

Feuille de travaux dirigés 3 : risque quadratique

Exercice 1 (Loi de Poisson):

Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Proposer un estimateur sans biais de λ et calculer son risque quadratique.
On souhaite à présent trouver un estimateur du paramètre $\theta = \mathbb{P}_\lambda(X_1 = 0)$.
2. Proposer un estimateur biaisé et un estimateur sans biais de θ .
3. Les estimateurs précédents sont-ils efficaces ?

Exercice 2 (Loi exponentielle translatée):

Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de densité :

$$p_\theta(x) = \exp(\theta - x) \mathbb{1}_{\{x \geq \theta\}}, \theta > 0.$$

On cherche dans cet exercice à estimer le paramètre *de translation* θ .

1. Proposer un estimateur sans biais basé sur la moyenne empirique : on le notera $\hat{\theta}_n$.
2. Calculer le risque quadratique de l'estimateur $\hat{\theta}_n$.
3. On considère à présent l'estimateur $\tilde{\theta}_n$ défini par $\tilde{\theta}_n(X) = \inf_{1 \leq i \leq n} X_i$. Calculer sa loi.
4. L'estimateur $\tilde{\theta}_n$ est-il sans biais ?
5. Calculer le risque quadratique de l'estimateur $\tilde{\theta}_n$.
6. Au vu des résultats précédents, quel estimateur de θ proposeriez-vous ?

Exercice 3 (Modèle de Bernoulli : moyenne et variance):

Soient X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires i.i.d. de loi $B(\theta)$ (Bernoulli de paramètre θ).

1. Montrez que

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

est un estimateur de θ efficace.

2. Trouver un estimateur sans biais de la variance des X_i de la forme $\hat{v} = \eta \bar{X}(1 - \bar{X})$.