Contrôle de connaissances de MDI 210 - OPTIM

Durée : 1 h 30.

Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits.
Le barème (sur 17) n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié ;
la note obtenue à cette épreuve sera complétée par la note des TP (sur 3).
Sauf mention contraire, un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste.

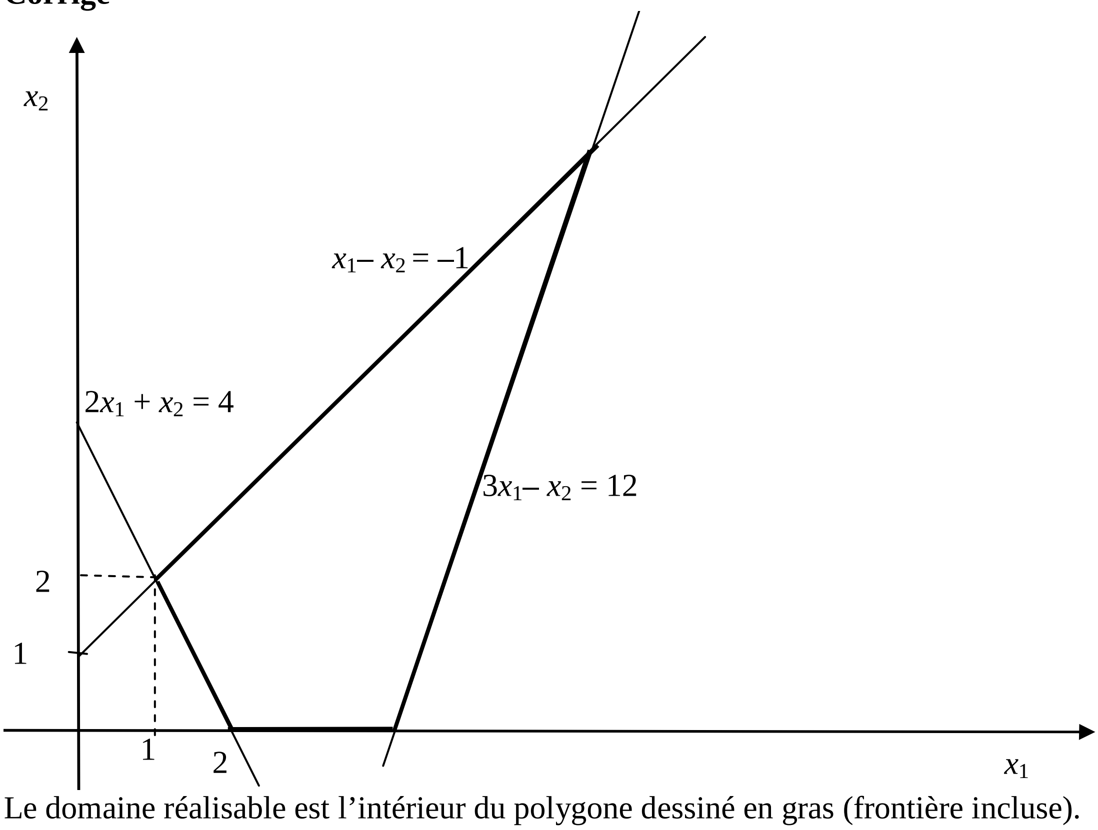
On considère le problème (P_1) défini par :

$$\text{Minimiser } f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$$

avec les contraintes :
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 1 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\ -3x_1 + x_2 + 12 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. (1 point) Dessiner avec soin le domaine réalisable de ce problème.

Corrigé



Le domaine réalisable est l'intérieur du polygone dessiné en gras (frontière incluse).

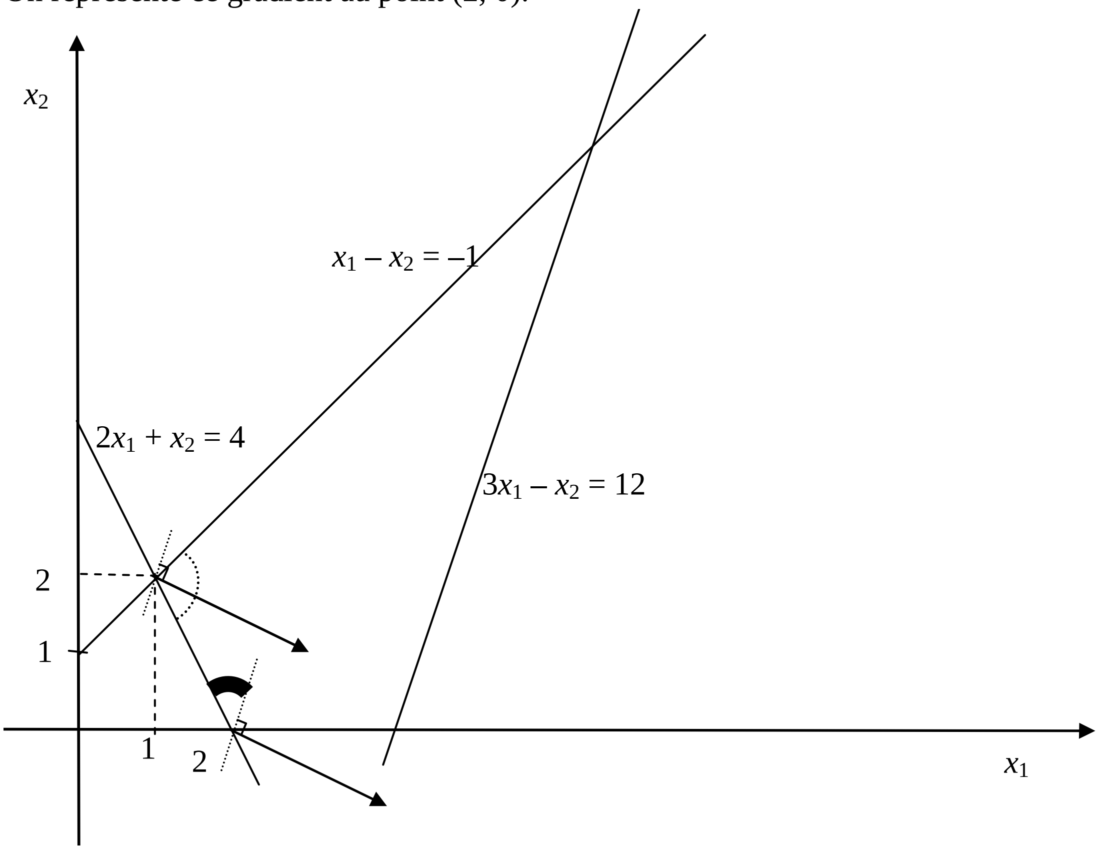
Fin de corrigé

2. (3,5 points) En appliquant la méthode de descente de plus grande pente vue en cours à partir du point (2, 0), déterminer le minimum de (P_1) (on pourra s'aider du dessin de la question 1 pour déterminer les directions à suivre ; on n'utilisera pas ici une résolution par l'algorithme du simplexe). Prouver à l'aide de la condition de (Karush) Kuhn et Tucker que le point obtenu donne bien le minimum de (P_1).

Corrigé

Le gradient de f vaut : $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

On représente ce gradient au point (2, 0).



Les directions admissibles et de descente sont les directions qui appartiennent au secteur dessiné en gras sur la figure. La direction admissible de plus grande pente est la direction admissible qui fait le plus grand angle avec le vecteur gradient. La méthode doit donc suivre la demi-droite d'équation $2x_1 + x_2 = 4$ vers les x_2 croissants. La fonction à optimiser étant linéaire, lorsqu'on suit la demi-droite, la fonction f décroît avec une pente constante jusqu'au coin d'intersection entre les droites d'équations $2x_1 + x_2 = 4$ et $x_1 - x_2 = -1$, c'est-à-dire le point (1, 2). Si on représente le gradient de f en ce dernier point, on voit qu'il n'existe pas de direction de descente admissible (les directions admissibles sont les directions appartenant au secteur en pointillés ; elles font toutes un angle inférieur ou égal à $\pi/2$ avec le gradient de f au point (1, 2)). On a donc atteint le minimum de (P_1) en (1, 2), avec $f(1, 2) = 0$.

Vérifions que le minimum est bien atteint en ce point à l'aide de la condition de (Karush) Kuhn et Tucker. Pour cela, posons $h_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 1$ et $h_2(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - 4$.

Les contraintes saturées au point (1, 2) s'écrivent $h_1(x_1, x_2) \geq 0$ et $h_2(x_1, x_2) \geq 0$. On a donc :

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \nabla h_1(1,2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \nabla h_2(1,2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche μ_1 et μ_2 positifs ou nuls vérifiant $\nabla f(1,2) = \mu_1 \nabla h_1(1,2) + \mu_2 \nabla h_2(1,2)$. On obtient :

$$\mu_1 + 2\,\mu_2 = 2$$
$$-\,\mu_1 + \mu_2 = -1$$

système qui a pour solution : $\mu_1 = 4/3$, $\mu_2 = 1/3$.
Ces deux coefficients étant positifs ou nuls, la condition de (Karush) Kuhn et Tucker est vérifiée.
De plus, toutes les fonctions étant linéaires, la condition de Kuhn et Tucker est suffisante ; il s'agit bien du minimum cherché.
Fin de corrigé

On veut maintenant résoudre (P_1) à l'aide de l'algorithme du simplexe.

3. (0,5 point) Exprimer (P_1) sous forme standard ; on note (P_2) le problème ainsi obtenu. Après avoir introduit les variables d'écart, écrire (P_2) à l'aide des notations de la forme matricielle de la méthode du simplexe.
Corrigé
Le problème (P_2) mis sous forme standard s'exprime de la façon suivante :

$$\text{Maximiser } z = -2x_1 + x_2$$

avec les contraintes : $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ -2x_1 - x_2 \le -4 \\ 3x_1 - x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0 \text{ et } x_2 \ge 0 \end{cases}$$

On notera la relation : minimum de (P_1) = – maximum de (P_2).

En introduisant les variables d'écart x_3, x_4 et x_5, le vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$, la matrice

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, le vecteur $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ et le vecteur $c = (-2 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)$, le problème s'écrit : Maximiser $z = c.X$ avec $A.X = b$ et $X \ge 0$.
Fin de corrigé

4. (2 points) On considère les valeurs $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.
a. Peut-on associer une base réalisable à ces valeurs (détailler la réponse) ?
Corrigé
Comme on a $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$, on obtient alors $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ et $x_5 = 11$. Si $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ correspondent à une solution basique, alors toutes les variables non nulles dans cette solution sont en base. Comme il doit y avoir trois variables en base, ce sont nécessairement les variables x_1, x_2 et x_5. Pour montrer qu'il s'agit d'une base, on considère la matrice

$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Son déterminant est non nul (il vaut 3), il s'agit donc bien d'une base. Dans la solution basique correspondante, toutes les variables sont positives ou nulles, il s'agit bien d'une base réalisable.

Fin de corrigé

b. En appliquant la forme matricielle de la méthode du simplexe à partir de la solution proposée, déterminer une solution optimale de (P_2).

Corrigé

On applique une étape de la forme matricielle de la méthode du simplexe en démarrant avec $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}$ et $X_B^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$.

* On calcule $y = (y_1, y_2, y_3)$ défini par $y.B = c_B$, c'est-à-dire $y.B = (-2\ \ 1\ \ 0)$. Cela donne :

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 + 3y_3 = -2 \\ y_1 - y_2 - y_3 = 1 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$ qui a pour solution $y_1 = 4/3$, $y_2 = 1/3$, $y_3 = 0$.

* On cherche si x_3 ou x_4 sont entrantes :
x_3 entrante s'écrit : $y.a_3 < c_3$, c'est-à-dire $y_1 < 0$, ce qui n'est pas vérifié ;
x_4 entrante s'écrit : $y.a_4 < c_4$, c'est-à-dire $y_2 < 0$, ce qui n'est pas vérifié.
Aucune variable hors-base n'est entrante, la solution est bien optimum.
Le minimum du problème (P_2) est obtenu pour $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$, et vaut 0.

Fin de corrigé

5. (2 points) Écrire et résoudre le problème dual du problème (P_2).

Corrigé

Le problème dual est :

Minimiser $y_1 - 4y_2 + 12y_3$

avec les contraintes :

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + 3y_3 \geq -2 \\ y_1 - y_2 - y_3 \geq 1 \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

La solution est donnée par le dernier y obtenu en résolvant le problème primal par la forme matricielle de la méthode du simplexe, c'est-à-dire $y_1 = 4/3$, $y_2 = 1/3$, $y_3 = 0$.

Fin de corrigé

6. (3,5 points) Soit α un paramètre positif ou nul. On considère maintenant le problème (Q_α) défini par :

Maximiser $z = -2x_1 + x_2$

avec les contraintes : $$\begin{cases} -x_1 + \alpha x_2 \leq -1 + 2\alpha \\ -2x_1 - x_2 \leq -4 \\ 3x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles le minimum est obtenu au point (1, 2).

Interpréter géométriquement ce résultat en utilisant le domaine dessiné dans la question 1.

Corrigé

Trois méthodes sont envisageables : appliquer la méthode du simplexe ; appliquer le théorème des écarts complémentaires ; appliquer la condition de (Karush) Kuhn et Tucker. Nous ne développons ci-dessous que la première.

En partant de la base réalisable optimale du problème (P_2) et en en reprenant les notations, la matrice B devient $B_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; le vecteur b devient $b = \begin{pmatrix} -1+2\alpha \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$; le vecteur c est inchangé. Le déterminant de B_α valant $1 + 2\alpha$, il est non nul et $X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}$ reste une base. De plus, on constate que la solution basique associée, solution de $B_\alpha.X_B = b$, reste $X_B^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$ et reste donc réalisable.

On reprend la forme matricielle de la méthode du simplexe.

* On calcule $y = (y_1, y_2, y_3)$ par $y.B_\alpha = c_B$, c'est-à-dire $y.B_\alpha = (-2 \;\; 1 \;\; 0)$. Cela donne :

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 + 3y_3 = -2 \\ \alpha y_1 - y_2 - y_3 = 1 \\ y_3 = 0 \end{cases},$$

système qui a pour solution $y_1 = \dfrac{4}{2\alpha+1}$, $y_2 = \dfrac{2\alpha-1}{2\alpha+1}$, $y_3 = 0$.

* On cherche si x_3 ou x_4 sont entrantes :

x_3 non entrante s'écrit : $y.a_3 \geq c_3$, c'est-à-dire $y_1 \geq 0$, ou encore $\dfrac{2\alpha+3}{2\alpha+1} \geq 0$, ce qui est vérifié puisque α est positif ou nul ;

x_4 entrante s'écrit : $y.a_4 \geq c_4$, c'est-à-dire $y_2 \geq 0$, ou encore $\dfrac{2\alpha-1}{2\alpha+1} \geq 0$, ce qui est vérifié si et seulement si on a $\alpha \geq 1/2$.

Par conséquent, (1, 2) reste solution optimale du problème si et seulement si on a $\alpha \geq 1/2$.

Quand α varie, le domaine dessiné dans la question 1 évolue. La droite d'équation : $-x_1 + \alpha x_2 = -1 + 2\alpha$ tourne autour du point (1, 2). Quand $\alpha = 1/2$, la droite est perpendiculaire au gradient de f au point (1, 2) ; si $\alpha < 1/2$, l'angle entre le gradient de f et la droite devient obtus, ce qui fait qu'il y a des directions de descente admissibles. Si $\alpha > 1/2$, il n'y a pas de direction de descente admissible. Si $\alpha = 1/2$, l'optimum est obtenu sur tout le segment de droite réalisable de la droite d'équation $-x_1 + x_2/2 = 0$.

Fin de corrigé

7. (1 point) Soit ε un paramètre réel que l'on peut supposer proche de 0. On considère le problème (R_ε) défini par :

$$\text{Maximiser } z = -2x_1 + x_2$$

avec les contraintes : $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 + \varepsilon \\ -2x_1 - x_2 \le -4 \\ 3x_1 - x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0 \text{ et } x_2 \ge 0 \end{cases}$

Exprimer la valeur maximum de (R_ε) en fonction de ε.

Corrigé

Pour $\varepsilon = 0$, il s'agit du problème (P_2). Le minimum du problème (P_2), obtenu pour $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$, vaut 0. La résolution du problème mis sous forme standard donnant une solution non dégénérée, c'est-à-dire dans laquelle toutes les variables de base sont strictement positives, on peut appliquer le théorème du cours : le maximum du problème mis sous forme standard varie, pour ε assez petit, de $y_1.\varepsilon$, c'est-à-dire ici devient égal à $0 + 4\varepsilon/3 = 4\varepsilon/3$.

Fin de corrigé

8. (3,5 points) On suppose maintenant qu'on a une variable supplémentaire nommée x_0 et que le problème devient le problème (S) défini par :

Maximiser $10x_0 - 2x_1 + x_2$

avec les contraintes : $\begin{cases} 6x_0 - x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_0 - 2x_1 - x_2 \le -4 \\ 4x_0 + 3x_1 - x_2 \le 12 \\ x_0 \ge 0, x_1 \ge 0 \text{ et } x_2 \ge 0 \end{cases}$

Résoudre le problème (S) (on pourra s'appuyer sur la résolution de la question 4).

Corrigé

On reprend la résolution du problème (P_2) par la forme matricielle de la méthode du simplexe au point b) pour regarder si la variable x_0 est entrante. Elle est entrante si $y.a_0 < c_0$, c'est-à-dire si $\frac{4}{3}\times 6 + \frac{1}{3}\times 3 + 0\times 4 < 10$, ce qui est vérifié.

* Pour chercher une variable sortante, on calcule $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ par $B.d = a_0$.

$\begin{cases} -d_1 + d_2 = 6 \\ -2d_1 - d_2 = 3 \\ 3d_1 - d_2 + d_3 = 4 \end{cases}$ qui a pour solution : $d_1 = -3$, $d_2 = 3$, $d_3 = 16$.

* Quand la variable hors-base x_0 est non nulle, $X_B = X_B^* - x_0 d$. On doit avoir $X_B \ge 0$:

$x_1 = 1 + 3x_0$; $x_1 \ge 0$ n'impose rien sur x_0.
$x_2 = 2 - 3x_0$; $x_2 \ge 0$ impose $x_0 \le 2/3$.
$x_5 = 11 - 16x_0$; $x_5 \ge 0$ impose $x_0 \le 11/16$.
Comme $2/3 < 11/16$, la variable x_2 sort et x_0 prend la valeur 2/3.

* On a maintenant :

$$X_B = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix},\ X_B^* = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1+3\times\frac{2}{3} \\ 11-16\times\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ i.e. } X_B^* = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

On effectue une nouvelle étape de la méthode du simplexe.

* On calcule $y = (y_1, y_2, y_3)$ par $y.B = c_B$, c'est-à-dire $y.B = (10\ \ -2\ \ 0)$. Cela donne :

$$\begin{cases} 6y_1 + 3y_2 + 4y_3 = 10 \\ -y_1 - 2y_2 + 3y_3 = -2 \\ y_3 = 0 \end{cases},$$

système qui a pour solution $y_1 = 14/9$, $y_2 = 2/9$, $y_3 = 0$.

* On cherche si x_2, x_3 ou x_4 sont entrantes :

x_2 entrante s'écrit : $y.a_2 < c_2$, c'est-à-dire $\frac{14}{9}\times 1 + \frac{2}{9}\times(-1) + 0\times(-1) < 1$, ou encore $\frac{4}{3} < 1$, ce qui n'est pas vérifié.

x_3 entrante s'écrit : $y.a_3 < c_3$, c'est-à-dire $y_1 < 0$, ce qui n'est pas vérifié.

x_4 entrante s'écrit : $y.a_4 < c_4$, c'est-à-dire $y_2 < 0$, ce qui n'est pas vérifié.

Aucune variable hors-base n'est entrante, la solution est bien optimum.

Le maximum du problème (S) est obtenu pour $x_0 = 2/3$, $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1/3$) et vaut 2/3.

Fin de corrigé