非完整力学与控制*

王定文[1)†]　高普云[1)]

1) (国防科技大学, 航天科学与工程学院, 长沙　410072)

非完整约束的不可积性是非完整力学的困难所在。而非完整约束的来源是非完整力学研究中常被忽视的问题。本文从非完整约束的物理背景出发，揭示出非完整力学的控制本质。从控制的观点可以统一非完整系统的不同模型(如Chetaev模型和Vacco模型)。我们指出非完整力学仍然处于分析力学的理论框架内，不同模型的区别仅在于它们各自暗含的控制力不同。

关键词: 非完整力学，控制论，Chetaev模型，Vacco模型

PACS: 45.05.+x,45.20.Jj,45.80.+r

一个受约束的系统在广义坐标下的动力学方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j-Q_j^c=0,\quad (j=1,\cdots,n) \tag{1}$$

其中Q_j为主动力的广义力形式，Q_j^c是约束力的广义力形式，T是以广义坐标表示的系统动能。这个方程不论对于完整系统还是非完整系统都是成立的，因为它只不过是Newton动力学方程在广义坐标下的重新表述。此时各广义坐标是相互独立的，约束的作用已经通过约束力的形式反映在动力学方程中。为了得到系统的动力学方程，关键是确定约束力Q_j^c的形式。注意此刻问题的讨论仍然处于Newton力学的框架内。

分析力学中的约束往往不是以约束力的形式给出，而是以广义坐标及广义速度等运动学量之间存在一定关系的形式给出的。因此问题转化为如何根据运动学关系得到约束力的形式，进而得到动力学方程。为了做到这一点，分析力学中往往引入一些与Newton力学等价的原理，例如D'Alembert-Lagrange原理和Hamilton原理。

† 通讯作者. E-mail: wangdingwen0618@gmail.com　电话: 15116442661

如果系统的约束是理想完整的，我们引入虚位移的概念，此时约束力在虚位移空间所作的虚功为零。由此可以得到广义坐标形式的动力学普遍方程

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right)\delta q_j=0 \tag{2}$$

如果所选择的广义坐标数正好是系统的自由度数$m=n$，且虚位移δq_j是相互独立的。方程(2)成立当且仅当所有δq_j的系数等于零。此时可以得到n个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j=0 \quad (j=1,2,\cdots,n). \tag{3}$$

显而易见，对比方程(1),在这样选择的广义坐标下对应的广义约束力$Q_j^c=0$。这是因为所选择的广义坐标使得约束关系自动得到满足，系统在这样的广义坐标下是自由的。

当然也可能选择的广义坐标数大于系统的自由度数$m>n$,此时各广义坐标之间存在着一定的关系

$$g_\beta(q_1,q_2,\cdots,q_m,t)=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,m-n). \tag{4}$$

虚位移δq_j之间存在如下线性关系

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g_\beta}{\partial q_j}\delta q_j=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,m-n). \tag{5}$$

引入一组参数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-n}$,分别乘以(5)中各式，并将所得各式相加，得

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{\beta=1}^{m-n}\lambda_\beta\frac{\partial g_\beta}{\partial q_j}\right)\delta q_j=0. \tag{6}$$

比较(6)和(2)并根据线性代数理论，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j=D\cdot\sum_{\beta=1}^{m-n}\lambda_\beta\frac{\partial g_\beta}{\partial q_j} \quad (j=1,2,\cdots,m). \tag{7}$$

D为一常数，显然D可被吸收入参数λ_β中，为简单起见(7)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j=\sum_{\beta=1}^{m-n}\lambda_\beta\frac{\partial g_\beta}{\partial q_j} \quad (j=1,2,\cdots,m). \tag{8}$$

方程(4)和(8)构成了完备的动力学方程组。参数$\lambda_\beta(\beta=1,2,\cdots,m-n)$常被称作Lagrange乘子。对比(1),可以知道，对应于广义坐标的广义约束力为$Q_j^c=\sum_{\beta=1}^{n-m}\lambda_\beta\frac{\partial g_\beta}{\partial q_j}$。

0.1 乘子的作用

我们要特别指出乘子在推导动力学方程及其求解中的作用。在约束是理想完整的系统中，如果能选择一组广义坐标，使得坐标数等于自由度数且广义坐标能完全描述系统的位形，则可以得到(3)。在这种情况下，不需要引入Lagrange乘子。而在其他情况下，Lagrange乘子只是中间变量，它仅表明广义约束反力

与约束条件的某种线性关系，即约束力的形式$Q_j^c=\sum_{\beta=1}^{n-m}\lambda_\beta\frac{\partial g_\beta}{\partial q_j}$，$\lambda_\beta$在求解动力学方程之前是未知量。其实在求解过程中完全不需要求λ_β的值。

(8)可看作关于λ_β的m个代数方程，消去这$m-n$个参数λ_β，则得到n个关于广义坐标的方程，再结合$m-n$个约束条件(4),因此有m个关于广义坐标的方程，对于求解广义坐标来说，方程的数目是完备的。

经典力学框架下，存在着Newton-Laplace确定性原理：即给定初始位置和速度，质点系的运动是完全确定的。这个原理的正确性在于系统的受力状态必需是确定的，对于系统中的每个质点可以列出其运动微分方程$\ddot{r}=f(t,r,\dot{r})$,而力函数$f(t,r,\dot{r}$则是通过实验确定的。

根据Newton-Laplace决定论，如果能确定系统的动力学方程以及初始条件，则系统的运动状态是完全决定的，也就是说根据系统在$t=0$的状态可以精确得到其在任意时刻的状态。非完整力学的困难在于用来确定系统动力学方程的力学模型存在着争议。根据不同的力学原理，所得到的动力学方程往往并不相容。目前得到广泛讨论的是根据D'Alembert-Lagrange原理的Chetaev模型和基于Hamilton原理的Vacco模型。这两种模型的不相容以及各自的适用性已经过国内外众多学者的讨论。本质上这种模型的不同之处正在于所给出的约束力的形式不同，为了说明这个问题，我们可以考察完整系统确定动力学方程及求解的过程来得到启示。一般所说的非完整约束有如下形式：

$$f_\alpha(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_m;q_1,q_2,\ldots,q_m;t)=0,\quad(\alpha=1,\ldots,r)\tag{9}$$

其中q是广义坐标，m是广义坐标的数目，r是非完整约束的数目。

引入如下的Chetaev条件：

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j=0\qquad(\alpha=1,\cdots,r),\tag{10}$$

由此可以得到Cheteav模型的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j+\sum_{\alpha=1}^{r}\mu_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\dot{q}_j}\qquad(j=1,\ldots,m).\tag{11}$$

约束力为$Q_j^c=\sum_{\alpha=1}^{r}\mu_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\dot{q}_j}$.

从Hamilton原理出发，同样引入不定乘子，得到的是另外一组动力学方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j+\sum_{\alpha=1}^{r}\left[\lambda_\alpha\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\dot{q}_j}\right)-\dot{\lambda}_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\dot{q}_j}\right]\qquad(j=1,\ldots,m)\tag{12}$$

这就是通常所说的Vacco动力学模型。约束力为$Q_j^c=\sum_{\alpha=1}^{r}\left[\lambda_\alpha\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\dot{q}_j}\right)-\dot{\lambda}_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\dot{q}_j}\right]$

这两种模型的之所以被认为不相容在于它们所假设的约束力形式通常是不一致。Chetaev模型所给约束力类似于理想完整系统中的约束力形式，即约束力与约束条件有着某种线性关系。运动方程的求解也类

似于完整系统中的方法，也就是先通过(11)消去乘子μ_α，得到$m-r$个关于广义坐标的方程，再结合r个约束条件(9),最终得到m个关于广义坐标的完备方程组。乘子在Chetaev模型中仍可看作是中间变量，在实际求解过程中并不需求出。

而在Vacco模型中，乘子的引入则是不可避免的，因为一般情况下无法通过(12)消去乘子。

我们再回到方程(1),对于含约束的系统，为了得到运动学方程，必需对约束力的性质作一定的假设。在完整约束系统中，经常认为约束力是理想的，这个假设是附加的，独立于约束方程。

在非完整约束系统中，同样需要对约束力的性质作假设。正是对约束力性质的不同假设，才导致了对非完整力学模型的争议，这也是分析动力学的“不确定性”所在。

0.2 自由运动

当(1)中的约束力为零时，此时非完整系统作自由运动。此时，运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j-=0, \quad (j=1,\cdots,m) \tag{13}$$

这是关于广义坐标的一组完备方程组。并不是所有的非完整系统都存在自由运动。显然，(13)必需要与约束方程(9)相容。

Appell-Hamel问题就不存在自由运动。

一质量为m的质点在空间运动，存在一个非线性非完整约束

$$\dot{z}=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2} \tag{14}$$

除重力外，还存在外力Q_1,Q_2,Q_3，系统运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= Q_1+Q_1^c \\ m\ddot{y} &= Q_2+Q_2^c \\ m\ddot{z} &= Q_3-mg+Q_3^c \end{cases} \tag{15}$$

若约束力为零，则$Q_1^c=Q_2^c=Q_3^c=0$。并令$q_1=x,q_2=y,q_3=z$,运动方程变为

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 &= Q_1 \\ m\ddot{q}_2 &= Q_2 \\ m\ddot{q}_3 &= Q_3-mg \end{cases} \tag{16}$$

而运动方程要与约束方程(14)相容,将(14)求一阶导数，并将(16)代入求导后的式子，有

$$Q_3-mg-\frac{\dot{q}_1Q_1+\dot{q}_2Q_2}{(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{1/2}}=0 \tag{17}$$

在Appell-Hamel问题中，有$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$，显然(17)一般并不成立。这就说明在Appell-Hamel问题中不存在自由运动。

0.3 理想约束

$$\sum_{j=1}^{m} Q_j^c \delta q_j = 0 \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0, \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{19}$$

虽然我们已经作了理想约束的假设，也就是约束力的虚功为零，但却没有说明虚位移空间是什么。Chetaev模型中，虚位移满足(10)。

$$\sum_{j=1}^{m} h_{\gamma j}(\dot{q}, q, t) \delta q_j = 0 \quad (\gamma = 1, 2, \cdots, s) \tag{20}$$

利用乘子方法，可得到运动学方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{\gamma=1}^{s} \nu_\gamma h_{\gamma j} \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{21}$$

其中ν_γ为乘子，在这里仍然是中间变量。结合约束方程(9)。考察方程组的完备性。利用(21)消去乘子ν。当$s = r$时，方程组是完备的，当$s < r$是，独立方程组数目大于广义坐标数，因此会有方程的相容性问题。当$s > r$时，独立方程组数目小于广义坐标数现在的问题是应当对虚位移δq_j一般的说，在求解完整系统运动时并不需要引入Lagrange乘子。设系统有N个质点，且存在r个理想的完整约束

$$f_\alpha(r_i, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, r) \tag{22}$$

引入$m = 3N - r$个广义坐标$q_1, q_2, \cdots, q_m$,那么质点P_i相对于惯性坐标系原点的向径r_i可以写成广义坐标的函数形式

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \cdots, q_m, t) \tag{23}$$

这些函数都是二阶连续可微的。此时完整约束(22)自动满足，

[1] Hertz H 1894 Die Prizipien der Mechanik in neoen Zusammhage dargestellt (Leipzip: Barth)

[2] Mei F X 1985 The Foundations of Mechanics of Nonholonomic System (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔1985 非完整系统力学基础(北京: 北京工业学院出版社)]

[3] Flannery M 2004 *Am. J. Phys.* **73** 265

[4] Flannery M 2011 *Am. J. Phys.* **79** 932

[5] Borisov A , Mamaev I 2002 *Regular and Chaotic Dynamics* **7** 43

[6] Guo Z H , Gap P Y 1989 *Acta Mechanics Sinica* **5** 253

[7] Bloch A 2003 Nonholonomic Mechanics and Control (Interdisciplinary Applied Mathematics Vol 24) (Berlin: Springer)

[8] Luo S K , Zhang Y F 2008 Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems (Beijing: Science Press)

[9] Greenwood D T 1977 Classical Dynamics (Englewood Cliffs: Prentice-Hall)

[10] Neimark J , Fufaev N 1972 Dynamics of Nonholonomic Systems(Transactions of Mathematical Monographs Vol 33)(Providence: American Mathematical Society)

Nonholonomic Mechanics and Control*

Wang Dingwen[1)†]   Gao Puyun[1)]

1) (*College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha* 410072,*China*)

Abstract

The difficult of nonholonomic mechanics is due to the non-integrability of nonholonmic constraints. The origin of nonholonomic constraints is always ignored by researchers. We reveal the control essence of nonholonomic mechanics based on the physical meaning of nonholonomic constraints. From this point of view, the different models(such as Chetaev Model and Vacco Model) can be unified. We clarify that nonholonomic mechanics is still under the theory frame of analytical mechanics. It is the control forces implied by different models that distinguish them.

Keywords: Nonholonomic Mechanics, Control Theory, Chetaev Model, Vacco Model

PACS: 45.05.+x,45.20.Jj,45.80.+r

---

† Corresponding author. E-mail: wangdingwen0618@gmail.com   tel: 15116442661

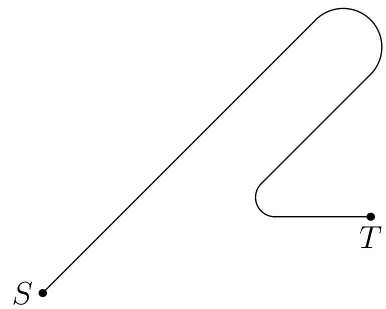

图1　质点运动轨迹