 $\overrightarrow{AB}$ 一致的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$, 并用 $\boldsymbol{a}^0$ 表示 $\overrightarrow{AB}$.

解 因为 $\overrightarrow{AB}=(3,1,-2)$, 所以 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$. 于是

$$\boldsymbol{a}^0=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}\right),\quad \overrightarrow{AB}=\sqrt{14}\,\boldsymbol{a}^0 .$$

五 二向量间的夹角

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，在空间任意取定一点 O, 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$(见图 7–15), 则称角 $\theta=\angle AOB(0\le\theta\le\pi)$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的 **夹角**, 记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$.

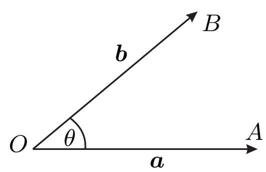

图 7–15

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi$. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时， $0<(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})<\pi$.

如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不都是非零向量，则规定它们的夹角为区间 $[0,\pi]$ 上任意的值.

若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$, 则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**, 并记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ, 而 $\boldsymbol{b}\ne\boldsymbol{0}$, 则称 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 为 **向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影**, 记为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$①, 即

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).\tag{1}$$

①Prj 是英文 projection(投影) 一词的缩写.

$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ 是一个实数，其绝对值如图 7–16 所示.

图 7–16

若 l 是带有方向的轴 (例如，数轴), 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 l 正向的夹角为 θ, 则称 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 为 **$\boldsymbol{a}$ 在 l 上的投影**, 记为 $\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}$. 事实上，过向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点和终点分别作垂直于轴 l 的平面，二平面在轴 l 上所截的线段的长便等于 $\boldsymbol{a}$ 在 l 上的投影的绝对值 (见图 7–17), 而投影数值的正负取决于 $\boldsymbol{a}$ 与 l 正向的夹角.

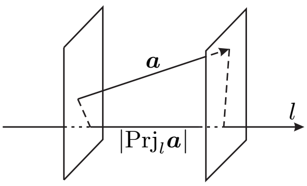

图 7–17

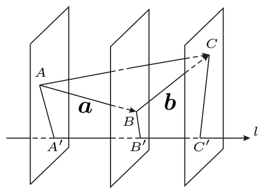

图 7–18

向量在轴上的投影具有下列性质：

性质 1　$\mathrm{Prj}_l(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}$;

性质 2　$\mathrm{Prj}_l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a} + \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{b}$.

利用式 (1) 立即得到性质 1, 由图 7–18 可看出性质 2 成立.

根据向量在轴上投影的定义，若已知向量 $\boldsymbol{a} = (x, y, z)$, 则 x, y, z 分别是 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影.

习　题　7－2

1. 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 均为非零向量，下列等式在什么条件下成立？

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;　　(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$;

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = \Big||\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|\Big|$;　　(4) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

2. 设 $\boldsymbol{a} = (1, -2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (4, -3, -1)$, $\boldsymbol{c} = (3, -2, 5)$, 求 $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$, $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.

3. 求 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ 的模、方向余弦及与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$.

4. 设 $\overrightarrow{AB} = 8\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}$, 其中 A 点的坐标为 $(2, -1, 7)$, 求 B 点的坐标.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ 与向量 $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$ 平行，求 m 与 n.

6. 已知两点 $A(2, 3, 5)$ 和 $B(3, 0, 4)$, 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模和方向余弦.

7. 已知向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴、y 轴正向夹角分别为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$, 且 $|\overrightarrow{OA}|=6$, 求点 A 的坐标.

8. 已知向量 $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, 求向量 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影.

第三节　向量的数量积与向量积

一　向量的数量积

根据物理学的知识，一个物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下产生位移 $\boldsymbol{s}$, 则力所作的功为

$$W=|\boldsymbol{F}|\,|\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角. W 是由两个向量确定的一个数量. 为了描述两个向量按照上式所确定的数量，在数学上引进了两个向量的数量积的概念.

定义 7.2　设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量， θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角，则称 $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的 **数量积**, 记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

向量的数量积也称为 **点积** 或 **内积**.

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$, 规定 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0,\quad \boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0.$

依据数量积的定义容易得到

定理 7.5　(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$;

(2) 当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$, 当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$;

(3) 对于空间直角坐标系中的三个基本单位向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, 有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0,\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

向量的数量积具有下列运算性质：

(1) 交换律： $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) 对数乘运算的结合律： $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，其中 λ 为实数;

(3) 分配律： $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

前两个运算性质可由定义直接得到. 容易看出，当 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 时第三个性质是成立的. 而当 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ 时，根据定理 7.5 及向量在轴上投影的性质 2, 有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c},\end{aligned}$$

第三个性质也成立.

定理 7.6 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$, 则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

证 利用数量积的运算性质及定理 7.5, 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1\boldsymbol{i})\cdot(x_2\boldsymbol{i})+(x_1\boldsymbol{i})\cdot(y_2\boldsymbol{j})+(x_1\boldsymbol{i})\cdot(z_2\boldsymbol{k})\\&\quad+(y_1\boldsymbol{j})\cdot(x_2\boldsymbol{i})+(y_1\boldsymbol{j})\cdot(y_2\boldsymbol{j})+(y_1\boldsymbol{j})\cdot(z_2\boldsymbol{k})\\&\quad+(z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i})+(z_1\boldsymbol{k})\cdot(y_2\boldsymbol{j})+(z_1\boldsymbol{k})\cdot(z_2\boldsymbol{k})\\&=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.\end{aligned}$$

□

根据数量积的定义和定理 7.6 可得

定理 7.7 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ 是两个非零向量，则

(1) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\iff\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\iff x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$;

(2) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$, $\boldsymbol{b}=(0,1,1)$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

解

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times0+0\times1+1\times1=1.$$

因

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2},\quad|\boldsymbol{b}|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2},$$

故

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

由此得到 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{3}$.

例 2 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=5$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{2}{3}\pi$. 问 λ 为何值时向量 $\lambda\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b}$ 与 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直.

解 因

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=2\times5\times\cos\frac{2}{3}\pi=-5,$$

故

$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})&=3\lambda|\boldsymbol{a}|^2+(51-\lambda)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-17|\boldsymbol{b}|^2\\&=12\lambda-5(51-\lambda)-425=17\lambda-680.\end{aligned}$$

令 $17\lambda-680=0$ 得 $\lambda=40$. 因此当 $\lambda=40$ 时向量 $\lambda\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b}$ 与 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的数量积等于零，从而两个向量垂直.

例 3 证明平行四边形两条对角线的平方和等于各边的平方和.

证 设平行四边形 $ABCD$ 如图 7–19 所示. 记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 由此得到

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AC}|^2&=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2,\\|\overrightarrow{DB}|^2&=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2.\end{aligned}$$

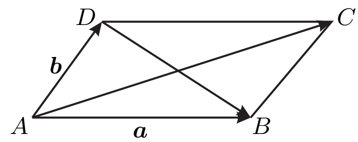

图 7–19

两式相加得

$$|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{DB}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2).$$

另一方面，我们有

$$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+|\overrightarrow{DA}|^2=2|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2.$$

于是有

$$|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{DB}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+|\overrightarrow{DA}|^2.$$

二 向量的向量积

在物理学中，力使物体产生转动的效果是用力矩概念来描述的.

设有一杠杆 L, 其一端 O 固定, 力 $\boldsymbol{F}$ 作用于杠杆上的 P 点处, 如图 7–20. 点 O 到力 $\boldsymbol{F}$ 的作用线 PQ 的距离 OQ 称为 **力臂**. 按照物理学的结论，用来描述力 $\boldsymbol{F}$ 使杠杆绕 O 点转动效果的物理量力矩的大小等于 $|\boldsymbol{F}|$ 与力臂 OQ 的乘积. 因为 $OQ=|\overrightarrow{OP}|\sin\theta$, 其中 θ 是向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 的夹角，所以

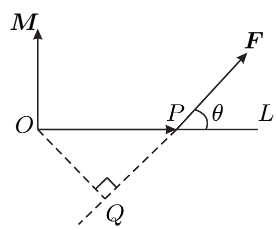

图 7–20

$$力矩的大小=|\overrightarrow{OP}|\ |\boldsymbol{F}|\sin\theta.$$

依赖于力 $\boldsymbol{F}$ 的方向，杠杆可能沿逆时针旋转，也可能沿顺时针旋转. 为了区分这两类不同的作用效果，人们将力矩规定为是一个向量，记为 $\boldsymbol{M}$. $\boldsymbol{M}$ 的大小为

$$|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OP}|\ |\boldsymbol{F}|\sin\theta.$$

$\boldsymbol{M}$ 的方向与 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 都垂直，且 $\overrightarrow{OP}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{M}$ 的顺序符合右手规则.

这种由两个已知向量确定另一个向量的方法在其它学科领域也有应用. 基于这些实际需要，在数学中引进向量的另一种乘法运算.

定义 7.3 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量， θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角，作一个向量 $\boldsymbol{c}$, 使之满足

(i) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta$;

(ii) $\boldsymbol{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的顺序符合右手规则.

则称 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的 **向量积** 或 **叉积**、**外积**, 记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$, 规定 $\boldsymbol{a}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $\mathbf{0}\times\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

向量积具有下列运算性质：

(1) 反交换律： $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律： $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$, 其中 λ 为实数;

(3) 分配律： $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

性质 (1) 和 (2) 可由定义直接得到；性质 (3) 的证明较复杂，略.

根据定义易知如下定理成立.

定理 7.8 (1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积;

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$.

定理 7.9 若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$, 则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

证

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=x_1y_2\boldsymbol{k}-x_1z_2\boldsymbol{j}-y_1x_2\boldsymbol{k}+y_1z_2\boldsymbol{i}+z_1x_2\boldsymbol{j}-z_1y_2\boldsymbol{i}\\&=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

□

根据向量积的定义可得以下结论：

定理 7.10 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，则

$$\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}\iff\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}.$$

例 4 求与 $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$ 和 $\boldsymbol{b}=(0,1,-2)$ 都垂直的单位向量.

解 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $(-1)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直的向量. 因

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&0\\0&1&-2\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}1&0\\1&-2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}1&0\\0&-2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\&=-2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

而

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=3,$$

故与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直的单位向量有 $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ 和 $\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

例 5 已知三角形三个顶点分别为 $A(1,2,3)$, $B(3,1,2)$, $C(2,1,3)$, 求三角形 ABC 的面积.

解 由定理 7.8 可知, 三角形 ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. 因 $\overrightarrow{AB}=(2,-1,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(1,-1,0)$, 故

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-1&-1\\1&-1&0\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&0\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}2&-1\\1&0\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}2&-1\\1&-1\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\&=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

于是

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

三 向量的混合积

给定三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 则称向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的数量积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的 **混合积**.

定理 7.11 若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)$, 则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}.$$

证 由定理 7.9 有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

再由定理 7.6 有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=x_3\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-y_3\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}.$$

利用行列式的性质得到

$$\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_3&y_3&z_3\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=x_3\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-y_3\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}.$$

于是有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}.$$

利用定理 7.11 和行列式的性质不难看出下面结论成立:

定理 7.12　对任意向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, 有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

定理 7.13　以向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体 (见图 7–21) 的体积等于 $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$.

证　以向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积 V 等于以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积 S 乘以高 h, 即

$$V=Sh.$$

根据定理 7.8 知 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$. 设 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 θ, 则

$$h=|\boldsymbol{c}|\,|\cos\theta|.$$

于是有

$$V=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\,|\cos\theta|=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|.\qquad\square$$

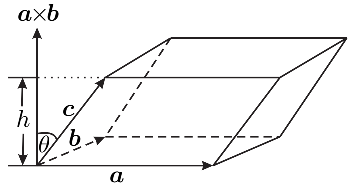

图 7–21

如果三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 可平移到同一张平面上，则称这三个向量 **共面**. 根据混合积的定义容易证明下面结论:

定理 7.14　向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$.

例 6　判断四点 $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$ 是否在同一个平面上.

解　只需判断向量 $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,6)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,0,2)$, $\overrightarrow{AD}=(1,-1,4)$ 是否共面. 因

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}&=\begin{vmatrix}-1&-1&6\\-2&0&2\\1&-1&4\end{vmatrix}\\&=-1\begin{vmatrix}0&2\\-1&4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2&2\\1&4\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}-2&0\\1&-1\end{vmatrix}\\&=-2-10+12\\&=0,\end{aligned}$$

故向量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ 共面，从而点 A,B,C,D 在同一个平面上.

习　题　7－3

1. 下列结论是否成立，为什么？

(1) 如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 那么 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$;

(2) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$;

(3) 如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 那么 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$;

(4) 如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 那么 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$.

2. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, 求

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$; (2) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

(3) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$; (4) $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

3. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $|\boldsymbol{c}|=3$, 且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

4. 求与 $\boldsymbol{a}=(1,-3,1)$, $\boldsymbol{b}=(2,-1,3)$ 都垂直的单位向量.

5. 已知三点 $A(1,2,3)$, $B(2,2,1)$, $C(1,1,0)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

6. 设 $\boldsymbol{a}=(12,9,-5)$, $\boldsymbol{b}=(4,3,-5)$, 求 λ 使 $\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$.

7. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1,3)$, $\boldsymbol{c}=(1,-2,0)$, 求

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$; (2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$;

(3) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$; (4) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$.

8. 在空间直角坐标系中，下列各向量组是否共面？若不共面，求以它们为棱的平行六面体的体积.

(1) $\boldsymbol{a}=(-1,3,2)$, $\boldsymbol{b}=(4,-6,2)$, $\boldsymbol{c}=(-3,12,11)$;

(2) $\boldsymbol{a}=(2,-4,3)$, $\boldsymbol{b}=(-1,-2,2)$, $\boldsymbol{c}=(3,0,-1)$.

9. 设 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, 其中 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta=\frac{\pi}{3}$, 求

(1) 向量 $\boldsymbol{c}$ 在向量 $\boldsymbol{d}$ 上的投影; (2) 以 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 为邻边的平行四边形的面积.

10. 应用向量运算证明：对任意实数 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3, 施瓦兹 (Schwarz) 不等式

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$$

成立，并指出其中等号成立的条件.

11. 证明 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$.

12. 已知 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$, 求 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$.

13. 化简下列各式：

(1) $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;

(2) $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})]$.

第四节 平面的方程

一 空间曲面与方程的概念

在平面解析几何中，我们把平面曲线看作平面上点的集合或动点的运动轨迹，用方程表示曲线，通过方程研究曲线. 类似地，在空间解析几何中，任何曲面都可以看作空间中点的集合或动点的运动轨迹. 在这种意义下，如果曲面 S 与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 有下述关系：

(1) 曲面 S 上任一点的坐标 (x,y,z) 都满足方程 $F(x,y,z)=0$,

(2) 坐标满足方程 $F(x,y,z)=0$ 的点 (x,y,z) 都在曲面 S 上,

则称方程 $F(x,y,z)=0$ 是曲面 S 的 **方程**, 而曲面 S 称为方程 $F(x,y,z)=0$ 的 **图形**.

类似地，也可给出空间曲线与方程的概念.

例 1 设有两个定点 $A(-1,0,4)$ 和 $B(1,2,-1)$, 求与 A 和 B 等距离的点的轨迹.

解 设动点 M 的坐标为 (x,y,z). 因为 $AM=BM$, 所以

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2+(z-4)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2}.$$

由此得到

$$(x+1)^2+y^2+(z-4)^2=(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2.$$

化简得

$$4x+4y-10z+11=0.$$

这就是所求的轨迹．由其几何意义知，它是一个平面.

例 2 求以定点 $P(a,b,c)$ 为心、R 为半径的球面的方程.

解 点 $M(x,y,z)$ 在球面上的充分必要条件是 $MP=R$, 即有

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \tag{1}$$

这就是所求的球面方程.

以原点为心、R 为半径的球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

一般地，无交叉项 xy,yz,zx, 而平方项 x^2,y^2,z^2 的系数相同的三元二次方程

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0,$$

只要将其配方可化为方程 (1) 的形式，则它的图形就是一个球面.

二 平面的点法式方程

若非零向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直于平面 Π, 则称 $\boldsymbol{n}$ 为 Π 的 **法向量**.

给定空间中一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和一个非零向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$, 则过点 M_0 且以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量的平面 Π 在空间中的位置就完全被确定了. 下面来建立这个平面的方程.

设 $M(x,y,z)$ 是平面 Π 上任意一点 (见图 7–22), 则向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 垂直于 $\boldsymbol{n}$. 因此 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$. 由此得到

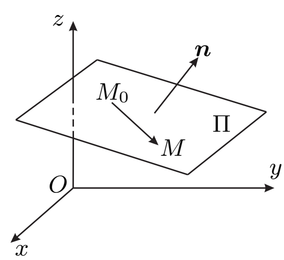

图 7–22

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{2}$$

由 M 点的任意性知, 平面 Π 上的点都满足方程 (2). 反之, 若空间中的点 M 的坐标 (x,y,z) 满足方程 (2), 则有 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$, 由此可知 M 点必在平面 Π 上．于是，方程 (2) 是平面 Π 的方程.

因方程 (2) 是由平面上的一个点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和平面的法向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 所确定的，所以称其为平面的 **点法式方程**.

例 3 求过点 $M_0(0, 1, 1)$ 且通过 x 轴的平面方程.

解 因为向量 $\overrightarrow{OM_0}$ 和基本单位向量 $\boldsymbol{i}$ 都与所求平面平行，所以向量

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{OM_0} \times \boldsymbol{i} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

是所求平面的法向量. 因此平面方程为

$$(y-1) - (z-1) = 0,$$

即

$$y - z = 0.$$

三 平面的一般式方程

由平面的点法式方程 (2) 得到

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3}$$

其中 $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. 因 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 是非零向量，所以此处 A, B, C 不全为零，方程 (3) 是 x, y, z 的一次方程.

任何平面都可用其上一点和它的一个法向量建立其点法式方程，因此任何平面的方程都可表示为形如 (3) 式的 x, y, z 的一次方程. 反之， x, y, z 的一次方程 (3) 的图形必是一个以 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 为法向量的平面. 事实上，设 x_0, y_0, z_0 是方程 (3) 的一组解，则有

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

由此得到

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

代入方程 (3) 得到同解方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

这个方程的图形是以 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 为法向量且过点 (x_0, y_0, z_0) 的平面. 因此方程 (3) 的图形是以 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 为法向量的平面. 方程 (3) 称为平面的 **一般式方程**.

例 4 求过点 $(2, 1, 1)$ 且垂直于平面 $3x - 2y + z - 4 = 0$ 和 $2x + 3y - 4z + 5 = 0$ 的平面方程.

解 因所求平面垂直于平面 $3x - 2y + z - 4 = 0$ 和 $2x + 3y - 4z + 5 = 0$, 故其法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直于此二平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1 = (3, -2, 1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2 = (2, 3, -4)$. 因此可取

$$\boldsymbol{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 5\boldsymbol{i} + 14\boldsymbol{j} + 13\boldsymbol{k}.$$

从而所求平面的方程为

$$5(x-2)+14(y-1)+13(z-1)=0,$$

即

$$5x+14y+13z-37=0.$$

例 5　一平面与三个坐标轴的交点分别为 $P_1(a,0,0)$, $P_2(0,b,0)$, $P_3(0,0,c)$, 其中 a,b,c 都不为零，求此平面的方程.

解　设所求平面的方程为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

因点 P_1, P_2, P_3 在平面上，故其坐标满足方程. 从而有

$$\begin{cases} aA+D=0, \\ bB+D=0, \\ cC+D=0. \end{cases}$$

因 a,b,c 都不为零，故 $D\neq 0$, 且由此方程组得 $A=-\dfrac{D}{a}$, $B=-\dfrac{D}{b}$,$C=-\dfrac{D}{c}$, 所求方程为

$$-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0.$$

化简得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{4}$$

方程 (4) 称为平面的 **截距式方程**, a,b,c 分别称为平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距.

例 6　求平面 $3x+y-2z-6=0$ 在三个坐标轴上的截距.

解　将方程化为截距式得

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{6}+\frac{z}{-3}=1.$$

因此，平面在 x 轴、y 轴和 z 轴上的截距分别为 2、6 和 -3.

在方程 (3) 中，当系数 A,B,C 和常数 D 中有一个或几个是零时，方程 (3) 所表示的将是具有某种特殊位置的平面.

当 $D=0$ 时，方程 (3) 为 $Ax+By+Cz=0$. 它是通过坐标原点的平面.

当 $A=0$ 时，方程 (3) 为 $By+Cz+D=0$. 平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(0,B,C)$ 垂直于 x 轴，因此平面平行于 x 轴, 垂直于 yOz 坐标面, 且平面与 yOz 坐标面的交线是坐标平面 yOz 中的直线 $By+Cz+D=0$. 例如，平面 $2y+3z-6=0$ 的图形如图 7–23 所示.

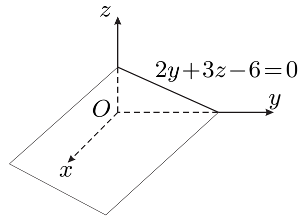

图 7−23

类似地, 当 $B=0$ 时, 方程 (3) 为 $Ax+Cz+D=0$, 平面平行于 y 轴，垂直于 zOx 坐标面，且平面与 zOx 坐标面的交线是坐标平面 zOx

中的直线 $Ax+Cz+D=0$. 当 $C=0$ 时，方程 (3) 为 $Ax+By+D=0$, 平面平行于 z 轴，垂直于 xOy 坐标面，且平面与 xOy 坐标面的交线是坐标平面 xOy 中的直线 $Ax+By+D=0$.

当 $A=B=0$ 时，方程 (3) 为 $Cz+D=0$. 平面的法向量 $\boldsymbol{n}=C\boldsymbol{k}$ 平行于 z 轴，因此平面垂直于 z 轴，且交 z 轴于点 $(0,0,-\dfrac{D}{C})$. 类似地，平面 $By+D=0$ 垂直于 y 轴，且交 y 轴于点 $(0,-\dfrac{D}{B},0)$. 平面 $Ax+D=0$ 垂直于 x 轴，且交 x 轴于点 $(-\dfrac{D}{A},0,0)$. 特别地，方程 $x=0,y=0,z=0$ 的图形分别是坐标面 yOz,zOx,xOy. 图 7–24 给出了方程 $y=3$ 的图形.

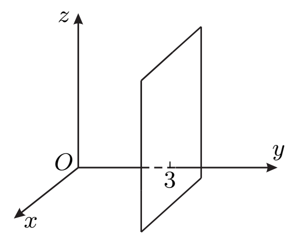

图 7–24

例 7 已知平面过点 $P_1(0,2,0)$ 和 $P_2(0,0,1)$, 且与 x 轴平行，求此平面的方程.

解法 1 设所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$. 依题意 $\boldsymbol{n}$ 垂直于向量 $\overrightarrow{P_1P_2}=(0,-2,1)$ 和 $\boldsymbol{i}$, 因此可取

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\boldsymbol{i}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}.$$

又平面过 $P_1(0,2,0)$, 故所求平面的方程为

$$(y-2)+2z=0,$$

即

$$y+2z-2=0.$$

解法 2 因平面平行于 x 轴，故可设平面方程为

$$By+Cz+D=0.$$

将点 $P_1(0,2,0)$ 和 $P_2(0,0,1)$ 代入此方程，得

$$\begin{cases}2B+D=0,\\ C+D=0.\end{cases}$$

解得 $B=-\dfrac{D}{2}$, $C=-D$. 代入所设方程得

$$-\frac{D}{2}y-Dz+D=0.$$

因 B 和 C 不能同时为零，故 $D\neq 0$, 方程化简为

$$y+2z-2=0.$$

四 两平面的夹角

设平面 Π_1 和 Π_2 的方程分别为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

和

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

则它们的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$. 若平面 Π_1 平行于 Π_2, 则规定 Π_1 与 Π_2 的夹角 $\theta=0$, 否则规定 Π_1 与 Π_2 的夹角 θ 为 Π_1 与 Π_2 之间所夹二面角中较小者. 于是 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 且

$$\theta=\begin{cases}(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2}), & 0\le(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})\le\dfrac{\pi}{2},\\ \pi-(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2}), & \dfrac{\pi}{2}<(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})\le\pi.\end{cases}$$

由此得到

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}};$$

平面 Π_1 与 Π_2 相互垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$, 亦即 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$; 平面 Π_1 与 Π_2 相互平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2$, 亦即 A_1,B_1,C_1 与 A_2,B_2,C_2 成比例.

例 8 求平面 $x-y+5=0$ 与 $x-2y+2z-3=0$ 的夹角 θ.

解 两平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,0)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(1,-2,2)$, 从而

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|1\times1+(-1)\times(-2)+0\times2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由此得到 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

五 点到平面的距离

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面

$$\Pi:\quad Ax+By+Cz+D=0$$

外的一点. 现求点 M_0 到平面 Π 的距离 d.

在 Π 上任取一点 $M(x,y,z)$. 设向量 $\overrightarrow{MM_0}$ 与平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 的夹角为 θ(见图 7–25), 则

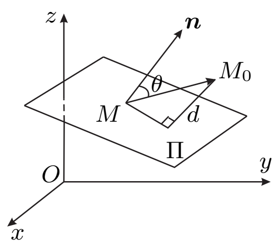

图 7–25

$$\begin{aligned}d&=\left|\,|\overrightarrow{MM_0}|\cos\theta\right|=\frac{|\overrightarrow{MM_0}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}\\&=\frac{|A(x_0-x)+B(y_0-y)+C(z_0-z)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\&=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax+By+Cz)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\end{aligned}$$

因点 $M(x,y,z)$ 在平面上，故 x,y,z 满足平面方程，从而有

$$Ax+By+Cz=-D.$$

于是得到

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

例 9 求二平行平面 $3x+6y-2z-7=0$ 与 $3x+6y-2z+14=0$ 之间的距离.

解 不难看出 $M_0(0,0,7)$ 是平面 $3x+6y-2z+14=0$ 上的一个点．点 M_0 到平面 $3x+6y-2z-7=0$ 的距离为

$$d=\frac{|-14-7|}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}}=3.$$

此即为二平面之间的距离.

习 题 7－4

1. 求通过点 $(2,3,-1)$ 且以向量 $(1,-2,5)$ 为法向量的平面方程.

2. 求满足以下条件的平面方程:

(1) 过点 $(0,1,-1)$, $(1,-1,2)$, $(2,-1,3)$;

(2) 过点 $(2,6,-1)$ 且平行于平面 $3x-2y+z-2=0$;

(3) 过点 $(-1,2,1)$ 且与两平面 $x-y+z-1=0$ 和 $2x+y+z+1=0$ 垂直;

(4) 过点 $(2,3,-5)$ 且平行于 zOx 坐标面;

(5) 过点 $(1,-5,1)$ 和 $(3,2,-2)$ 且平行于 y 轴;

(6) 过 x 轴，并且点 $(5,4,1)$ 到该平面的距离为 1.

3. 求两平行平面 $2x-y+2z+9=0$ 与 $4x-2y+4z-21=0$ 之间的距离.

4. 求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y-3z-10=0$ 的距离.

5. 求平面 $x-y-z+5=0$ 与平面 $2x-2y-z-1=0$ 之间夹角的余弦.

6. 求两平面 $2x-y+z-7=0$ 与 $x+y+2z-11=0$ 之间的夹角.

7. 求过 z 轴且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ 成 $\frac{\pi}{3}$ 角的平面方程.

第五节 空间直线的方程

一 空间直线的一般方程

在空间中不平行的两个平面

$$\Pi_1:\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

与

$$\Pi_2: \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

的交线是一条直线 L. 显然，直线 L 上的点都满足方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \tag{1}$$

而满足此方程组的点也都在交线 L 上. 因此这个方程组就是直线 L 的方程. 这种形式的直线方程称为直线的 **一般方程**.

如果非零向量 $\boldsymbol{s}$ 平行于直线 L, 则称 $\boldsymbol{s}$ 为直线 L 的 **方向向量**. 直线的方向向量决定了直线的走向.

若直线 L 由方程组 (1) 给出， $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 Π_1 和 Π_2 的法向量, 则 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 都垂直于直线 L. 因此，与 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$ 平行的任何一个非零向量都是 L 的方向向量.

例 1　求直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x-y+3z+4=0, \end{cases}$$

的方向向量.

解　因为确定直线的两个平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(2,-1,3)$, 所以向量

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$$

是直线的方向向量.

二　空间直线的参数方程与点向式方程

若已知空间中一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和一个非零向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$, 则过点 M_0 而以 $\boldsymbol{s}$ 为方向向量的直线 L 就有了完全确定的位置. 下面来建立直线 L 的方程.

设 $M(x,y,z)$ 为直线 L 上任意一点，则向量 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ 平行于向量 $\boldsymbol{s}$, 从而存在实数 t 使得 $\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{s}$, 即有

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases} \tag{2}$$

反之，对任意实数 t, 由式 (2) 所确定的点 $M(x,y,z)$ 满足 $\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{s}$, 从而在直线 L 上. 因此方程 (2) 是直线 L 的方程. 形如 (2) 的直线方程称为直线的 **参数方程**, t 称为 **参数**.

如果 m,n,p 都不为零，则由向量 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ 平行于向量 $\boldsymbol{s}$ 得到

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{3}$$

直线 L 上的点都满足方程 (3). 不难验证, 满足方程 (3) 的点都在直线 L 上. 因此方程 (3) 是直线 L 的方程. 形如 (3) 的直线方程称为直线的 **点向式方程** 或 **对称式方程**. 方程 (3) 也可由方程 (2) 中消去参数 t 得到.

实际上. 直线的点向式方程是一个方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}, \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}, \end{cases}$$

它可看成是两个平面 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$ 与 $\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 的交线. 点向式方程是特殊形式的一般方程.

如果 m, n, p 中有一个等于零, 例如 $p=0$, 则由方程 (2) 消去 t 得到直线 L 的一般方程

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}, \\ z-z_0=0. \end{cases}$$

有时也把这个一般方程形式地写成点向式方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{0}.$$

如果 m, n, p 中有两个等于零, 例如 $m=n=0$, 则由方程 (2) 得到直线 L 的一般方程

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ y-y_0=0. \end{cases}$$

这个一般方程有时也形式地写成点向式方程

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{p}.$$

例 2　求过空间中两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线的点向式方程和参数方程.

解　因直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},$$

所以, 直线的点向式方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

参数方程为

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t, \\ y=y_1+(y_2-y_1)t, \\ z=z_1+(z_2-z_1)t. \end{cases}$$

例 3　求直线

$$\begin{cases} x+2y+3z-6=0, \\ 2x+3y-4z-1=0, \end{cases}$$

的点向式方程.

解　令 $z=0$, 代入方程组得

$$\begin{cases} x+2y-6=0, \\ 2x+3y-1=0. \end{cases}$$

解此方程组得 $x=-16, y=11$. 因此直线过点 $(-16,11,0)$. 直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}=-17\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

于是直线的点向式方程为

$$\frac{x+16}{-17}=\frac{y-11}{10}=\frac{z}{-1}.$$

例 4　求通过点 $A(3,0,-1)$ 且平行于已知直线

$$\begin{cases} x+2z-4=0, \\ y+3z-5=0, \end{cases}$$

的直线方程.

解　已知直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_0=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

取 $\boldsymbol{s}=-\boldsymbol{s}_0$ 为所求直线的方向向量，于是所求直线的方程为

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}.$$

例 5　求点 $M(x,y,z)$ 到直线 $L: \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 的距离 d.

解　记 L 上的点 (x_0,y_0,z_0) 为 M_0, L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$. 则 $|\boldsymbol{s}\times\overrightarrow{M_0M}|$ 是以 $\boldsymbol{s}$ 和 $\overrightarrow{M_0M}$ 为邻边的平行四边形的面积. 而由图 7–26 知，这个平行四边形的面积又等于 $|\boldsymbol{s}|d$. 于是有

$$|\boldsymbol{s}|d=|\boldsymbol{s}\times\overrightarrow{M_0M}|.$$

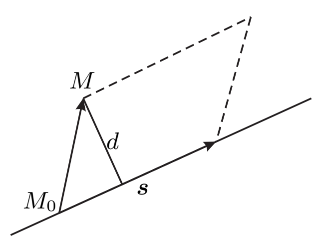

图 7–26

由此得到

$$d=\frac{|\boldsymbol{s}\times\overrightarrow{M_0M}|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

例 5 的结果是点到直线的距离公式.

三　两直线的位置关系

设直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ 和 $\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$. 规定直线 L_1 与 L_2 之间的夹角 φ 为向量 $\boldsymbol{s}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_2$ 的夹角与其补角中的最小者，即

$$\varphi=\begin{cases}(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2}), & 0\le(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})\le\dfrac{\pi}{2},\\ \pi-(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2}), & \dfrac{\pi}{2}<(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})\le\pi.\end{cases}$$

如果 L_1 和 L_2 平行，则它们之间的夹角为零. 如果 L_1 和 L_2 不平行，则它们之间的夹角等于把它们平移到一个平面上两条相交直线之间所夹的较小的角.

根据上述对直线 L_1 与 L_2 之间的夹角的规定，有

$$\cos\varphi=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1|\,|\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}};$$

L_1 与 L_2 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2$, 即 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$; L_1 与 L_2 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{s}_1 /\!/ \boldsymbol{s}_2$, 即 m_1,n_1,p_1 与 m_2,n_2,p_2 成比例.

例 6　求直线 L_1： $x-1=\dfrac{y-2}{-4}=z-1$ 与 L_2： $\begin{cases}x+y+2=0,\\ y-2z+2=0\end{cases}$ 的夹角.

解　直线 L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(1,-4,1)$, 直线 L_2 的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

于是两直线之间夹角的余弦为

$$\cos\varphi=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1|\,|\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|1\times(-2)+(-4)\times2+1\times1|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由此得到两直线之间夹角 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

例 7　求使直线 L_1： $x-1=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$ 与 L_2： $x+1=y-1=z$ 共面的 λ 值.

解　直线 L_1 过点 $P_1(1,-1,1)$, 方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(1,2,\lambda)$. 直线 L_2 过点 $P_2(-1,1,0)$, 方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=(1,1,1)$. 直线 L_1 与 L_2 共面当且仅当向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$ 共面. 由

$$(\overrightarrow{P_1P_2}\times\boldsymbol{s}_1)\cdot\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}-2 & 2 & -1\\ 1 & 2 & \lambda\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=4\lambda-5$$

及定理 7.14 知，当 $\lambda=\dfrac{5}{4}$ 时向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$ 共面. 因此当 $\lambda=\dfrac{5}{4}$ 时直线 L_1 与 L_2 共面.

四　直线与平面的位置关系

设有直线

$$L: \quad \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

和平面

$$\Pi: \quad Ax+By+Cz+D=0.$$

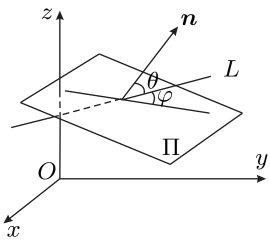

图 7–27

当 L 与 Π 不垂直时，规定 L 与 Π 的夹角 φ 是 L 与其在 Π 上的投影直线① 的夹角 (见图 7–27). 当 L 与 Π 垂直时，规定 L 与 Π 的夹角 $\varphi=\frac{\pi}{2}$. 于是，若记 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}$, Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}$, 则

$$\sin\varphi=|\cos\langle\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}|\,|\boldsymbol{n}|}=\frac{|mA+nB+pC|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

直线 L 与平面 Π 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{s}\,/\!/\,\boldsymbol{n}$, 亦即 m,n,p 与 A,B,C 成比例；直线 L 与平面 Π 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$, 亦即 $mA+nB+pC=0$.

例 8　求直线 $L:\ x-2=y-3=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $\Pi:\ 2x-y+z-8=0$ 的交点与夹角.

解　解直线方程与平面方程组成的方程组便可求得交点. 为了简便，我们解直线的参数方程与平面方程组成的方程组. 将直线 L 的参数方程

$$\begin{cases} x=2+t, \\ y=3+t, \\ z=4+2t \end{cases}$$

代入平面 Π 的方程得

$$2(2+t)-(3+t)+(4+2t)-8=0.$$

由此得到 $t=1$. 将 $t=1$ 代入直线的参数方程得到直线 L 与平面 Π 的交点为 $(3,4,6)$. 直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=(1,1,2)$, 平面 Π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(2,-1,1)$. 于是，直线 L 与平面 Π 的夹角 φ 的正弦为

$$\sin\varphi=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}|\,|\boldsymbol{n}|}=\frac{|1\times2+1\times(-1)+2\times1|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{1}{2}.$$

由此得到直线 L 与平面 Π 的夹角 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

例 9　求通过点 $M(-1,-\frac{3}{2},4)$ 且平行于平面

$$\Pi: \quad 3x-4y+z-10=0$$

① 过直线 L 且垂直于平面 Π 的平面与平面 Π 的交线称为直线 L 在平面 Π 上的 **投影直线**, 简称 **投影**.

又与直线

$$L_0:\ \frac{x+1}{3}=\frac{2y-3}{2}=\frac{z}{2}$$

相交的直线 L 的方程.

解　平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(3,-4,1)$, 直线 L_0 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_0=(3,1,2)$, L_0 过点 $M_0(-1,\frac{3}{2},0)$. 用 $\boldsymbol{s}$ 表示直线 L 的方向向量，则向量 $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}_0$, $\overrightarrow{M_0M}$ 共面. 因此 $\boldsymbol{s}$ 垂直于向量

$$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{s}_0\times\overrightarrow{M_0M}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & 1 & 2\\ 0 & -3 & 4\end{vmatrix}=10\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k}.$$

又因为 L 平行于平面 Π, 所以 $\boldsymbol{s}$ 又垂直于向量 $\boldsymbol{n}$. 于是可取

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 10 & -12 & -9\\ 3 & -4 & 1\end{vmatrix}=-48\boldsymbol{i}-37\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}.$$

因此 L 的方程为

$$\frac{x+1}{48}=\frac{y+\frac{3}{2}}{37}=\frac{z-4}{4}.$$

五　平面束

通过一条给定直线的所有平面的全体称为通过该直线的 **平面束**.

设直线 L 的方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

其中系数 A_1,B_1,C_1 与 A_2,B_2,C_2 不成比例.

现考虑一次方程

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \tag{4}$$

即

$$(\lambda A_1+\mu A_2)x+(\lambda B_1+\mu B_2)y+(\lambda C_1+\mu C_2)z+(\lambda D_1+\mu D_2)=0,$$

其中 λ 和 μ 为不同时为零的实数.

对任何不同时为零的实数 λ 和 μ, 因为 A_1,B_1,C_1 与 A_2,B_2,C_2 不成比例，所以方程 (4) 的系数 $\lambda A_1+\mu A_2$, $\lambda B_1+\mu B_2$, $\lambda C_1+\mu C_2$ 不全为零，从而方程 (4) 的图形是一个平面. 显然直线 L 上的点满足方程 (4), 所以方程 (4) 是通过直线 L 的平面. 可以证明通过直线 L 的任何平面都可表示成方程 (4) 的形式. 因此方程 (4) 为通过 L 的 **平面束的方程**.

对于某些与直线或平面有关的问题，有时借助于平面束会给问题的求解带来方便.

例 10　求通过直线

$$L:\ \begin{cases}x+y-z=0,\\ x-y+z=1\end{cases}$$

和点 $(1,1,-1)$ 的平面方程.

解　通过直线 L 的平面束为

$$\lambda(x+y-z)+\mu(x-y+z-1)=0.$$

代入点 $(1,1,-1)$ 得

$$3\lambda-2\mu=0.$$

于是可取 $\lambda=2,\ \mu=3$. 所求平面为

$$2(x+y-z)+3(x-y+z-1)=0,$$

即

$$5x-y+z-3=0.$$

例 11　求通过直线

$$L:\ \begin{cases} 2x+y-3z+2=0, \\ 5x+5y-4z+3=0 \end{cases}$$

的两个互相垂直的平面 Π_1 和 Π_2, 使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$.

解　通过直线 L 的平面束为

$$\lambda(2x+y-3z+2)+\mu(5x+5y-4z+3)=0,$$

即

$$(2\lambda+5\mu)x+(\lambda+5\mu)y+(-3\lambda-4\mu)z+(2\lambda+3\mu)=0.$$

代入点 $(4,-3,1)$ 得 $\lambda+\mu=0$. 于是可取 $\lambda=1,\ \mu=-1$. 设 Π_1 是通过直线 L 且过点 $(4,-3,1)$ 的平面，则 Π_1 的方程为

$$(2x+y-3z+2)+(-1)(5x+5y-4z+3)=0,$$

即

$$3x+4y-z+1=0.$$

因为另一个平面 Π_2 也在平面束中且与 Π_1 垂直，所以其所对应的 λ 和 μ 应满足

$$3(2\lambda+5\mu)+4(\lambda+5\mu)-(-3\lambda-4\mu)=0.$$

由此得到 $\lambda+3\mu=0$. 于是可取 $\lambda=3,\ \mu=-1$. 平面 Π_2 的方程为

$$3(2x+y-3z+2)-(5x+5y-4z+3)=0,$$

即

$$x-2y-5z+3=0.$$

习 题 7 – 5

1. 求满足以下条件的各直线方程:

(1) 过点 $(3,2,-1)$ 和 $(-2,3,5)$;

(2) 过点 $(0,-3,2)$ 且平行于平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$;

(3) 过点 $(2,-3,1)$ 且垂直于平面 $2x+3y-z-1=0$.

2. 求点 $A(2,3,-1)$ 到直线 $\dfrac{x-1}{2}=y+5=\dfrac{z+15}{-2}$ 的距离.

3. 求直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{-6}$ 与直线 $\begin{cases} x=2t, \\ y=3+3t, \\ z=-6+t \end{cases}$ 之间夹角的余弦.

4. 求直线 $\begin{cases} x=3+2t, \\ y=1+t, \\ z=5-t \end{cases}$ 与平面 $3x+6y+3z-1=0$ 的夹角.

5. 求过直线 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$ 且垂直于平面 $x+4y-3z+7=0$ 的平面方程.

6. 求点 $P(-1,2,0)$ 在平面 $\Pi: x+y+3z+5=0$ 上的投影点 (即由点 P 向平面 Π 作垂线的垂足) 的坐标.

7. 求点 $P(1,-4,5)$ 在直线 $L: \begin{cases} y-z+1=0, \\ x+2z=0 \end{cases}$ 上的投影点 (即由点 P 向直线 L 作垂线的垂足) 的坐标.

8. 求直线 $\begin{cases} x=z+2, \\ y=2z-4 \end{cases}$ 在平面 $x+y-z=0$ 上的投影直线的方程.

9. 求过点 $M(2,1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

10. 求两异面直线 $\begin{cases} x=1+t, \\ y=1+6t, \\ z=2t \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x=1+2s, \\ y=5+15s, \\ z=-2+6s \end{cases}$ 之间的距离.

11. 一平面通过平面 $x+5y+z=0$ 和 $x-z+4=0$ 的交线, 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 成 45° 角, 求此平面的方程.

12. 求过直线 $L: \begin{cases} x+y-2z+10=0, \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=10$ 相切的平面方程.

第六节 常见曲面的方程

本节将介绍几种常见的曲面及其方程.

一 柱面

动直线 L 沿已知曲线 C 平行移动所形成的轨迹称为 **柱面**, 直线 L 称为柱面的 **母线**, 曲线 C 称为柱面的 **准线**.

下面讨论母线平行于坐标轴的柱面的方程.

设 C 是坐标面 xOy 上的曲线，其在坐标平面 xOy 中的方程为 $f(x,y)=0$，直线 L 平行于 z 轴. 现确定以 L 为母线、C 为准线的柱面的方程.

设 $M(x,y,z)$ 为柱面上任一点，则它在坐标面 xOy 上的投影是 $M'(x,y,0)$(见图 7–28). 因为 M' 在曲线 C 上，所以其坐标满足 C 的方程 $f(x,y)=0$. 这也可看作点 M 的坐标所满足的方程. 反之，若空间中一点 $M(x,y,z)$ 满足方程 $f(x,y)=0$，则它在过点 $M'(x,y,0)$ 且垂直于坐标面 xOy 的直线上，从而在柱面上. 因此柱面的方程为

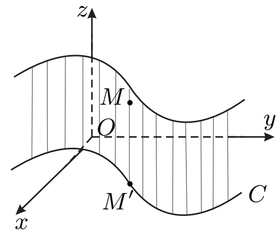

图 7–28

$$f(x,y)=0.$$

类似地，可以证明

$$f(y,z)=0$$

是以坐标平面 yOz 中曲线 $f(y,z)=0$ 为准线而母线平行于 x 轴的柱面的方程，而

$$f(x,z)=0$$

是以坐标平面 zOx 中曲线 $f(x,z)=0$ 为准线而母线平行于 y 轴的柱面的方程.

总之，在空间直角坐标系中，母线平行于坐标轴的柱面的方程最多只含两个变量，而最多只含两个变量的方程其图形必是母线平行于坐标轴的柱面.

在空间直角坐标系中作方程仅含两个变量的柱面图形的方法是：在方程所含的两个变量的坐标平面上作出准线，然后让准线沿着垂直于此坐标平面 (即平行于另一个变量所确定的坐标轴) 的方向平行移动便得到柱面的图形.

例 1 作下列柱面的图形：

(1) $x^2+z^2=a^2 \quad (a>0)$; (2) $2x^2+y^2=a^2 \quad (a>0)$;

(3) $z=y^2$; (4) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

解 (1) 首先在坐标平面 zOx 中作出以原点为心、a 为半径的圆，然后让所作的圆沿 y 轴的方向平行移动便得到所作的柱面，见图 7–29.

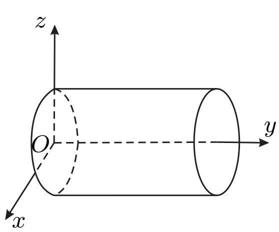

图 7– 29

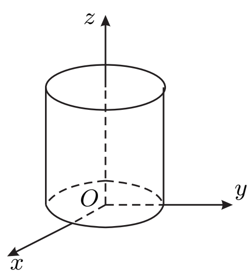

图 7– 30

(2) 首先在坐标平面 xOy 中作出方程为 $2x^2 + y^2 = a^2$ 的椭圆，然后让所作的椭圆沿 z 轴的方向平行移动便得到所作的柱面，见图 7–30.

类似地作出 (3) 和 (4) 的图形分别见图 7–31 和图 7–32.

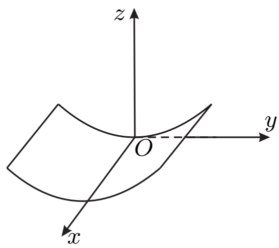

图 7–31

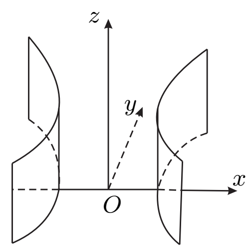

图 7–32

像图 7–29 那样，准线为圆，而母线垂直于圆所在的平面的柱面称为 **圆柱面**. 像图 7–30 那样，准线为椭圆，而母线垂直于椭圆所在的平面的柱面称为 **椭圆柱面**. 像图 7–31 那样，准线为抛物线，而母线垂直于抛物线所在的平面的柱面称为 **抛物柱面**. 像图 7–32 那样，准线为双曲线，而母线垂直于双曲线所在的平面的柱面称为 **双曲柱面**.

二　旋转曲面

一条平面曲线 C 绕其所在平面上的一条直线 L 旋转一周所成的曲面称为 **旋转曲面**，曲线 C 称为它的 **母线**，直线 L 称为它的 **轴**.

设 C 是坐标面 yOz 上的曲线，在坐标平面 yOz 中它的方程是

$$f(y, z) = 0.$$

将曲线 C 绕 z 轴旋转一周得一旋转曲面. 现确定此旋转曲面的方程.

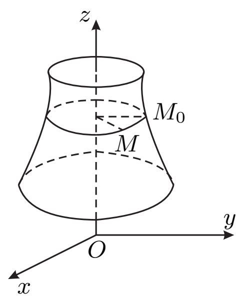

图 7–33

设 $M(x, y, z)$ 是曲面上任意一点，它是曲线 C 上的点 $M_0(0, y_0, z_0)$ 绕 z 轴旋转时运动轨迹上的点. 于是有 $z = z_0$，$x^2 + y^2 = y_0^2$. 因为点 M_0 在曲线 C 上，所以 $f(y_0, z_0) = 0$. 因此

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

不难验证满足此方程的点都在旋转曲面上. 因此，这就是所求的旋转曲面的方程.

类似地，可推得坐标平面 yOz 中方程是

$$f(y, z) = 0$$

的曲线 C 绕 y 轴旋转所得旋转曲面的方程为

$$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

坐标平面 xOy 中方程是

$$f(x,y)=0$$

的曲线绕 y 轴旋转所得旋转曲面的方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0.$$

一般地，在空间直角坐标系中，坐标平面上的已知曲线绕其所在平面上的某坐标轴旋转所得旋转曲面的方程可由曲线方程直接得到．其规律是：在曲线方程中与旋转轴同名的变量不变，而用另外两个变量的平方和的平方根替换曲线方程中的另一个变量．

例如，坐标平面 xOy 中的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕 y 轴旋转而得的旋转曲面 (见图 7–34) 的方程为

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

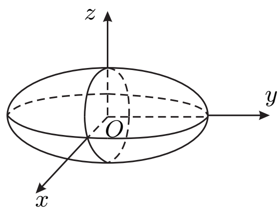

图 7–34

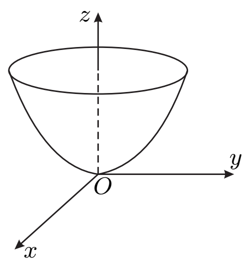

图 7–35

又如．坐标平面 yOz 中的抛物线 $z=ay^2$ 绕 z 轴旋转而得的旋转曲面 (见图 7–35) 的方程为

$$z=a(x^2+y^2).$$

由椭圆绕其长轴或短轴旋转所得的旋转曲面称为 **旋转椭球面**，由抛物线绕其对称轴旋转所得的旋转曲面称为 **旋转抛物面**．

直线 L 绕另一条与其相交的直线 L' 旋转一周所得的旋转曲面称为 **圆锥面**，直线 L' 称为圆锥面的 **对称轴**，两直线的交点称为圆锥面的 **顶点**，两直线的夹角 α 称为圆锥面的 **半顶角**．

已知坐标平面 yOz 上直线 L 的方程为

$$y=az,$$

则其绕 z 轴旋转所得的圆锥面的方程为

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=az,$$

即

$$x^2+y^2-a^2z^2=0.$$

它的半顶角 $\alpha=\arctan|a|$．

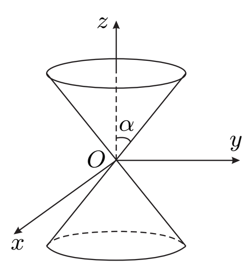

图 7–36

类似地，可推得以原点为顶点、y 轴为对称轴的圆锥面方程为

$$x^2+z^2-a^2y^2=0;$$

以原点为顶点、x 轴为对称轴的圆锥面方程为

$$y^2+z^2-a^2x^2=0;$$

以 $(0,0,z_0)$ 为顶点、z 轴为对称轴的圆锥面方程为

$$x^2+y^2-a^2(z-z_0)^2=0.$$

三　二次曲面

三元二次方程

$$A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+B_1xy+B_2yz+B_3xz+C_1x+C_2y+C_3z+D=0$$

的图形称为 **二次曲面**.

前面所讲的圆柱面、圆锥面、旋转椭球面和旋转抛物面等都是二次曲面. 下面再介绍几种常用的二次曲面，同时介绍由曲面方程确定其图形形状的“平行截割法”.

1．椭球面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\quad(a>0,b>0,c>0)$$

所表示的曲面称为 **椭球面**.

由方程易知

$$|x|\le a,\quad |y|\le b,\quad |z|\le c.$$

这表明，椭球面上的点都在平面 $x=\pm a,\ y=\pm b,\ z=\pm c$ 所围成的长方体内. a,b,c 称为 **椭球面的半轴**.

用平面 $z=h$ 截椭球面得到交线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

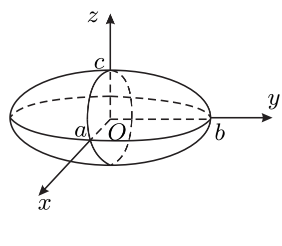

图 7–37

将第二个方程 $z=h$ 代入第一个方程得到同解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$$

当 $|h|<c$ 时，方程组的第一个方程是准线为 xOy 坐标平面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}$ 而母线平行于 z 轴的椭圆柱面，第二个方程是平行于坐标面 xOy 的平面. 它们的交线是以

$a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$ 和 $b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$ 为两个半轴的椭圆. 当 $h=0$ 时, 椭圆的两个半轴为 a 和 b. 当 $0<|h|<c$ 时, 随着 $|h|$ 的增大椭圆的两个半轴逐渐减小. 当 $|h|=c$ 时, 图形变成一个点 $(0,0,c)$ 或 $(0,0,-c)$. 于是, 曲面可看成是以坐标平面 xOy 上的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 为基础, 向上至点 $(0,0,c)$, 向下至点 $(0,0,-c)$, 用长短半轴逐渐减小的无穷多个椭圆叠置而成.

用平面 $x=h$ 和 $y=h$ 截曲面也可得到类似的结果.

综合以上分析可知椭球面的图形如图 7–37 所示.

在椭球面的方程中, 若半轴 a,b,c 中有两个相等, 则其为旋转椭球面. 例如, 若 $a=b$, 即方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

则它是由坐标平面 yOz 上的椭圆 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转而成的旋转椭球面. 若半轴 a,b,c 都相等, 即 $a=b=c$, 则其为球面

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

2. 椭圆锥面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{1}$$

所表示的曲面称为 **椭圆锥面**. 曲面以 z 轴为对称轴.

用平行于坐标面 xOy 的平面 $z=h$ 截曲面 (1), 当 $h=0$ 时得到的交点是坐标原点; 当 $h\neq 0$ 时, 所得截线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h, \end{cases} \tag{2}$$

这是平面 $z=h$ 上的一个椭圆, 随着 $|h|$ 的增大椭圆的两个半轴逐渐增大. 因此椭圆锥面 (1) 可看成是自原点出发沿 z 轴的两个方向用长短半轴由零逐渐增大的椭圆叠置而成. 图形如图 7–38 所示.

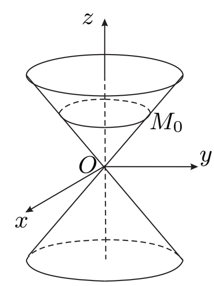

图 7–38

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是椭圆锥面 (1) 上任一点, 则过原点和 M_0 的直线的参数方程为

$$x=x_0t,\quad y=y_0t,\quad z=z_0t.$$

代入椭圆锥面方程 (1) 的左端, 并注意到 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在椭圆锥面上, 得到

$$\frac{(x_0t)^2}{a^2}+\frac{(y_0t)^2}{b^2}-\frac{(z_0t)^2}{c^2}=t^2\Big(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\Big)=0.$$

这表明，上述直线上的点都在椭圆锥面 (1) 上. 实际上，容易证明椭圆锥面又可看成是过原点的直线沿任一平面 $z=h$ 上的椭圆 (2) 旋转而形成的几何轨迹.

若在方程 (1) 中 $a=b$, 则截线 (2) 是平面 $z=h$ 上的圆. 此时椭圆锥面 (1) 又可看成是过原点的直线绕 z 轴旋转一周而生成的旋转曲面，从而是圆锥面. 实际上，此时从方程 (1) 也可看出它是以原点为顶点 、z 轴为对称轴的圆锥面. 圆锥面是特殊的椭圆锥面.

类似地，可得到以 y 轴为对称轴的椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

和以 x 轴为对称轴的椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

的图形.

3. 双曲面

(1) 单叶双曲面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

所表示的曲面称为 **单叶双曲面**.

用平面 $z=h$ 截曲面得到交线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$$

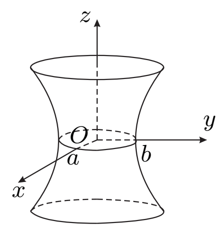

图 7–39

这又可看成是一个椭圆柱面和一个平面的交线，交线是椭圆. 当 $h=0$ 时，这是曲面与坐标面 xOy 的交线，它是两个半轴分别为 a 和 b 的椭圆. 随着 $|h|$ 的增大椭圆的两个半轴逐渐增大，且无论 $|h|$ 多么大，平面 $z=h$ 与曲面都有一条椭圆交线. 因此曲面可看成是由坐标平面 xOy 上的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 出发，沿着与 z 轴平行的方向向上和向下用长短半轴逐渐增大的椭圆叠置而成. 其图形如图 7–39 所示，它以 z 轴为对称轴.

按照类似的方法可分析以 y 轴为对称轴的单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的图形及以 x 轴为对称轴的单叶双曲面

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

的图形.

(2) 双叶双曲面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

所表示的曲面称为 **双叶双曲面**. 利用平行截割法分析可知其图形如图 7–40 所示，它以 z 轴为对称轴.

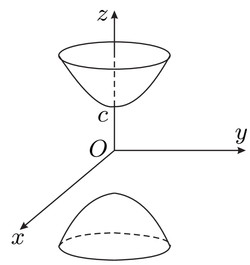

图 7– 40

类似地，方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

的图形是以 y 轴为对称轴的双叶双曲面. 方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

的图形是以 x 轴为对称轴的双叶双曲面.

4. 抛物面

(1) 椭圆抛物面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz\quad(c\neq 0)$$

所表示的曲面称为 **椭圆抛物面**. z 轴为其对称轴，原点为其顶点.

当 $c>0$ 时， $z\geq 0$. 用平面 $z=h$ $(h>0)$ 截曲面所得的截痕是椭圆，其长半轴和短半轴随 h 的增大而增大. 于是此时椭圆抛物面的图形如图 7–41 所示. 下方封闭，开口向上，且向上无限延伸.

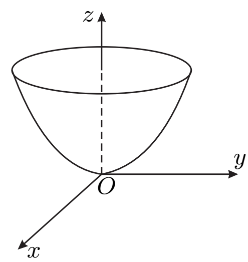

图 7– 41

当 $c<0$ 时， $z\leq 0$. 用平面 $z=-h$ $(h>0)$ 截曲面所得的截痕是椭圆，其长半轴和短半轴随 h 的增大而增大. 此时椭圆抛物面的图形上方封闭，开口向下，且向下无限延伸.

当 $a=b$ 时，图形是旋转抛物面.

类似地，方程

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=ax\quad(a\neq 0)$$

所表示的是以 x 轴为其对称轴，原点为其顶点的椭圆抛物面. 方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=by\quad(b\neq 0)$$

所表示的是以 y 轴为其对称轴，原点为其顶点的椭圆抛物面.

(2) 双曲抛物面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz \quad (c \neq 0)$$

所表示的曲面称为 **双曲抛物面** 或 **马鞍面**.

现用平行截割法只分析 $c = 1$ 时马鞍面的图形. 由此也容易得到 $c = -1$ 时的图形.

若用平面 $z = h$ 截马鞍面，则所得截线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = h, \\ z = h. \end{cases}$$

当 $h > 0$ 时，它是实轴平行于 x 轴，虚轴平行于 y 轴的双曲线. 当 $h = 0$ 时，它是坐标面 xOy 上两条相交于原点的直线

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0, \\ z = 0 \end{cases} \quad 和 \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

当 $h < 0$ 时，它也是双曲线，但实轴平行于 y 轴，虚轴平行于 x 轴.

若用平面 $x = h$ 截马鞍面，则所得截线的方程为

$$\begin{cases} z = \dfrac{h^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}, \\ x = h. \end{cases}$$

当 $h = 0$ 时，截线是坐标面 yOz 上顶点为原点的抛物线，且开口朝下. 当 $|h| > 0$ 时，截线也都是开口朝下的抛物线，只是随着 $|h|$ 的增大，抛物线的顶点随之升高.

若用平面 $y = h$ 截马鞍面，则所得截线是开口向上的抛物线

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

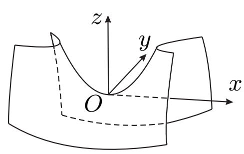

图 7–42

综合上述得出马鞍面如图 7–42 所示.

例 2　作出曲面 $x^2 + 2z^2 - 4x - y + 5 = 0$ 的图形.

解　配方得

$$(x-2)^2 + 2z^2 = y - 1.$$

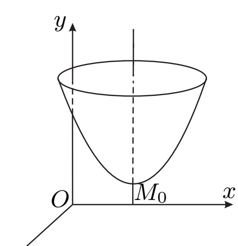

图 7–43

曲面是以直线

$$\begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

为对称轴，顶点在 $M_0(2, 1, 0)$ 的开口向上的椭圆抛物面，如图 7–43 所示.

习　题　7－6

1. 求下列球面的球心与半径：

(1) $x^2+y^2+z^2-6x+8y-2z+10=0$;　(2) $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$.

2. 指出下列方程所表示的柱面的名称，并作图：

(1) $4y^2+9z^2=36$;　　(2) $x^2-z^2=9$;

(3) $y^2=4z$;　　(4) $x^2-2x+y^2=0$.

3. 求下列旋转曲面方程：

(1) xOy 坐标平面上的曲线 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转；

(2) yOz 坐标平面上的曲线 $-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$ 绕 y 轴旋转.

4. 指出下列方程所表示的曲面的名称，并作图：

(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$;　　(2) $\dfrac{z}{3}=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$;

(3) $4x^2-4y^2+z^2=1$;　　(4) $z^2=16x^2+y^2$;

(5) $y^2-4z^2=9$.

第七节　空间曲线

一　空间曲线的方程

与空间直线可看作两个平面的交线一样，空间曲线也可看作两个曲面的交线.

设两个曲面的方程为

$$F(x,y,z)=0 \ \ \text{和} \ \ G(x,y,z)=0,$$

它们的交线为 C. 因为曲线 C 上任何点的坐标应同时满足这两个方程，所以 C 上的点满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{1}$$

反之，若点的坐标满足方程组 (1), 则该点同时在两个曲面上，从而在交线 C 上. 因此，方程组 (1) 是曲线 C 的方程. 这种形式的曲线方程称为曲线的 **一般方程** 或 **面交式方程**.

值得指出的是，空间曲线的面交式方程不是由曲线唯一确定的. 将方程组 (1) 进行同解变形所得到的方程组与原方程组表示同一条曲线. 这种变形常常会给了解和分析曲线带来方便.

例 1　设曲线 C 的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=2x, \\ z=x^2+y^2. \end{cases}$$

它是柱面 $(x-1)^2+y^2=1$ 与抛物面 $z=x^2+y^2$ 的交线. 将第一个方程代入第二个方程得到 $z=2x$. 因此，曲线 C 又可表示为

$$\begin{cases} x^2+y^2=2x, \\ z=2x. \end{cases}$$

由此可以看出 C 也是圆柱面 $(x-1)^2+y^2=1$ 与平面 $z=2x$ 的交线，其图形如图 7–44 所示.

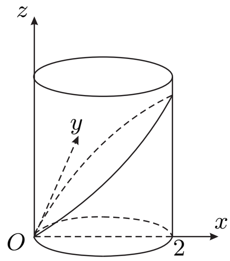

图 7−44

在平面直角坐标系中，有些曲线可用参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad t\in[\alpha,\beta]$$

表示. 类似地，在空间直角坐标系中，有些曲线可用参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad t\in[\alpha,\beta]$$

表示.

例 2 动点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上由点 $A(a,0,0)$ 出发，以等角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以等速度 v 沿平行于 z 轴的方向上升. 求动点 M 的运动轨迹.

解 设在时刻 t 动点的位置为 $M(x,y,z)$, 则

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t, \\ y=a\sin\omega t, \qquad t\in[0,+\infty). \\ z=vt, \end{cases}$$

此即动点 M 运动轨迹的参数方程，时间 t 是参数.

例 2 中的曲线称为 **圆柱螺线**, 它的图形如图 7–45 所示.

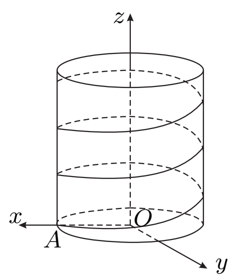

图 7–45

二 空间曲线在坐标面上的投影

设 C 是一条空间曲线，以 C 为准线，母线垂直于某坐标面的柱面称为 C 关于该坐标面的 **投影柱面**, 投影柱面与该坐标面的交线称为 C 在该坐标面上的 **投影曲线**, 简称为 **投影**. 实际上，曲线 C 在坐标面上的投影是 C 上所有点在该坐标面上的投影点所组成的点集.

设空间曲线 C 的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{2}$$

在方程组中消去变量 z 得到

$$f(x,y)=0. \tag{3}$$

因为方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ f(x,y)=0 \end{cases}$$

与方程组 (2) 同解，所以 C 在由方程 (3) 表示的垂直于坐标面 xOy 的柱面上．于是， C 关于坐标面 xOy 的投影柱面在柱面 (3) 上， C 在坐标面 xOy 上的投影曲线在柱面 (3) 与坐标面 xOy 的交线

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

上，即 C 在坐标面 xOy 上的投影曲线满足此方程组．

类似地，若 $g(y,z)=0$ 与 $h(x,z)=0$ 分别是在方程组 (2) 中消去 x 和 y 得到的方程，则曲线 C 关于坐标面 yOz 与 xOz 的投影柱面分别在由方程

$$g(y,z)=0 \text{ 和 } h(x,z)=0$$

表示的柱面上． C 在坐标面 yOz 和 xOz 上的投影曲线分别满足方程组

$$\begin{cases} g(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} h(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$$

例 3　求球面

$$x^2+y^2+z^2=1 \tag{4}$$

与

$$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \tag{5}$$

的交线 C 在坐标面 yOz 与 xOy 上的投影 (见图 7–46).

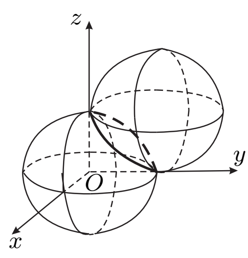

图 7–46

解　两个球面方程相减得

$$y+z=1. \tag{6}$$

由方程 (4) 知

$$\begin{cases} -1\le y\le 1, \\ -1\le z\le 1. \end{cases}$$

由方程 (5) 知

$$\begin{cases} 0\le y\le 2, \\ 0\le z\le 2. \end{cases}$$

因此，C 在坐标面 yOz 上的投影为直线段

$$\begin{cases} y+z=1, \\ x=0, \end{cases} \qquad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

将方程 (6) 代入方程 (4) 或 (5) 中消去 z 得到

$$x^2+2y^2-2y=0.$$

因此，C 在坐标面 xOy 上的投影为椭圆

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0, \\ z=0. \end{cases}$$

例 4 设一立体由上半球面

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$$

和锥面

$$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$$

所围成 (见图 7–47), 求此立体在坐标面 xOy 上的投影，即立体中所有点在该坐标面上的投影点组成的点集.

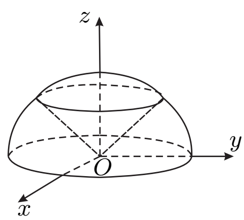

图 7–47

解 上半球面与锥面的交线为

$$C: \begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)}. \end{cases}$$

消去 z 得到

$$x^2+y^2=1.$$

交线 C 在坐标面 xOy 上的投影曲线为圆

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$$

所给立体在坐标面 xOy 上的投影恰是此圆所围图形，即

$$\{(x,y)\,|\,0 \leq x^2+y^2 \leq 1\}.$$

例 5 设 Π 是空间中一个平面块，其面积为 A, 法向量与 z 轴正向的夹角为 γ, Π 在坐标面 xOy 上的投影 D 的面积为 σ, 证明

$$\sigma = A|\cos\gamma|.$$

证　容易看出当 $\cos\gamma=0$ 时结论成立. 下面就 $\cos\gamma\neq 0$ 的情况加以证明.

先看一种简单情况. 设 $M(x_1, y_1, z_1)$, $P(x_2, y_2, z_2)$, $Q(x_3,y_3,z_3)$ 是不共线的三点，Π 是以 $\overrightarrow{MP}$ 和 $\overrightarrow{MQ}$ 为邻边的平行四边形 (见图 7–48), 则 Π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{MP}\times\overrightarrow{MQ}$, Π 的面积

$$A=\left|\overrightarrow{MP}\times\overrightarrow{MQ}\right|=|\boldsymbol{n}|.$$

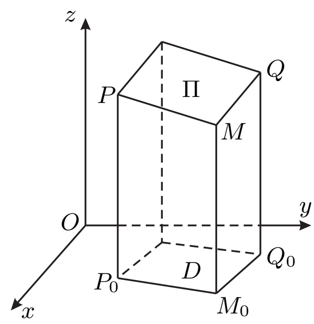

图 7–48

因 M,P,Q 在坐标面 xOy 上的投影分别是 $M_0(x_1, y_1, 0)$, $P_0(x_2,y_2,0)$, $Q_0(x_3,y_3,0)$, 所以 D 是以 $\overrightarrow{M_0P_0}$ 和 $\overrightarrow{M_0Q_0}$ 为邻边的平行四边形，其面积

$$\begin{aligned}\sigma&=\left|\overrightarrow{M_0P_0}\times\overrightarrow{M_0Q_0}\right|=|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)|\\&=\left|\left(\overrightarrow{MP}\times\overrightarrow{MQ}\right)\cdot\boldsymbol{k}\right|=|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}|.\end{aligned}$$

于是

$$|\cos\gamma|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sigma}{A}.$$

由此得到

$$\sigma=A|\cos\gamma|.$$

对于 Π 是空间中任一平面块的情况，用两组平行直线将其分割成两类小平面块. 一类是小平行四边形 $\Delta\Pi_1$, $\Delta\Pi_2$, $\cdots$, $\Delta\Pi_n$, 另一类是包含 Π 的部分边界的非平行四边形小块. 用 λ 表示各小块平面直径的最大者，则当 $\lambda\to 0$ 时，那些非平行四边形小块的面积之和趋于零. 因此 Π 的面积

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i,$$

其中 ΔA_i 是 $\Delta\Pi_i$ 的面积. 用 ΔD_i 表示 $\Delta\Pi_i$ 在坐标面 xOy 上的投影，$i=1,2,\cdots,n$, 则 Π 在坐标面 xOy 上的投影 D 的面积

$$\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i,$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 是 ΔD_i 的面积. 利用前面已经证明的结果，有

$$\Delta\sigma_i=\Delta A_i|\cos\gamma|.$$

于是得到

$$\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i|\cos\gamma|=A|\cos\gamma|.$$

三 一元向量值函数

以实值函数 $x(t), y(t), z(t)$ 为分量的向量

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

称为 **向量值函数**. 对于第一章所定义的函数，有时为了区别于向量值函数将其称为 **数值函数**.

设向量值函数 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上有定义. 对每个 $t \in [\alpha, \beta]$, 将 $\boldsymbol{r}(t)$ 看成是起点在坐标原点的向量，则对一切 $t \in [\alpha, \beta]$, $\boldsymbol{r}(t)$ 的终点的全体称为 **向量值函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的图形**. 实际上， $\boldsymbol{r}(t)$ 的图形与参数方程

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

的图形是相同的， $\boldsymbol{r}(t) \quad (t \in [\alpha, \beta])$ 也称为该图形的 **向量方程**.

向量值函数也可用与数值函数相类似的形式给出极限、连续、导数等概念. 现简述如下.

设向量值函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 的某去心邻域有定义. 若有常向量 $\boldsymbol{r}_0$ 存在，使得对任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使当 t 满足 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时恒有

$$|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0| < \varepsilon,$$

则称 **当 $t \to t_0$ 时 $\boldsymbol{r}(t)$ 的极限存在**, 称 $\boldsymbol{r}_0$ 为 **当 $t \to t_0$ 时 $\boldsymbol{r}(t)$ 的极限**, 记为

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 \ \text{ 或 } \boldsymbol{r}(t) \to \boldsymbol{r}_0 \quad (t \to t_0).$$

容易证明，当 $t \to t_0$ 时 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 极限存在的充分必要条件是当 $t \to t_0$ 时函数 $x(t), y(t), z(t)$ 的极限都存在；若 $t \to t_0$ 时 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 极限存在，则

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = (\lim_{t \to t_0} x(t), \lim_{t \to t_0} y(t), \lim_{t \to t_0} z(t)).$$

若 $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0)$, 则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 点 **连续**. 若 $\boldsymbol{r}(t)$ 在区间 I 上每一点都连续，则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 I 上连续.

显然， $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 在 t_0 点连续的充分必要条件是函数 $x(t), y(t), z(t)$ 都在 t_0 点连续； $\boldsymbol{r}(t)$ 在区间 I 上连续的充分必要条件是函数 $x(t), y(t), z(t)$ 都在 I 上连续.

若 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，则由其所确定的空间曲线 C 是连续曲线. 若 C 是连续曲线，且对任意 $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$, $t_1 \neq t_2$, 均有 $\boldsymbol{r}(t_1) \neq \boldsymbol{r}(t_2)$, 则称 C 为 **简单曲线**. 若 C 为简单曲线，且 $\boldsymbol{r}(\alpha) = \boldsymbol{r}(\beta)$, 则称 C 为 **简单闭曲线** 或 **若当** (Jordan) **曲线**.

若当 $t \to t_0$ 时 $\dfrac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0}$ 的极限存在，则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 点 **可导**, 并称此极限值为 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 点的 **导数**, 记为 $\boldsymbol{r}'(t_0)$, 即

$$\boldsymbol{r}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0}.$$

若 $\boldsymbol{r}(t)$ 在区间 I 上每一点都可导，则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 I 上可导. 根据定义， $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t 点可导的充分必要条件是函数 $x(t), y(t), z(t)$ 都在 t 点可导；若 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t 点，则

$$\boldsymbol{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t));$$

$\boldsymbol{r}(t)$ 在区间 I 上可导的充分必要条件是函数 $x(t), y(t), z(t)$ 都在 I 上可导.

四　空间曲线的切线与法平面

与平面曲线的情况一样，空间曲线的切线也是用割线的极限定义的.

设 M_0 是空间曲线 C 上一个定点，在 M_0 点附近任取 C 上一个异于 M_0 的点 M(见图 7–49). 过点 M_0 和 M 的直线称为 C 的一条 **割线**，简记为 M_0M. 当 M 在曲线 C 上移动时，割线 M_0M 也随之移动. 若当 M 沿曲线移动而无限接近于 M_0 时，割线 M_0M 无限接近于某一条直线 L, 则称 L 为曲线 C 在点 M_0 处的 **切线**, L 的方向向量称为 C 在 M_0 处的 **切向量**.

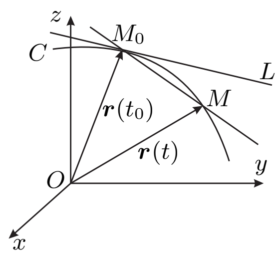

图 7–49

设空间简单连续曲线 C 的方程为

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t),\quad t \in [\alpha, \beta],$$

写成向量形式为

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \qquad t \in [\alpha, \beta].$$

若 C 在其上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处切线存在，则 C 在 M_0 点的切向量有两个方向，一个与曲线参数增加的方向相一致，另一个与曲线参数减少的方向相一致. 设 M_0 点对应的参数为 t_0, 从而有 $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$. 又设 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 点可导，且 $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{0}$. 若 M 是曲线 C 上 M_0 点附近任意一个异于 M_0 的点，其对应的参数为 t, 则曲线 C 过点 M_0 和 M 的割线的方向向量为 $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)$. 当 $t > t_0$ 时 $\overrightarrow{M_0M}$ 与参数增加的方向相一致，当 $t < t_0$ 时 $\overrightarrow{M_0M}$ 与参数减少的方向相一致. 于是 $\dfrac{1}{t - t_0}\overrightarrow{M_0M}$ 总是与参数增加的方向相一致. 令 $t \to t_0$, 则 M 沿曲线 C 无限接近 M_0, 相应的割线无限接近于 C 在 M_0 点的切线. 因为

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}\overrightarrow{M_0M} = \lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0} = \boldsymbol{r}'(t_0),$$

所以

$$\boldsymbol{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

便是曲线在 M_0 点与参数增加的方向相一致的切向量，曲线 C 在点 M_0 处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

若在区间 $[\alpha,\beta]$ 上 $\boldsymbol{r}(t)$ 具有连续导函数，且 $\boldsymbol{r}'(t)\neq\mathbf{0}$, 则称曲线 C 是 **光滑曲线**. 对于光滑曲线，当点在其上连续移动时曲线的切线也连续变动. 由有限条光滑曲线相互连接而成的曲线称为 **分段光滑曲线**.

若曲线 C 在点 M_0 处的切线存在，则过点 M_0 且与 C 在 M_0 处的切线相垂直的平面称为 C 在点 M_0 处的 **法平面**. 于是 C 在 M_0 处的切向量是法平面的法向量， C 在 M_0 处的法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

例 6 求曲线

$$x=t-\sin t,\quad y=1-\cos t,\quad z=4\sin\frac{t}{2}$$

在点 $M_0(\frac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2})$ 处的切线方程和法平面方程.

解 点 M_0 所对应的参数 $t_0=\frac{\pi}{2}$. 因

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right)=(1-\cos t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}=1,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}=1,$$

$$z'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\frac{t}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2},$$

故曲线在点 M_0 处的切向量为 $\boldsymbol{s}=(1,1,\sqrt{2})$. 于是，切线方程为

$$\frac{x-\frac{\pi}{2}+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

法平面方程为

$$\left(x-\frac{\pi}{2}+1\right)+(y-1)+\sqrt{2}(z-2\sqrt{2})=0,$$

即

$$x+y+\sqrt{2}z-\frac{\pi}{2}-4=0.$$

例 7 求曲线 $\begin{cases} y=x, \\ z=x^2 \end{cases}$ 在点 $M_0(1,1,1)$ 处的切线方程和法平面方程.

解 曲线的参数方程为

$$x=t,\quad y=t,\quad z=t^2,$$

M_0 点所对应的参数为 $t=1$. 因

$$x'=1,\quad y'=1,\quad z'=2t,$$

故在点 M_0 处曲线的切向量为 $\boldsymbol{s}=(1,1,2)$. 于是曲线在点 M_0 处的切线方程为

$$x-1=y-1=\frac{z-1}{2},$$

法平面方程为

$$x + y + 2z - 4 = 0.$$

五　空间曲线的弧长

在第五章第四节中, 我们给出了平面曲线弧长的概念. 下面用同样的方法给出空间曲线弧长的概念.

设有空间曲线 C, 在 C 上插入分点 P_1, P_2, $\cdots$, P_{n-1}, 将 C 分割成 n 段, 如图 7–50 所示. 记端点 A 为 P_0, B 为 P_n. 用线段连接各个相邻的两点. 令 $\mu = \max\limits_{1\leq i\leq n}\{P_{i-1}P_i\}$, 其中 $P_{i-1}P_i$ 表示连接 P_{i-1} 和 P_i 的线段之长.

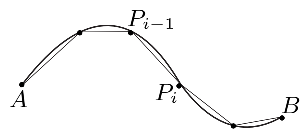

图 7–50

如果不论如何分割曲线 C, 极限

$$\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} P_{i-1}P_i$$

都存在且等于同一个实数 s, 则称曲线 C 是 **可求长** 的, 并称 s 为 C 的 **弧长**.

定理 7.15　设空间曲线 C 由参数方程

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t),\qquad t \in [\alpha, \beta]$$

给出, 其中函数 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续导数, 且 $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ 不同时为零, 则 C 是可求长的, 且其弧长

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\ \mathrm{d}t.$$

定理 7.15 的证明方法与定理 5.8 相同, 这里不再赘述.

与平面曲线类似, 弧长函数

$$s(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau) + z'^2(\tau)}\ \mathrm{d}\tau$$

的微分

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\ \mathrm{d}t$$

称为 **弧微分**. 上式便是空间曲线的弧微分公式.

例 8　求圆柱螺线

$$x = a\cos\theta,\quad y = a\sin\theta,\quad z = k\theta$$

一个螺距 (即 θ 由任意 θ_0 增加到 $\theta_0 + 2\pi$) 之间的长度.

解　因

$$\sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta) + z'^2(\theta)} = \sqrt{a^2 + k^2},$$

故所求螺线的长度

$$s=\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi}\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}\theta=2\pi\sqrt{a^2+k^2}.$$

习　题　7－7

1. 求空间曲线 $C:\begin{cases}2x^2+z^2+4y=4z,\\x^2+3z^2-8y=12z\end{cases}$ 关于三个坐标平面上的投影柱面方程.

2. 求圆锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ $(y\geq 0)$ 与平面 $z=y$ 的交线在三个坐标面上投影柱面的方程.

3. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2-z=0,\\z=x+1\end{cases}$ 在三个坐标面上投影曲线的方程.

4. 证明曲面 $x^2+2y^2-z^2+3x=1$ 与 $2x^2+4y^2-2z^2-5y=0$ 的交线位于某一平面上.

5. 求平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围四面体在坐标面 xOy 上的投影.

6. 求曲面 $z=2(x^2+y^2)$ 与平面 $z=4$ 所围立体在坐标面 xOy 上的投影.

7. 求曲面 $y=\sqrt{x}$ 与平面 $x+z=\dfrac{\pi}{2}$, $y=0$, $z=0$ 所围立体在坐标面 xOy 上的投影.

8. 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(x\geq 0)$ 夹在平面 $z=0$ 和 $z=1$ 之间部分在坐标面 xOy 和 yOz 上的投影 (曲面在坐标面上的投影指的是曲面上各点在该坐标面上的投影的全体组成的集合).

9. 求下列曲线在指定点处的切线方程和法平面方程:

(1) $x=\dfrac{t}{1+t},y=\dfrac{1+t}{t},z=t^2$, 在对应于 $t=1$ 的点;

(2) $x=a\sin^2 t,y=b\sin t\cos t,z=c\cos^2 t$, 在对应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点;

(3) $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\y=2x+1,\end{cases}$ 在 $(0,1,1)$ 点.

10. 求曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上的点, 使该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

11. 求曲线

$$\begin{cases}x=\mathrm{e}^{-t}\cos t,\\y=\mathrm{e}^{-t}\sin t,\\z=\mathrm{e}^{-t}\end{cases}$$

上 $t\in[0,+\infty)$ 一段的弧长.

12. 求曲线

$$\begin{cases}y=x^2,\\z=1-x\end{cases}\quad(-1\leq x\leq 1)$$

的弧长.

13. 证明曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=2y,\\z=x^2+y^2\end{cases}$ 的弧长为 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{1+4\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

复　习　题　七

1. 填空题:

(1) 向量 $\boldsymbol{a}=(2,-2,1)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(1,1,-4)$ 上的投影等于 ________ ;

(2) 若向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 共线，且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-18$, 则 $\boldsymbol{b}=$ ________ ;

(3) 已知 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$, 则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$ ________ ;

(4) 要使原点到平面 $2x-y+kz=6$ 的距离等于 2，则 $k=$ ________ ;

(5) 球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x+z=a$ 的交线在 xOy 平面上的投影曲线方程是 ________ ;

(6) 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为非零向量，且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$ 的值是 ________ .

2. 选择题：

(1) 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$, 则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$(　　).

(A) $2\sqrt{2}$.　　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(C) 2.　　(D) 1.

(2) 已知向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, 则垂直于 $\boldsymbol{a}$，且垂直于 y 轴的单位向量是 (　　).

(A) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$.　　(B) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$.

(C) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k})$.　　(D) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})$.

(3) 空间直线的方程为 $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$，则该直线过原点且 (　　).

(A) 垂直于 y 轴，但不平行于 x 轴.　　(B) 垂直于 x 轴.

(C) 垂直于 z 轴，但不平行于 x 轴.　　(D) 平行于 x 轴.

(4) 方程 $y^2+z^2-4x+8=0$ 表示 (　　).

(A) 单叶双曲面.　　(B) 双叶双曲面.　　(C) 锥面.　　(D) 旋转抛物面.

(5) 曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x^2+y^2=2az\ (a>0)$ 的交线是 (　　).

(A) 抛物线.　　(B) 双曲线.　　(C) 圆.　　(D) 椭圆.

3. 平行四边形 $ABCD$ 的两边为 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=3$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{6}$, 求此平行四边形的面积.

4. 验证三个平面 $x+y-2z-1=0$, $x+2y-z+1=0$, $4x+5y-7z-2=0$ 通过同一条直线，并写出该直线的对称式方程.

5. 求直线 $\dfrac{x-1}{9}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z}{-7}$ 在平面 $2x-y-3z+6=0$ 上的投影直线的方程.

6. 已知三角形的顶点 $A(1,-1,2), B(5,-6,2), C(1,3,-1)$，试计算从顶点 B 到边 AC 的高 h.

7. 设一平面垂直于平面 $z=0$，并通过从点 $(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线，求此平面的方程.

8. 求过点 $A(-1,0,4)$ 且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，又与直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程.

9. 画出下列各曲面所围立体的图形：

(1) $z=2x^2+y^2,\ z=3$;　　(2) $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ z=\sqrt{x^2+y^2}-a$, 其中 $a>0$;

(3) $y=x^2+z^2, y=\sqrt{1-x^2-z^2}$;　(4) $z=\sqrt{x^2+y^2}, z=2-x^2-y^2$.

10. 求准线为曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2+4z^2=1, \\ x^2=y^2+z^2, \end{cases}$ 而母线平行于 z 轴的柱面方程.

附录　二阶与三阶行列式简介

行列式是大学课程《线性代数》中的重要内容之一. 这里仅就二阶与三阶行列式的相关内容作一些简单介绍, 供尚未学习到《线性代数》的读者掌握学习本课程时所必须的行列式知识.

一　二阶与三阶行列式的定义

由 4 个数排成的具有 2 行 2 列的数表

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

称为一个 **二阶行列式**, 其中的每个数称为此行列式的一个 **元素**, 数 $a_1b_2-a_2b_1$ 称为这个二阶 **行列式的值**, 并记为

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1.$$

例 1　计算行列式 $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$ 的值.

解

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 3-(-4)\cdot 5 = 14.$$

由 9 个数排成的具有 3 行 3 列的数表

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

称为 **三阶行列式**, 其值定义为

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 2　计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

解

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= (6-20)-2(-2-8)+3(-5-6) \\ &= -27.\end{aligned}$$

二　行列式的简单性质

根据定义不难验证行列式具有下列简单性质.

性质 1. 互换行列式的任意两行，行列式的值变号.

例如,

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

由性质 1 立即得到

性质 2. 若行列式的两行相同，则其值为 0.

例如,

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

性质 3. 行列式的某一行的所有元素都乘以同一个数 k, 等于用数 k 乘以此行列式.

例如,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 5a_2 & 5b_2 & 5c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

根据这一性质，行列式中任何一行的公因数都可提到行列式外面. 由此及性质 2 又可得到

性质 4. 行列式中如果有两行的对应元素成比例，则此行列式之值为 0.

例如,

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 10 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

习 题 答 案 与 提 示

习题 7–1

1. A: IV, B: VI, C: VII, D: VIII, E: III, F: II.

2. A: yOz 平面, B: z 轴, C: xOy 平面, D: zOx 平面, E: x 轴, F: y 轴.

3. P 点关于原点的对称点为 $(-3,1,-2)$, 关于 x 轴的对称点为 $(3,1,-2)$, 关于 y 轴的对称点为 $(-3,-1,-2)$, 关于 z 轴的对称点为 $(-3,1,2)$, 关于 xOy 坐标面的对称点为 $(3,-1,-2)$, 关于 zOx 坐标面的对称点为 $(3,1,2)$, 关于 yOz 坐标面的对称点为 $(-3,-1,2)$.

4. $OP=5\sqrt{2}$, P 到 x 轴、y 轴、z 轴距离分别为 $\sqrt{34}$, $\sqrt{41}$, 5, 到 xOy 面、zOx 面、yOz 面的距离分别为 5, 3, 4.

5. $(1,0,0)$.

6. $\Big(0,1,-2)$.

习题 7–2

2. $(9,-8,1)$, $(-7,3,14)$.

3. $|\boldsymbol{a}|=3$; 方向余弦分别为 $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$; $\boldsymbol{a}^0 = \left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

4. $(10,8,-5)$.

5. $m=15$, $n=-\frac{1}{5}$.

6. $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{11}$, 方向余弦为 $\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{3}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}$.

7. $(3,3\sqrt{2},\pm 3)$.

8. 7, 16, 0.

习题 7–3

1. 否，否，否，否.

2. (1) 3; (2) $\sqrt{14}$; (3) $(55,11,77)$; (4) $\arccos\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$.

3. -7.

4. $\dfrac{1}{3\sqrt{10}}(-8,-1,5)$ 或 $-\dfrac{1}{3\sqrt{10}}(-8,-1,5)$.

5. $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

6. $\dfrac{2}{5}$.

7. (1) $(0,-8,-24)$; (2) 2; (3) 2; (4) -2.

8. (1) 共面； (2) 不共面，体积为 2.

9. $-3\sqrt{3}$; $5\sqrt{3}$.

12. 4.

13. (1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$; (2) $3\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

习题 7–4

1. $x-2y+5z+9=0$.

2. (1) $x-y-z=0$;　(2) $3x-2y+z+7=0$;　(3) $-2x+y+3z-7=0$;　(4) $y=3$;

(5) $3x+2z-5=0$;　(6) $8y-15z=0$ 和 $z=0$.

3. $\dfrac{13}{2}$.

4. $\dfrac{8}{\sqrt{14}}$.

5. $\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$.

6. $\dfrac{\pi}{3}$.

7. $x+3y=0$ 或 $3x-y=0$.

习题 7–5

1. (1) $\dfrac{x-3}{-5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{6}$;　(2) $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-2}{1}$;　(3) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$.

2. 15.

3. $\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

4. $\dfrac{\pi}{6}$.

5. $22x-13y-10z=37$.

6. $\left(-\dfrac{17}{11},\dfrac{16}{11},-\dfrac{18}{11}\right)$.

7. $(0,-1,0)$.

8. $\begin{cases} x+y-z=0, \\ 3x-2y+z=14. \end{cases}$

9. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$.

10. 2.

11. $x-z+4=0$ 与 $x+20y+7z=12$.

12. $3x-z+10=0$ 和 $x-5y+8z-30=0$, 提示：球面的切平面垂直于过切点的半径，用平面束求解.

习题 7–6

1. (1) 球心 $(3,-4,1)$; 半径 4;　(2) 球心 $(-1,2,0)$; 半径 3.

2. (1) 椭圆柱面;　(2) 双曲柱面;　(3) 抛物柱面;　(4) 圆柱面.

3. (1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y^2+z^2)}{9}=1$;　(2) $-\dfrac{y^2}{4}+x^2+z^2=1$.

4. (1) 椭球面;　(2) 椭圆抛物面:　(3) 单叶双曲面;　(4) 椭圆锥面.

习题 7–7

1. 在 xOy 上,　$y=-\dfrac{1}{4}x^2,\ -2\le x\le 2$;　在 yOz 上,　$y=\dfrac{1}{4}z^2-z,\ 0\le z\le 4$;

在 zOx 上,　$x^2+(z-2)^2=4$.

2. 在 xOy 上,　$y=\dfrac{1}{2}(1-x^2), -1\le x\le 1$;　在 yOz 上,　$z=y, 0\le y\le \dfrac{1}{2}$;

在 zOx 上,　$z=\dfrac{1}{2}(1-x^2), -1\le x\le 1$.

3. 在 xOy 上，$\begin{cases} x^2 - x + y^2 - 1 = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ 在 yOz 上，$\begin{cases} z^2 - 3z + y^2 + 1 = 0, \\ x = 0; \end{cases}$

在 zOx 上，$\begin{cases} z = x + 1, , \\ y = 0 \end{cases}$ $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

5. $\{(x, y) \,|\, 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le x \le 1\}$.

6. $\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 2\}$.

7. $\{(x, y) \,|\, 0 \le y \le \sqrt{x},\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\}$.

8. 在 xOy 上，$\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0\}$; 在 yOz 上，$\{(x, y) \,|\, -z \le y \le z,\ 0 \le z \le 1\}$.

9. (1) $\dfrac{x - \frac{1}{2}}{1} = \dfrac{y - 2}{-4} = \dfrac{z - 1}{8}$，$2x - 8y + 16z - 1 = 0$;

(2) $\dfrac{x - \frac{1}{2}a}{a} = \dfrac{y - \frac{1}{2}b}{0} = \dfrac{z - \frac{1}{2}c}{-c}$，$a(x - \frac{1}{2}a) - c(z - \frac{1}{2}c) = 0$;

(3) $x = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z - 1}{4}$，$x + 2y + 4z - 6 = 0$.

10. $P_1(-1, 1, -1)$，$P_2\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{27}\right)$.

11. $\sqrt{3}$.

12. $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

13. 提示：写出曲线的参数方程.

复习题七

1. (1) $-\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$; (2) $(-4, 2, -4)$; (3) 4; (4) ± 2; (5) $\begin{cases} 2x^2 - 2ax + y^2 = R^2 - a^2, \\ z = 0; \end{cases}$

(6) 3, 提示：先证明 $|\boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{c}|^2$.

2. (1) (C); (2) (C); (3) (B); (4) (D); (5) (C).

3. $\dfrac{15}{2}$.

4. $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y + 1}{-1} = \dfrac{z + 1}{1}$.

5. $\begin{cases} 2x - y - 3z + 6 = 0, \\ 5x + 13y - z + 8 = 0. \end{cases}$

6. 5.

7. $x + 2y + 1 = 0$.

8. $\dfrac{x + 1}{16} = \dfrac{y}{19} = \dfrac{z - 4}{28}$.

10. $5x^2 - 3y^2 = 1$, 提示：所求柱面即为曲线 C 在坐标面 xOy 上的投影柱面.

习题 8–1

1. $f(-y, x) = \dfrac{x^2 - y^2}{2xy}$，$f\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$，$f(x, f(x, y)) = \dfrac{4x^4y^2 - (x^2 - y^2)^2}{4x^2y(x^2 - y^2)}$.

2. $f(x, y) = x^3 - 2xy + 3y^2$，$f\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{2}{y}\right) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{4}{xy} + \dfrac{12}{y^2}$.

3. $f(x, y) = \dfrac{x^2(1 - y)}{1 + y}$.

4. $f(tx, ty) = t^2\left(x^2 + y^2 - xy\tan\dfrac{x}{y}\right)$.

5. $f(x + y, x - y, xy) = (x + y)^{xy} + (xy)^{2x}$.