第五次课

2022年9月15日 8:00

§2.2 数列的极限(1)

教学内容：1. 极限的概念 (重点、难点)

2. 极限的性质

3. 极限的四则运算

一. 极限的概念

定义2.2.1 数列：$f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$，$x_n = f(n)$

$x_n = \frac{1}{n}$：$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots$

定义2.2.2 $\{x_n\}$是给定的数列，a为给定的实数。

若$\forall \varepsilon > 0$(任意小)，$\exists N \in \mathbb{N}^*$ $N(\varepsilon)$，当$n > N$时，有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

称a为$\{x_n\}$的极限 或 $\{x_n\}$收敛于a. 记作.

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 或 ($x_n \to a$ $(n\to\infty)$)

注：(1) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，$\Rightarrow$ n无限增大时 x_n与a无限接近.

但x_n可能永远取不到a. 如$\frac{1}{n} \to 0$

但$\frac{1}{n} > 0$.

(2) $\varepsilon > 0$ 任意小. 它衡量x_n与a接近的程度

(2) $\varepsilon>0$ 任意小. ε 衡量 u_n 与 a 接近的程度.

证明时可限制 $0<\varepsilon<$ 某常数

(3) $N=N(\varepsilon)$, 一般地 $\varepsilon\downarrow$, $N\uparrow$. $N(\varepsilon)$ 不唯一

(4) 收敛的定义: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$. $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内

含 $\{u_n\}$ 的无限多项. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 之外至多

有限多项

若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, $n>N$ 时 $|u_n|<\varepsilon$.

称 $\{u_n\}$ 为无穷小量.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ (极限不存在的一种情况)

$\Leftrightarrow$ $\forall M>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 当 $n>N$ 时, 有 $u_n>M$.

(正)

称 $\{u_n\}$ 为无穷大量.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

$\Leftrightarrow$ $\forall M>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$. 当 $n>N$ 时, 有 $u_n<-M$.

称 $\{u_n\}$ 为(负)无穷大量.

Ex2.2.1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

证明: 关键是找 $N(\varepsilon)$! $\Leftarrow$ 解 $|u_n-a|<\varepsilon$.

$\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.　　$\forall\varepsilon\in(0,1)$

$\forall \varepsilon>0$, 要使 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right| = \frac{1}{n}<\varepsilon$. $N=\max\{1,[\frac{1}{\varepsilon}]\}\in\mathbb{N}^*$

$\forall \varepsilon\in(0,1)$ 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]\in\mathbb{N}^*$

只需 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 即可. 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1\in\mathbb{N}^*$.

$\therefore n>N$ 时 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$. 证毕

Ex 2.2.2 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0 \quad (0<|q|<1)$

证: $\forall\varepsilon\in(0,1)$ 要使 $|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon$. 只需

$$n>\log_{|q|}\varepsilon=\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\ (>0)$$

取 $N=[\log_{|q|}\varepsilon]+1\in\mathbb{N}^*$.

$\therefore n>N$ 时, 有 $|q^n-0|<\varepsilon$

$\therefore$ 原结论得证.

Ex 2.2.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2-7n}=\frac{1}{2}$.

证: $\left|\frac{n^2+1}{2n^2-7n}-\frac{1}{2}\right|=\frac{7n+2}{|2n(2n-7)|}\overset{n>4}{=}\frac{7n+2}{2n(2n-7)}$

$$<\frac{8n}{2n(2n-7)}=\frac{4}{2n-7}$$

$\forall\varepsilon>0$ 要使 $\left|\frac{n^2+1}{2n^2-7n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 只需 $\frac{4}{2n-7}<\varepsilon$.

即 $n>\frac{1}{2}(\frac{4}{\varepsilon}+7)=\frac{2}{\varepsilon}+\frac{7}{2}$

取 $N=[\frac{2}{\varepsilon}]+5\in\mathbb{N}^*$,

$\therefore n>N$ 时 — — —

EX 2.2.4 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (a 可以是有限数, $+\infty$ or $-\infty$)

证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$. (Cauchy 命题)

证明: Case 1. a 为有限数.

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}^*, n>N$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon$. ①

对上述 N 有 $\lim_{n\to\infty} \frac{\boxed{|(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_N-a)|}^{\triangleq b}}{n} = 0$

$\therefore \exists K\in\mathbb{N}^*$ $n>K$ 时 有 $\frac{b}{n}<\varepsilon$ ②

当 $n>\max\{K,N\}$ 时, 由①② 可得

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right| = \left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_N-a)}{n}\right| + \frac{|a_{N+1}-a|+|a_{N+2}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}$$

$$\overset{①②}{<} \varepsilon + \frac{n-N}{n}\varepsilon$$

$$< \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon.$$

$\therefore$ 结论得证

Case 2. $a=+\infty$
Case 3. $a=-\infty$
} 作业! 证 Case 2.

证明二）：Stolz 定理（后面学习）

Ex2.2.5 设 $a>0$，证明 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.（记住）

证明：Case1 $a>1$.

$\because 1<\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{n-1个}\cdot a}\overset{\text{基本不等式}}{<}\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n-1个}+a}{n}=\frac{n+(a-1)}{n}$

$=1+\frac{a-1}{n}$，>0

$\therefore |\sqrt[n]{a}-1|<\frac{a-1}{n}$

$\forall\varepsilon>0$，要使 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$ 只需 $\frac{a-1}{n}<\varepsilon$ 即 $n>\frac{a-1}{\varepsilon}$

取 $N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]+1\in\mathbb{N}^*$，$n>N$ 时有

$|\sqrt[n]{a}-1|<\frac{a-1}{n}<\varepsilon$.

$\therefore a>1$ 时 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

或 $a=(\sqrt[n]{a})^n=(\sqrt[n]{a}-1+1)^n>1+n(\sqrt[n]{a}-1)$，$\geq 0$

$\therefore a>1$ 时 $0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}$

② $a=1$ ✓

③ $0<a<1$ 时 令 $b=\frac{1}{a}>1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a}}=1\xRightarrow{\text{四则运算}}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Ex2.2.6 证明：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ （记住）

证明：$\because 1\leq\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{(n-2)个}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}\leq\frac{(n-2)+2\sqrt{n}}{n}$

证明：∵ $1 \le \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1\cdots 1}_{(n-2)个}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}} \le \frac{[\text{illegible}]}{n}$

$$= 1+2\frac{\sqrt{n}-1}{n} < 1+\frac{2}{\sqrt{n}}$$

∴ $\left|\sqrt[n]{n}-1\right| < \frac{2}{\sqrt{n}}$

$\forall \varepsilon>0$，取 $N=\left[\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2\right]+1\in\mathbb{N}^*$，$n>N$ 时 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

作业 P38 1. (7) (8) 2. (3) (5) 5. 6 (后面用)

7.