Télécom ParisTech 27 novembre 2013 Année 2013-2014

Contrôle de connaissances de MDI 210 - OPTIM

Durée : 1 h 30.

Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits.
Le barème (sur 17) n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié ;
la note obtenue à cette épreuve sera complétée par la note des TP (sur 3).
Sauf mention contraire, un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste.

On considère le problème (P_1) défini par :

$$\text{Minimiser } f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$$

avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 1 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\ -3x_1 + x_2 + 12 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. (1 point) Dessiner avec soin le domaine réalisable de ce problème.

2. (3,5 points) En appliquant la méthode de descente de plus grande pente vue en cours à partir du point (2, 0), déterminer le minimum de (P_1) (on pourra s'aider du dessin de la question 1 pour déterminer les directions à suivre ; on n'utilisera pas ici une résolution par l'algorithme du simplexe). Prouvera à l'aide de la condition de (Karush) Kuhn et Tucker que le point obtenu donne bien le minimum de (P_1).

On veut maintenant résoudre (P_1) à l'aide de l'algorithme du simplexe.

3. (0,5 point) Exprimer (P_1) sous forme standard ; on note (P_2) le problème ainsi obtenu. Après avoir introduit les variables d'écart, écrire (P_2) à l'aide des notations de la forme matricielle de la méthode du simplexe.

4. (2 points) On considère les valeurs $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.
a. Peut-on associer une base réalisable à ces valeurs (détailler la réponse) ?
b. En appliquant la forme matricielle de la méthode du simplexe à partir de la solution proposée, déterminer une solution optimale de (P_2).

5. (2 points) Écrire et résoudre le problème dual du problème (P_2).

6. (3,5 points) Soit α un paramètre positif ou nul. On considère maintenant le problème (Q_α) défini par :

$$\text{Maximiser } z = -2x_1 + x_2$$

avec les contraintes : $\begin{cases} -x_1 + \alpha x_2 \leq -1 + 2\alpha \\ -2x_1 - x_2 \leq -4 \\ 3x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles le minimum est obtenu au point (1, 2).
Interpréter géométriquement ce résultat en utilisant le domaine dessiné dans la question 1.

7. (1 point) Soit ε un paramètre réel que l'on peut supposer proche de 0. On considère le problème (R_ε) défini par :

$$\text{Maximiser } z = -2x_1 + x_2$$

avec les contraintes : $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 + \varepsilon \\ -2x_1 - x_2 \leq -4 \\ 3x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$

Exprimer la valeur maximum de (R_ε) en fonction de ε.

8. (3,5 points) On suppose maintenant qu'on a une variable supplémentaire nommée x_0 et que le problème devient le problème (S) défini par :

$$\text{Maximiser } 10x_0 - 2x_1 + x_2$$

avec les contraintes : $\begin{cases} 6x_0 - x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_0 - 2x_1 - x_2 \leq -4 \\ 4x_0 + 3x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_0 \geq 0, x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$

Résoudre le problème (S) (on pourra s'appuyer sur la résolution de la question 4).