

**Instituto Tecnológico de Costa Rica**  
**Escuela de Computación**

Programa de Especialidad en Ciencias de los Datos

**Curso: Matematica para Ciencias de los datos**

Profesor: M. Sc. Saúl Calderón Ramírez

**QUIZ 0**

Entrega: Domingo 25 de Abril, a través del TEC digital

Valor: 100 pts.

Puntos Obtenidos: \_\_\_\_\_

Nota: \_\_\_\_\_

Nombre del (la) estudiante: **Steven Jimenez Bustamante**

Carné: **201229730 (steven.jimenez.bustamante@gmail.com)**

1. **(50 puntos)** Demuestre si el siguiente sistema es lineal:

$$L\{u(t)\} = \max(0, u(t))$$

A tal función se le conoce como función de activación ReLU, graficada en la Figura 1.

- (a) De ser necesario, puede darse valores de contraejemplo para rechazar la hipótesis, usando un script en Python, el cual debe detallar.

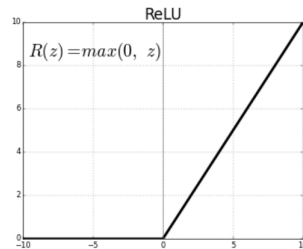


Figure 1: Función ReLU.

Solución:

Aplicando la ecuación para comprobar la linealidad de un sistema se tiene que

$$L\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} = \alpha L\{f_1(t)\} + \beta L\{f_2(t)\} \quad (1)$$

Sea nuestro sistema

$$L\{u(t)\} = \max(0, u(t)) \quad (2)$$

Aplicando la ecuación 1 en la ecuación 2, el sistema es lineal si se cumple la siguiente igualdad

$$\max(0, \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) = \alpha \max(0, f_1(t)) + \beta \max(0, f_2(t)) \quad (3)$$

Para mostrar que se rechaza la hipótesis se crea un escenario<sup>1</sup> de valores donde:

$$\alpha = -1.78$$

$$\beta = -2$$

$$f_1(t) = [0., 1., 2., 3., 4.]$$

$$f_2(t) = [4., 1., 0., 1., 4.]$$

$\alpha$	$\beta$	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$\max(0, \alpha f_1(t) + \beta f_2(t))$	Igualdad?	$\alpha \max(0, f_1(t)) + \beta \max(0, f_2(t))$
-1.78	-2	0	4	$\max(0, -8.00) = 0$	$\neq$	$(-1.78) * \max(0, 0) + (-2) * \max(0, 4) = -8$
-1.78	-2	1	1	$\max(0, -3.78) = 0$	$\neq$	$(-1.78) * \max(0, 1) + (-2) * \max(0, 1) = -3.78$
-1.78	-2	2	0	$\max(0, -3.56) = 0$	$\neq$	$(-1.78) * \max(0, 2) + (-2) * \max(0, 0) = -3.56$
-1.78	-2	3	1	$\max(0, -7.34) = 0$	$\neq$	$(-1.78) * \max(0, 3) + (-2) * \max(0, 1) = -7.34$
-1.78	-2	4	4	$\max(0, -15.12) = 0$	$\neq$	$(-1.78) * \max(0, 4) + (-2) * \max(0, 4) = -15.12$

Al comparar los valores de la columna 5 y la columna 7, se muestra que la igualdad entre columnas no se cumple, por lo que el sistema de la ecuación 2 No es lineal

**Conclusion: El sistema de la ecuación 2 No es lineal**

---

<sup>1</sup>Este escenario fue simulado con un script de python. Refierase al documento Quiz0 - Steven Jimenez solucion.ipynb

1. **(50 puntos)** Demuestre si el siguiente sistema es lineal:

$$L\{u(t)\} = \ln(1 + e^{u(t)})$$

Tal función, graficada en la Figura 2, se conoce como función softplus, la cual es una aproximación a la función ReLU.

- (a) De ser necesario, puede darse valores de contraejemplo para rechazar la hipótesis, usando un script en Python, el cual debe detallar.

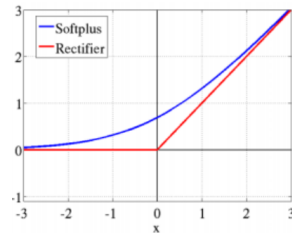


Figure 2: Función ReLU.

Solución:

Aplicando la ecuación para comprobar la linealidad de un sistema se tiene que

$$L\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} = \alpha L\{f_1(t)\} + \beta L\{f_2(t)\} \quad (4)$$

Sea nuestro sistema

$$L\{u(t)\} = \ln(1 + e^{u(t)}) \quad (5)$$

Aplicando la ecuación 4 en la ecuación 5, el sistema es lineal si se cumple la siguiente igualdad

$$\ln(1 + e^{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)}) = \alpha \ln(1 + e^{f_1(t)}) + \beta \ln(1 + e^{f_2(t)}) \quad (6)$$

Para mostrar que se rechaza la hipótesis se crea un escenario<sup>2</sup> de valores donde:

$$\alpha = -1.78$$

$$\beta = -2$$

$$f_1(t) = [0., 1., 2., 3., 4.]$$

$$f_2(t) = [4., 1., 0., 1., 4.]$$

$\alpha$	$\beta$	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$\ln(1 + e^{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)})$	Igualdad?	$\alpha \ln(1 + e^{f_1(t)}) + \beta \ln(1 + e^{f_2(t)})$
-1.78	-2	0	4	$\ln(1 + e^{-8}) = 3.35 * 10^{-4}$	$\neq$	$-1.78 \ln(1 + e^0) + -2 \ln(1 + e^4) = -9.27$
-1.78	-2	1	1	$\ln(1 + e^{-3.78}) = 2.25 * 10^{-2}$	$\neq$	$-1.78 \ln(1 + e^1) + -2 \ln(1 + e^1) = -4.96$
-1.78	-2	2	0	$\ln(1 + e^{-3.56}) = 2.80 * 10^{-2}$	$\neq$	$-1.78 \ln(1 + e^2) + -2 \ln(1 + e^0) = -5.17$
-1.78	-2	3	1	$\ln(1 + e^{-7.34}) = 6.48 * 10^{-4}$	$\neq$	$-1.78 \ln(1 + e^3) + -2 \ln(1 + e^1) = -8.05$
-1.78	-2	4	4	$\ln(1 + e^{-15.12}) = 2.38 * 10^{-7}$	$\neq$	$-1.78 \ln(1 + e^4) + -2 \ln(1 + e^4) = -15.18$

Al comparar los valores de la columna 5 y la columna 7, se muestra que la igualdad entre columnas no se cumple, por lo que el sistema de la ecuación 5 No es lineal

**Conclusión:** El sistema de la ecuación 5 No es lineal

<sup>2</sup>Este escenario fue simulado con un script de python. Refierase al documento Quiz0 - Steven Jimenez solucion.ipynb