目　录

第1章 行列式及其应用

1.1 对称群与行列式定义

设X是一个有限集合, $S(X) = \{\sigma : X \to X \mid \sigma$是双射$\}$表示所有双射$X \to X$的集合, 则映射的合成定义了$S(X)$上的一个乘法: $\forall \sigma, \pi \in S(X), \sigma \cdot \pi : X \to X$表示映射$\sigma : X \to X$与$\pi : X \to X$的合成映射. 不难验证$S(X)$关于上述乘法成一个群. 即

定理 1.1.1 设$S(X) \times S(X) \to S(X), (\sigma, \pi) \mapsto \sigma \cdot \pi$是映射合成定义的乘法, 则:
(1)$\forall \sigma, \pi, \tau \in S(X), \quad (\sigma \cdot \pi) \cdot \tau = \sigma \cdot (\pi \cdot \tau)$ (结合律).
(2)如果$e : X \to X$表示恒等映射, 则$\forall \sigma \in S(X)$, 有

$$e \cdot \sigma = \sigma \cdot e = \sigma \quad (\text{单位元的存在性}).$$

(3)$\forall \sigma \in S(X)$, 存在(逆映射) $\sigma^{-1} \in S(X)$, 使

$$\sigma \cdot \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \sigma = e \quad (\text{每个元素均可逆}).$$

如果$|X| = n$, 无妨设$X = \{1, 2, 3, ..., n\}$ (将$1, 2, 3, ..., n$分别理解为元素1, 元素2, 元素3, ..., 元素n等). 则一个双射$\sigma : X \to X$ 等价于“给1, 2, 3, ..., n一个排列$\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)$”. 我们可将双射$\sigma : X \to X$表示为:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

其中$i_1 = \sigma(1), i_2 = \sigma(2), ..., i_n = \sigma(n)$,且用$S_n$表示$S(X)$.

定义 1.1.1 S_n和映射的合成运算一起称为n阶对称群(也成n 阶置换群).

S_n中有一些特殊的双射$\sigma : X \to X$. 举例如下:

例 1.1.1 (对换) $\sigma : X \to X$, 将i映到j, 将j映到i. 但将其他元素保持不动. 即:

$$\sigma(i) = j,\ \sigma(j) = i,\ \text{但}\ \sigma(k) = k,\ \text{如果}\ k \neq i, j.$$

这样的双射记为$\sigma = (i\,j)$, 称为一个对换.

例 1.1.2 (r-循环) 设$i_1, i_2, ..., i_r \in X$是两两不同的元素. 双射$\sigma : X \to X$定义为:$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, ..., \sigma(i_{r-1}) = i_r, \sigma(i_r) = i_1, \sigma(j) = j$ 如果$j \notin \{i_1, i_2, ..., i_r\}$, 则称这样的双射$\sigma$为$r$- 循环, 记为$\sigma = (i_1, i_2, ..., i_r)$.

显然, 对换就是一个2-循环.

对任意$\sigma \in S_n$和$m \in \mathbb{Z}$, 如果$m > 0$, 我们约定:

$$\sigma^m = \overbrace{\sigma \cdot \sigma \cdots \sigma}^{m}.$$

如果$m = 0$, 则约定$\sigma^m = e$ ($e \in S_n$是单位元). 如果$m < 0$, 则约定$\sigma^m = (\sigma^{-1})^{-m}$. 不难看出, 对任意整数$m, l \in \mathbb{Z}$, 有$\sigma^m \cdot \sigma^l = \sigma^{m+l}$.

引理 1.1.1 对任意$\sigma \in S_n$, 存在$m > 0$使

$$\sigma^m = e.$$

证明: 由于S_n是有限集(事实上, $|S_n| = n!$), 则一定存在$l_1 \neq l_2$使$\sigma^{l_1} = \sigma^{l_2}$ (无妨设$l_1 > l_2$). 所以$\sigma^{l_1 - l_2} = e$. ($m = l_1 - l_2 > 0$) □

定义 1.1.2 对$\sigma \in S_n$, 使$\sigma^m = e$的最小正整数m称为σ的阶.

例 1.1.3 如果$\sigma = (i_1, i_2, ..., i_r)$是一个$r$-循环, 则$\sigma$的阶是$r$. σ可表示为$\sigma = (i_1, \sigma(i_1), \sigma^2(i_1), ..., \sigma^{r-1}(i_1))$.

定义 1.1.3 对任意r-循环$\sigma = (i_1, i_2, \cdots, i_r)$, 子集合$\{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \subset X$ 称为σ的支撑集(support set). 两个循环$\sigma = (i_1, i_2, \cdots, i_r)$ 和$\tau = (j_1, j_2, \cdots, j_l)$称为不相交. 如果它们的支撑集不相交. (*i.e.* $\{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \cap \{j_1, j_2, ..., j_l\} = \varnothing$)

引理 1.1.2 如果$\sigma, \tau \in S_n$是不相交循环, 则$\sigma \cdot \tau = \tau \cdot \sigma$.

证明: 令$\sigma = (i_1, i_2, \cdots, i_r), \tau = (j_1, j_2, \cdots, j_l)$. 则

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \cap \{j_1, j_2, \cdots, j_l\} = \varnothing.$$

为证$\sigma \cdot \tau = \tau \cdot \sigma$, 只需证明: $\forall j \in X,\ \sigma \cdot \tau(j) = \tau \cdot \sigma(j)$.

如果$j \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \cup \{j_1, j_2, \cdots, j_l\}$, 则显然$\sigma \cdot \tau(j) = j = \tau \cdot \sigma(j)$. 否则, 无妨设$j \in \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$(此时必有$j \notin \{j_1, \cdots, j_l\}$). 从而$\tau_j = j, \sigma(j) \in \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$($\Rightarrow$ $\sigma(j) \notin \{j_1, \cdots, j_l\}$). 所以有$\tau \cdot \sigma(j) = \tau(\sigma(j)) = \sigma(j) = \sigma \cdot \tau(j)$. □

引理 1.1.3 S_n中的每个元素都可写成不相交循环的乘积.

证明: 设$f: X \to X$是一个双射, 无妨设 f 不是恒等映射.(*i.e.* $f \in S_n$, 且 $f \neq e$). 我们将对 $n = |X|$ 做数学归纳法.

如果 $n = |X| = 1$, 则 $S_n = \{e\}$, 结论成立. (可将e看成1-循环).

如果$n = |X| = 2$, 则$S_n = \{(1), (1,2)\}$. 即S_n中的每个元素要么是$e = (1)$, 要么是2-循环$(1,2)$.

设结论对所有满足$|X'| < n$的集合X'成立（归纳假设）. 如果 $|X| = n$, $f: X \to X$ 是非恒等映射的双射, 则存在 $i_1 \in X$, 使$f(i_1) \neq i_1$. 集合$\{i_1, f(i_1), f^2(i_1), \cdots, f^k(i_1), \cdots\} \subset X$是一个有限子集, 所以存在 $l \neq k$ 使 $f^l(i_1) = f^k(i_1)$ (无妨设 $l > k$), 即

$$f^{l-k}(i_1) = i_1. \ (l - k > 0).$$

令r是使$f^r(i_1) = i_1$的最小正整数. *i.e.* $r = \min\{m > 0 \mid f^m(i_1) = i_1\}$. 则$i_1, f(i_1), \cdots, f^{r-1}(i_1)$是$X$中的两两不同的元素(否则, 存在$n_1, n_2 \leq r - 1$使$f^{n_1}(i_1) = f^{n_2}(i_1)$, *i.e.*$f^{n_1-n_2}(i_1) = i_1$, 且$n_1 - n_2 < r$).

令$i_2 = f(i_1), i_3 = f^2(i_1), \cdots, i_r = f^{r-1}(i_1), \sigma_1 = (i_1, i_2, \cdots, i_r) \in S_n$是$r$-循环. 则双射$f: X \to X$ 与双射$\sigma_1: X_1 \to X$在子集合$X_1 = \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$上相同, 即

$$f(i_1) = \sigma_1(i_1), f(i_2) = \sigma_1(i_2), \cdots, f(i_r) = \sigma_1(i_r).$$

令$X' = X \backslash X_1$, 则$\forall j \in X', f(j) \in X'$, 所以映射$g = f|_{X'}: X' \to X'$(定义为:$\forall j \in X', g(j) = f(j)$)是一个双射. 由归纳假设,

$$g = \sigma'_2 \cdot \sigma'_3 \cdots \sigma'_t,$$

其中$\sigma'_i: X' \to X'$是r_i-循环. 将每个$\sigma'_i: X' \to X'$扩充成双射$\sigma_i: X \to X: \forall j \in X$, 定义:

$$\sigma_i(j) = \begin{cases} j & j \in X_1 \\ \sigma'_i(j) & j \in X' \end{cases}$$

(注意$X = X_1 \cup X'$, 且$X_1 \cap X' = \varnothing$). 则$f = \sigma_1 \cdots \sigma_t$. 事实上, $\forall j \in X$, 如果$j \in X_1$则$\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_t(j) = \sigma_1(j) = f(j)$. 如果 $j \in X'$, 则

$$\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_t(j) = \sigma_1(\sigma'_2\sigma'_3 \cdots \sigma'_t(j)) = \sigma_1(g(j)) = \sigma_1(f(j)) = f(j).$$

□

例 1.1.4 将$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in S_7$分解成不相交循环的乘积.

解: 由于$\pi_1 = 5, \pi^2(1) = \pi(5) = 3, \pi^3(1) = \pi(3) = 1$, 所以$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \pi_1$, 其中$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 7 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

又由于$\pi_1(2) = 4, \pi_1^2(2) = \pi_1(4) = 7, \pi_1^3(2) = \pi_1(7) = 2$, 所以$\pi_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \pi_2$, 其中$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = e$. 因此, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

定理 1.1.2 S_n中每个元素可唯一分解成不相交循环的乘积, 即: $\forall \pi \in S_n, \pi \neq e$,则

(1)$\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdots \pi_t$, 其中$\pi_i$是$r_i$-循环($r_i \geq 2$).

(2)如果$\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdots \pi_t = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_s$, 其中$\pi_i, \sigma_i$都是长度大于1的循环.($r$- 循环$\sigma$的长度$l(\sigma)$定义为$r$).则$t = s$, 且适当排序后, $\pi_i = \sigma_i (i = 1, \cdots, t)$.

证明: (1)就是引理 1.1.3. 只需证明(2)(即分解的唯一性).

如果$\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdots \pi_t = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_s$, 我们只需证明: 存在$\sigma_j$使$\pi_1 = \sigma_j$. 无妨设$\pi_1 = (i_1, \pi_1(i_1), \cdots, \pi_1^{r_1-1}(i_1))$. 由于$\pi(i_1) \neq i_1$, 一定存在$\sigma_j$使$\sigma_j(i_1) \neq i_1 (\Rightarrow \sigma_i(i_1) = i_1$对任意$\sigma_i \neq \sigma_j)$. 所以对任意$k > 0$, 有

$$\pi_1^k(i_1) = \pi_1^k(\pi_2^k \pi_3^k \cdots \pi_t^k(i_1)) = \pi^k(i_1) = \sigma_j^k(\sigma_1^k \cdots \sigma_{j-1}^k \sigma_{j+1}^k \cdots \sigma_s^k(i_1)) = \sigma_j^k(i_1).$$

由此推出$\pi_1 = \sigma_j$. □

S_n中的每个元素由$1, 2, \cdots, n$的一个排列$i_1, i_2, \cdots, i_n$确定, 而这样一个排列总可以通过有限次对换得到. 所以直观上, 下面的引理是显然的.

引理 1.1.4 S_n中每个元素可写成有限个对换的乘积.

证明: 由于S_n中的每个元素可写成不相交循环的乘积, 只需证明:任意r-循环$(i_1\ i_2\ \cdots\ i_r)$可写成对换的乘积. 但这是显然的:$(i_1\ i_2\ \cdots\ i_r) = (i_1\ i_2) \cdots (i_2\ i_3) \cdots (i_{r-1}\ i_r)$. □

S_n中元素的对换分解没有唯一性. 例如:

$$e = (1\ 2) \cdot (1\ 2) = (2\ 3) \cdot (2\ 3) = (i\ j) \cdot (i\ j).$$

稍微非平凡一点的例子如下:

$$(3\ 2) = (1\ 3)(1\ 2)(1\ 3) = (2\ 4)(3\ 4)(2\ 4).$$

但是, 对于给定的$\pi \in S_n$,π的任何两个对换分解中对换出现的次数有相同的奇偶性:

定理 1.1.3 对任意$\pi \in S_n$, 如果

$$\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdots \pi_s = \sigma_1 \cdots \sigma_t$$

是两个对换分解($i.e. \pi_i, \sigma_i$是对换), 则$s + t$是偶数.($i.e.$ s, t有相同奇偶性).

(定理证明过于繁琐, 省略).

定义 1.1.4 对任意$\pi \in S_n$, 如果$\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdots \pi_s$是一个对换分解($\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_s$中可以有相同的对换). 则

$$\varepsilon_\pi = (-1)^s$$

称为π的符号. 如果$\varepsilon_\pi = 1$, 则称π为偶置换. 否则π称为奇置换. ($i.e.$ $\varepsilon_\pi = -1$).

引理 1.1.5 对任意$\pi, \sigma \in S_n$, $\varepsilon_{\pi\cdot\sigma} = \varepsilon_\pi \cdot \varepsilon_\sigma$. 如果$\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdots \pi_s$是$\pi$ 的不相交循环分解. 则

$$\varepsilon_\pi = (-1)^{\sum_{i=1}^{s}(l(\pi_i)-1)}.$$

其中$l(\pi_i)$是π_i的长度($i.e.$ π_i 是$l(\pi_i)$-循环).

证明: $\varepsilon_{\pi\cdot\sigma} = \varepsilon_\pi \cdot \varepsilon_\sigma$ 由定义可得. 而$\varepsilon_\pi = (-1)^{\sum_{i=1}^{s}(l(\pi_i)-1)}$ 可由$(i_1\ i_2\ \cdots\ i_r) = (i_1\ i_2)\cdots(i_2\ i_3)\cdots(i_{r-1}\ i_r)$ 得到. □

行列式可以对系数a_{ij}在一般交换环$\mathbb{R}$中的矩阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$定义. 对于初学者, 我们不妨假设$\mathbb{R}$表示: 整数环$\mathbb{Z}$, 多项式环$\mathbb{K}[x]$或域$\mathbb{K}$. 而

$$M_n(\mathbb{R}) = \{A = (a_{ij})_{n\times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\}$$

表示系数a_{ij}在$\mathbb{R}$中的全体方阵的集合, 同样可以定义矩阵的加法, 乘法和数乘法: $\forall A = (a_{ij})_{n\times n}, B = (b_{ij})_{n\times n}, \lambda \in \mathbb{R}$, 定义:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n\times n}, \quad \lambda A = (\lambda a_{ij})_{n\times n}$$

和

$$AB = (c_{ij})_{n\times n}, \ \ c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

定义 1.1.5 $|A| = \sum_{\pi\in S_n} \varepsilon_\pi a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)} \in \mathbb{R}$称为矩阵$A \in M_n(\mathbb{R})$的行列式. (有时也用$\det(A)$表示$A$的行列式), 其中$\varepsilon_\pi$是置换$\pi$的符号.

例 1.1.5 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\pi\in S_2} \varepsilon_\pi a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\pi\in S_3} \varepsilon_\pi a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}a_{3\pi(3)}$, S_3共 有6个 置 换: $S_3 = \{(1),(1\ \ 2),(1\ \ 3),(2\ \ 3),(1\ \ 2)(1\ \ 3),(1\ \ 2)(2\ \ 3)\}$. 所 以$\sum_{\pi\in S_3} \varepsilon_\pi a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}a_{3\pi(3)} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$.

例 1.1.6 设$A = diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$是对角矩阵, 则

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

引理 1.1.6 设$A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$,${}^tA$表示$A$的转置矩阵, 则$|A| = |{}^tA|$.

证明: 令${}^tA = (b_{ij})_{n\times n}$, 则$b_{ij} = a_{ji}$. 所以

$$|{}^tA| = \sum_{\pi\in S_n} \varepsilon_\pi b_{1\pi(1)}b_{2\pi(2)}\cdots b_{n\pi(n)} = \sum_{\pi\in S_n} \varepsilon_\pi a_{\pi(1)1}a_{\pi(2)2}\cdots a_{\pi(n)n}.$$

但是$\mathbb{R}$中的乘法满足交换律, 所以

$$a_{\pi(1)1}a_{\pi(2)2}\cdots a_{\pi(n)n} = a_{1\pi^{-1}(1)}a_{2\pi^{-1}(2)}\cdots a_{n\pi^{-1}(n)}.$$

(π^{-1}表示π的逆). 由于$\varepsilon_\pi = \varepsilon_{\pi^{-1}}$, 且$\pi \mapsto \pi^{-1}$定义了$S_n$之间的双射. 所以

$$\sum_{\pi\in S_n} \varepsilon_\pi a_{\pi(1)1}a_{\pi(2)2}\cdots a_{\pi(n)n} = \sum_{\pi^{-1}\in S_n} \varepsilon_{\pi^{-1}} a_{1\pi^{-1}(1)}a_{2\pi^{-1}(2)}\cdots a_{n\pi^{-1}(n)} = |A|.$$

□

习题3.1

1.将$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$分解成不相交循环的积, 并求$\varepsilon_\pi$.

2.证明:S_n中任意置换都可写成形如$(1\ 2), (1\ 3), \cdots, (1\ n)$的对换的乘积.

3.设$\pi, \sigma \in S_n$, 如果σ是长度为r 的循环, 证明: $\pi\sigma\pi^{-1}$也是长为r的循环.

4.证明: 任意偶置换都是形如$(1\,2\,3), (1\,2\,4), \cdots, (1\,2\,n)$的3-循环的积.

5.设$A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R}), \sigma \in S_n$, 证明:

$$\sum_{\pi\in S_n} \varepsilon_\pi a_{\sigma(1)\pi(1)} \cdot \sigma_{\sigma(2)\pi(2)} \cdots a_{\sigma(n)\pi(n)} = \varepsilon_\sigma |A|.$$

1.2 行列式的基本性质

行列式可看成关于矩阵的函数$det : M_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$. 如果将矩阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$写成:

$$A = (A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}) = [A_{(1)}, A_{(2)}, \cdots, A_{(n)}],$$

其中$A^{(i)}, A_{(j)}$分别表A的列向量和行向量, 则

$$|A| = det(A) = det(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}), |A| = det(A) = det[A_{(1)}, A_{(2)}, \cdots, A_{(n)}]$$

可分别看成关于列向量$A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}$或行向量$A_{(1)}, \cdots, A_{(n)}$的函数:

$$det : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{n} \to R,$$

$$(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}) \mapsto det(A^{(1)}, A^{(2)}, ..., A^{(n)}) = |A|$$

$$det : \overbrace{{}^tV \times \cdots \times^t V}^{n} \to R,$$

$$[A_{(1)}, A_{(2)}, \cdots, A_{(n)}] \mapsto det[A_{(1)}, A_{(2)}, ..., A_{(n)}].$$

其中$V = \mathbb{R}^n$是所有列向量的集合, 而${}^tV$是所有行向量的集合.

定义 1.2.1 函数$f : \overbrace{V \times V \cdots \times V}^{n} \to R$称为对称函数, 如果$\forall \pi \in S_n$, 有$f(X_1, X_2, \cdots, X_n) = f(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots, X_{\pi(n)})$. $f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$称为反对称函数, 如果, $\forall \pi \in S_n$, 有

$$f(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots, X_{\pi(n)}) = \varepsilon_\pi f(X_1, X_2, \cdots, X_n).$$

其中ε_π是π的符号.

引理 1.2.1 $det(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)})$(或$det[A_{(1)}, A_{(2)}, \cdots, A_{(n)}]$)是反对称函数, 即: $\forall \pi \in S_n$有

$$det(A^{(\pi(1))}, A^{(\pi(2))}, \cdots, A^{(\pi(n))}) = \varepsilon_\pi det(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}).$$

$$det[A_{(\pi(1))}, A_{(\pi(2))}, \cdots, A_{(\pi(n))}] = \varepsilon_\pi det[A_{(1)}, A_{(2)}, \cdots, A_{(n)}].$$

其中ε_π是π的符号.

证明: 只需证明其中一个等式(另一个是类似的):

$$det[A_{(\pi(1))},A_{(\pi(2))},\cdots,A_{(\pi(n))}]=\varepsilon_\pi det[A_{(1)},A_{(2)},\cdots,A_{(n)}].$$

由行列式定义可得:

$$\begin{aligned}det[A_{(\pi(1))},A_{(\pi(2))},\cdots,A_{(\pi(n))}]&=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon_\sigma a_{(\pi(1)\sigma(1))}\cdot a_{(\pi(2)\sigma(2))}\cdots a_{(\pi(n)\sigma(n))}\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon_\sigma a_{1\sigma\pi^{-1}(1)}a_{2\sigma\pi^{-1}(2)}\cdots a_{n\sigma\pi^{-1}(n)}\\&=\varepsilon_\pi\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon_{\sigma\pi^{-1}}a_{1\sigma\pi^{-1}(1)}a_{2\sigma\pi^{-1}(2)}\cdots a_{n\sigma\pi^{-1}(n)}=\varepsilon_\pi|A|\\&=\varepsilon_\pi det[A_{(1)},A_{(2)},\cdots,A_{(n)}].\end{aligned}$$

□

定义 1.2.2 函数$f:\overbrace{V\times V\times V\cdots\times V}^{n}\to R$称为多重线性函数. 如果$f(X_1,X_2,\cdots,X_n)$关于每个变量$X_i$是线性的, 即:$\forall\lambda,\mu\in R,X,Y\in V$, 有:$f(X_1,\cdots,X_{i-1},\lambda X+\mu Y,X_{i+1},\cdots,X_n)=\lambda f(X_1,\cdots,X_{i-1},X,X_{i+1},\cdots,X_n)+\mu f(X_1,\cdots,X_{i-1},Y,X_{i+1},\cdots,X_n)$. 其中$1\le i\le n$.

引理 1.2.2 函数$det(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)})$(或$det[A_{(1)},\cdots,A_{(n)}]$)是多重线性函数. 即: $\forall\lambda,\mu\in R,B^{(i)},C^{(i)}\in V$,

$$det(A^{(1)},\cdots,A^{(i-1)},\lambda B^{(i)}+\mu C^{(i)},A^{(i+1)},\cdots,A^{(n)})=\lambda det(A^{(1)},\cdots,A^{(i-1)},B^{(i)},A^{(i+1)},\cdots,A^{(n)})$$
$$+\mu det(A^{(1)},\cdots,A^{(i-1)},C^{(i)},A^{(i+1)},\cdots,A^{(n)})$$

$$det[A_{(1)},\cdots,A_{(i-1)},\lambda A'_{(i)}+\mu A''_{(i)},A_{(i+1)},\cdots,A_{(n)}]=\lambda det[A_{(1)},\cdots,A_{(i-1)},A'_{(i)},A_{(i+1)},\cdots,A_{(n)}]$$
$$+\mu det[A_{(1)},\cdots,A_{(i-1)},A''_{(i)},A_{(i+1)},\cdots,A_{(n)}].$$

证明: 只需证明其中一个等式, 即$det[A_{(1)},\cdots,A_{(n)}]$是关于行向量$A_{(1)},\cdots,A_{(n)}$的多重线性函数:对任意$1\le i\le n$, 如果$A_{(i)}=\lambda A'_{(i)}+\mu A''_{(i)}$(其中$A'_{(i)}=(a'_{i1},\cdots,a'_{in}),A''_{(i)}=(a''_{i1},\cdots,a''_{in})$), 则$det[A_{(1)},\cdots,A_{(i)},\cdots,A_{(n)}]=\sum_{\pi\in S_n}\varepsilon_\pi a_{1\pi(1)}\cdots a_{i-1\pi(i-1)}\cdot(\lambda a'_{i\pi(i)}+\mu a''_{i\pi(i)})\cdots a_{n\pi(n)}=\lambda det[A_{(1)},\cdots,A'_{(i)},\cdots,A_{(n)}]+\mu det[A_{(1)},\cdots,A''_{(i)},\cdots,A_{(n)}]$. □

定理 1.2.1 (行列式基本性质)

D1:$det[A_{(1)},\cdots,A_{(n)}]$是关于行向量的反对称函数.

D2:$det[A_{(1)},\cdots,A_{(n)}]$是关于行向量的多重线性函数.

D3:$det(I_n) = det[I_{(1)}, \cdots, I_{(n)}] = 1$, 其中$I_{(n)} = [I_{(1)}, \cdots, I_{(n)}]$是单位矩阵.
上述结论对列向量仍然成立.

证明: D1,D2就引理 1.2.1, 引理 1.2.2, D3由定义直接得出. □

推论 1.2.1 基本性质D1,D2有下列推论:
D4:$\forall \lambda \in R, det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.
D5:如果A的某一行为0, 则$det(A) = 0$.
D6:如果A中有两行相同, 则$det(A) = 0$.
D7:如果对A的行向量施行初等变换(II), 则$det(A)$保持不变, *i.e.* $\forall \lambda \in R, i \neq j$, 则:

$$det(A) = det[A_{(1)}, \cdots, A_{(i)}, \cdots, A_{(j)}, \cdots, A_{(n)}] = det[A_{(1)}, \cdots, A_{(i)}, \cdots, A_{(j)} + \lambda A_{(i)}, \cdots, A_{(n)}].$$

证明: $D2 \Rightarrow D4$和$D5, D2$和$D6 \Rightarrow D7$. 下面证明$D6$: 如果$A_{(i)} = A_{(j)}$, 则(交换$A_{(i)}, A_{(j)}$次序,矩阵A不变)$[A_{(1)}, \cdots, A_{(i)}, \cdots, A_{(j)}, \cdots, A_{(n)}] = [A_{(1)}, \cdots, A_{(j)}, \cdots, A_{(i)}, \cdots, A_{(n)}]$, 所以$|A| = det[A_{(1)}, \cdots, A_{(i)}, \cdots, A_{(j)}, \cdots, A_{(n)}] = det[A_{(1)}, \cdots, A_{(j)}, \cdots, A_i, \cdots, A_{(n)}]$ 由D1得:$det[A_{(1)}, \cdots, A_{(j)}, \cdots, A_{(i)}, \cdots, A_{(n)}] = -det[A_{(1)}, \cdots, A_{(i)}, \cdots, A_{(j)}, \cdots, A_{(n}] = -det(A)$, 即$2det(A) = 0$.($2det(A) = 0 \Rightarrow det(A) = 0$在很多情况下是成立的!但是$\cdots$).
下面我们直接用行列式定义证明D6: 令$A_n = \{\pi \in S_n \mid \varepsilon_\pi = 1\}$是所有偶置换的集合, 则$\overline{A}_n = S_n \backslash A_n$是所有奇置换的集合: $\overline{A}_n = \{\pi \in S_n \mid \varepsilon_\pi = -1\}$. 令$\sigma = (i\ j) \in S_n$, 则映射$A_n \mapsto \overline{A}_n, \pi \mapsto \pi\sigma$是双射.

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon_\pi a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots a_{i\pi(i)} \cdots a_{j\pi(j)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in A_n} a_{1\pi(1)} \cdots a_{i\pi(i)} \cdots a_{j\pi(j)} \cdots a_{n\pi(n)} - \sum_{\tau \in \overline{A}_n} a_{1\tau(1)} \cdots a_{i\tau(i)} \cdots a_{j\tau(j)} \cdots a_{n\tau(n)} \end{aligned}$$

由于$\pi \mapsto \pi\sigma$定义了双射$A_n \mapsto \overline{A}_n$, 所以

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in \overline{A}_n} a_{1\tau(1)} \cdots a_{i\tau(i)} \cdots a_{j\tau(j)} \cdots a_{n\tau(n)} &= \sum_{\pi \in A_n} a_{1\pi\sigma(1)} \cdots a_{i\pi\sigma(i)} \cdots a_{j\pi\sigma(j)} \cdots a_{n\pi\sigma(n)} \\ &= \sum_{\pi \in A_n} a_{1\pi(1)} \cdots a_{i\pi(j)} \cdots a_{j\pi(i)} \cdots a_{n\pi(n)}. \end{aligned}$$

(注意:$\sigma = (i\ j)$)
由于$A_{(i)} = A_{(j)}$, 所以$a_{i\pi(j)} = a_{j\pi(j)}, a_{j\pi(i)} = a_{i\pi(i)}$. 从而

$$a_{1\pi(1)} \cdots a_{i\pi(j)} \cdots a_{j\pi(i)} \cdots a_{n\pi(n)} = a_{1\pi(1)} \cdots a_{j\pi(j)} \cdots a_{i\pi(i)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

$$= a_{1\pi(1)}\cdots a_{i\pi(i)}\cdots a_{j\pi(j)}\cdots a_{n\pi(n)}.$$

因此$\sum_{\tau\in\bar{A}_n} a_{1\tau(1)}\cdots a_{n\tau(n)} = \sum_{\pi\in A_n} a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}$.即:$det(A) = 0$. □

注记:上述的结论“列向量”也成立. 下面我们考虑任意函数$D : M_n(R) \to R$, 如果它也满足性质D1,D2,D3, 则D必为行列式函数. 所以D1,D2,D3称为行列式的基本性质.

引理 1.2.3 设R满足: $\forall a \in R, a \neq 0 \Rightarrow a + a \neq 0$, 称$R$的特征$\neq 2$. 函数$D : M_n(R) \to R$ 满足D1, D2, 则$D[A_{(1)}, \cdots, A_{(n)}]$满足D4, D5, D6, D7.

证明: $D2 \Rightarrow D4$和$D5$:

$$\begin{aligned}
D(\lambda A) &= D[\lambda A_{(1)}, \cdots, \lambda A_{(n)}] \\
&= \lambda D[A_{(1)}, \lambda A_{(2)}, \cdots, \lambda A_{(n)}] \\
&= \lambda^2 D[A_{(1)}, A_{(2)}, \cdots, \lambda A_{(n)}] \\
&= \cdots \\
&= \lambda^n D[A_{(1)}, \cdots, A_{(n)}].
\end{aligned}$$

如果$A_{(i)} = 0$, 则$D[A_{(1)}, \cdots, A_{(i)}, \cdots, A_{(n)}] = D[A_{(1)}, \cdots, 0 \cdot A_{(i)}, \cdots, A_{(n)}] = 0 \cdot D[A_{(1)}, \cdots, A_{(i)}, \cdots, A_{(n)}] = 0$.

$D1 \Rightarrow D6$: 如果$A_{(i)} = A_{(j)}, (i \neq j)$, 由D1, 有

$$\begin{aligned}
D(A) &= D[A_{(1)}, \cdots, A_{(i)}, \cdots, A_{(j)}, \cdots, A_{(n)}] \\
&= -D[A_{(1)}, \cdots, A_{(j)}, \cdots, A_{(i)}, \cdots, A_{(n)}] \\
&= D(A)
\end{aligned}$$

(由$A_{(i)} = A_{(j)}$). 所以$D(A) + D(A) = 0$, 由R满足的条件, 得$D(A) = 0$.

$D2 + D6 \Rightarrow D7$:$\forall \lambda \in R$, $D[A_{(1)}, \cdots, A_{(i)}, \cdots, A_{(j)} + \lambda A_{(i)}, \cdots, A_{(n)}] = D[A_{(1)}, \cdots, A_{(i)}, \cdots, A_{(j)}, \cdots, A_{(n)}] + \lambda D[A_{(1)}, \cdots, A_{(i)}, \cdots, A_{(j)}, \cdots, A_{(n)}] = D[A_{(1)}, \cdots, A_{(i)}, \cdots, A_{(j)}, \cdots, A_{(n)}] = D(A)$. □

推论 1.2.2 设$D : M_n(R) \to R$是一个满足D1,D2的函数($i.e.$ $D[A_{(1)}, \cdots, A_{(n)}]$是一

个关于$A_{(1)},\cdots,A_{(n)}$的反对称多重线性函数). 则对任意形如

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}\overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \cdots & \overline{a}_{1n}\\ 0 & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \overline{a}_{nn}\end{pmatrix}$$

的矩阵(称为n阶上三角矩阵), 有$D(\overline{A})=\overline{a}_{11}\overline{a}_{22}\cdots\overline{a}_{nn}D(I_n)$, 其中$I_n$ 是n阶单位矩阵.

证明： 设$I_n=[e_1,e_2,\cdots,e_n]$, 其中$e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)\in R^n$. 则$\overline{A}_{(1)}=\sum_{j=1}^n\overline{a}_{1j}e_j, A_{(2)}=\sum_{j=2}^n\overline{a}_{2j}e_j,\cdots,\overline{A}_{(n-1)}=\overline{a}_{n-1n-1}e_{n-1}+\overline{a}_{n-1n}e_n,\overline{A}_{(n)}=\overline{a}_{nn}e_n$. 所以

$$\begin{aligned}D(\overline{A})&=D[\overline{A}_{(1)},\overline{A}_{(2)},\cdots,\overline{A}_{(n-1)},\overline{A}_{(n)}]\\&=\overline{a}_{nn}D[\overline{A}_{(1)},\overline{A}_{(2)},\cdots,\overline{A}_{(n-1)},e_n]\\&=\overline{a}_{nn}D[\overline{A}_{(1)},\cdots,\overline{a}_{n-1n-1}e_{n-1}+\overline{a}_{n-1n}e_n,e_n]\\&=\overline{a}_{nn}D[\overline{A}_{(1)},\cdots,\overline{a}_{n-1n-1}e_{n-1},e_n]\\&=\overline{a}_{nn}\overline{a}_{n-1n-1}D[\overline{A}_{(1)},\cdots,\overline{A}_{(n-2)},e_{n-1},e_n]\\&=\cdots\\&=\overline{a}_{nn}\overline{a}_{n-1n-1}\cdots\overline{a}_{22}\overline{a}_{11}D[e_1,\cdots,e_n]\\&=\overline{a}_{11}\overline{a}_{22}\cdots\overline{a}_{nn}D(I_n).\end{aligned}$$

□

推论 1.2.3 对任意上三角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\in M_n(R)$$

有$det(A)=|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

推论 1.2.4 (行列式计算方法):$\forall A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_n(R)$. 如果$R$是一个域, 则可通

过对行向量的初等变换(I) 和初等变换(II) 将A化为上三角矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}\overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \cdots & \overline{a}_{1n}\\ 0 & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \overline{a}_{nn}\end{pmatrix}.$$

如果在上述过程中, 施行了q次初等变换(I), 则$det(A)=(-1)^q\overline{a}_{11}\cdots\overline{a}_{nn}$.

定理 1.2.2 设$D:M_n(R)\to R$是任意函数, 如果$D[A_{(1)},\cdots,A_{(n)}]$满足:

D1(反对称性):

$D[A_{(1)},\cdots,A_{(t)},\cdots,A_{(s)},\cdots,A_{(n)}]=-D[A_{(1)},\cdots,A_{(s)},\cdots,A_{(t)},\cdots,A_{(n)}]$

D2(多重线性): $\forall 1\le t\le n,\lambda,\mu\in R$, 有$D[A_{(1)},\cdots,\lambda A'_{(t)}+\mu A''_{(t)},\cdots,A_{(n)}]=\lambda D[A_{(1)},\cdots,A'_{(t)},\cdots,A_{(n)}]+\mu D[A_{(1)},\cdots,A''_{(t)},\cdots,A_{(n)}]$,

则当R是一个特征不等于2的域时, 对任意矩阵$A\in M_n(R)$有

$$D(A)=D(I_n)det(A).$$

($i.e.$ 函数$D:M_n(R)\to R$与行列式函数$det:M_n(R)\to R$相差一个常数$D(I_n)$: $D(\cdot)=D(I_n)det(\cdot)$).

证明: 当R是一个域时, $\forall A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_n(R)$, 通过对$A$的行向量施行若干次初等变换(I)和初等变换(II), 可将A化为上三角形

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}\overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \cdots & \overline{a}_{1n}\\ 0 & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \overline{a}_{nn}\end{pmatrix}.$$

如果在上述过程中施行了q次初等变换(I), 则

$$D(A)=(-1)^qD(\overline{A}).$$

(由条件$D1,D2\Rightarrow D7$).

由推论 1.2.2和推论 1.2.3: $D(\overline{A})=\overline{a}_{11}\cdot\overline{a}_{22}\cdots\overline{a}_{nn}D(I_n),det(\overline{A})=\overline{a}_{11}\overline{a}_{22}\overline{a}_{nn}$.

由推论 1.2.4: $det(A)=(-1)^qdet(\overline{A})$. 所以$D(A)=D(I_n)det(A)$. □

推论 1.2.5 设$D:M_n(R)\to R$是任意函数, 如果它满足性质:D1, D2, D3, 则

当R是一个特征$\neq 2$的域时, 有

$$D(A) = det(A), \forall A \in M_n(R)$$

($i.e.$ 性质$D1, D2, D3$唯一确定函数$det : M_n(R) \to R$).

下面我们利用这一刻画证明行列式的一个重要性质, 称为行列式的乘法性质. 由于定理 1.2.2对R有一定的要求, 这里我们只对特殊的R证明. 以后将对一般情形给出另一个证明.

定理 1.2.3 设R是一个特征不等于2的域($i.e. 1 + 1 \neq 0$).则对任意$A, B \in M_n(R)$, 有$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.

证明: 固定$B = (B^{(1)}, B^{(2)}, \cdots, B^{(n)}) \in M_n(R)$. 定义函数$D_B : M_n(R) \to R, D_B(A) = det(A \cdot B)$. 可以验证函数$D_B$满足性质$D1, D2$:
D1(反对称性):交换$A = [A_{(1)}, \cdots, A_{(s)}, \cdots, A_{(t)}, \cdots, A_{(n)}]$中的第$s$行与第$t$行的位置, $A' = [A_{(1)}, \cdots, A_{(t)}, \cdots, A_{(s)}, \cdots, A_{(n)}]$, 需证$D_B(A') = det(A'B) = -det(AB) = D_B(A)$. 注意:矩阵$AB$的第$i$行$(AB)_{(i)} = A_{(i)} \cdot B$, 所以$A'B$是由交换$AB$中的第$s$行与第$t$行位置所得矩阵, 所以$det(A'B) = -det(AB)$.
D2(多重线性):

$$\begin{aligned}
D_B[A_{(1)}, \cdots, \lambda A'_{(t)} + \mu A''_{(t)} \cdot B, \cdots, A_{(n)}] &= det[A_{(1)} \cdot B, \cdots, (\lambda A'_{(t)} + \mu A''_{(t)}) \cdot B, \cdots, A_{(n)} \cdot B] \\
&= \lambda det([A_{(1)}, .., A'_{(t)}, .., A_{(n)}] \cdot B) + \mu det([A_{(1)}, .., A''_{(t)}, .., A_{(n)}] \cdot B) \\
&= \lambda D_B[A_{(1)}, \cdots, A'_{(t)}, \cdots, A_{(n)}] + \mu D_B[A_{(1)}, \cdots, A''_{(t)}, \cdots, A_{(n)}].
\end{aligned}$$

由定理 1.2.2, $D_B(A) = D_B(I_n) \cdot det(A), \forall A \in M_n(R)$, 所以$det(AB) = det(A)det(B)$. □

习题3.2

1.计算下列行列式.

(a) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$; (d) $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$.

2.不必计算行列式, 证明:下述四阶行列式可被1798, 2139, 3255, 4867的最大公因子整除.

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

.

3.设$A \in M_n(\mathbb{R})$($\mathbb{R}$表示实数域).证明:$det(A) \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$.

4.证明下列等式(其中$a \neq b$):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix} = n!; \quad \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

5.设$V = \mathbb{R}^n$是标准实向量空间, $V^m := \overbrace{V \times V \times \cdots \times V}^{m}$, 如果$f : V^m \to \mathbb{R}$是一个多重线性函数(或称$m$-重线性函数). 证明下列条件等价:

(a)f是反对称函数;

(b)如果存在$X_i = X_j (i \neq j)$, 则$f(X_1, X_2, \cdots, X_m) = 0$;

(c)如果$X_1, X_2, \cdots, X_m$线性相关, 则$f(X_1, X_2, \cdots, X_m) = 0$.

6.设$V = \mathbb{R}$. 一个函数$L : V \to \mathbb{R}$称为线性函数, 如果:$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, X, Y \in V$, 有$L(\lambda X + \mu Y) = \lambda L(X) + \mu L(Y)$.

证明:(1)存在线性函数$e_i^*: V\to\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n)$.使

$$e_i^*(e_j)=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases},$$

其中$e_1,e_2,\cdots,e_n\in V$是标准基.

(2)如果$f_1,f_2,\cdots,f_m$是V上的m个线性函数,则$f(X_1,\cdots,X_m)=f_1(X_1)\cdot f(X_2)\cdots f(X_m)$是$m$-重线性函数.

(3)如果$f: V^m\to\mathbb{R}$是一个m-重线性函数, $\forall\pi\in S_m$, 则函数$f^\pi(X_1,X_2,\cdots,X_m)=f(X_{\pi(1)},X_{\pi(2)},\cdots,X_{\pi(m)})$ 也是m-重线性函数.

(4)如果$f: V^m\to\mathbb{R}$是一个m-重线性函数,则函数$\Phi=\sum_{\pi\in S_m}\varepsilon_\pi f^\pi: V^m\to\mathbb{R}$, $\Phi(X_1,\cdots,X_m)=\sum_{\pi\in S_m}\varepsilon_\pi f(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(m)})$ 是一个反对称m-重线性函数.

(5)如果$m>n$, 则任意反对称m-重线性函数$V^m\to\mathbb{R}$ 必为零函数.

(6)设$\Phi: V^n\to\mathbb{R}$是一个反对称n-重线性函数, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in V$是一组基,对$V$中任意$n$个向量$X_1,X_2,\cdots,X_n$, 令$X_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_j\quad(1\leq i\leq n)$. 则$\Phi(X_1,X_2,\cdots,X_n)=(\sum_{\pi\in S_n}\varepsilon_\pi a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)})\Phi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

(7)对n-重线性函数$f(X_1,X_2,\cdots,X_n)=e_1^*(X_1)e_2^*(X_2)\cdots e_n^*(X_n)$(其中$e_i^*: V\to\mathbb{R}$是(1)中的线性函数), 令$\Delta=\sum_{\pi\in S_n}\varepsilon_\pi f^\pi: V^n\to\mathbb{R}$ 表示(4)中定义的反对称n-重线性函数, 则$\Delta(e_1,e_2,\cdots,e_n)=1$, 其中$e_1,e_2,\cdots,e_n\in V$是标准基.

(8)设$\Phi: V^n\to\mathbb{R}$是任意反对称n-重线性函数, 则任意$X_1,X_2,\cdots,X_n\in V$, 有

$$\Phi(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\Delta(X_1,X_2,\cdots,X_n)\cdot\Phi(e_1,e_2,\cdots,e_n).$$

注记:上述一系列练习表明行列式的定义不是凭空想出来的,而是在寻找: n-维向量空间V上的所有反对称n-重线性函数的过程中自然产生的,事实上,(7)中的函数Δ也记为$\Delta=e_1^*\wedge e_2^*\wedge\cdots e_n^*$(称为$e_1^*,e_2^*,\cdots,e_n^*$的外积), $\Delta(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 也称行列式函数. 必须说明的是V上的多重线性函数(张量积),对称多重线性函数(对称积)和反对称多重线性函数(外积)在物理,金融等众多领域有重要应用.

1.3 行列式展开与应用

前一节关于行列式性质的讨论都是针对其行向量,但不难看出所有对行向量成立的结论同样适用于列向量. 本节我们利用基本性质将一个n阶

行列式按行(或按列)展开, 从而将n阶行列式的研究转化成对$n-1$阶行列式的研究.

定义 1.3.1 对n阶矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_n(R)$, 去掉第$i$行与第$j$列, 令$M_{ij}$表示所得$n-1$阶矩阵的行列式, 则称$M_{ij}$是$A$对应于元素$a_{ij}$的子式. 而

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}\in R$$

则称为a_{ij}的代数余子式.

引理 1.3.1 如果

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则

$$|A|=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}=a_{11}A_{11}.$$

证明: $|A|=|{}^tA|=\sum_{\pi\in S_n}\varepsilon_\pi a_{\pi(1)1}\cdot a_{\pi(2)2}\cdots a_{\pi(n)n}$, 如果$\pi(1)\neq 1$, 则$a_{\pi(1)1}=0$, 所以$|A|=\sum_{\pi\in S_n,\pi(1)=1}\varepsilon_\pi a_{\pi(1)1}\cdot a_{\pi(2)2}\cdots a_{\pi(n)n}=a_{11}\sum_{\pi\in S_{n-1}}\varepsilon_\pi a_{\pi(2)2}\cdots a_{\pi(n)n}$, 其中$S_{n-1}$表示$\{2,3,\cdots,n\}$这$n-1$个数码的置换群, 因此

$$|A|=a_{11}M_{11}.$$

□

定理 1.3.1 设R是任意交换环, $A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_n(R)$, 则

$$|A|=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=\sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}(\text{按第}j\text{列展开})$$
$$|A|=\sum_{j=1}^n(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}(\text{按第}i\text{列展开})$$

证明: 仅证明按第j列展开. 对第j列应用性质D2:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

此处利用$A^{(j)} = [a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}] = \sum_{i=1}^{n}[0, \cdots, a_{ij}, \cdots, 0]$. 由性质D1得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ij} & a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij+1} \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{j-1} \cdot (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ 0 & a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}.$$

所以$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$(按第$j$列展开), 同理可证: $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$(按第$i$行展开). □

例 1.3.1 (范德蒙德行列式)(Vandermonde). 证明: 对任意$x_1, x_2, \cdots, x_n \in R$有

$$\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

证明: (数学归纳法): 当$n = 2$时, $A(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)$成立.

假设公式对$n-1$成立. 则依次将第$i-1$行乘$(-x_1)$ 加到第i行(i从n开始)可得:

$$\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_2x_1 & x_3^2 - x_3x_1 & \cdots & x_n^2 - x_nx_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2^i - x_2^{i-1}x_1 & x_3^i - x_3^{i-1}x_1 & \cdots & x_n^i - x_n^{i-1}x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2} - x_2^{n-3}x_1 & x_3^{n-2} - x_3^{n-3}x_1 & \cdots & x_n^{n-2} - x_n^{n-3}x_1 \\ 0 & x_2^{n-1} - x_2^{n-2}x_1 & x_3^{n-1} - x_3^{n-2}x_1 & \cdots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2}x_1 \end{vmatrix},$$

按第1列展开, 并从M_{11}的每列提出因子$x_2 - x_1, x_3 - x_1, \cdots, x_n - x_1$得:

$$\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$=(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\Delta(x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 由归纳假设可得结论. □

利用上述的行列式展开定理, 还可给出一个有逆矩阵的有趣公式.

定义 1.3.2 设R是任意交换环, $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(R)$, 则矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(R)$$

称为A的伴随矩阵.

引理 1.3.2 $AA^* = A^*A = |A| \cdot I_n = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$

证明: $AA^* = |A| \cdot I_n$等价于: 对任意i, j, 有

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \begin{pmatrix} A_{ji} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ |A| & i = j \end{cases}$$

$i = j$的情形就是定理 1.3.1中的按第i行展开

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = |A|.$$

如果$i \neq j$, 将A的第j行$A_{(j)}$用A的第i 行$A_{(i)}$代替得

$$A' = [A_{(1)}, \cdots, A_{(i)}, \cdots, A_{(i)}, \cdots, A_{(n)}]$$

则$|A'| = 0$, 将$|A'|$按第i行展开得

$$0 = |A'| = a'_{j1}A'_{j1} + \cdots + a'_{jn}A'_{jn}.$$

但$a'_{jk} = a_{ik}, A'_{jk} = A_{jk}$. 所以$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$(当$i \neq j$ 时). 同理可证$A^*A = |A| \cdot I_n$. □

定理 1.3.2 设R是任意交换环, $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(R)$, 则$A$可逆$\Leftrightarrow |A| \in R$可逆. 此时有$A^{-1} = |A|^{-1}A^*$.

证明: 如果A可逆, 即存在$B \in M_n(R)$使$AB = BA = I_n$, 则$|A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| = |I_n| = 1$(此处用到了一般情形的行列式乘法定理$|AB| = |A||B|$). 所以$|A| \in R$可逆. 如

果$|A|\in R$可逆, 则$A\cdot(|A|^{-1}A^*)=|A|^{-1}AA^*=I_n$(由引理 1.3.2). 同理$(|A|^{-1}A^*)\cdot A=I_n$. 所以$A$可逆, 且$A^{-1}=|A|^{-1}A^*$. □

现在我们可以给出线性方程组的解的公式.

定理 1.3.3 (克莱姆(Cramer)法则). 设K是一个域, 则系数在K中的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

有唯一解的充分必要条件是系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

可逆, 且它的唯一解为:

$$x_1=\frac{D_1}{|A|},x_2=\frac{D_2}{|A|},\cdots,x_n=\frac{D_n}{|A|}$$

其中$D_k=det(A^{(1)},\cdots,A^{(k-1)},b,A^{(k+1)},\cdots,A^{(n)}),b=^t(b_1,b_2,\cdots,b_n)$.

证明: 方程组$AX=b$有唯一解$\Leftrightarrow r(A)=n\Leftrightarrow A$可逆. 且$X=A^{-1}\cdot b=\frac{1}{|A|}A^*\cdot b$. 所以对任意$1\le k\le n$,

$$x_k=\frac{1}{|A|}(A_{1k},A_{2k},\cdots,A_{nk})\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^n b_iA_{ik},$$

其中$\sum_{i=1}^n b_iA_{ik}=det(A^{(1)},\cdots,A^{(k-1)},b,A^{(k+1)},\cdots,A^{(n)})$(按第$k$列展开). 因此, $x_1=\frac{D_1}{|A|},x_2=\frac{D_2}{|A|},\cdots,x_n=\frac{D_n}{|A|}$. □

设K是一个域, $A=(a_{ij})_{m\times n}\in M_{m\times n}(K)$, 则$A$的秩可以用$A$的子矩阵的行列

式来描述. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \ 1 \le p \le \min\{m,n\}.$$

对任意$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le m, 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_p \le n$.

定义 1.3.3 矩阵A的任意p行$A_{(i_1)}, A_{(i_2)}, \cdots, A_{(i_p)}$与任意$p$列$A^{(j_1)}, A^{(j_2)}, \cdots, A^{(j_p)}$交叉处的元素组成一个$p$阶方阵, 其行列式

$$M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_p} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_pj_1} & a_{i_pj_2} & \cdots & a_{i_pj_p} \end{vmatrix}$$

称为A的一个p阶子式.

定理 1.3.4 $r(A) = r \Leftrightarrow A$有一个$r$阶子式非零, 且$A$的任意$r+1$阶子式都为零.

证明: 我们只需证明:(1)如果$r(A) = r$, 则A有一个非零r阶子式. (2)如果A有一个非零p阶子式, 则$r(A) \ge p$. (不难看出(1)和(2)推出定理 1.3.5)

(1)的证明:$r(A) = r \Rightarrow$存在$A_{(i_1)}, A_{(i_2)}, \cdots, A_{(i_r)}$线性无关$\Rightarrow B = [A_{(i_1)}, A_{(i_2)}, \cdots, A_{(i_r)}]$的行秩等于$r \Rightarrow$存在$B^{(j_1)}, B^{(j_2)}, \cdots, B^{(j_r)}$线性无关, 即$r$阶方阵$(B^{(j_1)}, B^{(j_2)}, \cdots, B^{(j_r)})$的秩为$r$. 所以

$$M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_r} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \cdots & a_{i_rj_r} \end{vmatrix} \ne 0.$$

(2)的证明:A有一个非零p阶子式$\Rightarrow$无妨设

$$M\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix} \ne 0,$$

则$A_{(1)},A_{(2)},\cdots,A_{(p)}$线性无关. 否则存在$1\leq k\leq p$使$A_{(k)}$可由$A_{(1)},\cdots,A_{(k-1)},A_{(k+1)}\cdots,A_{(p)}$线性表出$\Rightarrow$ $(a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{kp})$可由$\{(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ip})\mid i\neq k\}_{1\leq i\leq p}$线性表出$\Rightarrow$ $M\begin{pmatrix}1&2&\cdots&p\\1&2&\cdots&p\end{pmatrix}=0$矛盾. 所以$r(A)\geq p$. □

下面的*Laplace*定理是定理 1.3.1关于行列式按行(按列)展开的推广, 即可按有限行(或列)展开. 它的证明将被省略.

定义 1.3.4 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是一个n阶方阵. 对任意$1\leq i_1<i_2<\cdots<i_p\leq n$, $1\leq j_1<j_2<\cdots<j_p\leq n$. 去掉$A$的第$i_1,i_2,\cdots,i_p$行:$A_{(i_1)},A_{(i_2)},\cdots,A_{(i_p)}$及第$j_1,j_2,\cdots,j_p$列:$A^{(j_1)},A^{(j_2)},\cdots,A^{(j_p)}$得到一个(n-p)阶方阵, 它的行列式$\overline{M}\begin{pmatrix}i_1&\cdots&i_p\\j_1&\cdots&j_p\end{pmatrix}$称为$M\begin{pmatrix}i_1&\cdots&i_p\\j_1&\cdots&j_p\end{pmatrix}$的$(n-p)$阶余子式, 而$A\begin{pmatrix}i_1&\cdots&i_p\\j_1&\cdots&j_p\end{pmatrix}=(-1)^{i_1+\cdots+i_p+j_1+j_2+\cdots+j_p}\overline{M}\begin{pmatrix}i_1&\cdots&i_p\\j_1&\cdots&j_p\end{pmatrix}$称为$M\begin{pmatrix}i_1&\cdots&i_p\\j_1&\cdots&j_p\end{pmatrix}$的$n-p$-阶代数余子式.

定理 1.3.5 (Laplace)对任意$1\leq i_1<i_2<\cdots<i_p\leq n$, 有

$$|A|=\sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_p\leq n}M\begin{pmatrix}i_1&\cdots&i_p\\j_1&\cdots&j_p\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}i_1&\cdots&i_p\\j_1&\cdots&j_p\end{pmatrix}$$

定理 1.3.6 (Cauchy-Binet公式):$A=(a_{ij})_{n\times m}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$, 则当$m\geq n$时有

$$|AB|=\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_n\leq m}\begin{vmatrix}a_{1j_1}&a_{1j_2}&\cdots&a_{1j_n}\\a_{2j_2}&a_{2j_2}&\cdots&a_{2j_n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{nj_1}&a_{nj_2}&\cdots&a_{nj_n}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_{j_11}&b_{j_12}&\cdots&b_{j_1n}\\b_{j_21}&b_{j_22}&\cdots&b_{j_2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\b_{j_n1}&b_{j_n2}&\cdots&b_{j_nn}\end{vmatrix}$$

如果$m<n$, 则$|AB|=0$.

习题3.3

1.请按要求计算下列行列式.

(a)$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$(按第三行展开); (b)$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$(按第二列展开).

2.计算下列行列式

(a)$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$; (b)$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$;

(c)$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{pmatrix}$

(提示$\cos(\alpha_i-\beta_j)=(\cos\alpha_i,\sin\alpha_i)\begin{pmatrix} \cos(\beta_j) \\ \sin(\beta_j) \end{pmatrix}$).

3.利用$Cauchy-Binet$公式证明:当$n\geq 2$时, 有

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)-(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i)^2=\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_ib_j-a_jb_i)^2.$$

(提示:左边=$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_ib_i \\ \sum_{i=1}^n a_ib_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{vmatrix}$).

4.证明:(1)$|A^*|=|A|^{n-1}$;(2)$(A^*)^*=\begin{cases} |A|^{n-2}A & n>2 \\ A & n=2 \end{cases}$;(3)如果$A^*$可逆, 则$A$也可逆, 且$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$. (上述问题中$A\in M_n(K)$, K是一个域).

5.设$A\in M_{m\times n}(K), m\geq n$. 证明:${}^tAA=\sum_M M^2$, 其中$M$跑遍$A$的全部$n$阶子式.

6.设n阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix},$$

试求:$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_{ij}$.

7.设$A=(a_{ij})_{m\times n}\in M_n(K)$, 且$A^*={}^tA$. 证明:

$$|A|=\sum_{j=1}^n a_{1j}^2=\sum_{j=1}^n a_{2j}^2=\cdots=\sum_{j=1}^n a_{nj}^2.$$

8.设$A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_{m\times n}(\mathbb{R})(m<n)$. 已知:$AX=0$的基础解系为$\beta_i=[b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}](i=1,2,\cdots,n-m)$. 试求: 线性方程组$\sum_{j=1}^n b_{ij}y_j=0(i=1,2,\cdots,n-m)$的基础解系. (i.e. 它解空间的一组基)

9.已知方程组$AX=\beta$的相伴齐次线性方程组$AX=0$的基础解系为$\{\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}\},\gamma$ 是$AX=\beta$的一个特解. 证明:$\gamma,\gamma+\eta_1,\cdots,\gamma+\eta_{n-r}$ 线性无关.

10.设$\Delta(x_1,\cdots,x_n),\Delta(y_1,\cdots,y_n)$是范德蒙德行列式. 且对任意$i,j$有$x_iy_j\neq 1$. 证明:

$$\Delta(x_1,\cdots,x_n)\Delta(y_1,\cdots,y_n)=det(\frac{1}{1-x_iy_j})_{n\times n}\cdot\prod_{i,j}^{n}(1-x_iy_j).$$

11.证明欧拉恒等式: $(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2+(x_1y_2-x_2y_1-x_3x_4+x_4y_3)^2+(x_1y_3+x_2y_4-x_3y_1-x_4y_2)^2+(x_1y_4-x_2y_3+x_3y_2-x_4y_1)^2$.

提示:计算矩阵乘积$\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\x_2&-x_1&-x_4&x_3\\x_3&x_4&-x_1&-x_2\\x_4&-x_3&x_2&-x_1\end{pmatrix}\cdot{}^t\begin{pmatrix}y_1&y_2&y_3&y_4\\y_2&-y_1&-y_4&y_3\\y_3&y_4&-y_1&-y_2\\y_4&-y_3&y_2&-y_1\end{pmatrix}$

1.4 矩阵分块与行列式计算

本节我们引入一种在矩阵研究中非常有用的技巧: 矩阵分块. 对矩阵A进行分块后的表达形式称为分块矩阵, 而矩阵的运算, 初等变换等可以

表达为分块矩阵的运算和初等变换. 需要特别指出的是: 分块矩阵的运算及初等变换不是重新定义的, 而仅仅是原来矩阵运算和初等变换在分块矩阵语言下的表达.

一般地, 对任意$m\times n$矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$若先用若干条横虚线把它分成$r$块, 再用若干条竖虚线把它分成$s$块, 则我们得到一个$rs$块的分块矩阵, A 可记为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}=(A_{ij})_{r\times s}$$

(A_{ij}是矩阵).

例 1.4.1

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

可记为$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$. 其中$A_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $A_{12}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $A_{21}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_{22}=(1)$.

另外, 我们将一个矩阵A表示成列向量形式$A=(A^{(1)},\cdots,A^{(n)})$或行向量形式$A=[A_{(1)},\cdots,A_{(n)}]$ 也是一种矩阵分块.

当然, 怎么对一个矩阵分块? 需要根据具体矩阵的形式和具体的问题来决定, 是一个技巧性比较高的问题.

例如, 如果需要计算下列矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的逆矩阵, 或A的幂A^m, 则我们可用分块技巧将A表示成分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

其中$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = (1)$. 0表示不同阶数的0矩阵, 后面我们可以看到

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & A_3^{-1} \end{pmatrix} \quad A^m = \begin{pmatrix} A_1^m & 0 & 0 \\ 0 & A_2^m & 0 \\ 0 & 0 & A_3^m \end{pmatrix}$$

等. 矩阵的运算可以在分块矩阵中得到表达.

定理 1.4.1 (1)设$A, B \in M_{m\times n}(R)$, 如果它有相同的分块$A = (A_{ij})_{r\times s}, B = (B_{ij})_{r\times a}$, 且$A_{ij}$与$B_{ij}$的行数, 列数相等, 则

$$A + B = (A_{ij} + B_{ij})_{r\times s}, A - B = (A_{ij} - B_{ij})_{r\times s}$$

.

(2)$\forall \lambda \in R, A = (A_{ij})_{r\times s}$, 则$\lambda A = (\lambda A_{ij})_{r\times s}$.

(3)设$A \in M_{n\times m}(R), B \in M_{m\times n}(R)$. 如果$A = (A_{ij})_{r\times s}, B = (B_{ij})_{s\times t}$, 且$A_{ij} \in M_{m_i\times n_j}(R), B_{ij} \in M_{n_i\times l_j}(R)$. 则$AB = (C_{ij})_{r\times t}$, 其中

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{is}B_{sj}.$$

证明: 直接验证. □

例 1.4.2 对任意$A \in M_{m\times n}(R), B \in M_{n\times r}(R)$, 如果对$B$作列分块, $B =$

$(B^{(1)}, B^{(2)}, \cdots, B^{(r)})$, 则

$$AB = (AB^{(1)}, AB^{(2)}, \cdots, AB^{(r)}).$$

对A做行分块$A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{pmatrix}$, 则$AB = \begin{pmatrix} A_{(1)}B \\ A_{(2)}B \\ \vdots \\ A_{(m)}B \end{pmatrix}$.

例 1.4.3 设有两个分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix}.$$

如果A_i, B_i是阶数相同的方阵, 则

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_kB_k \end{pmatrix}.$$

如果每个A_i可逆, 则A也可逆. 且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 1.4.4 如果$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}_{r\times s}$是分块矩阵. 则${}^tA =$

$$\begin{pmatrix} {}^tA_{11} & {}^tA_{21} & \cdots & {}^tA_{r1} \\ {}^tA_{12} & {}^tA_{22} & \cdots & {}^tA_{r2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^tA_{1s} & {}^tA_{2s} & \cdots & {}^tA_{rs} \end{pmatrix}_{s\times r}$$

矩阵A的初等变换可以用分块矩阵的形式表达如下:

初等变换(I): 交换分块矩阵的两块行或两块列的次序.

例 1.4.5 交换第一块行与第二块行的次序:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \xrightarrow{(I)} \begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$$

初等变换(II): 以某个矩阵C左乘某分块行加到另一分块行, 或以某个矩阵B右乘某分块列加到另一分块列.

例 1.4.6 以矩阵C左乘第一分块行加第二分块行.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \xrightarrow{(II)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21}+CA_{11} & A_{22}+CA_{12} & \cdots & A_{2s}+CA_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}.$$

以矩阵B右乘第二分块列加到第一分块列:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \xrightarrow{(II)} \begin{pmatrix} A_{11}+A_{12}B & A_{12} & \cdots & A_{2s} \\ A_{21}+A_{22}B & A_{22} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{r1}+A_{r2}B & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}.$$

初等变换(III): 将某可逆矩阵左乘某分块行, 或右乘某分块列.

注记: 初等变换(II)不改变行列式的值.

引理 1.4.1 设$A_{11}\in M_{m\times m}(R), A_{12}\in M_{m\times n}(R), A_{21}\in M_{n\times m}(R), A_{22}\in M_n(R)$. 则

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}|\cdot|A_{22}|;\begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}|\cdot|A_{22}|$$

证明： 由于${}^t\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA_{11} & 0 \\ {}^tA_{12} & {}^tA_{22} \end{pmatrix}$, 我们只需证明:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}|\cdot|A_{22}|.$$

令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & a_{1m+1},\cdots,a_{1m+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & a_{mm+1},\cdots,a_{mm+n} \\ a_{m+11} & a_{m+12} & \cdots & a_{m+1m} & a_{m+1m+1},\cdots,a_{m+1m+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m+n1} & a_{m+n2} & \cdots & a_{m+nm} & a_{m+nm+1},\cdots,a_{m+nm+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

则$a_{ij}=0(1\le i\le m, m<j\le m+n)$, 而

$$|A| = \sum_{\pi\in S_{m+n}} \varepsilon_\pi a_{1\pi(1)}\cdots a_{m\pi(m)}a_{m+1\pi(m+1)}\cdots a_{m+n\pi(m+n)}.$$

设$1\le i\le m$，如果$\pi(i)>m$, 则$a_{1\pi(1)}\cdots a_{m\pi(m)}a_{m+1\pi(m+1)}\cdots a_{m+n\pi(m+n)}=0$, 所以只需考虑$\pi\in S_{m+n}$满足:$\pi_1=\pi|_{1,2,\cdots,m}$诱导$\{1,2,\cdots,m\}$的一个置换, 此时$\pi_2=\pi|_{m+1,\cdots,m+n}$诱导了$\{m+1,\cdots,m+n\}$的一个置换(所以$\varepsilon_\pi=\varepsilon_{\pi_1}\cdot\varepsilon_{\pi_2}$).

令S_n表示$\{m+1,m+2,\cdots,m+n\}$的置换群, 则$|A| = \sum_{\pi_1\in S_m,\pi_2\in S_n}\varepsilon_{\pi_1}\cdot\varepsilon_{\pi_2}a_{1\pi_1(1)}\cdot a_{2\pi_1(2)}\cdots a_{m\pi_1(m)}a_{m+1\pi_2(m+1)}\cdots a_{m+n\pi(m+n)} = (\sum_{\pi_1\in S_m}\varepsilon_{\pi_1}a_{1\pi_1(1)}\cdot a_{2\pi_1(2)}\cdots a_{m\pi_1(m)})\cdot(\sum_{\pi_2\in S_n}\varepsilon_{\pi_2}a_{m+1\pi_2(m+1)}\cdots a_{m+n\pi(m+n)}) = |A_{11}|\cdot|A_{22}|$. □

例 1.4.7 设$A\in M_m(R)$可逆, $D=M_n(R), B\in M_{m\times n}(R), C\in M_{n\times m}(R)$. 则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B|.$$

证明: 利用初等变换(II), 以$-CA^{-1}$左乘第一分块行加到第二分块行得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{(II)} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

由引理 1.4.1可得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|,$$

所以

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

□

引理 1.4.2 设$A \in M_m(R), B \in M_n(R), C \in M_{n\times m}(R)$, 则$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{m\times n}|A| \cdot |B|$.

证明: $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix} \xrightarrow{(I)} \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$(初等变换(I)), 则:$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A| \cdot |B|$.

□

定理 1.4.2 (行列式乘法定理): 设R是任意交换环, $A, B \in M_n(R)$, 则$|AB| = |A| \cdot |B|$.

证明: 考虑分块矩阵$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{pmatrix}$, 以$A$左乘第二分块行加到第一分块行得

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{pmatrix} \xrightarrow{(II)} \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I_n & B \end{pmatrix}.$$

从而$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & AB \\ -I_n & B \end{vmatrix}$. 由引理 1.4.1得$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$. 由引理 1.4.2得

$$\begin{vmatrix} 0 & AB \\ -I_n & B \end{vmatrix} = (-1)^{n^2}|AB| \cdot |-I_n| = (-1)^{2n^2}|AB| = |AB|.$$

所以$|AB| = |A| \cdot |B|$. □

例 1.4.8 设$A \in M_m(R), D \in M_n(R)$可逆, 求矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$的逆.

解:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & I_m & 0 \\ 0 & D & 0 & I_n \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} A & 0 & I_m & -BD^{-1} \\ 0 & D & 0 & I_n \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} I_m & 0 & A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & I_n & 0 & D^{-1} \end{array}\right).$$

所以$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$.

下面介绍一种实系数矩阵研究中常用的方法, 它经常可以将实系数矩阵的问题化为实可逆矩阵的问题.

引理 1.4.3 设$A \in M_n(R)$, 则存在$\delta > 0$使得对任意$0 < t < \delta$, 下述矩阵

$$tI_n + A = \begin{pmatrix} t + a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & t + a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & t + a_{nn} \end{pmatrix}$$

可逆.

证明: 行列式$|tI_n - A| = f(t)$是一个首项系数为1的n次多项式(关于t). 所以$f(t) = 0$在$\mathbb{R}$中最多有n个根. 取$\delta > 0$充分小, 可使$(0, \delta)$中不包含$f(t) = 0$的根. 所以, 对任意$0 < t < \delta, |tI_n + A| \neq 0$, 因此$tI_n - A$可逆. □

例 1.4.9 设$A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 则$(AB)^* = B^*A^*$.

证明: 如果A, B可逆, 则$A^* = |A|A^{-1}, B^* = |B|A^{-1}, A \cdot B$也可逆. 所以$(AB)^* = |AB|(AB)^{-1} = |A||B|B^{-1}A^{-1} = B^*A^*$.

一般情形: 存在$\delta > 0$, 使$tI_n + A, tI_n + B$可逆对任意$0 < t < \delta$成立. 所以$((tI_n+A)\cdot(tI_n+B))^* = (tI_n+B)^*(tI_n+A)^*$. 即$[t^2 \cdot I_n + t(A+B) + AB]^* = (tI_n+B)^*(tI_n+A)^*$. 两边矩阵中的元素都是$t$的连续函数. 所以, 令$t \to 0$, 两边的极限分别是$(AB)^*$和$B^*A^*$, 所以$(AB)^* = B^*A^*$. □

例 1.4.10 证明:$|A^*| = |A|^{n-1}, (A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

证明: 如果A可逆, 则$A^* = |A|A^{-1}$. 所以$|A^*| = |A|^n|A^{-1}|, (A^*)^* = |A^*| \cdot (A^*)^{-1} = |A^*|(|A|A^{-1})^{-1} = |A|^{n-2}A$. 如果$A$不可逆, 存在$\delta > 0$使对任意$0 < t < \delta, tI_n + A$可逆. 所以$|(tI_n + A)^*| = |tI_n + A|^{n-1}, ((tI_n + A)^*)^* = |tI_n + A|^{n-2}(tI_n + A)$. 令$t \to 0$得$|A^*| = |A|^{n-1}, (A^*)^* = |A|^{n-2}A$. □

习题3.4

1.设$A, B \in M_n(\mathbb{C})$满足$AB = BA$, 证明:

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A^2 + B^2|.$$

2.设A, B, C, D都是n阶方阵, 证明:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{vmatrix} = |A + B + C + D| \cdot |A + B - C - D| \cdot |A - B + C - D| \cdot |A - B - C + D|.$$

3.设$A \in M_m(\mathbb{R}), B \in M_n(\mathbb{R})$, 求$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^*$.

4.设$A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$, 且$AC = CA$.
证明:$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$.(提示:先证当$A$可逆的情形).

5.设$A \in M_{m\times s}(\mathbb{R}), B \in M_{m\times t}(\mathbb{R})$. 证明:

$$r\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{pmatrix}\right) = r(A) + r(B).$$

6.设$A, B \in M_n(R)$, 证明:$r\left(\begin{pmatrix} A & AB \\ B & B + B^2 \end{pmatrix}\right) = r(A) + r(B)$.

7.设t是不定元,

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} + t & a_{12} + t & \cdots & a_{1n} + t \\ a_{21} + t & a_{22} + t & \cdots & a_{2n} + t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} + t & a_{n2} + t & \cdots & a_{nn} + t \end{pmatrix}.$$

证明:$|A(t)| = |A(0)| + t\sum_{i,j}^{n} A_{ij}$, 其中$A_{ij}$是$a_{ij}$在$A(0)$中的代数余子式.

参考文献