# Feuille de travaux dirigés 4 : Modélisation bayésienne

**Exercice 1** (Modèle gaussien)**:**
On considère le modèle bayésien suivant sur $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} X|\theta \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2) \\ \boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(\mu_0, \tau_0^2) \end{cases}$$

où $\sigma^2, \mu_0$ et $\tau_0^2$ sont des constantes supposées connues.

1. Quel est l'espace des paramètres ? Donnez la loi a posteriori $\pi(\theta|x)$.
2. On considère maintenant un échantillon i.i.d. $Y = (X_1, \dots, X_n)$, où $X_i \sim X$. Quelle est le modèle pour $Y$ ? Donnez la loi a posteriori $\pi(\theta|y)$. Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$ ?

**Exercice 2** (Mélange d'opinions)**:**
Une expérience aléatoire a deux résultats possibles (succès ou échec). On note $X$ la variable aléatoire valant 1 en cas de succès, 0 en cas d'échec. $X$ est supposée suivre une loi de Bernoulli de paramètre $\theta$ inconnu. On considère seulement deux valeurs possibles pour $\theta$ : $\theta \in \{\theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0.6\}$.

1. Écrire le modèle statistique, détailler l'espace des paramètres.
2. Le premier expert accorde une confiance égale en les deux possibilités pour $\theta$. Autrement dit, son prior est $\pi_1(\theta_1) = \pi_1(\theta_2) = 0.5$. Donnez la loi a posteriori $(\pi_1(\theta_i|x = 1))_{i=1,2}$ et $\pi_1(\theta_i|x = 0)_{i=1,2}$.
3. Même question pour un deuxième expert qui croit a priori plus à la seconde alternative : son prior est $\pi_2(\theta_1) = 1/4$, $\pi_2(\theta_2) = 3/4$.
4. La loi *predictive a posteriori* (sachant l'observation $X = x$) est par définition, la loi sur $\mathcal{X}$ dont la densité par rapport à la mesure de référence est donnée par

$$p(y) = \int_\Theta p(y|\theta)\pi(\mathrm{d}\theta|x),$$

où $\pi(\,\cdot\,|x)$ est la loi a posteriori. Quelle est cette prédictive a posteriori pour le prior $\pi_2$, lorsque $x = 1$ ?

On observe maintenant un échantillon *i.i.d.* $X = (X_1, \dots, X_n)$.

5. Montrer que les lois a posteriori $\pi(\theta|x)$ ne dépendent que de $s = \sum_{j=1}^n x_j$.
6. On suppose que $s = n/2$. Écrire la loi a posteriori $\pi_2(\theta|x)$ $(x \in \{0,1\}^n, \sum_i x_i = s, \theta \in \{\theta_1, \theta_2\})$ pour l'a priori $\pi_2$. Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$ ? Même question pour l'a priori $\pi_1$. Plus généralement, le comportement lorsque $n$ tend vers l'infini dépend-il de l'a priori ?

.

**Exercice 3** (Lois a posteriori)**:**
On considère un modèle bayésien sur $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, où la loi de $X$ sachant $\theta \in \Theta = \mathbb{R}^+$ a pour densité $p_\theta(x) = 2x/\theta^2 \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$.

1. Donnez la loi a posteriori lorsque l' a priori a pour densité $\pi(\theta) = \mathbb{1}_{]0,1[}(\theta)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. Même question lorsque $\pi(\theta) = 3\theta^2 \mathbb{1}_{]0,1[}(\theta)$.
3. Quelle est l'espérance a posteriori $\mathbb{E}(\boldsymbol{\theta}|X = x)$ dans chaque cas ?
4. On considère un échantillon i.i.d. $X = (X_1, \dots, X_n)$. Donnez la loi a posteriori $\pi(\theta|x)$ lorsque $\pi(\theta) = \mathbb{1}_{]0,1[}(\theta)$.

**Exercice 4** (modèle multinomial et a priori de Dirichlet)**:**
On lance $n$ fois un dé à $p$ faces, numérotées de 1 à $p$. Les résultats de chaque lancer sont supposés *i.i.d.*. On note $Y_i (i = 1, \dots, n)$ le résultat de chaque lancer, $\theta_j = \mathbb{P}(Y_1 = j)$ et $X_j$ $(j = 1, \dots, p)$ le nombre de lancers pour lesquels on a obtenu $j$, c'est-à-dire

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{j\}}(Y_i).$$

On note $\theta = (\theta_1, \dots \theta_p)$ le vecteur des poids : $\theta_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^p \theta_j = 1$.

1. Donner la loi de $X = (X_1, \dots, X_p)$ à $\theta$ fixé. Cette loi est appelée loi multinomiale $\mathcal{M}(\theta, n, p)$.

Dans ce problème, l'espace des paramètres est le simplexe $\Delta_p = \{\theta \in (\mathbb{R}^+)^p : \sum_{j=1}^p \theta_j = 1\}$. On peut prendre comme a priori une loi de Dirichlet sur le simplexe. La loi de Dirichlet de paramètres $a_1, \dots, a_p$ $(a_i > 1)$ est une loi à densité par rapport à $d\theta_1, \dots, d\theta_{p-1}$ (la mesure de Lebesgue en dimension $p - 1$), dont la densité est donnée par

$$\pi(\theta) = \mathrm{Diri}_{a_1,\dots,a_p}(\theta) := \frac{\Gamma(\sum_{j=1}^p a_j)}{\prod_j \Gamma(a_j)} \prod_{j=1}^{p} \theta_j^{a_j - 1}.$$

Notez que cette densité est une généralisation de la loi Bêta sur le segment $[0, 1]$.

2. On prend comme a priori $\pi = \mathrm{Diri}_{(a_1,\dots,a_p)}$. Montrer que la loi a posteriori $\pi(\theta|x)$ est encore une loi de Dirichlet dont on précisera le paramètre $(b_1, \dots b_p)$.
3. On admettra que si $\boldsymbol{\theta} \sim \mathrm{Diri}(b_1, \dots, b_p)$, en notant $b = (b_1, \dots, b_p)$, $s = \sum_1^p b_j$, alors

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{s} b \, ; \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(\boldsymbol{\theta}_j) = \frac{b_j(s - b_j)}{s^2(s + 1)}.$$

   En déduire l'expression de $\mathbb{E}(\boldsymbol{\theta}|x)$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\theta_i|x)$. Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$ et $X = (X_1, \dots X_p)$ avec $X_j \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{M}(\theta_0, n)$, où $\theta_0$ est fixé ?