Exercice sur les codes de Reed-Muller

Cas $r = 3, 2^r = 8$

Ensemble des chaînes de bits : $\Omega^{4=r+1} = \{x = x_0x_1x_2x_3 \text{ avec } x_i \in \{0,1\}\}$

Base de Ω^4

$$\bar{e}_0 = (1\,0\,0\,0)$$
$$\bar{e}_1 = (0\,1\,0\,0)$$
$$\bar{e}_2 = (0\,0\,1\,0)$$
$$\bar{e}_3 = (0\,0\,0\,1)$$

Encodage des éléments de la base

$$\bar{b}_0 = rm(1\,0\,0\,0) = (0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1)$$
$$\bar{b}_1 = rm(0\,1\,0\,0) = (0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1)$$
$$\bar{b}_2 = rm(0\,0\,1\,0) = (0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1)$$
$$\bar{b}_3 = rm(0\,0\,0\,1) = (1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1)$$

$$\bar{y} = (y_0y_1y_2y_3y_4y_5y_6y_7) = rm(\bar{x}) = rm(x_0x_1x_2x_3) = \sum_{i=0}^{r} x_i\bar{b}_i$$

Eléments du code

Quels sont les éléments du code ?

Décodage

Considérons un exemple avec $\bar{y} = (1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1)$

On cherche $\bar{x}$ tel que $\bar{y} = rm(\bar{x})$.

On veut donc résoudre l'équation

$$\begin{aligned}
\bar{y} = &\quad (1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1) \\
&= x_0(0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1) \\
&+ x_1(0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1) \\
&+ x_2(0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1) \\
&+ x_3(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)
\end{aligned}$$

Sachant que $y_0 = 1$, que vaut x_3 ?

On pose $\bar{w} = \bar{y} + x_3\bar{b}_3$.

Que vaut $\bar{w}$?

Comment $\bar{w}$ s'exprime-t-il en fonction de x_0, x_1 et x_2 ?

Quels bits de $\bar{w}$ faut-il examiner pour trouver x_0, x_1 et x_2 ?