Contrôle de connaissances de MDI 210 - OPTIM

Durée : 3 h.
Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits.
L'épreuve est constituée de deux exercices et d'un problème indépendants.
Un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste. Un résultat obtenu autrement que par les méthodes indiquées dans l'énoncé et plus généralement par des méthodes autres que celles du cours pourra ne pas être considéré comme juste.
On détaillera les calculs effectués, même si cela n'est pas demandé explicitement.
Le barème (sur 34) n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié ; la note de l'écrit (sur 17) sera complétée par celles des travaux pratiques (sur 3).

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (3 points) Donner la décomposition LU de la matrice A ; on détaillera les calculs permettant d'obtenir les deux matrices L et U de la décomposition.

Corrigé

On sait que L est une matrice triangulaire inférieure dont les termes diagonaux valent 1 et que U est une matrice triangulaire supérieure. Éliminons les termes de la première colonne de A situés sous la diagonale. Pour cela on multiplie la première ligne par 1 (respectivement –1 et 1) avant d'en retrancher le résultat à la deuxième (respectivement troisième et quatrième) ligne (respectivement lignes). En considérant ces coefficients par lesquels on multiplie la première ligne, on obtient les termes sous la diagonale de la première colonne de L. La matrice A devient $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et la première colonne de L vaut $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On fait de même avec la deuxième colonne pour éliminer les termes sous la diagonale ; les coefficients multiplicateurs de la deuxième ligne sont respectivement –1 et 0. La matrice devient $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et la deuxième colonne de L vaut $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La matrice courante est maintenant triangulaire supérieure. Il n'y a donc plus rien à faire : la matrice courante donne U, et les autres colonnes de L sont les colonnes associées de la matrice identité. On obtient finalement :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Fin de corrigé

2. (2 points) En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ où $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^t$ est un vecteur donné de $\mathbf{R}^4$ (on exprimera les composantes de x à l'aide de celles de b).

Corrigé

En utilisant la décomposition LU, le système $Ax = b$ s'écrit $LUx = b$. Posons $y = Ux$. On est amené à résoudre successivement les deux systèmes $Ly = b$ puis $Ux = y$. En posant $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^t$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^t$, le premier système s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} y_1 = b_1 \\ y_1 + y_2 = b_2 \\ -y_1 - y_2 + y_3 = b_3 \\ y_1 + y_4 = b_4 \end{cases}.$$

La méthode dite de remontée (ici, il s'agit plutôt d'une descente...) permet de résoudre le système de proche en proche. On obtient $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1 \\ b_2 + b_3 \\ b_4 - b_1 \end{pmatrix}$. On résout ensuite $Ux = y$. En posant $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$, ce système s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = y_1 \\ 2x_2 - 2x_3 = y_2 \\ -2x_3 = y_3 \\ 2x_4 = y_4 \end{cases}.$$

La méthode de remontée permet là aussi de résoudre le système de proche en proche :

$$x = \begin{pmatrix} y_1 + y_2/2 + y_4/2 \\ (y_2 - y_3)/2 \\ -y_3/2 \\ y_4/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b_2 + b_4)/2 \\ -(b_1 + b_3)/2 \\ -(b_2 + b_3)/2 \\ (b_4 - b_1)/2 \end{pmatrix}.$$

Fin de corrigé

3. (1 point) Si A est inversible, déduire de ce qui précède l'expression de A^{-1} ; sinon, justifier la non-inversibilité de A.

Corrigé

Le déterminant de A est obtenu en multipliant entre eux les termes diagonaux de U (puisque ceux de L valent 1). Il vaut donc –8, ce qui n'est pas nul : A est inversible.

Pour obtenir A^{-1}, il suffit de considérer les quatre systèmes linéaires $Ax = e_i$, où e_i ($1 \le i \le 4$) est le i^e vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

À l'aide de ce qui précède, on obtient immédiatement l'expression de A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fin de corrigé

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 16 & -11 & -6\sqrt{2} \\ -11 & 16 & 6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & 34 \end{pmatrix}$.

1. (5 points) En appliquant la méthode de Jacobi, déterminer les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice A. On précisera à quelle valeur propre est associé chaque vecteur propre.

Indication. On rappelle que les premiers carrés d'entiers sont les nombres suivants : 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900...

Corrigé

On reprend les notations du cours.

Faisons apparaître un terme nul en position $p = 1$ et $q = 2$ (terme actuellement égal à –11). Pour cela, on pose $x = (a_{qq} - a_{pp})/2a_{pq} = 0$. On a alors $t = 1$, $c = s = 1/\sqrt{2}$. Puis on calcule les termes de la nouvelle matrice $B = (b_{ij})$. Seuls les termes en position (i, j) avec $i = p$ ou $j = p$ ou $i = q$ ou $j = q$ peuvent changer ; ici, 34 ne change pas. Par ailleurs, on a $b_{12} = b_{21} = 0$. On calcule les autres termes à l'aide des formules du cours :

$b_{13} = c.a_{13} - s.a_{23} = -12$

$b_{23} = s.a_{13} + c.a_{23} = 0$

$b_{11} = a_{11} - t.a_{12} = 27$

$b_{22} = a_{22} + t.a_{12} = 5$.

D'où la nouvelle matrice B :

$$B = \begin{pmatrix} 27 & 0 & -12 \\ 0 & 5 & 0 \\ -12 & 0 & 34 \end{pmatrix}.$$

On remplace A par B pour continuer d'appliquer la méthode de Jacobi.

On élimine maintenant le terme en position $p = 1$ et $q = 3$ (terme maintenant égal à –12).
On pose $x = (a_{qq} - a_{pp})/2a_{pq} = -7/24$. On résout l'équation $t^2 + 2xt - 1 = 0$. La racine appartenant à l'intervalle]–1, 1] est $t = -3/4$. D'où $c = 4/5$ et $s = -3/5$. On calcule les termes qui peuvent changer :
$b_{12} = c.a_{12} - s.a_{32} = 0$
$b_{32} = s.a_{12} + c.a_{32} = 0$
$b_{11} = a_{11} - t.a_{13} = 18$
$b_{33} = a_{33} + t.a_{13} = 43$.
D'où la nouvelle matrice B :

$$B = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 43 \end{pmatrix}.$$

La matrice obtenue est diagonale, la méthode de Jacobi s'arrête. Les valeurs propres de A sont 18, 5 et 43.
Pour obtenir les vecteurs propres, on considère les matrices de passage. La première vaut $\Omega_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la seconde $\Omega_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$. Le produit $\Omega_1.\Omega_2$ donne, en colonnes, une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice A initiale. On obtient ici :

$$\Omega_1.\Omega_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ -4 & 5 & 3 \\ 3\sqrt{2} & 0 & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre normé associé à la valeur propre 18, $\frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ en est un associé à 5 et $\frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$ à 43.

Fin de corrigé

2. (1 point) Soit b un vecteur donné de $\mathbf{R}^3$. On s'intéresse au système linéaire $Ax + b = 0$. Donner la valeur du conditionnement de ce système pour la norme $\| \|_2$.
Corrigé
On sait que, pour une matrice normale inversible, le conditionnement pour la norme $\| \|_2$ est donné par le rapport entre la plus grande valeur propre en valeur absolue et la plus petite en valeur absolue. Ici, A est inversible puisque ses valeurs propres sont non nulles. Elle est de plus normale puisqu'elle est symétrique. Le conditionnement pour la norme $\| \|_2$ vaut donc $43/5 = 8,6$.
Fin de corrigé

3. (2 points) Soit b un vecteur donné de $\mathbf{R}^3$. On s'intéresse aux extrema (minimum ou maximum) globaux ou locaux de la forme quadratique Q définie sur $\mathbf{R}^3$ par $Q(x) = \frac{1}{2} x^t Ax + b^t x$.

a. Donner, en fonction de A et de b, l'expression littérale (on ne demande aucun calcul numérique) des vecteurs x^*, s'ils existent, qui atteignent un minimum local ou global de Q. On précisera les valeurs de b pour lesquelles un tel vecteur x^* existe et on précisera, pour ces valeurs de b, s'il s'agit d'un minimum local ou global.

Corrigé

La matrice A ayant toutes ses valeurs propres strictement positives, elle est définie positive. Par conséquent, Q est strictement convexe (cette propriété étant indépendante du vecteur b). Les résultats du cours nous indiquent alors que, pour tout b, Q admet une valeur qui est le minimum global et que cette valeur est atteinte par exactement un vecteur x^*. Une condition nécessaire et suffisante de minimalité (globale) est alors l'annulation du gradient de Q. Or on a $\nabla Q(x) = Ax + b$. D'où $x^* = -A^{-1}b$. Par ailleurs, toujours dans le cas de la convexité, tout minimum local est global ; par conséquent, il n'existe aucun vecteur b pour lequel il y aurait des minima locaux qui ne soient pas le minimum global.

Fin de corrigé

b. Mêmes questions qu'en 3.a en remplaçant « minimum » par « maximum ».

Corrigé

Pour qu'un point x^* de $\mathbf{R}^3$ soit un maximum local de Q, il est nécessaire que la matrice hessienne $\nabla^2 Q(x^*)$ soit une matrice négative. Or $\nabla^2 Q(x^*)$ est égale à A qui est définie positive. Il n'y a donc aucun point de $\mathbf{R}^3$ qui soit un maximum (local ou global).

Fin de corrigé

Problème

Dans toute la suite, on s'intéresse au problème (P) d'optimisation linéaire suivant :

$$\text{Maximiser } z(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{avec les contraintes } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Partie I : optimisation linéaire

1. (3 points) Résoudre le problème (P) à l'aide de l'algorithme du simplexe (on détaillera les calculs). On notera $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ la solution qui donne l'optimum du problème.

Indication. La résolution peut faire apparaître des fractions dont le dénominateur ne contient qu'un chiffre.

Corrigé

Introduisons les variables d'écart :

$$x_3 = 14 - 2\,x_1 - x_2$$
$$x_4 = 8 - x_1 - x_2$$
$$x_5 = 18 - x_1 - 3x_2$$

Chacune des deux variables x_1 et x_2 est candidate pour entrer en base. Faisons entrer x_2, qui est ici à la fois la variable pourvue du plus grand coefficient dans z et celle qui fait le plus croître z. On constate que la croissance est limitée par la positivité de x_5, qui sort donc de la base. On obtient le nouveau dictionnaire suivant :

$$\begin{aligned}
x_2 &= 6 - x_1/3 - x_5/3\\
x_3 &= 8 - 5x_1/3 + x_5/3\\
x_4 &= 2 - 2x_1/3 + x_5/3\\
z &= 18 + x_1 - x_5
\end{aligned}$$

Maintenant, x_1 est la seule variable candidate pour entrer en base. Sa croissance est limitée par la positivité de x_4, qui sort donc de la base. On obtient le nouveau dictionnaire suivant :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3 + x_5/2 - 3x_4/2\\
x_2 &= 5 - x_5/2 + x_4/2\\
x_3 &= 3 - x_5/2 + 5x_4/2\\
z &= 21 - x_5/2 - 3x_4/2
\end{aligned}$$

Tous les coefficients des variables dans z sont désormais négatifs ou nuls : on atteint le maximum de z en annulant les variables hors base x_4 et x_5, ce qui donne $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 3$, $z = 21$. D'où $\left(x_1^*, x_2^*\right) = (3, 5)$.

Fin de corrigé

2. (2 points) Écrire le problème dual du problème (P) et en donner la solution optimale (on précisera comment on obtient la valeur optimale des variables duales).

Corrigé

Le problème (P) étant sous forme standard, on obtient directement le problème dual (D) :

$$\text{Minimiser } w = 14y_1 + 8y_2 + 18y_3$$

$$\text{avec les contraintes} \quad \begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

La solution de ce problème est donnée par l'opposé des coefficients dans z des variables d'écart, c'est-à-dire $y = (0, 3/2, 1/2)$. On vérifie qu'on a bien alors $w = 21$.

Fin de corrigé

3. (1,5 points) La fonction z du problème (P) est une fonction qui représente un gain en euros. Les seconds membres (de valeurs constantes 14, 8 et 18) des trois contraintes du problème (P) en dehors des contraintes de signe représentent des quantités disponibles de trois ressources. On envisage d'acheter un peu plus de ces ressources au prix unitaire de 1 euro pour chacune de ces ressources. Indiquer quelle(s) ressource(s) il est conseillé d'acheter (on ne demande pas la quantité qu'on conseille d'acheter mais on justifiera les conseils donnés).

Corrigé

La solution du problème (P) est non dégénérée puisque toutes les variables de base de la solution optimale prennent des valeurs strictement positives. On peut donc appliquer le théorème du cours.

On note (y_1, y_2, y_3) la solution optimale du problème (D) : $y_1 = 0$, $y_2 = 3/2$, $y_3 = 1/2$.

Si on achète δb_1 de la première ressource, on dépense pour cela δb_1 euros alors que la valeur optimum de z augmente de $y_1\delta b_1$, c'est-à-dire de 0 ; il n'est donc pas intéressant d'acheter de la première ressource (quel qu'en soit le prix d'ailleurs).

Si on achète δb_2 de la deuxième ressource, on dépense pour cela δb_2 euros alors que la valeur optimum de z augmente de $y_2\delta b_2$, c'est-à-dire de $3\delta b_2/2$ euros ; on gagne $\delta b_2/2$ euros ; on conseille d'acheter de la deuxième ressource.
Si on achète δb_3 de la troisième ressource, on dépense pour cela δb_3 euros alors que la valeur optimum de z augmente de $y_3\delta b_3$, c'est-à-dire de $\delta b_3/2$ euros ; on perd donc $\delta b_3/2$ euros : on déconseille d'acheter de la troisième ressource.
Fin de corrigé

4. (3,5 points) Dans cette question uniquement, on suppose que la fonction z s'écrit en fait :

$$z(x_1, x_2) = ax_1 + 3x_2$$

où a est un paramètre réel.
a. Indiquer pour quelles valeurs de a la solution $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ reste optimale (on ne s'appuiera pas sur un raisonnement graphique).
Corrigé
Par rapport au problème initial, on a en fait ajouté $(a - 2)x_1$ à z. Il suffit de modifier le dernier dictionnaire obtenu à la question 1 en ajoutant cette quantité à z. On obtient :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3 + x_5/2 - 3x_4/2 \\
x_2 &= 5 + x_5/2 + x_4/2 \\
x_3 &= 3 - x_5/2 + 5x_4/2 \\
z &= 21 - x_5/2 - 3x_4/2 + (a - 2)x_1 \\
&= 21 - x_5/2 - 3x_4/2 + (a - 2)(3 + x_5/2 - 3x_4/2) \\
&= 21 + 3(a - 2) + x_5(a - 3)/2 + 3(1 - a)x_4/2
\end{aligned}$$

Cet ajout n'affectant pas les expressions des variables en base, la solution $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ reste basique et réalisable. Mais elle ne reste optimale que s'il n'y a pas de variable hors base entrante. Pour cela, il faut et suffit que tous les coefficients de z soient négatifs ou nuls. la solution $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ reste donc optimale si et seulement si on a $1 \le a \le 3$ (intervalle qui contient bien sûr la valeur 2...).
Fin de corrigé
b. On suppose que a vaut 5. En appliquant le théorème des écarts complémentaires dont on détaillera l'application, indiquer si la solution $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ = (6, 2) est solution optimale du problème.
Corrigé
Pour $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ = (6, 2), on obtient $x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$, $x_5^* = 6$. La solution proposée est bien réalisable et ne sature pas la troisième contrainte. Le théorème des écarts complémentaires nous conduit alors à chercher l'existence de trois réels y_1, y_2 et y_3, constituant une solution réalisable du problème dual, vérifiant les égalités suivantes :

$2y_1 + y_2 + y_3 = 5$ (car x_1^* est non nul)
$y_1 + y_2 + 3y_3 = 3$ (car x_2^* est non nul)
$y_3 = 0$ (car la troisième contrainte n'est pas saturée).

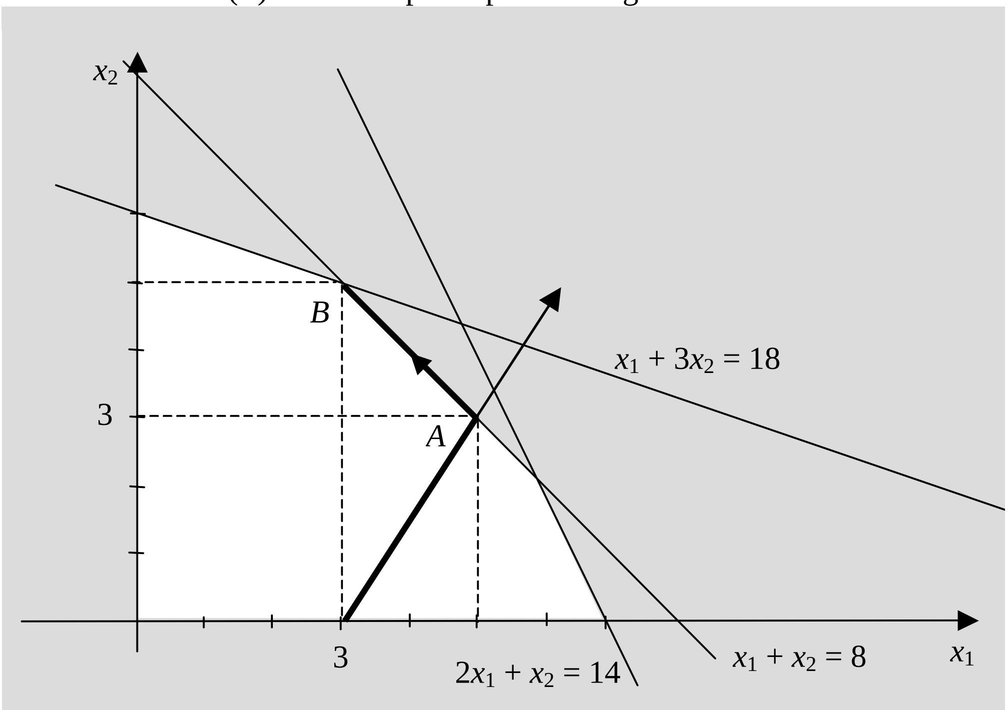
La solution de ce système est $y_1 = 2$, $y_2 = 1$ et $y_3 = 0$. Ces valeurs constituant bien une solution réalisable du problème dual, la solution proposée, (6, 2), est bien optimale.
Fin de corrigé

Partie II : méthodes d'optimisation avec contraintes

5. (0,5 point) Dessiner avec soin le domaine réalisable pour le problème (P).

Corrigé

Le domaine réalisable de (P) est donné par la partie non grisée du dessin ci-dessous.



Fin de corrigé

6. (1 point) Indiquer les points du domaine où les contraintes du problème (P) sont qualifiées (on justifiera la réponse).

Corrigé

Si on met les cinq contraintes (y compris donc les contraintes de signe) sous la forme $g_i(x_1, x_2) \leq 0$, on obtient des fonctions g_i convexes (car affines). De plus, l'intérieur strict du domaine est non vide (il contient par exemple le point (1, 1), qui ne sature aucune des cinq contraintes). Un résultat du cours indique qu'alors les contraintes sont qualifiées en tout point du domaine.

Fin de corrigé

7. (5 points) On souhaite déterminer l'optimum du problème (P) par une méthode générale d'optimisation avec contraintes, et sans la méthode du simplexe. Dans toute la question, on laisse pour cela le problème (P) sous forme d'un problème de maximisation et on adapte en conséquence ce qui a été vu en cours.

Appliquer la méthode de montée de plus grande pente à pas optimal en partant du point (3, 0). On pourra s'aider de la représentation graphique pour déterminer les directions à suivre, mais on expliquera comment on les choisit. À la fin de la méthode, on expliquera pourquoi on s'arrête.

Corrigé

Il s'agit d'un problème de maximisation, ce qui fait qu'on utilise la méthode de la direction de plus grande montée admissible ; le gradient de z vaut en tout point : $\nabla z = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Au point (3, 0), la direction de plus grande montée sans contrainte, qui est donnée par ∇z, est admissible. On prend donc ∇z comme direction $(d_1, d_2)^t$ de montée, que l'on suit tant qu'on ne sort pas du domaine. On paramètre la demi-droite issue du point de coordonnées (3, 0) qui correspond à la direction de montée :

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 2s \\ x_2 = 3s \end{cases}$$

et, pour $s \in [0, +\infty[$, on pose $g(s) = z(3 + s.d_1, s.d_2)$. Puis on détermine la valeur de s permettant de maximiser g sans sortir du domaine réalisable. Les valeurs de $s \geq 0$ pour lesquelles on reste dans le domaine vérifient :

$$\begin{cases} 2(3+2s)+3s \leq 14 \\ (3+2s)+3s \leq 8 \\ (3+2s)+3\times 3s \leq 18 \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} 7s+6 \leq 14 \\ 5s+3 \leq 8 \\ 11s+3 \leq 18 \end{cases} \text{ ou encore : } \begin{cases} s \leq 8/7 \\ s \leq 1 \\ s \leq 15/11 \end{cases}$$

On doit donc avoir au plus $s = 1$, ce qui correspond au point A de la figure ci-dessus, de coordonnées (5, 3).

En A, ∇z n'est plus admissible. On voit sur le dessin que la direction admissible de plus grande montée en A consiste à suivre le bord du domaine réalisable en faisant décroître x. Autrement dit, on suit la droite d'équation $x_1 + x_2 = 8$; on part donc dans la direction de vecteur-directeur (– 1, 1). Le produit scalaire de ce vecteur avec ∇z vaut –2 + 3 = 1, il est positif ; c'est bien une direction de montée. Les directions de montée étant les directions faisant un angle inférieur à $\pi/2$ avec ∇z, c'est bien, comme le montre le graphique, la direction admissible de plus grande montée. On suit cette direction. On paramètre la demi-droite issue du point A qui correspond à la direction (– 1, 1). On obtient :

$$\begin{cases} x_1 = 5 - s \\ x_2 = 3 + s \end{cases}$$

Les valeurs de s pour lesquelles on reste dans le domaine vérifient $(5 - s) + 3(3 + s) \leq 18$, c'est-à-dire : $s \leq 2$. Lorsque s vaut 2, on arrive au point B de coordonnées (3, 5).

On constate sur le dessin qu'il n'y a plus de direction de montée admissible, la méthode s'arrête. On prouve dans la question suivant qu'on est bien à l'optimum.

Fin de corrigé

8. (3,5 points)

a. Prouver à l'aide de la condition de Karush, Kuhn et Tucker que le point trouvé à la fin de la méthode de montée de la question précédente constitue une solution optimale du problème (P). On détaillera l'application de cette condition.

b. La condition de Karush, Kuhn et Tucker est-elle ici une condition nécessaire et suffisante (on justifiera la réponse) ? Entraîne-t-elle l'unicité d'une solution optimale (au sens de l'optimum global) ?

Corrigé

Pour se ramener aux notations du cours, on écrit le problème (P) sous la forme équivalente suivante :

$$\text{Minimiser } -2x_1 - 3x_2$$
$$\text{avec les contraintes } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 14 \leq 0 \\ x_1 + x_2 - 8 \leq 0 \\ x_1 + 3x_2 - 18 \leq 0 \\ -x_1 \leq 0,\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Les fonctions étant ici toutes linéaires, la fonction à optimiser est convexe mais non strictement convexe et le domaine est lui aussi convexe. La condition de Karush, Kuhn et Tucker est alors une condition nécessaire suffisante d'optimalité globale. En revanche, elle ne garantit pas l'unicité d'une solution optimale, la fonction à optimiser n'étant pas strictement convexe.

Des cinq contraintes, seules sont saturées au point B les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 8 \le 0 \\ x_1 + 3x_2 - 18 \le 0 \end{cases}$$

En posant : $\begin{cases} f(x_1, x_2) = -2x_1 - 3x_2 \\ g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 8 \\ g_2(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2 - 18 \end{cases}$, on a :

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix},\ \nabla g_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La condition de Karush, Kuhn et Tucker au point B s'énonce alors ainsi : B est une solution optimale si et seulement s'il existe deux réels positifs ou nuls λ et μ vérifiant :

$$\nabla f(3, 5) = -\lambda \nabla g_1(3, 5) - \mu \nabla g_2(3, 5),$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} -2 = -\lambda - \mu \\ -3 = -\lambda - 3\mu \end{cases},$$

système qui a pour solution : $\lambda = 3/2$, $\mu = 1/2$. Ces deux derniers nombres étant positifs, la condition de Karush, Kuhn et Tucker est vérifiée, et le point B constitue bien une solution optimale du problème (P), ce qui avait déjà été démontré dans la partie I.

Fin de corrigé

Le corrigé sera disponible en ligne sur le site pédagogique de l'U.E. après l'épreuve.