Télécom ParisTech 19 avril 2016 Année 2015-2016

Contrôle de connaissances de MDI 210 - OPTIM

Durée : 3 h.
Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits.
L'épreuve est constituée de deux exercices et d'un problème indépendants.
Un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste. Un résultat obtenu autrement que par les méthodes indiquées dans l'énoncé et plus généralement par des méthodes autres que celles du cours pourra ne pas être considéré comme juste.
On détaillera les calculs effectués, même si cela n'est pas demandé explicitement.
Le barème (sur 34) n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié ; la note de l'écrit (sur 17) sera complétée par celles des travaux pratiques (sur 3).

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (3 points) Donner la décomposition LU de la matrice A ; on détaillera les calculs permettant d'obtenir les deux matrices L et U de la décomposition.

2. (2 points) En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ où $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^t$ est un vecteur donné de $\mathbf{R}^4$ (on exprimera les composantes de x à l'aide de celles de b).

3. (1 point) Si A est inversible, déduire de ce qui précède l'expression de A^{-1} ; sinon, justifier la non-inversibilité de A.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 16 & -11 & -6\sqrt{2} \\ -11 & 16 & 6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & 34 \end{pmatrix}$.

1. (5 points) En appliquant la méthode de Jacobi, déterminer les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice A. On précisera à quelle valeur propre est associé chaque vecteur propre.
Indication. On rappelle que les premiers carrés d'entiers sont les nombres suivants : 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900...

2. (1 point) Soit b un vecteur donné de $\mathbf{R}^3$. On s'intéresse au système linéaire $Ax + b = 0$. Donner la valeur du conditionnement de ce système pour la norme $\| \|_2$.

3. (2 points) Soit b un vecteur donné de $\mathbf{R}^3$. On s'intéresse aux extrema (minimum ou maximum) globaux ou locaux de la forme quadratique Q définie sur $\mathbf{R}^3$ par $Q(x) = \frac{1}{2} x^t A x + b^t x$.
a. Donner, en fonction de A et de b, l'expression littérale (on ne demande aucun calcul numérique) des vecteurs x^*, s'ils existent, qui atteignent un minimum local ou global de Q. On précisera les valeurs de b pour lesquelles un tel vecteur x^* existe et on précisera, pour ces valeurs de b, s'il s'agit d'un minimum local ou global.
b. Mêmes questions qu'en 3.a en remplaçant « minimum » par « maximum ».

Problème

Dans toute la suite, on s'intéresse au problème (P) d'optimisation linéaire suivant :

$$\text{Maximiser } z(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{avec les contraintes } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Partie I : optimisation linéaire

1. (3 points) Résoudre le problème (P) à l'aide de l'algorithme du simplexe (on détaillera les calculs). On notera $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ la solution qui donne l'optimum du problème.
Indication. La résolution peut faire apparaître des fractions dont le dénominateur ne contient qu'un chiffre.

2. (2 points) Écrire le problème dual du problème (P) et en donner la solution optimale (on précisera comment on obtient la valeur optimale des variables duales).

3. (1,5 points) La fonction z du problème (P) est une fonction qui représente un gain en euros. Les seconds membres (de valeurs constantes 14, 8 et 18) des trois contraintes du problème (P) en dehors des contraintes de signe représentent des quantités disponibles de trois ressources. On envisage d'acheter un peu plus de ces ressources au prix unitaire de 1 euro pour chacune de ces ressources. Indiquer quelle(s) ressource(s) il est conseillé d'acheter (on ne demande pas la quantité qu'on conseille d'acheter mais on justifiera les conseils donnés).

4. (3,5 points) Dans cette question uniquement, on suppose que la fonction z s'écrit en fait :

$$z(x_1, x_2) = ax_1 + 3x_2$$

où a est un paramètre réel.

a. Indiquer pour quelles valeurs de a la solution $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ reste optimale (on ne s'appuiera pas sur un raisonnement graphique).

b. On suppose que a vaut 5. En appliquant le théorème des écarts complémentaires dont on détaillera l'application, indiquer si la solution $\left(x_1^*, x_2^*\right) = (6, 2)$ est solution optimale du problème.

Partie II : méthodes d'optimisation avec contraintes

5. (0,5 point) Dessiner avec soin le domaine réalisable pour le problème (P).

6. (1 point) Indiquer les points du domaine où les contraintes du problème (P) sont qualifiées (on justifiera la réponse).

7. (5 points) On souhaite déterminer l'optimum du problème (P) par une méthode générale d'optimisation avec contraintes, et sans la méthode du simplexe. Dans toute la question, on laisse pour cela le problème (P) sous forme d'un problème de maximisation et on adapte en conséquence ce qui a été vu en cours.
Appliquer la méthode de montée de plus grande pente à pas optimal en partant du point (3, 0). On pourra s'aider de la représentation graphique pour déterminer les directions à suivre, mais on expliquera comment on les choisit. À la fin de la méthode, on expliquera pourquoi on s'arrête.

8. (3,5 points)

a. Prouver à l'aide de la condition de Karush, Kuhn et Tucker que le point trouvé à la fin de la méthode de montée de la question précédente constitue une solution optimale du problème (P). On détaillera l'application de cette condition.

b. La condition de Karush, Kuhn et Tucker est-elle ici une condition nécessaire et suffisante (on justifiera la réponse) ? Entraîne-t-elle l'unicité d'une solution optimale (au sens de l'optimum global) ?

Le corrigé sera disponible en ligne sur le site pédagogique de l'U.E. après l'épreuve.