Télécom ParisTech — 28 novembre 2012 — Année 2012-2013

Corrigé du contrôle de connaissances de MDI 210 – OPTIM

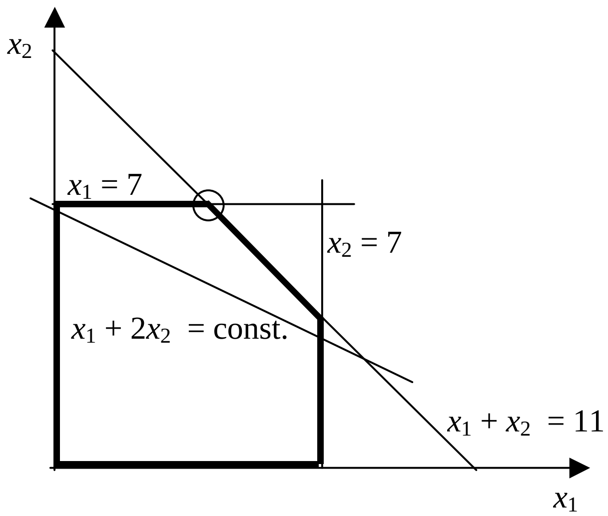
Durée : 1 h 30.

Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits.
Le barème (sur 17) n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être légèrement modifié.
Les deux parties sont indépendantes.
Un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste.

Partie I (11 points)
On considère le problème (P) d'optimisation linéaire suivant :

$$(P) \qquad \begin{array}{l} \text{Maximiser } z = x_1 + 2x_2 \\ \text{avec les contraintes } \begin{cases} x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 \le 7 \\ x_2 \le 7 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases} \end{array}$$

1 (1 point) – Déterminer graphiquement une solution optimale du problème.
Corrigé



Le domaine réalisable est l'intérieur du polygone en gras. L'optimum est le point du domaine réalisable qui maximise $x_1 + 2\,x_2$; il s'agit du point entouré, de coordonnées (4, 7). La valeur optimum de z est 18.

2 (2 points) – Prouver, sans s'appuyer sur la résolution graphique, que la solution de (P) déterminée dans la question 1 est bien optimale.
Corrigé
Pour prouver ce résultat, on peut utiliser la forme matricielle de la méthode du simplexe ou le théorème des écarts complémentaires (la première méthode est un peu plus simple, la seconde permet plus facilement d'enchaîner avec la question suivante).

Solution avec le théorème des écarts complémentaires.
La solution $x_1 = 4$, $x_2 = 7$ est réalisable car cette solution vérifie toutes les contraintes du problème. Elle est optimale si et seulement s'il existe y_1, y_2 et y_3 vérifiant le système :

$y_2 = 0$ car $x_1 < 7$ (la deuxième contrainte n'est pas saturée)

$y_1 + y_2 = 1$, car $x_1 \neq 0$

$y_1 + y_3 = 2$, car $x_2 \neq 0$

et tels que $\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 + y_3 \geq 2 \\ y_1 \geq 0\,,\ \ y_2 \geq 0\,,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$ (contraintes du problème dual)

Le système admet pour unique solution $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$, qui vérifie les contraintes du problème dual. La solution $x_1 = 4$, $x_2 = 7$ est donc optimale.

Solution avec la forme matricielle de la méthode du simplexe.

On introduit les variables d'écart par les égalités : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 11 \\ x_1 \qquad + x_4 & = 7 \\ \quad x_2 + \qquad x_5 & = 7 \end{cases}$

Après avoir posé :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c = (1, 2, 0, 0, 0, 0) \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

le problème s'écrit maximiser $z = c.x$ avec les contraintes : $Ax = b$ et $x \geq 0$ (ce qui signifie $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$).
Pour $x_1 = 4$ et $x_2 = 7$, les trois autres variables valent : $x_3 = 0$, $x_4 = 3$, $x_5 = 0$.
Si la solution considérée est basique, on sait que toute variable non nulle dans cette solution est en base ; on sait par ailleurs qu'une base comporte trois variables (autant de variables que de contraintes autres que celles concernant la positivité des variables). Les trois variables x_1, x_2 et x_4 étant non nulles, elles constituent cette éventuelle base. Pour vérifier qu'il s'agit d'une base, il faut voir si la matrice B extraite de A « correspondant » à ces variables est inversible.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et déterminant}(B) = -1 \neq 0.$$

Donc $\{x_1, x_2, x_4\}$ est une base ; cette base est réalisable puisque la solution basique correspondante est donnée par $x_1^* = 4, x_2^* = 7, x_4^* = 3$ et donc par des valeurs toutes positives ou nulles.

On pose $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$ et $x_B^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$; $c_B = (1, 2, 0)$.

On commence maintenant une étape de la méthode du simplexe.

a) On calcule $y = c_B\, B^{-1}$ par $yB = c_B$, ce qui donne :

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 + y_3 = 2 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

qui admet pour unique solution $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$: $y = (1, 0, 1)$.

b) On cherche s'il existe dans A une variable entrante. Les candidates sont x_3 et x_5.

On note a_i la colonne des coefficients de la variable x_i.

La variable x_3 est entrante si : $c_3 - ya_3 > 0$, c'est-à-dire si $y_1 < 0$; ce n'est pas le cas.

La variable x_5 est entrante si : $c_5 - ya_5 > 0$, c'est-à-dire si $y_3 < 0$; ce n'est pas le cas.

Aucune variable n'est entrante, la solution $x_1 = 4$ et $x_2 = 7$ est optimale.

3 (4 points) – On considère maintenant le problème (Q) suivant :

$$(Q) \qquad \text{Maximiser } z = 5x_0 + x_1 + 2x_2 \quad \text{avec les contraintes} \begin{cases} 2x_0 + x_1 + x_2 \le 11 \\ 4x_0 + x_1 \le 7 \\ x_0 + x_2 \le 7 \\ x_0 \ge 0, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Résoudre le problème (Q) en appliquant la forme matricielle de la méthode du simplexe et en initialisant cette méthode avec la base correspondant à la solution optimale du problème (P) (l'utilisation d'une autre forme de la méthode du simplexe ou d'une autre solution de départ ne donnera pas l'intégralité des points).

Corrigé

On reprend les notations de la question précédente, en partant de la forme matricielle de la méthode du simplexe (si la question précédente a été traitée avec le théorème des écarts complémentaires, on positionne ici le problème sous forme matricielle).

Le nouveau problème est identique au précédent, sauf que la matrice A est maintenant :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } c = (5, 1, 2, 0, 0, 0).$$

A et c ont une colonne supplémentaire qui est en première position.

On reprend le point b) de la question précédente pour voir si la nouvelle variable, x_0, est entrante c'est-à-dire si on a : $c_0 - ya_0 > 0$, ce qui s'écrit : $1\times2 + 0\times4 + 1\times1 < 5$, ou encore $3 < 5$: la variable x_0 est entrante.

On poursuit la méthode du simplexe.

c) On calcule $d = B^{-1}a_0$ par $Bd = a_0$, ce qui donne :

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 2 \\ d_1 + d_3 = 4 \\ d_2 = 1 \end{cases}$$

système qui admet pour unique solution $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 3$.

d) On cherche une variable sortante. La positivité de $x_B = x_B^* - x_0 d$ conduit à :

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_0 : x_0 \le 4 \\ x_2 = 7 - x_0 : x_0 \le 7 \\ x_4 = 3 - 3x_0 : x_0 \le 1 \end{cases}$$

On en déduit que la variable x_4 est sortante et x_0 prend la valeur 1.

e) On actualise, en réordonnant les variables ; pour calculer x_B^*, on sait que x_0 vaut 1 dans la nouvelle solution et on remplace x_0 par cette valeur 1 dans les expressions ci-dessus de x_1 et x_2 pour calculer les nouvelles valeurs de ces variables :

$$x_B = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ et } x_B^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c_B = (5, 1, 2).$$

On commence une nouvelle étape de la méthode du simplexe.

a) On calcule $y = c_B B^{-1}$ par $yB = c_B$, ce qui donne :

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + y_3 = 5 \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 + y_3 = 2 \end{cases}$$

qui admet pour unique solution $y_1 = 1/3$, $y_2 = 2/3$, $y_3 = 5/3$: $y = (1/3, 2/3, 5/3)$.

b) On cherche s'il y a une variable entrante. Les candidates sont x_3, x_4 et x_5.

On note a_i la colonne des coefficients de la variable x_i.

La variable x_3 est entrante si : $c_3 - ya_3 > 0$, c'est-à-dire si $y_1 < 0$; ce n'est pas le cas.

La variable x_4 est entrante si : $c_4 - ya_4 > 0$, c'est-à-dire si $y_2 < 0$; ce n'est pas le cas.

La variable x_5 est entrante si : $c_5 - ya_5 > 0$, c'est-à-dire si $y_3 < 0$; ce n'est pas le cas.

Aucune variable n'est entrante, la solution $x_0 = 1$, $x_1 = 3$ et $x_2 = 6$ est optimale. La valeur maximum de z vaut maintenant 20.

4 (2 points) – Écrire le problème dual (D) du problème (Q) puis résoudre le problème (D).

Corrigé

Le problème (Q) étant exprimé sous forme standard, on obtient immédiatement le problème dual (D) de (Q).

$$(D) \quad \begin{array}{l} \text{Minimiser } w = 11y_1 + 7y_2 + 7y_3 \\ \text{avec les contraintes} \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 5 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 + y_3 \geq 2 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

La solution de ce problème est donnée par le dernier y obtenu par la forme matricielle de la méthode du simplexe ; il s'agit de $y_1 = 1/3$, $y_2 = 2/3$, $y_3 = 5/3$, ce qui donne la valeur 20 à w, (comme on devait s'y attendre).

5 (2 points) – Les seconds membres des trois premières contraintes du problème (Q) sont considérés comme des quantités disponibles de trois ressources ; on dispose donc de 11 unités de la ressource 1 et de 7 unités des ressources 2 et 3. La fonction z est considérée comme étant un gain exprimé en euros. On peut acheter un peu plus des ressources 2 et 3 à un prix unitaire de 1 euro. Quelle(s) ressource(s) conseillez-vous d'acheter (on ne demande pas la quantité qu'on conseille d'acheter) ? Justifier votre réponse.

Corrigé

On remarque d'abord que la solution optimale du problème (Q) est non dégénérée (les variables en base sont non nulles dans la solution basique associée). On peut appliquer un théorème du cours : si le vecteur b varie de δb assez petit, l'optimum de la fonction z varie de $y\delta b$, où y donne la solution optimale du problème dual.

Si on achète t unités (t petit) de la ressource 2, le profit augmente $2t/3$ euros, mais la dépense pour cet achat est de t euros : on perd $t/3$ euros ; on ne conseille donc pas d'acheter de la ressource 2.
Si on achète t unités (t petit) de la ressource 3, le profit augmente $5t/3$ euros, et la dépense pour cet achat est de t euros ; on gagne ainsi $2t/3$ euros ; on conseille donc d'acheter de la ressource 3.

Partie 2 (6 points)

On considère la fonction :

$$f(x, y) = 5x^2 + y^2 + 2xy - 12x - 4y$$

1 (2 points) – Montrer que f admet un unique minimum global qu'on déterminera.
Corrigé
Montrons que la fonction f est strictement convexe. La matrice hessienne de cette fonction est :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de $\nabla^2 f(x, y)$ vaut 16 : le produit des valeurs propres (égal au déterminant) est strictement positif ; les valeurs propres sont de même signe et non nulles.
La trace de $\nabla^2 f(x, y)$ vaut 12 ; la somme des valeurs propres (égale à la trace) est positive : les deux valeurs propres de $\nabla^2 f(x, y)$ sont donc strictement positives, ce qui implique que f est une fonction strictement convexe ; donc tout minimum local est global. Un point est un minimum global si et seulement si en ce point le gradient de f est nul. Or :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 10x + 2y - 12 \\ 2x + 2y - 4 \end{pmatrix}.$$

Pour que (x, y) soit un minimum global, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} 10x + 2y - 12 = 0 \\ 2x + 2y - 4 = 0 \end{cases},$$

système qui a pour solution : $x = 1$, $y = 1$.
La fonction f admet donc un minimum global au point (1, 1). La valeur minimum de f est –8.

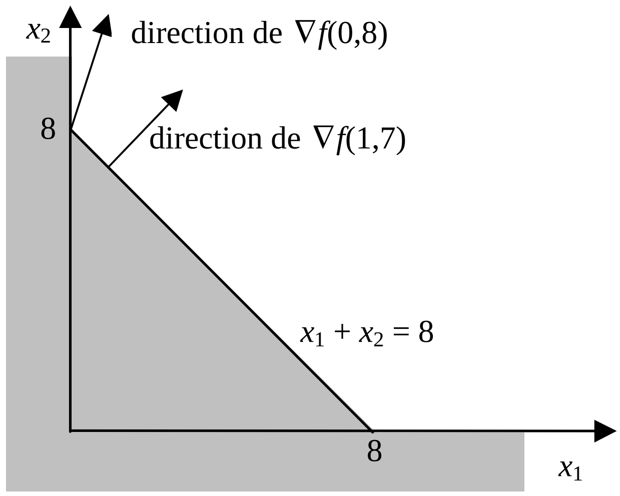
2 (4 points) – On considère maintenant le problème (R) :

$$(R) \qquad \begin{array}{l} \text{Minimiser } f(x, y) \\ \text{avec les contraintes } \begin{cases} x + y \geq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

En utilisant la condition de Kuhn et Tucker, indiquer si le point de coordonnées (0, 8) peut être solution optimale du problème. Si ce n'est pas le cas, résoudre le problème en appliquant une méthode vue en cours à partir du point (0, 8). On indiquera les coordonnées du point de minimum, on prouvera qu'il s'agit bien d'un minimum, on indiquera la valeur de ce minimum.

Corrigé

On dessine le domaine réalisable pour y voir plus clair. Sur le dessin ci-dessous sont aussi représentées des directions utiles ultérieurement.



On pose $g(x, y) = x + y - 8$, $h(x, y) = x$ et $k(x, y) = y$. Le problème (R) s'écrit :

$$\text{Minimiser} \quad f(x,y)$$

$$\text{avec les contraintes} \quad \begin{cases} g(x,y) \geq 0 \\ h(x,y) \geq 0 \\ k(x,y) \geq 0 \end{cases}.$$

Au point (0, 8), on a $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = 0$ et $k(x, y) \neq 0$. En conséquence, la condition de Kuhn et Tucker s'énonce ici : il existe λ et μ, réels positifs ou nuls, avec :

$$\nabla f(0, 8) = \lambda \nabla g(0, 8) + \mu \nabla h(0, 8).$$

Or : $\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\nabla f(0, 8) = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\nabla g(0, 8) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla h(0, 8) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les constantes λ et μ doivent vérifier :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ \lambda \quad = 12 \end{cases}$$

système dont la solution est $\lambda = 12$ et $\mu = -8$. Cette dernière valeur étant négative, la condition de Kuhn et Tucker n'est pas vérifiée. Cela correspond au fait qu'il existe des directions de descente admissibles. La direction de descente admissible de plus grande pente est celle qui fait le plus grand angle avec $\nabla f(0, 8)$ tout en ne sortant pas du domaine réalisable. Suivre la direction de plus grande pente consiste à suivre à partir du point (0, 8) la droite $x + y = 8$ en partant vers la droite. Cherchons le minimum de la restriction de f au segment de cette droite d'abscisse comprise entre 0 et 8. Les points de ce segment peuvent s'écrire $(s, 8 - s)$, avec $0 \leq s \leq 8$. Posons $v(s) = f(s, 8 - s)$.

Sur ce segment, la fonction f vaut, pour s réel positif et $(s, 8 - s)$ réalisable :

$$v(s) = f(s, 8-s) = 5s^2 + (8-s)^2 + 2s(8-s) - 12s - 4(8-s)$$

$$v(s) = 4s^2 - 8s + 32.$$

D'où : $\quad v'(s) = 8s - 8.$

Par conséquent, $v(s)$ atteint son minimum pour $s = 1$, c'est-à-dire pour le point (1, 7) qui est sur le segment considéré.
Au point (1, 7), seule la contrainte $g(x, y) \geq 0$ est saturée. La condition de Kuhn et Tucker s'énonce donc : il existe λ réel positif ou nul tel que $\nabla f(1, 7) = \lambda \nabla g(1, 7)$.
Or, $\nabla f(1, 7) = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\nabla g(1, 7) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; λ existe et vaut 12 ; il est positif.
La condition de Kuhn et Tucker est vérifiée ; or, la fonction f étant convexe et les fonctions g, h et k étant concaves (puisque linéaires), cette condition est suffisante pour affirmer qu'il s'agit d'un minimum global du problème. Le minimum de f sur le domaine réalisable est atteint au point (1, 7) et vaut 28, valeur obtenue après remplacement des valeurs de x et y dans la définition de f.