Télécom ParisTech 28 novembre 2012 Année 2012-2013

Contrôle de connaissances de MDI 210 - OPTIM

Durée : 1 h 30.

Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits.
Le barème (sur 17) n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié ;
la note obtenue à cette épreuve sera complétée par la note des TP (sur 3).
L'épreuve contient deux parties indépendantes.
Un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste.

Partie I (11 points)
On considère le problème (P) d'optimisation linéaire suivant :

$$(P) \qquad \begin{array}{l} \text{Maximiser } z = x_1 + 2x_2 \\ \text{avec les contraintes} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 \leq 7 \\ x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

1 (1 point) – Déterminer graphiquement une solution optimale du problème.

2 (2 points) – Prouver, sans s'appuyer sur la résolution graphique, que la solution de (P) déterminée dans la question 1 est bien optimale.

3 (4 points) – On considère maintenant le problème (Q) suivant :

$$(Q) \qquad \begin{array}{l} \text{Maximiser } z = 5x_0 + x_1 + 2x_2 \\ \text{avec les contraintes} \begin{cases} 2x_0 + x_1 + x_2 \leq 11 \\ 4x_0 + x_1 \leq 7 \\ x_0 + x_2 \leq 7 \\ x_0 \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Résoudre le problème (Q) en appliquant la forme matricielle de la méthode du simplexe et en initialisant cette méthode avec la base correspondant à la solution optimale du problème (P) (l'utilisation d'une autre forme de la méthode du simplexe ou d'une autre solution de départ ne donnera pas l'intégralité des points).

4 (2 points) – Écrire le problème dual (D) du problème (Q) ; donner une solution optimale du problème (D).

5 (2 points) – Les seconds membres des trois premières contraintes du problème (Q) sont considérés comme des quantités disponibles de trois ressources ; on dispose donc de 11 unités de la ressource 1 et de 7 unités des ressources 2 et 3. La fonction z est considérée comme étant un gain exprimé en euros. On peut acheter un peu plus des ressources 2 et 3 à un prix unitaire de 1 euro. Quelle(s) ressource(s) conseillez-vous d'acheter (on ne demande pas la quantité qu'on conseille d'acheter) ? Justifier votre réponse.

Partie 2 (6 points)

On considère la fonction :

$$f(x, y) = 5x^2 + y^2 + 2xy - 12x - 4y$$

1 (2 points) – Montrer que *f* admet un unique minimum global qu'on déterminera.

2 (4 points) – On considère maintenant le problème (*R*) :

$$(R) \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & f(x, y) \\ \text{avec les contraintes} & \begin{cases} x + y \geq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

En utilisant la condition de Kuhn et Tucker, indiquer si le point de coordonnées (0, 8) peut être solution optimale du problème. Si ce n'est pas le cas, résoudre le problème en appliquant une méthode vue en cours à partir du point (0, 8). On indiquera les coordonnées du point de minimum, on prouvera qu'il s'agit bien d'un minimum, on indiquera la valeur de ce minimum.

NB : Le corrigé de l'épreuve est disponible sur le site pédagogique de l'UE.