**线性代数**

向量是描述用某基向量进行线性表达的矢量，有a个i与b个j以及更多参数组成，当i与j发生变化则向量会跟着发生变化。

**线性变换：**坐标系不变（xyz轴不变），只是改变此坐标系的基向量ij（基向量ij意义一致，都在我坐标系下但值不同），从而导致变换前后的两个向量对于同一坐标系来说变成了不同的向量，值不同。

矩阵乘以向量：用目标基向量组成的矩阵乘以向量a，得到同一坐标系下描述的向量b。（此矩阵运算改变基向量）

**基变换：**坐标系变化（导致基向量ij值可能一致但意义不同，在不同坐标系下不再是熟悉的xyz轴） ，同一个向量用不同的坐标系进行描述所以值不同。

矩阵乘以向量（原坐标系）：用我坐标系中对方坐标系的基向量ij组成的矩阵乘以对方坐标系中的向量a，得到向量a在我坐标系中的表达。（此矩阵运算改变坐标系）若再发生线性变换则可再通过逆矩阵运算变回原坐标系的表达，记作：A-1MAa = b（a与b为原坐标系中线性变换前后的向量）

矩阵运算无非是改变基向量或坐标系，分别叫做线性变换和基变换，根本在于替换ai与bj中的i和j，一个用不同基向量来替换，一个用不同坐标系的基向量在本坐标系中的基向量表达替换。

1. **行列式**
2. **排列**

排列：又1,2,3,...,n组成的一个有序数组，叫n级排列

逆序：大数排在小数的前面，例如321

逆序数：排列中逆序的总数，例如4231的逆序数为：4后有3个数比他小，2后有1个数比他小，3后有1个数比他小，N(4231)=3+1+1=5，N(n(n-1)...321)=n(n-1)/2

偶排列、奇排列：逆序数为偶数则为偶排列，为奇数则为奇排列

对换：排列交换其中两个数的位置，**每一次对换**都会改变排列的奇偶性

n级排列中，奇排列与偶排列各占n!/2

1. **n阶行列式（行列式的值是原ij坐标系在新矩阵坐标系的同样向量组成四点或n点图像的区域大小倍数）**

n阶行列式计算中根据行列标不重复有n!个排列，可按行或列顺序展开，若按行展开前面的符号由列标排列的奇偶性决定，例如a12a21a34a43的正负号为=+1，行列式的性质对行与列一致。

n阶行列式 =

上三角、下三角、对角形行列式：主对角线则= ，次对角线则需考虑符号 ，其区别为顺序排列与逆序排列。

1. **行列式性质**

转置（transform）：，以主对角线为轴对调两边内容，使行变为列，列变为行，T与D一致。

性质1: **DT = D，行列式转置但值不变**，因为两个行列式分别根据行和列展开，每个元素都相等。**所以对行有效的性质对列同样成立**。

性质2: **行列式D的某两行或列互换，行列式的值要改变符号**，因为按行展开后，由于每个元素都是由不同行列标的数组成，每个元素的列标会发生一次对换，排列奇偶变换导致每个元素的符号都发生变化。推论：D中两行或两列相等，但互换后值不变，所以D=0。

性质3: **D中两行或两列相等，D=0**

性质4: **D的某一行或列都乘以k，等同于k乘以D**，因为行列式展开的每个元素都一定有某一行或某一列的某个值，若这一行或列乘以k，则每个元素必定会乘以一次k。推论：

**行列式某一行或列有公因子k，可提取到行列式外，若每个元素均有公因子k，则外提n次**。

性质5: **D的两行成比例，则D=0，推论：若D某行或列都为0，则D=0，**因为0乘以任何数字都为0

性质6: **行列式D1与D2只有一行或一列不同，则D1+D2=D为这两个行列式相同的部分不变，不同的行或列的值分别相加。**因为每个元素都可以拆成两个值相加乘以其他值。和那一行分开，其余不变。

性质7: **D某一行或列乘以一个数，加到另一行或列上去，行列式值不变**。因为拆成两个行列式后，会变成D+D1，而D1的某行或列与另一行或列成比例=0。

1. **行列式按行展开**

余子式：行列式的某个元素的去除此元素行列的行列式。写作Mij

代数余子式：余子式前加符号，由元素的行列标号决定。Aij=(-1)i+jMij

行列式按行展开：D = ai1Ai1 + ai2Ai2 + ... + ainAin ，元素乘以对应的代数余子式

定理1: **（异乘变零）某行元素与另一行元素的代数余子式乘积之和为0**，因为假设第四行元素用第一行代数余子式相乘，可以看做把第一行元素换成第4行的元素，而当一个行列式中两行元素相同则为0。

**拉普拉斯定理**： **取定k行，由k行元素组成的所有k阶子式与代数余子式的乘积之和=D**，对于某些分块全为0的行列式很好用。

k阶子式:  
 ｜1 2 3 4｜

｜1 1 2 5｜ 2阶子式：｜1 2｜ 余子式：｜0 8 ｜

｜1 1 0 8｜ ｜1 1｜ ｜9 10｜

｜9 9 9 10｜

代数余子式：A=(-1)i1+i2+j1+j2M

1. **行列式的计算**

**行列式相乘**：D1的i行元素依次与D2的j列元素相乘后求和得到D3ij

将余子式或代数余子式构造为行列式：求D的M41+M42+M43+M44：原式=-A41+A42-A43+A44=（-1） \* A41+1\*A42+（-1）\*A43+1\*A44

根据上面的式子将D第四行的元素替换为-1、1、-1、1，计算新行列式的值即为答案。

加边法：在原行列式D的第一行和第一列前再加一行和一列，要求其中某行或列第一个元素为1，其余为0，相当元素1的代数余子式为D，保证加边后两行列式相等。

三叉型行列式：只有第一行、第一列、主对角线有非零元素，从第一列按照对角线元素逐行相加对角线元素分之一，将第一列除第一个元素化为0，得到上三角行列式。（行列式计算一定要注意元素是否为零，不然不能放在分母上。）

范德蒙德行列式：n阶行列式D每行元素为xj的（行数-1）次方，例如1 1 1 1、x1 x2 x3 x4、x12 x22 x32 x42、... D =

对称行列式：主对角线元素没有要求，上下对应相等（aij = aji）

反对称行列式：主对角线全为0，上下位置对应成相反数（aij = -aji），奇数阶D = 0（逐行乘以-1，直到变为DT，一共有奇数个-1相乘，D=DT=0）

克莱姆法则：n个方程n个未知量，D != 0，xj = Dj / D（用方程的y组成的列分别替换D的第j列）。

定理1: 齐次方程（y都等于0）至少有零解，若D != 0则只有零解（因为每个Dj 都=0）。

定理2: 齐次方程（方程数=未知数个数）有非零解 =（充要条件） D=0

1. **矩阵概念**

矩阵是数表，行列式本质是个数字

负矩阵：所有元素都为原矩阵负数-A

n阶方阵：行数=列数，An

单位阵：只有对角线有元素，其余都为0的方阵，计作En或In

行列数一致的矩阵称为同型矩阵

1. **矩阵运算：**

加法：同型矩阵可相加，对应元素相加。A+B=B+A，A+(B+C)=(A+B)+C，A+0=A

减法：同型矩阵可相减，对应元素相减。A+(-A)=0，A+B=C & C-A=B

数乘：一个数k乘以矩阵，将矩阵的所有元素乘以k。矩阵所有元素有公因子，公因子外提一次。

矩阵相乘：A1的i行元素依次与A2的j列元素相乘后求和得到A3ij。

第一个矩阵的列数=第二个矩阵的行数。

结果矩阵的行数=第一个矩阵的行数，结果矩阵的列数=第二个矩阵的列数。

A3\*4 B4\*5**中间相等取两头**

矩阵乘法不满足：

1. AB != BA ，AB有意义，BA不一定。若AB=BA则称A、B为可交换的，必须都为方阵。
2. AB=0，不代表A=0或B=0
3. AB=AC且A!=0，不代表B=C（例如AB=0，C=0）

矩阵相乘定律：

1. 结合律：(AB)C = A(BC)
2. 分配律：(A+B)C = AC+AB，C(A+B) = CA+CB
3. k(AB) = (kA)B = A(kB)

矩阵A与单位阵E相乘，AE=A，EA=A

矩阵有幂次方必须为方阵。

一般(AB)k != AkBk，(A+B)2 != A2+2AB+B2，因为AB!=BA

矩阵转置：

(AT)T=A

(A+B)T=AT+BT

(kA)T=kAT

(AB)T=BTAT, (ABCD)T=DTCTBTAT

特殊矩阵：

对角形矩阵：diag(a1,a2,a3,...,an)

对称矩阵：AT=A，(AB)T=BTAT=BA

定理：A，B为对称矩阵，则AB对称 <=> AB可交换

反对称矩阵：主对角线全为0，元素根据主对角线对称互为负数，aij = -aji，AT=-A

1. **逆矩阵**

**矩阵不能放在分母上**。

A为方阵，｜A｜为方阵的行列式

性质1: ｜AT｜ = ｜A｜

性质2: ｜kA｜ = kn｜A｜

性质3: ｜AB｜ = ｜A｜\*｜B｜

**伴随矩阵**：方阵才有伴随矩阵且任意方阵都有伴随矩阵，记作A\*

1. 求所有元素的代数余子式。
2. 按行求的代数余子式按列放，构成矩阵。

**按行求，按列放**

定理1: AA\* = A\*A = ｜A｜E， 一行元素与自己的代数余子式相乘为行列式的值，与别的行的代数余子式相乘为0（异乘变零）

定理2: ｜A\*｜ = ｜A｜n-1，因为｜AA\*｜=｜｜A｜E｜=｜A｜｜A\*｜=｜A｜n（行列式中提取矩阵E的｜A｜则需要提取n阶次｜A｜）

**逆矩阵**：

A与B皆为n阶方阵，AB=BA=E，A-1=B，A的逆矩阵为B，计算前一定要先判断是否可逆

1. 未必所有方阵均可逆，例如0方阵
2. 若方阵可逆，则逆矩阵唯一
3. A可逆，A-1可逆，（A-1）-1=A
4. A，B均可逆，AB可逆，（AB）-1=B-1A-1，（AB）T=BTAT
5. A可逆，AT可逆，（AT）-1=（A-1）T；k！=0，（kA）-1 = （1/k）A-1
6. A可逆，｜A-1｜=｜A｜-1

**伴随矩阵法**：

定理：A可逆的充要条件是｜A｜！= 0，A-1=（1/｜A｜）A\*

因为AA\* = A\*A = ｜A｜E，每个项都除以｜A｜，A[（1/｜A｜）A\*] = E，所以A-1=（1/｜A｜）A\*

**初等变换法**：矩阵之间用箭头联系，并不相等，本质是对矩阵的一种变化

行变换：

1. 交换两行
2. 用k（k！=0）乘以某行
3. 某一行的l倍加到另一行上去
4. **初等变换**

（1）交换两行

（2）用k（k！=0）乘以某行

（3）某一行的l倍加到另一行上去

**标准型**：从左上角开始主对角线一串1（个数可以为0，不能断），剩下为一串0（个数可以为0），其余位置皆为0

定理：任何矩阵都能通过初等变换为标准型

**等价**：A经过初等变换得到B

1. **反身性**：A经过初等变换可以变回自己
2. **对称性**：A可以变换为B，则B也可以变换为A

**初等方阵**：对E做一次初等变换得到的矩阵

1. 初等方阵均可逆，其逆矩阵也是初等方阵
2. 初等方阵的转置矩阵也为初等方阵

初等方阵E（2，3）：将单位阵的第二行与第三行互换

E（1（3））：将单位阵的第一行乘以3

性质：用初等方阵左乘A，相当于对A实施初等行变换

用初等方阵右乘A，相当于对A实施初等列变换

所以初等变换最好写成初等方阵的左乘与右乘

推论1：A与B等价 <=> 有可逆矩阵P和Q，使PAQ=B（因为可以对A进行初等行变换与列变换得到B，等价为左乘P与右乘Q）

定理：A可逆 <=> A的标准型为E（满秩）

定理：A可逆 <=> A = P1 ... E ... P5（初等方阵的乘积）

初等行变换求逆矩阵：

E与A都为满秩矩阵（A可逆），由同秩矩阵可经过初等变换得：E = Q1Q2...QtA --> A-1 = Q1Q2...QtE

所以：当A通过初等行变换为E时，经过同样初等行变换的E也变为A-1

初等变换法：（A，E） -行-> （E，A-1）

1. **矩阵的秩**

n阶子式：任选n行n列组成的行列式，可以有多种选择

**矩阵的秩：**矩阵非零子式的最高阶数，相当于矩阵所代表的线性变换的维度，例如3阶矩阵秩为2则意味着从三维降到二维的一个线性变换，两基向量必定与剩下一条基向量线性相关。

1. m\*n阶矩阵的秩一定小于等于n与m的最小值，若r（A）=m为行满秩矩阵，r（A）=n为列满秩矩阵，若r（A）=m=n为满秩矩阵。
2. 若r（A）小于m或n称为降秩矩阵。若A为满秩方阵，则A可逆，｜A｜！=0。

**阶梯型矩阵**：

1. 若有零行，则在非零行下面
2. 左起首非零元素左边零的个数随行数严格增加

**\* 行简化阶梯型：**

1. 非零行的首非零元是1
2. 首非零元所在列的其余元素为0

**定义：r（A）=非零行的行数，初等变换不改变矩阵的秩**

性质1: r（A）=r（AT）

性质2:矩阵乘以可逆矩阵，秩不变。

性质3:Am\*n，P为m阶可逆方阵，Q为n阶可逆方阵，r（A）=r（PA）=r（AQ）=r（PAQ）

1. **向量**

**线性组合**：若a、b、c等都为n维向量，若kb+k2c+。。。=a，称为a的线性组合。

**线性相关**：存在一组不全为0的系数使向量组合等于0，则为线性相关。（至少有一个向量可以表示为其他向量的线性组合）

**线性无关**：不存在一组不全为0的系数使向量组合等于0，则为线性无关。（任何向量都不能通过组合集合中的其他向量来表达）

**等价**：设有两个向量组

(Ⅰ)：α1，α2，……，αm；

(Ⅱ)：β1，β2，……，βm；

如果(Ⅰ)中每个向量都可以由向量组(Ⅱ)[线性](https://baike.baidu.com/item/线性/5450468?fromModule=lemma_inlink" \t "/Users/StevenShi/Documents\\x/_blank)表示，则称(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示；如果(Ⅰ)与(Ⅱ)可以相互线性表示，则称(Ⅰ)与(Ⅱ)等价，记为(Ⅰ)≌(Ⅱ)。

性质：

1. 若向量组中两向量成比例，则线性相关。
2. 含零向量的向量组必线性相关。
3. 只有一个零向量必线性相关。
4. 任意一个非零向量必线性无关。

部分组线性相关则整体线性相关，整体组线性无关则部分组线性无关。

无关的向量组，接长向量组也无关（升维）

相关的向量组，截短向量组也线性相关

n个n维向量，D！=0，则线性无关，D=0则线性相关

定理：

1. 线性相关<=>至少一个向量可以用别的向量组合表示
2. 若a1到as线性无关，加上b后线性相关，则a1到as可唯一线性组合为b
3. a1到as线性无关，但可由b1到bt线性表示，则s<=t
4. m>n,m个n维向量线性相关
5. 等价的线性无关的向量组个数一定想同
6. **向量组的秩**

**极大无关组**：向量组a1到as中有部分组a1、a2

1. a1、a2无关
2. 每个向量都可由a1、a2表示

则a1、a2为原向量组的极大无关组（相当于能线性组合成所有向量的维度数量）

极大：找无关向量组的向量个数最大（类似最大公约数概念）

性质：

1. 全是0的向量组没有极大无关组
2. 一个线性无关的向量组极大无关组是其本身
3. 任何极大无关组与原向量组等价

**向量组的秩**：极大无关组含向量的个数，记作r（a1、a2、。。。）

定理：

1. 若向量组a可由向量组b表示，则r（a）<=r（b）
2. 等价向量组有相同的秩，相同的秩不代表等价

行秩：行向量组的秩

列秩：列向量组的秩

**行秩=列秩=矩阵的秩r（A）**，非零子式一定为方阵，且最大非零子式可以表达所有维度。

定义：**初等行变换不改变矩阵列向量的线性关系**

**求极大线性无关组与其组成其余向量的参数：**

按列摆放矩阵，求行简化阶梯型，其排除所有头部为1其余为0的极大线性无关列与全0行，剩下的部分按列分别为参数。（相当于后续列都由前几列线性组合表达，而前几列组成的矩阵为单位矩阵，后面部分可以看做是前面不同列向量的倍数的组合）

1. **线性方程组**

**线性方程组有解判定**：

（A上划线是增广矩阵）

1. 当r（A）=r（A），且都=n（未知量个数，A列数）有唯一解，都<n有 无穷多解。
2. 当r（A）！=r（A），无解（因为0不等于任何非零的数字）。

当有无穷多解时：将行简化阶梯型的非线性部分移到等式左边，只有线性部分解，称为一般解。例如x1 = 5 - 3x3 - 2x4，x2 = 3 - 2x3 - x4，x3 - x4为自由未知量。

**齐次方程组的解**：

齐次方程一定有解，至少有零解。

1. r（A）=r（A）=n，有唯一零解
2. r（A）<n <=> 有非零解（无穷多个）
3. 齐次方程的方程个数少于未知数个数，有非零解（无穷多个）
4. 方程个数=未知数个数，有非零解 <=> ｜A｜=0，A可不可逆

齐次线性方程组Ax=0：

1. 两解相加还是解，0+0=0
2. k倍解还是解，k\*0=0

**齐次方程组的基础解系**：

使自由未知量取100，010，001，得出加上最大线性无关未知量的向量，将x1与x2倒过来用自由未知量表示，自由未知量有多少解就有几个，=n-r（A）。

定理：A为m\*n，B为m\*s，若AB=0，则r（A）+r（B）<=n

**非齐次线性方程组的解**：

1. 两个解相减为导出组解
2. 非齐次方程组的解和导出组的一个解相加以后仍是非其次线性方程组的一个解

非齐次方程方程组的解为：一个特解加上齐次方程的基础解系，特解+c1解系1+c2解系2

特解：取未知自由量皆为0，得一个特解

1. **矩阵的特征值与特征向量：**

（只有方阵才能求特征值与特征向量）

A为n阶方阵，对于一个数k（可以为0），若存在非零列向量a，使Aa=ka，则：k为一个特征值，a为对应k的特征向量。（说明经过矩阵A的线性变换后特征向量的线性关系不变，特征值和特征向量揭示了矩阵的变换在某些方向上作用的“强度”和“方向”，意味着只要在原基向量基础上对特征向量方向的特征值力度进行拉伸即为新的基坐标。）

可得：（kE - A）a = 0，a有非零解 <=> ｜kE - A｜=0（称为特征方程）

1. k是A的特征值，a是k对应的特征向量，只要常数c！=0，ca也是k的特征向量。

性质：

1. 转置矩阵与原矩阵有相同的特征值
2. 矩阵a的每行与每列元素绝对值之和小于1，特征值的模小于1
3. 矩阵a有n个特征值，所有特征值之和为对角线元素之和，所有特征值相乘为a的行列式
4. 特征值互不相同，对应的特征向量线性无关
5. 特征值互不相同，特征值对应的线性无关的特征向量组合起来还是线性无关
6. k重特征根，对应的线性无关的特征向量的个数<=k

其他性质：3k是3A的特征值，k2是A2的特征值，1/k是逆矩阵的特征值，｜A｜/k是伴随矩阵的特征值。

1. **相似矩阵、可对角化矩阵**

相似：A与B为n阶方阵，有n阶可逆矩阵P，使P-1AP=B，A～B

相似矩阵的概念是通过基变换来实现的，体现了同一个线性变换在不同基下的表示形式。

反身性：A～A

对称性：A～B，得出B～A

A～B，B～C，得出A～C

性质1: A～B，A与B有相同的特征值，r（A）=r（B）

性质2: A～B，｜A｜=｜B｜

性质3: A～B，Am～Bm，A-1～B-1

定理：A相似于对角矩阵B，则A有n个线性无关的特征向量

若特征根都为单根，则一定相似于对角形

重根对应的线性无关特征向量个数=重根的重数，相似于对角形

定理：A相似与对角形，r的i重特征根，基础解系有重数个解

所有实对称矩阵都能对角化。**一个矩阵 AA 能够对角化，当且仅当它有足够的线性无关的特征向量来形成一个基，从而可以写作 A=PDP−1A=PDP−1**

1. **内积、正交**

**内积**（点积）：（a，a）向量元素相乘后相加，是一个数字

长度（范数，模）：｜｜a｜｜ = 根号下（a，a），

1. b） <= （a，a）· （b，b），因为ab角度大于等于0

｜｜a+b｜｜ <= （a，a）+ （b，b），因为三角第三边长度小于另外两边长度

**正交**（垂直）：内积=0的向量组称为正交，因为角度为90，cos90为0

标准正交向量组：内积都为1的正交向量组。

**施密特正交**：

给一组线性无关的a1到as，求一组正交的b1到bs，使其与原来的向量组等价

b1 = a1，bn = an -（an，b1）/（b1，b1）b1 - 。。。kbn，每个k由an与bt组成，bt为b1到bn

1. **正交矩阵**

正交矩阵：A为n阶方阵，ATA=E

性质1：A不变，｜A｜ = 1 ， ｜ATA｜=1

性质2：A不变，A-1=AT，A-1和AT均为正交矩阵

性质3：A，B为正交矩阵，AB也正交矩阵

性质4：A，B为正交矩阵，（Aa，Bb）=（a，b）

定理：A为正交矩阵，则列向量组或行向量组为正交单位向量

定理：实对称矩阵A的不同特征值的特征向量正交

1. **二次型**

二次型：所有项都为二次未知数（x2y视为三次），是矩阵的表达式，一定对称，AT=A

平方向放对角线，其余除以二放在行列对称处

等价（只有秩相同）–>合同（秩和正负惯性指数相同）–>相似（秩，正负惯性指数，特征值均相同），矩阵亲密关系的一步步深化。

合同：A、B为n阶方阵，有可逆C，使CTAC=B

1. A与自身合同，因为ETAE=A
2. A与B合同，B也与A合同
3. A与B合同，B与C合同，A也与C合同