k	x0	x1	x2	x3	y0	y1	y2	y3	y4	y5	y6	y7	dist(y,z)	y0	y1	y2	y3	y4	y5	y6	y7	$(-1)^{yi}$ $\hat{F}_z(y) =$ 8-2dist(y,z)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	1	1	1	1	1	1	1	1	-2
1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	2
2	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	5	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-2
3	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	3	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	2
4	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	5	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-2
5	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	2
6	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	5	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-2
7	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	7	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-6
8	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	2
9	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	5	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-2
10	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	3	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	2
11	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	5	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-2
12	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	3	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	2
13	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	5	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-2
14	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	3	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	2
15	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	6

z0	z1	z2	z3	z4	z5	z6	z7
1	1	0	1	0	1	1	0

z0	z1	z2	z3	z4	z5	z6	z7	$F_z(i)=(-1)^{zi}$
-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	

Cas : $r = 3$, $2^r = 8$

Soit $\bar{z} \in \Omega^8$ un élément à débruiter. Le but est de trouver l'élément $\bar{\nu} \in RM \subset \Omega^8$ du code tel $d_H(\bar{\nu}, \bar{z})$ est minimal.

On peut calculer $d_H(\bar{y}, \bar{z})$
- soit pour tous les éléments $\bar{y} \in RM$;
- soit pour les éléments $\bar{y} \in RM_0$ (la 1ère moitié de RM) et utiliser $d_H(\bar{y} + \bar{b}_3, \bar{z}) = 8 - d_H(\bar{y}, \bar{z})$ pour les éléments de RM_1 (la 2ème moitié de RM).

Il est plus pratique de travailler avec la fonction

$$\hat{F}(\bar{y}) = \sum_{i=0}^{7} (-1)^{y_i} (-1)^{z_i}$$

plutôt qu'avec la distance de Hamming à laquelle elle est liée par $\hat{F}(\bar{y}) = 8 - 2d_H(\bar{y}, \bar{z})$.

Celle-ci est en effet plus symétrique, car $\hat{F}(\bar{y} + \bar{b}_3) = -\hat{F}(\bar{y})$.

Donc, il est équivalent de chercher l'élément $\bar{\nu}$ appartenant à
- RM tel que $d_H(\bar{\nu}, \bar{z})$ est minimal ;
- RM tel que $\hat{F}(\bar{\nu})$ est maximal ;
- RM_0 tel que $|\hat{F}(\bar{\nu})|$ est maximal et le remplacer par $\bar{\nu} + \bar{b}_3$ si $\hat{F}(\bar{\nu}) < 0$.

On examine à présent la structure de $\hat{F}(\bar{\nu})$ sur la 1ère moitié RM_0 du code pour faire apparaître l'algorithme de calcul rapide.

Eléments de la base :

$$\begin{array}{l} \bar{b}_0 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1) \\ \bar{b}_1 = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1) \\ \bar{b}_2 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \\ \bar{b}_3 = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \end{array}$$

Avec $u \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$ et en posant $F(i) = (-1)^{z_i}$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, 7$, on a :

$$u = 0 = (0000) : \quad \bar{y} = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{F}(0) &= (-1)^0F(0)+(-1)^0F(1)+(-1)^0F(2)+(-1)^0F(3)+(-1)^0F(4)+(-1)^0F(5)+(-1)^0F(6)+(-1)^0F(7) \\ &= F(0) + F(1) + F(2) + F(3) + F(4) + F(5) + F(6) + F(7) \end{aligned}$$

$$u = 1 = (1000) : \quad \bar{y} = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{F}(1) &= (-1)^0F(0)+(-1)^1F(1)+(-1)^0F(2)+(-1)^1F(3)+(-1)^0F(4)+(-1)^1F(5)+(-1)^0F(6)+(-1)^1F(7) \\ &= F(0) - F(1) + F(2) - F(3) + F(4) - F(5) + F(6) - F(7) \end{aligned}$$

$$u = 2 = (0100) : \quad \bar{y} = (0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{F}(2) &= (-1)^0F(0)+(-1)^0F(1)+(-1)^1F(2)+(-1)^1F(3)+(-1)^0F(4)+(-1)^0F(5)+(-1)^1F(6)+(-1)^1F(7) \\ &= F(0) + F(1) - F(2) - F(3) + F(4) + F(5) - F(6) - F(7) \end{aligned}$$

$$u = 3 = (1100) : \quad \bar{y} = (0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{F}(3) &= (-1)^0F(0)+(-1)^1F(1)+(-1)^1F(2)+(-1)^0F(3)+(-1)^0F(4)+(-1)^1F(5)+(-1)^1F(6)+(-1)^0F(7) \\ &= F(0) - F(1) - F(2) + F(3) + F(4) - F(5) - F(6) + F(7) \end{aligned}$$

$$u = 4 = (0010): \quad \bar{y} = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1)$$

$$\Rightarrow \hat{F}(4) = (-1)^0 F(0) + (-1)^0 F(1) + (-1)^0 F(2) + (-1)^0 F(3) + (-1)^1 F(4) + (-1)^1 F(5) + (-1)^1 F(6) + (-1)^1 F(7)$$
$$= F(0) + F(1) + F(2) + F(3) + F(4) - F(5) - F(6) - F(7)$$

$$u = 5 = (1010): \quad \bar{y} = (0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)$$

$$\Rightarrow \hat{F}(5) = (-1)^0 F(0) + (-1)^1 F(1) + (-1)^0 F(2) + (-1)^1 F(3) + (-1)^1 F(4) + (-1)^0 F(5) + (-1)^1 F(6) + (-1)^0 F(7)$$
$$= F(0) - F(1) + F(2) - F(3) - F(4) + F(5) - F(6) + F(7)$$

$$u = 6 = (0110): \quad \bar{y} = (0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0)$$

$$\Rightarrow \hat{F}(6) = (-1)^0 F(0) + (-1)^0 F(1) + (-1)^1 F(2) + (-1)^1 F(3) + (-1)^1 F(4) + (-1)^1 F(5) + (-1)^0 F(6) + (-1)^0 F(7)$$
$$= F(0) + F(1) - F(2) - F(3) - F(4) - F(5) + F(6) + F(7)$$

$$u = 7 = (1110): \quad \bar{y} = (0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1)$$

$$\Rightarrow \hat{F}(7) = (-1)^0 F(0) + (-1)^1 F(1) + (-1)^1 F(2) + (-1)^0 F(3) + (-1)^1 F(4) + (-1)^0 F(5) + (-1)^0 F(6) + (-1)^1 F(7)$$
$$= F(0) - F(1) - F(2) + F(3) + F(4) - F(5) - F(6) + F(7)$$

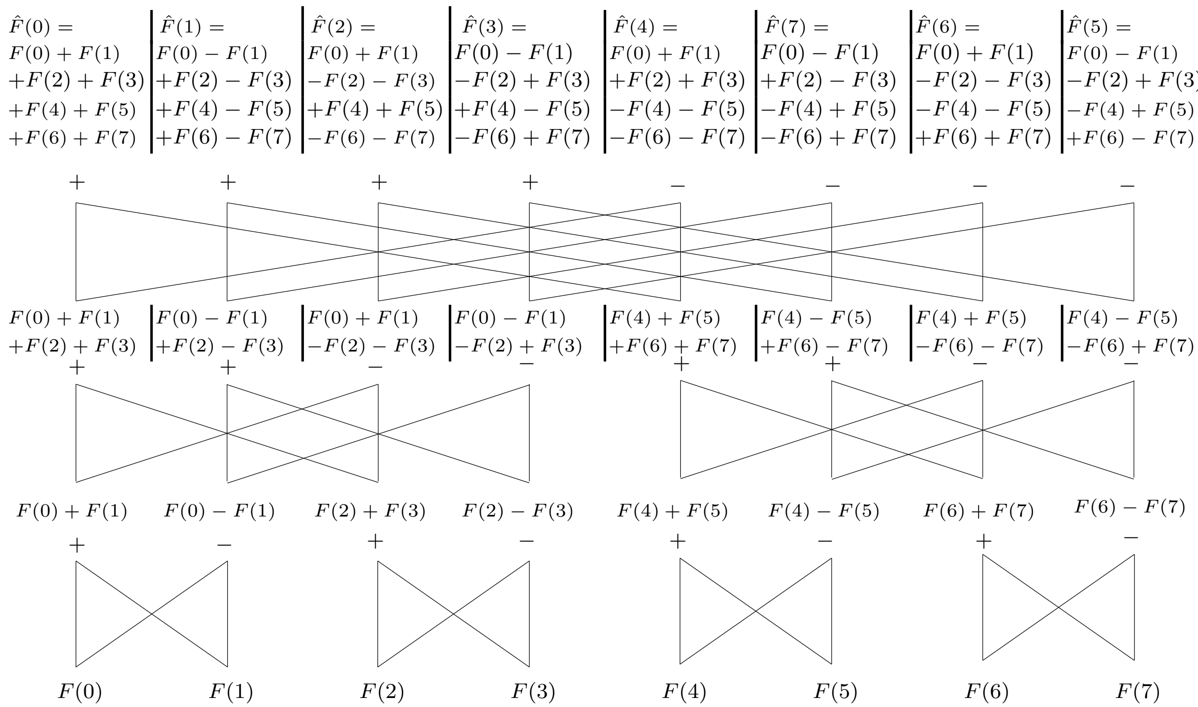

FIGURE 1 – Illustration du calcul