Instituto Tecnológico de Costa Rica **Escuela de Computación** Programa de Especialidad en Ciencias de los Datos **Curso: Matematica para Ciencias de los datos** Profesor: M. Sc. Saúl Calderón Ramírez	QUIZ 1 Entrega: Domingo 9 de Mayo, a través del TEC digital Entregar un .zip incluyendo el pdf, lyx o latex, y el jupyter notebook En el pdf incluir el código del jupyter notebook Valor: 100 pts. Puntos Obtenidos: ____________ Nota: ________________

Nombre del (la) estudiante: _Steven Jimenez Bustamante______________

Carné: __201229730_________

1. **(40 puntos)** Demuestre que para una matriz $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ invertible:

$$\left(A^{-1}\right)^{T}A^{T}=A^{T}\left(A^{-1}\right)^{T}$$

Las propiedades de matrices que se utlizaron en la solución del ejercicio, son las siguientes:

- Propiedad de matriz transpuesta[1] : $(AB)^{T}=B^{T}A^{T}$
- Propiedad de matriz inversa [2] : $A^{-1}A=I=AA^{-1}$
- Propiedad de matriz identidad [3] : $I^{T}=I$

Solución:
Problema: $\left(A^{-1}\right)^{T}A^{T}=A^{T}\left(A^{-1}\right)^{T}$
Aplicando la propiedad de matriz transpuesta:

$$\left(AA^{-1}\right)^{T}=\left(A^{-1}A\right)^{T}$$

Aplicando la propiedad de matriz inversa:

$$(I)^{T}=(I)^{T}$$

Aplicando la propiedad de matriz identidad:

$$I=I$$

Por lo tanto se concluye que la igualdad $\left(A^{-1}\right)^{T}A^{T}=A^{T}\left(A^{-1}\right)^{T}$ si se cumple

[1] Tomado del material del Curso: Introducción al reconocimiento de patrones: Repaso de Algebra Lineal y Probabilidades. Autor: Saul Calderon
[2] Tomado del material del Curso: Introducción al reconocimiento de patrones: Repaso de Algebra Lineal y Probabilidades. Autor: Saul Calderon
[3] Tomado del material del Curso: Introducción al reconocimiento de patrones: Repaso de Algebra Lineal y Probabilidades. Autor: Saul Calderon

a) (30 puntos) Verifique la demostración anterior con una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ invertible de su elección, usando pytorch. Adjunte el codigo y el resultado.

Solución:

Matriz invertible utilizada en esta solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A continuación se utiliza el código para mostrar que la condición de $\left(A^{-1}\right)^T A^T = A^T \left(A^{-1}\right)^T$, si se cumple para una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ invertible.

Definiciones en el código

$IZQUIERDA = \left(A^{-1}\right)^T A^T$

$DERECHA = A^T \left(A^{-1}\right)^T$

Codigo de python implementado en Google Colab

```
import torch
import numpy as np

A = torch.tensor([[1.0,2,3],[3,2,1],[2,1,3]])
print("Matriz A =",A)
Atranspuesta = torch.transpose(A, 0, 1)
Ainversa = torch.inverse(A)
AinversaTranspuesta = torch.transpose(Ainversa, 0, 1)

IZQUIERDA = AinversaTranspuesta.mm(Atranspuesta)
print("IZQUIERDA =",IZQUIERDA)
DERECHA = Atranspuesta.mm(AinversaTranspuesta)
print("DERECHA =",DERECHA)

diferencias = torch.abs(IZQUIERDA - DERECHA)
sumDiferencias = diferencias.sum()

print("Suma de diferencias",sumDiferencias)

if sumDiferencias < 0.001:
        print("La igualdad entre IZQUIERDA y DERECHA SI se cumple")
else:
        print("La igualdad entre IZQUIERDA y DERECHA NO se cumple")
```

Resultado:

```
Matriz A =
tensor([[1., 2., 3.],
        [3., 2., 1.],
        [2., 1., 3.]])

IZQUIERDA =
tensor([[ 1.0000e+00, -1.4901e-08,  1.4901e-08],
       [ 2.9802e-08,  1.0000e+00, -8.9407e-08],
       [-8.9407e-08, -2.9802e-08,  1.0000e+00]])
```

```
DERECHA =
tensor([[ 1.0000e+00,  0.0000e+00, -5.9605e-08],
        [-2.9802e-08,  1.0000e+00,  0.0000e+00],
        [ 1.1921e-07, -2.3842e-07,  1.0000e+00]])


Suma de diferencias tensor(6.5565e-07)


La igualdad entre IZQUIERDA y DERECHA SI se cumple
```

1. **(30 puntos)** Demuestre si, para dos matrices cuadradas $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se cumple que:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

Las propiedades de matrices que se utlizaron en la solución del ejercicio, son las siguientes:

- Propiedad - Distribuidad por derecha [4]: $AC + BC = (A+B)C$
- Propiedad - Distribuidad por izquierda [5]:$FA + FB = F(A+B)$
- Propiedad - Multiplicación de un número real por una matriz [6]: $[\lambda A]_{ij} = \lambda\,[A]_{ij} = [A]_{ij}\,\lambda$

Solución:

Problema: $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$
Llamaremos IZQUIERDA a: $(A+B)(A-B)$
Llamaremos DERECHA a: $A^2 - B^2$
Primero analizaremos a IZQUIERDA
Sea C= $(A-B)$

$$IZQUIERDA = (A+B)(A-B) = (A+B)C$$

Aplicando la propiedad de distribuidad por derecha:

$$IZQUIERDA = (A+B)(A-B) = AC + BC$$

Recordando que C= $(A-B)$

$$IZQUIERDA = (A+B)(A-B) = A(A-B) + B(A-B)$$

$$IZQUIERDA = (A+B)(A-B) = A(A+(-B)) + B(A+(-B))$$

Aplicando la propiedad de distribuidad por izquierda:

$$IZQUIERDA = (A+B)(A-B) = AA + A(-B) + BA + B(-B)$$

Aplicando la propiedad de Multiplicación de un número real por una matriz

$$IZQUIERDA = (A+B)(A-B) = AA + (-AB) + BA + (-BB)$$

$$IZQUIERDA = (A+B)(A-B) = A^2 + (-AB) + BA + (-B^2)$$

Tomando en cuenta que la operación Multiplicación entre matrices No Es Conmutativa, se concluye que IZQUIERDA y DERECHA, no son equivalentes

$$\left[(A+B)(A-B) = A^2 + (-AB) + BA + (-B^2)\right] \neq \left[A^2 - B^2\right]$$

$$IZQUIERDA \neq DERECHA$$

Por lo tanto, la igualdad $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ NO SE CUMPLE

[4] Teorema 2.2 - Libro Matrices y sistemas lineales, Autor:Cristhian Paez
[5] Teorema 2.2 - Libro Matrices y sistemas lineales, Autor:Cristhian Paez
[6] Definicion 2.13 - Libro Matrices y sistemas lineales, Autor:Cristhian Paez