Η εξίσωση Monge-Ampère

Στέργιος Παπάζης

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τμήμα Μαθηματικών

31 Ιανουαρίου 2020

Η εξίσωση Monge-Ampère

Η εξίσωση Monge-Ampère είναι μία **πλήρως μη γραμμική** μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης **(εκφυλισμένα) ελλειπτικού τύπου** της μορφής:

$$\det D^2u(x) = f(x, u, \nabla u), \quad x \in \Omega$$

Η εξίσωση Monge-Ampère

Η εξίσωση Monge-Ampère είναι μία **πλήρως μη γραμμική** μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης **(εκφυλισμένα) ελλειπτικού τύπου** της μορφής:

$$\det D^2 u(x) = f(x, u, \nabla u), \quad x \in \Omega$$

όπου

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό

Η εξίσωση Monge-Ampère

Η εξίσωση Monge-Ampère είναι μία **πλήρως μη γραμμική** μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης **(εκφυλισμένα) ελλειπτικού τύπου** της μορφής:

$$\det D^2u(x) = f(x, u, \nabla u), \quad x \in \Omega$$

όπου

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ δεδομένη **θετική** συνάρτηση

Η εξίσωση Monge-Ampère

Η εξίσωση Monge-Ampère είναι μία **πλήρως μη γραμμική** μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης **(εκφυλισμένα) ελλειπτικού τύπου** της μορφής:

$$\det D^2 u(x) = f(x, u, \nabla u), \quad x \in \Omega$$

όπου

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ δεδομένη **θετική** συνάρτηση
- $u : \Omega \to \mathbb{R}$ μία άγνωστη **κυρτή** συνάρτηση

Η εξίσωση Monge-Ampère

Η εξίσωση Monge-Ampère είναι μία **πλήρως μη γραμμική** μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης **(εκφυλισμένα) ελλειπτικού τύπου** της μορφής:

$$\det D^2u(x) = f(x, u, \nabla u), \quad x \in \Omega$$

όπου

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ δεδομένη **θετική** συνάρτηση
- $u : \Omega \to \mathbb{R}$ μία άγνωστη **κυρτή** συνάρτηση
- $\nabla u = Du = (\partial_1 u, ..., \partial_n u)$ η παράγωγος της u

Η εξίσωση Monge-Ampère

Η εξίσωση Monge-Ampère είναι μία **πλήρως μη γραμμική** μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης **(εκφυλισμένα) ελλειπτικού τύπου** της μορφής:

$$\det D^2u(x) = f(x, u, \nabla u), \quad x \in \Omega$$

όπου

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ δεδομένη **θετική** συνάρτηση
- $u : \Omega \to \mathbb{R}$ μία άγνωστη **κυρτή** συνάρτηση
- $\nabla u = Du = (\partial_1 u, ..., \partial_n u)$ η παράγωγος της u
- $D^2 u = (\ \partial_{ij} u \ )_{i,j=1,...,n}$ ο Εσσιανός πίνακας της u

Ιστορική Αναδρομή

- Monge, Ampère (1781, 1820 αντίστοιχα)

  - πρώτη εμφάνιση εξίσωσης

Ιστορική Αναδρομή

- Monge, Ampère (1781, 1820 αντίστοιχα)

  - πρώτη εμφάνιση εξίσωσης

- Minkowski (τέλη 19ου αιώνα)

  - μελέτη προβλήματος προσδιορισμού κυρτής επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$ με δοθείσα καμπυλότητα Gauß

$$\det D^2 u = K(x)(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{n+2}{2}}$$

Ιστορική Αναδρομή

- Monge, Ampère (1781, 1820 αντίστοιχα)

  - πρώτη εμφάνιση εξίσωσης

- Minkowski (τέλη 19ου αιώνα)

  - μελέτη προβλήματος προσδιορισμού κυρτής επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$ με δοθείσα καμπυλότητα Gauß

$$\det D^2 u = K(x)(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{n+2}{2}}$$

- Alexandrov (δεκαετίες 1940-1950)

  - ύπαρξη και μοναδικότητα ασθενών λύσεων, μελέτη λειότητας αυτών στον $\mathbb{R}^2$

Ιστορική Αναδρομή

- Calabi, Pogorelov (δεκαετία 1960)

  - λειότητα γνήσια κυρτών λύσεων Alexandrov (f αρκετά λεία)

Ιστορική Αναδρομή

- Calabi, Pogorelov (δεκαετία 1960)

  - λειότητα γνήσια κυρτών λύσεων Alexandrov (f αρκετά λεία)

- Ivochkina, Krylov, Caffarelli-Nirenberg-Spruck (δεκαετία 1980)

  - ύπαρξη κλασικών λύσεων (f και Ω αρκετά λεία)

Ιστορική Αναδρομή

- Calabi, Pogorelov (δεκαετία 1960)

  - λειότητα γνήσια κυρτών λύσεων Alexandrov (f αρκετά λεία)

- Ivochkina, Krylov, Caffarelli-Nirenberg-Spruck (δεκαετία 1980)

  - ύπαρξη κλασικών λύσεων (f και Ω αρκετά λεία)

- Από την δεκαετία 1990 εως σήμερα
  - μελέτη λειότητας γνήσια κυρτών λύσεων Alexandrov υπό ασθενέστερες συνθήκες για την f
  (πχ $0 < m \leq f \leq M < \infty$):
  - Caffarelli
  - De Philippis και Figalli
  - Savin

Ενδεικτικές εφαρμογές της εξίσωσης

- Γεωμετρία (Διαφορική Γεωμετρία, Κυρτή Γεωμετρία, Αφφινική Γεωμετρία) και πιο συγκεκριμένα πρόβλημα Minkowski, μελέτη αφφινικών σφαιρών, κτλ

Ενδεικτικές εφαρμογές της εξίσωσης

- Γεωμετρία (Διαφορική Γεωμετρία, Κυρτή Γεωμετρία, Αφφινική Γεωμετρία) και πιο συγκεκριμένα πρόβλημα Minkowski, μελέτη αφφινικών σφαιρών, κτλ
- Μετεωρολογία, όπως οι ημιγεωστροφικές εξισώσεις

Ενδεικτικές εφαρμογές της εξίσωσης

- Γεωμετρία (Διαφορική Γεωμετρία, Κυρτή Γεωμετρία, Αφφινική Γεωμετρία) και πιο συγκεκριμένα πρόβλημα Minkowski, μελέτη αφφινικών σφαιρών, κτλ
- Μετεωρολογία, όπως οι ημιγεωστροφικές εξισώσεις
- Προβλήματα Βέλτιστης Μεταφοράς

Τί μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε;

0 Εισαγωγή - Κυρτή Ανάλυση, Ελλειπτικές εξισώσεις

1 Λύσεις Alexandrov

2 Κλασικές λύσεις

3 Εφαρμογή στη Βέλτιστη Μεταφορά (optimal transport)

Κυρτές συναρτήσεις

Ορισμός

*Η συνάρτηση $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ καλείται **κυρτή** αν για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $t \in (0,1)$ είναι*

$$u\left(tx + (1-t)y\right) \leq tu(x) + (1-t)u(y) \qquad (*)$$

Ορισμός

*Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, μία συνάρτηση $u : \Omega \to \mathbb{R}$ καλείται **κυρτή** αν επεκτείνεται σε μία κυρτή $\widetilde{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*

Η u **γνήσια κυρτή** $:\Longleftrightarrow$ η ανισότητα $(*)$ είναι παντού γνήσια

Η u **ομοιόμορφα κυρτή** $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, c > 0 : u - \frac{c}{2}\|\cdot\|^2$ κυρτή

Συνέχεια και διαφορισιμότητα κυρτών συναρτήσεων

Πρόταση

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό, τότε η κυρτή* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *είναι*

- *συνεχής*
- *τοπικά Lipschitz συνεχής*
- *σχεδόν παντού διαφορίσιμη*
- *σχεδόν παντού δύο φορές διαφορίσιμη*
- *αν επιπλέον η* u *είναι παντού διαφορίσιμη* $\implies \quad u \in C^1(\Omega)$

Εσσιανός πίνακας και κυρτότητα

Ορισμός

Ένας συμμετρικός πραγματικός $n \times n$ πίνακας A καλείται:

- ***θετικά ορισμένος*** *($A > 0$), αν* $\xi^T A \xi > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- ***θετικά ημιορισμένος*** *($A \geq 0$), αν* $\xi^T A \xi \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$

Συμβολισμός: $B \geq A :\iff B - A \geq 0$

Εσσιανός πίνακας και κυρτότητα

Ορισμός

Ένας συμμετρικός πραγματικός $n \times n$ πίνακας A καλείται:

- ***θετικά ορισμένος*** *($A > 0$), αν* $\xi^T A \xi > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- ***θετικά ημιορισμένος*** *($A \geq 0$), αν* $\xi^T A \xi \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$

Συμβολισμός: $B \geq A :\iff B - A \geq 0$

Πρόταση

Αν $C \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό και κυρτό, ενώ $u \in C^2(C)$, ισχύει

- u *κυρτή* $\iff D^2 u \geq 0$ *παντού στο* C
- u *ομοιόμορφα κυρτή* $\iff \exists\, c > 0 : D^2 u \geq c I_n$ *παντού στο* C

Πλήρως μη γραμμικές ελλειπτικές ΜΔΕ δεύτερης τάξης

Ορισμός

- *Μία πλήρως μη γραμμική ΜΔΕ δεύτερης τάξης*

$$F[u] := F\left(x, u(x), \nabla u(x), D^2 u(x)\right) = 0 \quad \textit{στο } \Omega$$

Πλήρως μη γραμμικές ελλειπτικές ΜΔΕ δεύτερης τάξης

Ορισμός

- *Μία πλήρως μη γραμμική ΜΔΕ δεύτερης τάξης*

$$F[u] := F\left(x, u(x), \nabla u(x), D^2 u(x)\right) = 0 \quad \textit{στο}\ \Omega$$

καλείται ***ελλειπτική*** *αν ο πίνακας* $\frac{\partial F}{\partial A}$ *με στοιχεία τα*

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}(x, z, p, A), \quad i, j = 1, \ldots, n$$

είναι θετικά ορισμένος για $x \in \Omega$*, όπου* $A = (\ a_{ij}\ )_{i,j=1,\ldots,n}$ *και* $(x, z, p, A) = \left(x, u(x), \nabla u(x), D^2 u(x)\right)$

Πλήρως μη γραμμικές ελλειπτικές ΜΔΕ δεύτερης τάξης

Ορισμός

- *Μία πλήρως μη γραμμική ΜΔΕ δεύτερης τάξης*

$$F[u] := F\Big(x, u(x), \nabla u(x), D^2 u(x)\Big) = 0 \quad \text{στο } \Omega$$

*καλείται **ελλειπτική** αν ο πίνακας* $\frac{\partial F}{\partial A}$ *με στοιχεία τα*

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}(x, z, p, A), \quad i, j = 1, \ldots, n$$

είναι θετικά ορισμένος για $x \in \Omega$*, όπου* $A = (\, a_{ij} \,)_{i,j=1,\ldots,n}$ *και* $(x, z, p, A) = \Big(x, u(x), \nabla u(x), D^2 u(x)\Big)$

- ***Ομοιόμορφα ελλειπτική***: *αν* $\exists\, m, M > 0 : \; m\, I_n \leq \dfrac{\partial F}{\partial A} \leq M\, I_n$

Πλήρως μη γραμμικές ελλειπτικές ΜΔΕ δεύτερης τάξης

Ορισμός

- *Μία πλήρως μη γραμμική ΜΔΕ δεύτερης τάξης*

$$F[u] := F\left(x, u(x), \nabla u(x), D^2 u(x)\right) = 0 \quad \text{στο } \Omega$$

καλείται ***ελλειπτική*** *αν ο πίνακας* $\frac{\partial F}{\partial A}$ *με στοιχεία τα*

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}(x, z, p, A), \quad i, j = 1, \ldots, n$$

είναι θετικά ορισμένος για $x \in \Omega$*, όπου* $A = (\, a_{ij} \,)_{i,j=1,\ldots,n}$ *και* $(x, z, p, A) = \left(x, u(x), \nabla u(x), D^2 u(x)\right)$

- ***Ομοιόμορφα ελλειπτική***: *αν* $\exists\, m, M > 0 : \; m\, I_n \leq \dfrac{\partial F}{\partial A} \leq M\, I_n$
- ***Εκφυλισμένα ελλειπτική***: *αν ισχύει μόνο για* $m = 0$ *ή* $M = +\infty$

Κυρτές λύσεις και ελλειπτικότητα εξίσωσης

- Αν $F(x, A) := \det A - f(x)$, A συμμετρικός με $\det A > 0$ και $x \in \Omega$, τότε
$$\frac{\partial F}{\partial A} = (\det A)A^{-1}$$

Κυρτές λύσεις και ελλειπτικότητα εξίσωσης

- Αν $F(x, A) := \det A - f(x)$, A συμμετρικός με $\det A > 0$ και $x \in \Omega$, τότε
$$\frac{\partial F}{\partial A} = (\det A) A^{-1}$$
- Αν $u \in C^2(\Omega)$ λύση της $\det D^2 u = f > 0$: (∗)

(∗) ελλειπτική $\iff (D^2 u)^{-1} > 0 \iff D^2 u > 0 \implies u$ κυρτή

Κυρτές λύσεις και ελλειπτικότητα εξίσωσης

- Αν $F(x, A) := \det A - f(x)$, A συμμετρικός με $\det A > 0$ και $x \in \Omega$, τότε

$$\frac{\partial F}{\partial A} = (\det A) A^{-1}$$

- Αν $u \in C^2(\Omega)$ λύση της $\det D^2 u = f > 0$: (∗)

(∗) ελλειπτική $\iff (D^2 u)^{-1} > 0 \iff D^2 u > 0 \iff u$ κυρτή

Κυρτές λύσεις και ελλειπτικότητα εξίσωσης

- Αν $F(x, A) := \det A - f(x)$, A συμμετρικός με $\det A > 0$ και $x \in \Omega$, τότε
$$\frac{\partial F}{\partial A} = (\det A)A^{-1}$$

- Αν $u \in C^2(\Omega)$ λύση της $\det D^2 u = f > 0$: (∗)

(∗) ελλειπτική $\iff (D^2 u)^{-1} > 0 \iff D^2 u > 0 \iff u$ κυρτή

- Ειδικότερα, αν $f \geq c_0 > 0$

Κυρτές λύσεις και ελλειπτικότητα εξίσωσης

- Αν $F(x, A) := \det A - f(x)$, A συμμετρικός με $\det A > 0$ και $x \in \Omega$, τότε
$$\frac{\partial F}{\partial A} = (\det A) A^{-1}$$

- Αν $u \in C^2(\Omega)$ λύση της $\det D^2 u = f > 0$: (∗)

(∗) ελλειπτική $\iff (D^2 u)^{-1} > 0 \iff D^2 u > 0 \iff u$ κυρτή

- Ειδικότερα, αν $f \geq c_0 > 0$
  - (∗) ομοιόμορφα ελλειπτική $\implies u$ ομοιόμορφα κυρτή

Κυρτές λύσεις και ελλειπτικότητα εξίσωσης

- Αν $F(x, A) := \det A - f(x)$, A συμμετρικός με $\det A > 0$ και $x \in \Omega$, τότε
$$\frac{\partial F}{\partial A} = (\det A)A^{-1}$$
- Αν $u \in C^2(\Omega)$ λύση της $\det D^2 u = f > 0$: (∗)

(∗) ελλειπτική $\iff (D^2u)^{-1} > 0 \iff D^2 u > 0 \iff u$ κυρτή

- Ειδικότερα, αν $f \geq c_0 > 0$
  - (∗) ομοιόμορφα ελλειπτική $\implies u$ ομοιόμορφα κυρτή
  - u ομοιόμορφα κυρτή και $D^2 u \leq A\, I_n$ $\implies$ (∗) ομοιόμορφα ελλειπτική

Κυρτές λύσεις και ελλειπτικότητα εξίσωσης

- Αν $F(x, A) := \det A - f(x)$, A συμμετρικός με $\det A > 0$ και $x \in \Omega$, τότε
$$\frac{\partial F}{\partial A} = (\det A)A^{-1}$$
- Αν $u \in C^2(\Omega)$ λύση της $\det D^2 u = f > 0$: (∗)

(∗) ελλειπτική $\iff (D^2 u)^{-1} > 0 \iff D^2 u > 0 \iff u$ κυρτή

- Ειδικότερα, αν $f \geq c_0 > 0$
  - (∗) ομοιόμορφα ελλειπτική $\implies u$ ομοιόμορφα κυρτή
  - u ομοιόμορφα κυρτή και $D^2 u \leq A\, I_n$ $\implies$ (∗) ομοιόμορφα ελλειπτική
- Γενικά, (∗) εκφυλισμένα ελλειπτική

Κυρτές λύσεις και ελλειπτικότητα εξίσωσης

- Αν $F(x, A) := \det A - f(x)$, A συμμετρικός με $\det A > 0$ και $x \in \Omega$, τότε
$$\frac{\partial F}{\partial A} = (\det A)A^{-1}$$

- Αν $u \in C^2(\Omega)$ λύση της $\det D^2 u = f > 0$: $(*)$

$(*)$ ελλειπτική $\iff (D^2u)^{-1} > 0 \iff D^2 u > 0 \iff u$ κυρτή

- Ειδικότερα, αν $f \geq c_0 > 0$
  - $(*)$ ομοιόμορφα ελλειπτική $\implies u$ ομοιόμορφα κυρτή
  - u ομοιόμορφα κυρτή και $D^2 u \leq A\, I_n$ $\implies (*)$ ομοιόμορφα ελλειπτική
- Γενικά, $(*)$ εκφυλισμένα ελλειπτική
  πχ μπορεί $f(x) \to 0$ όταν $x \to x_0 \in \partial\Omega$

$$u(x) := |x|^6 \implies \det D^2 u(x) = 5 \cdot 6^n\, x^{4n} \to 0, \quad \text{όταν } x \to 0$$

Υποδιαφορικό κυρτών συναρτήσεων

Ορισμός

*Για $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ κυρτή, ορίζουμε ως **υποδιαφορικό** (= subdifferential) της u στο $x \in \Omega$ το σύνολο*

$$\partial u(x) := \{ \, p \in \mathbb{R}^n : u(z) \geq u(x) + \langle p, z - x \rangle, \; \forall z \in \Omega \, \}$$

Υποδιαφορικό κυρτών συναρτήσεων

Ορισμός

Για $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ κυρτή, ορίζουμε ως ***υποδιαφορικό*** *(= subdifferential) της u στο $x \in \Omega$ το σύνολο*

$$\partial u(x) := \{\, p \in \mathbb{R}^n : u(z) \geq u(x) + \langle p, z - x \rangle,\ \forall z \in \Omega \,\}$$

- $\ell_{x,p}(z) := u(x) + \langle p, z - x \rangle$ επίπεδο στήριξης της u στο x

Υποδιαφορικό κυρτών συναρτήσεων

Ορισμός

Για $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ κυρτή, ορίζουμε ως ***υποδιαφορικό*** *(= subdifferential) της u στο $x \in \Omega$ το σύνολο*

$$\partial u(x) := \{\, p \in \mathbb{R}^n : u(z) \geq u(x) + \langle p, z - x \rangle,\ \forall z \in \Omega \,\}$$

- $\ell_{x,p}(z) := u(x) + \langle p, z - x \rangle$ επίπεδο στήριξης της u στο x

Πρόταση

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ κυρτή τότε

$$u \text{ διαφορίσιμη στο } x \iff \partial u(x) = \{\, \nabla u(x) \,\}$$

Υποδιαφορικό κυρτών συναρτήσεων

Ορισμός

Για $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ κυρτή, ορίζουμε ως ***υποδιαφορικό*** *(= subdifferential) της u στο $x \in \Omega$ το σύνολο*

$$\partial u(x) := \{\, p \in \mathbb{R}^n : u(z) \geq u(x) + \langle p, z - x \rangle,\ \forall z \in \Omega \,\}$$

- $\ell_{x,p}(z) := u(x) + \langle p, z - x \rangle$ επίπεδο στήριξης της u στο x

Πρόταση

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ κυρτή τότε

$$u \text{ διαφορίσιμη στο } x \iff \partial u(x) = \{\, \nabla u(x) \,\}$$

- Γενικότερα $\partial u(E) := \bigcup_{x \in E} \partial u(x), \quad E \subseteq \Omega$

1. Λύσεις Alexandrov

Μέτρο Monge-Ampère

Αν $u \in C^2(\Omega)$ και κυρτή λύση της $\det D^2 u = f > 0$ ολοκληρώνουμε

$$\int_E f\,dx = \int_E \det D^2 u\,dx = \int_E |\det D(\nabla u)|\,dx, \quad E \subseteq \Omega \text{ Borel}$$

Μέτρο Monge-Ampère

Αν $u \in C^2(\Omega)$ και κυρτή λύση της $\det D^2 u = f > 0$ ολοκληρώνουμε

$$\begin{aligned}\int_E f\,dx = \int_E \det D^2 u\,dx &= \int_E |\det D(\nabla u)|\,dx \\ &= \int_{\nabla u(E)} 1\,dp = |\nabla u(E)| = |\partial u(E)|, \quad E \subseteq \Omega \text{ Borel}\end{aligned}$$

Μέτρο Monge-Ampère

Αν $u \in C^2(\Omega)$ και κυρτή λύση της $\det D^2 u = f > 0$ ολοκληρώνουμε

$$\int_E f\,dx = \int_E \det D^2 u\,dx = \int_E |\det D(\nabla u)|\,dx$$

$$= \int_{\nabla u(E)} 1\,dp = |\nabla u(E)| = |\partial u(E)|, \quad E \subseteq \Omega \text{ Borel}$$

Ορισμός

*Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ κυρτή ορίζουμε ως **μέτρο Monge-Ampère** της u το*

$$\mu_u(E) := |\partial u(E)|\,, \quad \text{όπου } E \subseteq \Omega \text{ σύνολο Borel}$$

Μέτρο Monge-Ampère

Αν $u \in C^2(\Omega)$ και κυρτή λύση της $\det D^2 u = f > 0$ ολοκληρώνουμε

$$\int_E f\,dx = \int_E \det D^2 u\,dx = \int_E |\det D(\nabla u)|\,dx$$
$$= \int_{\nabla u(E)} 1\,dp = |\nabla u(E)| = |\partial u(E)|, \quad E \subseteq \Omega \text{ Borel}$$

Ορισμός

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ κυρτή ορίζουμε ως ***μέτρο Monge-Ampère*** *της u το*

$$\mu_u(E) := |\partial u(E)|, \quad \text{όπου } E \subseteq \Omega \text{ σύνολο Borel}$$

Πρόταση

Το μ_u αποτελεί τοπικά πεπερασμένο, κανονικό μέτρο Borel.

Μέτρο Monge-Ampère

Αν $u \in C^2(\Omega)$ και κυρτή λύση της $\det D^2 u = f > 0$ ολοκληρώνουμε

$$\int_E f\,dx = \int_E \det D^2 u\,dx = \int_E |\det D(\nabla u)|\,dx$$
$$= \int_{\nabla u(E)} 1\,dp = |\nabla u(E)| = |\partial u(E)| = \mu_u(E), \quad E \subseteq \Omega \text{ Borel}$$

Ορισμός

*Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ κυρτή ορίζουμε ως **μέτρο Monge-Ampère** της u το*

$$\mu_u(E) := |\partial u(E)|\,, \quad \text{όπου } E \subseteq \Omega \text{ σύνολο Borel}$$

Πρόταση

Το μ_u αποτελεί τοπικά πεπερασμένο, κανονικό μέτρο Borel.

Λύσεις Alexandrov

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε

$$\int_E f\,dx = \int_E \det D^2u\,dx = \mu_u(E), \quad \text{για όλα τα } E \subseteq \Omega \text{ Borel}$$

Λύσεις Alexandrov

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε

$$\int_E f\,dx = \int_E \det D^2 u\,dx = \mu_u(E), \quad \text{για όλα τα } E \subseteq \Omega \text{ Borel}$$

Ορισμός

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, ν μέτρο Borel στο Ω και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ κυρτή, αυτή καλείται ***λύση Alexandrov*** *της $\det D^2 u = \nu$ αν*

$$\mu_u = \nu, \qquad \forall \text{ σύνολο Borel } \subseteq \Omega$$

Λύσεις Alexandrov

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε

$$\int_E f\,dx = \int_E \det D^2 u\,dx = \mu_u(E), \quad \text{για όλα τα } E \subseteq \Omega \text{ Borel}$$

Ορισμός

*Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, ν μέτρο Borel στο Ω και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ κυρτή, αυτή καλείται **λύση Alexandrov** της $\det D^2 u = \nu$ αν*

$$\mu_u = \nu, \qquad \forall \text{ σύνολο Borel } \subseteq \Omega$$

- u κλασική λύση $\implies$ u λύση Alexandrov της $\mu_u = f\,dx$

Λύσεις Alexandrov

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε

$$\int_E f\,dx = \int_E \det D^2 u\,dx = \mu_u(E), \quad \text{για όλα τα } E \subseteq \Omega \text{ Borel}$$

Ορισμός

*Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, ν μέτρο Borel στο Ω και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ κυρτή, αυτή καλείται **λύση Alexandrov** της $\det D^2 u = \nu$ αν*

$$\mu_u = \nu, \qquad \forall \text{ σύνολο Borel } \subseteq \Omega$$

- u κλασική λύση $\implies$ u λύση Alexandrov της $\mu_u = f\,dx$
- u λύση Alexandrov της $\mu_u = f\,dx$

Λύσεις Alexandrov

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε

$$\int_E f\,dx = \int_E \det D^2u\,dx = \mu_u(E), \quad \text{για όλα τα } E \subseteq \Omega \text{ Borel}$$

Ορισμός

*Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, ν μέτρο Borel στο Ω και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ κυρτή, αυτή καλείται **λύση Alexandrov** της $\det D^2u = \nu$ αν*

$$\mu_u = \nu, \qquad \forall \text{ σύνολο Borel } \subseteq \Omega$$

- u κλασική λύση $\implies$ u λύση Alexandrov της $\mu_u = f\,dx$
- u λύση Alexandrov της $\mu_u = f\,dx$ και $u \in C^2(\Omega)$

  $\implies$ u κλασική λύση

Παράδειγμα υποδιαφορικό - μέτρο Monge-Ampère

- $u(z) = |z|, \quad z \in \mathbb{R}^n$

Παράδειγμα υποδιαφορικό - μέτρο Monge-Ampère

- $u(z) = |z|, \quad z \in \mathbb{R}^n$
- Για $z \neq 0$, u διαφορίσιμη και άρα $\partial u(z) = \{\nabla u(z)\} = \left\{ \dfrac{z}{|z|} \right\}$

Παράδειγμα υποδιαφορικό - μέτρο Monge-Ampère

- $u(z) = |z|, \quad z \in \mathbb{R}^n$
- Για $z \neq 0$, u διαφορίσιμη και άρα $\partial u(z) = \{\nabla u(z)\} = \left\{ \dfrac{z}{|z|} \right\}$
- $\partial u(0) = \overline{B(0,1)}$

Παράδειγμα υποδιαφορικό - μέτρο Monge-Ampère

- $u(z) = |z|, \quad z \in \mathbb{R}^n$
- Για $z \neq 0$, u διαφορίσιμη και άρα $\partial u(z) = \{\nabla u(z)\} = \left\{ \dfrac{z}{|z|} \right\}$
- $\partial u(0) = \overline{B(0,1)}$

$$p \in \partial u(0) \iff |z| \geq \langle p, z \rangle, \ \forall z \in \mathbb{R}^n \iff 1 \geq |p|$$

Παράδειγμα υποδιαφορικό - μέτρο Monge-Ampère

- $u(z) = |z|, \quad z \in \mathbb{R}^n$
- Για $z \neq 0$, u διαφορίσιμη και άρα $\partial u(z) = \{\nabla u(z)\} = \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}$
- $\partial u(0) = \overline{B(0,1)}$

$$p \in \partial u(0) \iff |z| \geq \langle p, z \rangle, \ \forall z \in \mathbb{R}^n \iff 1 \geq |p|$$

- $\partial u(E \setminus \{0\}) \subseteq \partial B(0,1) \implies \mu_u(E \setminus \{0\}) = 0$

Παράδειγμα υποδιαφορικό - μέτρο Monge-Ampère

- $u(z) = |z|, \quad z \in \mathbb{R}^n$
- Για $z \neq 0$, u διαφορίσιμη και άρα $\partial u(z) = \{\nabla u(z)\} = \left\{ \dfrac{z}{|z|} \right\}$
- $\partial u(0) = \overline{B(0,1)}$

$$p \in \partial u(0) \iff |z| \geq \langle p, z \rangle, \ \forall z \in \mathbb{R}^n \iff 1 \geq |p|$$

- $\partial u(E \setminus \{0\}) \subseteq \partial B(0,1) \implies \mu_u(E \setminus \{0\}) = 0$

$$\mu_u(E) = |B(0,1)|\, \delta_0(E)$$

Κυρτές συναρτήσεις και μέτρο Monge-Ampère

- Ευστάθεια:

  $u_k \to u$ τοπικά ομοιόμορφα $\implies \mu_{u_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu_u$,

  όπου $\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu :\iff \int_\Omega \phi \, d\mu_k \to \int_\Omega \phi \, d\mu, \quad \forall \phi \in C_c(\Omega)$

Κυρτές συναρτήσεις και μέτρο Monge-Ampère

- Ευστάθεια:

$u_k \to u$ τοπικά ομοιόμορφα $\implies \mu_{u_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu_u$,

όπου $\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu :\iff \int_\Omega \phi \, d\mu_k \to \int_\Omega \phi \, d\mu, \quad \forall \phi \in C_c(\Omega)$

- Μονοτονία:

Ω φραγμένο και $\begin{cases} u \leq v, & \text{στο } \Omega \\ u = v, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$

Κυρτές συναρτήσεις και μέτρο Monge-Ampère

- Ευστάθεια:

  $u_k \to u$ τοπικά ομοιόμορφα $\implies \mu_{u_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu_u$,

  όπου $\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu :\iff \int_\Omega \phi \, d\mu_k \to \int_\Omega \phi \, d\mu, \quad \forall \phi \in C_c(\Omega)$

- Μονοτονία:

  Ω φραγμένο και $\begin{cases} u \leq v, & \text{στο } \Omega \\ u = v, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \implies \mu_u(\Omega) \geq \mu_v(\Omega)$

Κυρτές συναρτήσεις και μέτρο Monge-Ampère

- Ευστάθεια:

$u_k \to u$ τοπικά ομοιόμορφα $\implies \mu_{u_k} \stackrel{*}{\rightharpoonup} \mu_u$,

όπου $\mu_k \stackrel{*}{\rightharpoonup} \mu :\iff \int_\Omega \phi \, d\mu_k \to \int_\Omega \phi \, d\mu, \quad \forall \phi \in C_c(\Omega)$

- Μονοτονία:

Ω φραγμένο και $\begin{cases} u \le v, & \text{στο } \Omega \\ u = v, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \implies \mu_u(\Omega) \ge \mu_v(\Omega)$

- Πρόσθεση και βαθμωτός πολλαπλασιασμός:

$$\mu_{u+v} \ge \mu_u + \mu_v \quad \text{και} \quad \mu_{\lambda u} = \lambda^n \mu_u, \quad \lambda > 0$$

Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων Alexandrov

Θεώρημα (Alexandrov, 1958)

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό, γνήσια κυρτό και φραγμένο,* $g \in C(\partial\Omega)$ *και* ν *μέτρο Borel με* $\nu(\Omega) < \infty$*, το πρόβλημα*

$$\begin{cases} \mu_u = \nu, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

έχει μοναδική κυρτή λύση $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων Alexandrov

Θεώρημα (Alexandrov, 1958)

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, γνήσια κυρτό και φραγμένο, $g \in C(\partial\Omega)$ και ν μέτρο Borel με $\nu(\Omega) < \infty$, το πρόβλημα

$$\begin{cases} \mu_u = \nu, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

έχει μοναδική κυρτή λύση $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

- $u = g$ στο $\partial\Omega :\iff$ η u επεκτείνεται συνεχώς μέχρι το $\partial\Omega$

Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων Alexandrov

Θεώρημα (Alexandrov, 1958)

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, γνήσια κυρτό και φραγμένο, $g \in C(\partial\Omega)$ και ν μέτρο Borel με $\nu(\Omega) < \infty$, το πρόβλημα

$$\begin{cases} \mu_u = \nu, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

έχει μοναδική κυρτή λύση $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

- $u = g$ στο $\partial\Omega :\iff$ η u επεκτείνεται συνεχώς μέχρι το $\partial\Omega$
- Παρακάτω παρουσιάζουμε την περίπτωση $g = 0$

Μοναδικότητα λύσεων

Θεώρημα (Αρχή σύγκρισης)

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο, $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ κυρτές με

$$\begin{cases} \mu_u \leq \mu_v, & \text{στο } \Omega \\ u \geq v, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

τότε ισχύει $u \geq v$ σε ολόκληρο το Ω.

Μοναδικότητα λύσεων

Θεώρημα (Αρχή σύγκρισης)

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο, $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ κυρτές με

$$\begin{cases} \mu_u \leq \mu_v, & \text{στο } \Omega \\ u \geq v, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

τότε ισχύει $u \geq v$ σε ολόκληρο το Ω.

Πόρισμα

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, κυρτό, φραγμένο, ν μέτρο Borel και $g \in C(\partial\Omega)$ το πρόβλημα

$$\begin{cases} \mu_u = \nu, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

έχει το πολύ μία κυρτή λύση.

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο:

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

- Ω φραγμένο $\implies \exists R > 0 : \quad \Omega \subsetneq B(0, R)$

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

- Ω φραγμένο $\implies \exists R > 0 : \quad \Omega \subsetneq B(0, R)$
  Θέτουμε
  - $w(z) := \frac{|z|^2 - R^2}{2}$

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

- Ω φραγμένο $\implies \exists R > 0 : \quad \Omega \subsetneq B(0, R)$
  Θέτουμε
  - $w(z) := \frac{|z|^2 - R^2}{2} < 0,$ στο $\overline{\Omega}$

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

- Ω φραγμένο $\implies \exists R > 0 : \quad \Omega \subsetneq B(0, R)$
  Θέτουμε
  - $w(z) := \frac{|z|^2 - R^2}{2} < 0,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $v_\varepsilon := v + \varepsilon w$

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

- Ω φραγμένο $\implies \exists R > 0 : \quad \Omega \subsetneq B(0, R)$

  Θέτουμε

  - $w(z) := \frac{|z|^2 - R^2}{2} < 0,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $v_\varepsilon := v + \varepsilon w < v,$ στο $\overline{\Omega}$

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

- Ω φραγμένο $\implies \exists R > 0 : \quad \Omega \subsetneq B(0, R)$
  Θέτουμε
  - $w(z) := \frac{|z|^2 - R^2}{2} < 0,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $v_\varepsilon := v + \varepsilon w < v,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $V_\varepsilon := [u < v_\varepsilon]$

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

- Ω φραγμένο $\Longrightarrow \exists R > 0 : \quad \Omega \subsetneq B(0, R)$
  Θέτουμε
  - $w(z) := \frac{|z|^2 - R^2}{2} < 0,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $v_\varepsilon := v + \varepsilon w < v,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $V_\varepsilon := [u < v_\varepsilon]$
- Επιλέγουμε $x_0 \in V$ και $0 < \varepsilon < \frac{v(x_0) - u(x_0)}{-w(x_0)}$

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

- Ω φραγμένο $\Longrightarrow \exists R > 0 : \quad \Omega \subsetneq B(0, R)$
  Θέτουμε
  - $w(z) := \frac{|z|^2 - R^2}{2} < 0,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $v_\varepsilon := v + \varepsilon w < v,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $V_\varepsilon := [u < v_\varepsilon]$
- Επιλέγουμε $x_0 \in V$ και $0 < \varepsilon < \frac{v(x_0) - u(x_0)}{-w(x_0)}$
  $\Longrightarrow u(x_0) < v_\varepsilon(x_0)$

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

- Ω φραγμένο $\implies \exists R > 0 : \quad \Omega \subsetneq B(0, R)$
  Θέτουμε
  - $w(z) := \frac{|z|^2 - R^2}{2} < 0,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $v_\varepsilon := v + \varepsilon w < v,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $V_\varepsilon := [u < v_\varepsilon]$
- Επιλέγουμε $x_0 \in V$ και $0 < \varepsilon < \frac{v(x_0) - u(x_0)}{-w(x_0)}$
  $\implies u(x_0) < v_\varepsilon(x_0) \implies x_0 \in V_\varepsilon$

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

- Ω φραγμένο $\implies \exists R > 0 : \quad \Omega \subsetneq B(0, R)$

  Θέτουμε
  - $w(z) := \frac{|z|^2 - R^2}{2} < 0,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $v_\varepsilon := v + \varepsilon w < v,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $V_\varepsilon := [u < v_\varepsilon]$
- Επιλέγουμε $x_0 \in V$ και $0 < \varepsilon < \frac{v(x_0) - u(x_0)}{-w(x_0)}$

  $\implies u(x_0) < v_\varepsilon(x_0) \implies x_0 \in V_\varepsilon$
- $V_\varepsilon \subset\subset V \subset \Omega$

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

- Ω φραγμένο $\implies \exists R > 0 : \quad \Omega \subsetneq B(0, R)$
  Θέτουμε
  - $w(z) := \frac{|z|^2 - R^2}{2} < 0,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $v_\varepsilon := v + \varepsilon w < v,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $V_\varepsilon := [u < v_\varepsilon]$
- Επιλέγουμε $x_0 \in V$ και $0 < \varepsilon < \frac{v(x_0) - u(x_0)}{-w(x_0)}$
  $\implies u(x_0) < v_\varepsilon(x_0) \implies x_0 \in V_\varepsilon$
- $V_\varepsilon \subset\subset V \subset \Omega$, μη κενό, ανοικτό, φραγμένο

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

- Ω φραγμένο $\implies \exists R > 0 : \quad \Omega \subsetneq B(0,R)$
  Θέτουμε
  - $w(z) := \frac{|z|^2 - R^2}{2} < 0,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $v_\varepsilon := v + \varepsilon w < v,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $V_\varepsilon := [u < v_\varepsilon]$
- Επιλέγουμε $x_0 \in V$ και $0 < \varepsilon < \frac{v(x_0) - u(x_0)}{-w(x_0)}$
  $\implies u(x_0) < v_\varepsilon(x_0) \implies x_0 \in V_\varepsilon$
- $V_\varepsilon \subset\subset V \subset \Omega$, μη κενό, ανοικτό, φραγμένο και $\begin{cases} u < v_\varepsilon, & \text{στο } V_\varepsilon \\ u = v_\varepsilon, & \text{στο } \partial V_\varepsilon \end{cases}$

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

- Ω φραγμένο $\implies \exists R > 0 : \quad \Omega \subsetneq B(0,R)$

  Θέτουμε
  - $w(z) := \frac{|z|^2 - R^2}{2} < 0,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $v_\varepsilon := v + \varepsilon w < v,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $V_\varepsilon := [u < v_\varepsilon]$
- Επιλέγουμε $x_0 \in V$ και $0 < \varepsilon < \frac{v(x_0) - u(x_0)}{-w(x_0)}$

  $\implies u(x_0) < v_\varepsilon(x_0) \implies x_0 \in V_\varepsilon$
- $V_\varepsilon \subset\subset V \subset \Omega$, μη κενό, ανοικτό, φραγμένο και $\begin{cases} u < v_\varepsilon, & \text{στο } V_\varepsilon \\ u = v_\varepsilon, & \text{στο } \partial V_\varepsilon \end{cases}$

$\implies \mu_u(V_\varepsilon) \geq \mu_{v_\varepsilon}(V_\varepsilon)$ (μονοτονία)

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

- Ω φραγμένο $\implies \exists R > 0 : \quad \Omega \subsetneq B(0, R)$

  Θέτουμε
  - $w(z) := \frac{|z|^2 - R^2}{2} < 0,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $v_\varepsilon := v + \varepsilon w < v,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $V_\varepsilon := [u < v_\varepsilon]$
- Επιλέγουμε $x_0 \in V$ και $0 < \varepsilon < \frac{v(x_0) - u(x_0)}{-w(x_0)}$

  $\implies u(x_0) < v_\varepsilon(x_0) \implies x_0 \in V_\varepsilon$
- $V_\varepsilon \subset\subset V \subset \Omega$, μη κενό, ανοικτό, φραγμένο και $\begin{cases} u < v_\varepsilon, & \text{στο } V_\varepsilon \\ u = v_\varepsilon, & \text{στο } \partial V_\varepsilon \end{cases}$

$\implies \mu_u(V_\varepsilon) \geq \mu_{v_\varepsilon}(V_\varepsilon)$ (μονοτονία)

$\implies \mu_u(V_\varepsilon) \geq \mu_v(V_\varepsilon) + \varepsilon^n \mu_w(V_\varepsilon)$

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

- Ω φραγμένο $\implies \exists R > 0 : \quad \Omega \subsetneq B(0, R)$
  Θέτουμε
  - $w(z) := \frac{|z|^2 - R^2}{2} < 0,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $v_\varepsilon := v + \varepsilon w < v,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $V_\varepsilon := [u < v_\varepsilon]$
- Επιλέγουμε $x_0 \in V$ και $0 < \varepsilon < \frac{v(x_0) - u(x_0)}{-w(x_0)}$
  $\implies u(x_0) < v_\varepsilon(x_0) \implies x_0 \in V_\varepsilon$
- $V_\varepsilon \subset\subset V \subset \Omega$, μη κενό, ανοικτό, φραγμένο και $\begin{cases} u < v_\varepsilon, & \text{στο } V_\varepsilon \\ u = v_\varepsilon, & \text{στο } \partial V_\varepsilon \end{cases}$

$\implies \mu_u(V_\varepsilon) \geq \mu_{v_\varepsilon}(V_\varepsilon)$ (μονοτονία)

$$\implies \mu_u(V_\varepsilon) \geq \mu_v(V_\varepsilon) + \varepsilon^n \mu_w(V_\varepsilon) \geq \mu_u(V_\varepsilon) + \varepsilon^n \int_{V_\varepsilon} 1\, dx$$

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

- Ω φραγμένο $\implies \exists R > 0 : \quad \Omega \subsetneq B(0, R)$
  Θέτουμε
  - $w(z) := \frac{|z|^2 - R^2}{2} < 0,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $v_\varepsilon := v + \varepsilon w < v,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $V_\varepsilon := [u < v_\varepsilon]$
- Επιλέγουμε $x_0 \in V$ και $0 < \varepsilon < \frac{v(x_0) - u(x_0)}{-w(x_0)}$
  $\implies u(x_0) < v_\varepsilon(x_0) \implies x_0 \in V_\varepsilon$
- $V_\varepsilon \subset\subset V \subset \Omega$, μη κενό, ανοικτό, φραγμένο και $\begin{cases} u < v_\varepsilon, & \text{στο } V_\varepsilon \\ u = v_\varepsilon, & \text{στο } \partial V_\varepsilon \end{cases}$

$\implies \mu_u(V_\varepsilon) \geq \mu_{v_\varepsilon}(V_\varepsilon)$ (μονοτονία)

$$\implies \mu_u(V_\varepsilon) \geq \mu_v(V_\varepsilon) + \varepsilon^n \mu_w(V_\varepsilon) \geq \mu_u(V_\varepsilon) + \varepsilon^n \int_{V_\varepsilon} 1\, dx$$

$$\implies 0 \geq \varepsilon^n |V_\varepsilon|$$

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

- Ω φραγμένο $\implies \exists R > 0 : \quad \Omega \subsetneq B(0, R)$
  Θέτουμε
  - $w(z) := \frac{|z|^2 - R^2}{2} < 0,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $v_\varepsilon := v + \varepsilon w < v,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $V_\varepsilon := [u < v_\varepsilon]$
- Επιλέγουμε $x_0 \in V$ και $0 < \varepsilon < \frac{v(x_0) - u(x_0)}{-w(x_0)}$
  $\implies u(x_0) < v_\varepsilon(x_0) \implies x_0 \in V_\varepsilon$
- $V_\varepsilon \subset\subset V \subset \Omega$, μη κενό, ανοικτό, φραγμένο και $\begin{cases} u < v_\varepsilon, & \text{στο } V_\varepsilon \\ u = v_\varepsilon, & \text{στο } \partial V_\varepsilon \end{cases}$

$\implies \mu_u(V_\varepsilon) \geq \mu_{v_\varepsilon}(V_\varepsilon)$ (μονοτονία)

$\implies \mu_u(V_\varepsilon) \geq \mu_v(V_\varepsilon) + \varepsilon^n \mu_w(V_\varepsilon) \geq \mu_u(V_\varepsilon) + \varepsilon^n \int_{V_\varepsilon} 1\, dx$

$\implies 0 \geq \varepsilon^n |V_\varepsilon|$ Άτοπο

Απόδειξη αρχής σύγκρισης

Με απαγωγή σε άτοπο: $V := [u < v] \neq \varnothing$

- Ω φραγμένο $\implies \exists R > 0 : \quad \Omega \subsetneq B(0, R)$
  Θέτουμε
  - $w(z) := \frac{|z|^2 - R^2}{2} < 0,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $v_\varepsilon := v + \varepsilon w < v,$ στο $\overline{\Omega}$
  - $V_\varepsilon := [u < v_\varepsilon]$
- Επιλέγουμε $x_0 \in V$ και $0 < \varepsilon < \frac{v(x_0) - u(x_0)}{-w(x_0)}$
  $\implies u(x_0) < v_\varepsilon(x_0) \implies x_0 \in V_\varepsilon$
- $V_\varepsilon \subset\subset V \subset \Omega$, μη κενό, ανοικτό, φραγμένο και $\begin{cases} u < v_\varepsilon, & \text{στο } V_\varepsilon \\ u = v_\varepsilon, & \text{στο } \partial V_\varepsilon \end{cases}$

$\implies \mu_u(V_\varepsilon) \geq \mu_{v_\varepsilon}(V_\varepsilon)$ (μονοτονία)

$$\implies \mu_u(V_\varepsilon) \geq \mu_v(V_\varepsilon) + \varepsilon^n \mu_w(V_\varepsilon) \geq \mu_u(V_\varepsilon) + \varepsilon^n \int_{V_\varepsilon} 1\, dx$$

$\implies 0 \geq \varepsilon^n |V_\varepsilon|$ Άτοπο, γιατί $V_\varepsilon \neq \varnothing$ ανοικτό

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Το ν είναι ασθενές* όριο γραμμικών συνδυασμών μέτρων Dirac με θετικούς συντελεστές:

$$\sigma_m := \sum_{i=1}^{k_m} a_i \delta_{x_i} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu, \quad a_i > 0 \text{ και } x_i \in \Omega$$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Το ν είναι ασθενές* όριο γραμμικών συνδυασμών μέτρων Dirac με θετικούς συντελεστές:

$$\sigma_m := \sum_{i=1}^{k_m} a_i \delta_{x_i} \stackrel{*}{\rightharpoonup} \nu, \quad a_i > 0 \text{ και } x_i \in \Omega$$

- Αν υπάρχουν κυρτές λύσεις $u_{\sigma_m} : \Omega \to \mathbb{R}$ του

$$\begin{cases} \mu_{u_m} = \sigma_m, & \text{στο } \Omega \\ u_m = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*_m)$$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Το ν είναι ασθενές* όριο γραμμικών συνδυασμών μέτρων Dirac με θετικούς συντελεστές:

$$\sigma_m := \sum_{i=1}^{k_m} a_i \delta_{x_i} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu, \quad a_i > 0 \text{ και } x_i \in \Omega$$

- Αν υπάρχουν κυρτές λύσεις $u_{\sigma_m} : \Omega \to \mathbb{R}$ του

$$\begin{cases} \mu_{u_m} = \sigma_m, & \text{στο } \Omega \\ u_m = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*_m)$$

γιατί τότε από την αρχή μεγίστου Alexandrov έχουμε εκτίμηση:

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Το ν είναι ασθενές* όριο γραμμικών συνδυασμών μέτρων Dirac με θετικούς συντελεστές:

$$\sigma_m := \sum_{i=1}^{k_m} a_i \delta_{x_i} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu, \quad a_i > 0 \text{ και } x_i \in \Omega$$

- Αν υπάρχουν κυρτές λύσεις $u_{\sigma_m} : \Omega \to \mathbb{R}$ του

$$\begin{cases} \mu_{u_m} = \sigma_m, & \text{στο } \Omega \\ u_m = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*_m)$$

γιατί τότε από την αρχή μεγίστου Alexandrov έχουμε εκτίμηση:

$$|u_m(x)| \leq C \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}}, \quad \forall x \in \Omega$$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Το ν είναι ασθενές* όριο γραμμικών συνδυασμών μέτρων Dirac με θετικούς συντελεστές:

$$\sigma_m := \sum_{i=1}^{k_m} a_i \delta_{x_i} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu, \quad a_i > 0 \text{ και } x_i \in \Omega$$

- Αν υπάρχουν κυρτές λύσεις $u_{\sigma_m} : \Omega \to \mathbb{R}$ του

$$\begin{cases} \mu_{u_m} = \sigma_m, & \text{στο } \Omega \\ u_m = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*_m)$$

γιατί τότε από την αρχή μεγίστου Alexandrov έχουμε εκτίμηση:

$$|u_m(x)| \leq C \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}}, \quad \forall x \in \Omega$$

$\implies u_m$ τοπικά Lipschitz συνεχείς ομοιόμορφα ως προς m

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Το ν είναι ασθενές* όριο γραμμικών συνδυασμών μέτρων Dirac με θετικούς συντελεστές:

$$\sigma_m := \sum_{i=1}^{k_m} a_i \delta_{x_i} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu, \quad a_i > 0 \text{ και } x_i \in \Omega$$

- Αν υπάρχουν κυρτές λύσεις $u_{\sigma_m} : \Omega \to \mathbb{R}$ του

$$\begin{cases} \mu_{u_m} = \sigma_m, & \text{στο } \Omega \\ u_m = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*_m)$$

γιατί τότε από την αρχή μεγίστου Alexandrov έχουμε εκτίμηση:

$$|u_m(x)| \leq C \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}}, \quad \forall x \in \Omega$$

$\Longrightarrow$ u_m τοπικά Lipschitz συνεχείς ομοιόμορφα ως προς m

$\Longrightarrow$ $u_m \to u$ τοπικά ομοιόμορφα (Arzelà-Ascoli)

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Το ν είναι ασθενές* όριο γραμμικών συνδυασμών μέτρων Dirac με θετικούς συντελεστές:

$$\sigma_m := \sum_{i=1}^{k_m} a_i \delta_{x_i} \xrightarrow{*} \nu, \quad a_i > 0 \text{ και } x_i \in \Omega$$

- Αν υπάρχουν κυρτές λύσεις $u_{\sigma_m} : \Omega \to \mathbb{R}$ του

$$\begin{cases} \mu_{u_m} = \sigma_m, & \text{στο } \Omega \\ u_m = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*_m)$$

γιατί τότε από την αρχή μεγίστου Alexandrov έχουμε εκτίμηση:

$$|u_m(x)| \leq C \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}}, \quad \forall x \in \Omega$$

$\Longrightarrow$ u_m τοπικά Lipschitz συνεχείς ομοιόμορφα ως προς m

$\Longrightarrow$ $u_m \to u$ τοπικά ομοιόμορφα (Arzelà-Ascoli)

$\Longrightarrow$ $\mu_{u_m} \xrightarrow{*} \mu_u$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Το ν είναι ασθενές* όριο γραμμικών συνδυασμών μέτρων Dirac με θετικούς συντελεστές:

$$\sigma_m := \sum_{i=1}^{k_m} a_i \delta_{x_i} \stackrel{*}{\rightharpoonup} \nu, \quad a_i > 0 \text{ και } x_i \in \Omega$$

- Αν υπάρχουν κυρτές λύσεις $u_{\sigma_m} : \Omega \to \mathbb{R}$ του

$$\begin{cases} \mu_{u_m} = \sigma_m, & \text{στο } \Omega \\ u_m = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*_m)$$

γιατί τότε από την αρχή μεγίστου Alexandrov έχουμε εκτίμηση:

$$|u_m(x)| \leq C \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}}, \quad \forall x \in \Omega$$

$\Longrightarrow$ u_m τοπικά Lipschitz συνεχείς ομοιόμορφα ως προς m

$\Longrightarrow$ $u_m \to u$ τοπικά ομοιόμορφα (Arzelà-Ascoli)

$\Longrightarrow$ $\mu_{u_m} \stackrel{*}{\rightharpoonup} \mu_u$ και $\mu_{u_m} = \sigma_m \stackrel{*}{\rightharpoonup} \nu$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Το ν είναι ασθενές* όριο γραμμικών συνδυασμών μέτρων Dirac με θετικούς συντελεστές:

$$\sigma_m := \sum_{i=1}^{k_m} a_i \delta_{x_i} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu, \quad a_i > 0 \text{ και } x_i \in \Omega$$

- Αν υπάρχουν κυρτές λύσεις $u_{\sigma_m} : \Omega \to \mathbb{R}$ του

$$\begin{cases} \mu_{u_m} = \sigma_m, & \text{στο } \Omega \\ u_m = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*_m)$$

γιατί τότε από την αρχή μεγίστου Alexandrov έχουμε εκτίμηση:

$$|u_m(x)| \leq C \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}}, \quad \forall x \in \Omega$$

$\Longrightarrow$ u_m τοπικά Lipschitz συνεχείς ομοιόμορφα ως προς m

$\Longrightarrow$ $u_m \to u$ τοπικά ομοιόμορφα (Arzelà-Ascoli)

$\Longrightarrow$ $\mu_{u_m} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu_u$ και $\mu_{u_m} = \sigma_m \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$

$\Longrightarrow$ $\mu_u = \nu$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Το ν είναι ασθενές* όριο γραμμικών συνδυασμών μέτρων Dirac με θετικούς συντελεστές:

$$\sigma_m := \sum_{i=1}^{k_m} a_i \delta_{x_i} \xrightharpoonup{*} \nu, \quad a_i > 0 \text{ και } x_i \in \Omega$$

- Αν υπάρχουν κυρτές λύσεις $u_{\sigma_m} : \Omega \to \mathbb{R}$ του

$$\begin{cases} \mu_{u_m} = \sigma_m, & \text{στο } \Omega \\ u_m = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*_m)$$

γιατί τότε από την αρχή μεγίστου Alexandrov έχουμε εκτίμηση:

$$|u_m(x)| \leq C \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}}, \quad \forall x \in \Omega$$

$\Longrightarrow$ u_m τοπικά Lipschitz συνεχείς ομοιόμορφα ως προς m

$\Longrightarrow$ $u_m \to u$ τοπικά ομοιόμορφα (Arzelà-Ascoli)

$\Longrightarrow$ $\mu_{u_m} \xrightharpoonup{*} \mu_u$ και $\mu_{u_m} = \sigma_m \xrightharpoonup{*} \nu$

$\Longrightarrow$ $\mu_u = \nu$ και $u|_{\partial\Omega} = 0$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Αν $x_1, ..., x_k \in \Omega$ και $a_i > 0$ λύνουμε
$$\begin{cases} \mu_u = \sigma := \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{x_i}, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$
με **μέθοδο Perron**:

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Αν $x_1, ..., x_k \in \Omega$ και $a_i > 0$ λύνουμε

$$\begin{cases} \mu_u = \sigma := \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{x_i}, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

με **μέθοδο Perron**:

Θέτουμε

$$S := \{\, w : \Omega \to \mathbb{R} \mid \; w \text{ κυρτή}, \; w|_{\partial\Omega} = 0, \; \mu_w \geq \sigma \,\}$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι η $u := \sup_{w \in S} w$ λύνει το $(*)$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Αν $x_1, ..., x_k \in \Omega$ και $a_i > 0$ λύνουμε

$$\begin{cases} \mu_u = \sigma := \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{x_i}, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

με **μέθοδο Perron**:

Θέτουμε

$$S := \{\, w : \Omega \to \mathbb{R} \mid\ w \text{ κυρτή},\ w|_{\partial\Omega} = 0,\ \mu_w \geq \sigma \,\}$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι η $u := \sup_{w \in S} w$ λύνει το $(*)$

  - $S \neq \varnothing$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Αν $x_1, ..., x_k \in \Omega$ και $a_i > 0$ λύνουμε

$$\begin{cases} \mu_u = \sigma := \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{x_i}, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

με **μέθοδο Perron**:

Θέτουμε

$$S := \{\, w : \Omega \to \mathbb{R} \,|\; w \text{ κυρτή}, \; w|_{\partial\Omega} = 0, \; \mu_w \geq \sigma \,\}$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι η $u := \sup_{w \in S} w$ λύνει το $(*)$

- $S \neq \varnothing$
- $\mu_u(\Omega \setminus \{x_1, ..., x_k\}) = 0$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Αν $x_1, \dots, x_k \in \Omega$ και $a_i > 0$ λύνουμε

$$\begin{cases} \mu_u = \sigma := \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{x_i}, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

με **μέθοδο Perron**:

Θέτουμε

$$S := \{\, w : \Omega \to \mathbb{R} \mid \, w \text{ κυρτή}, \, w|_{\partial\Omega} = 0, \, \mu_w \geq \sigma \,\}$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι η $u := \sup_{w \in S} w$ λύνει το $(*)$

- $S \neq \varnothing$
- $\mu_u(\Omega \setminus \{x_1, \dots, x_k\}) = 0$
- $\mu_u\Big(\{\, x_i \,\}\Big) \geq \sigma\Big(\{\, x_i \,\}\Big)$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Αν $x_1, \dots, x_k \in \Omega$ και $a_i > 0$ λύνουμε

$$\begin{cases} \mu_u = \sigma := \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{x_i}, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

  με **μέθοδο Perron**:

  Θέτουμε

$$S := \{\, w : \Omega \to \mathbb{R} \mid \; w \text{ κυρτή},\; w|_{\partial\Omega} = 0,\; \mu_w \geq \sigma \,\}$$

  και θέλουμε να δείξουμε ότι η $u := \sup_{w \in S} w$ λύνει το $(*)$

  - $S \neq \varnothing$
  - $\mu_u(\Omega \setminus \{x_1, \dots, x_k\}) = 0$
  - $\mu_u\Big(\{\, x_i \,\}\Big) \geq \sigma\Big(\{\, x_i \,\}\Big)$: κατασκευάζουμε $w \in S$ με $w(x_i) = u(x_i)$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Αν $x_1, \dots, x_k \in \Omega$ και $a_i > 0$ λύνουμε

$$\begin{cases} \mu_u = \sigma := \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{x_i}, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

με **μέθοδο Perron**:

Θέτουμε

$$S := \{\, w : \Omega \to \mathbb{R} \mid\ w \text{ κυρτή}, \ w|_{\partial\Omega} = 0,\ \mu_w \geq \sigma \,\}$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι η $u := \sup_{w \in S} w$ λύνει το $(*)$

- $S \neq \varnothing$
- $\mu_u(\Omega \setminus \{x_1, \dots, x_k\}) = 0$
- $\mu_u\Big(\{\, x_i \,\}\Big) \geq \sigma\Big(\{\, x_i \,\}\Big)$: κατασκευάζουμε $w \in S$ με $w(x_i) = u(x_i)$

$p \in \partial w(x_i)$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Αν $x_1, ..., x_k \in \Omega$ και $a_i > 0$ λύνουμε

$$\begin{cases} \mu_u = \sigma := \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{x_i}, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

με **μέθοδο Perron**:

Θέτουμε

$$S := \{\, w : \Omega \to \mathbb{R} \mid \; w \text{ κυρτή}, \; w|_{\partial\Omega} = 0, \; \mu_w \geq \sigma \,\}$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι η $u := \sup_{w \in S} w$ λύνει το $(*)$

- $S \neq \varnothing$
- $\mu_u(\Omega \setminus \{x_1, ..., x_k\}) = 0$
- $\mu_u\Big(\{\, x_i \,\}\Big) \geq \sigma\Big(\{\, x_i \,\}\Big)$: κατασκευάζουμε $w \in S$ με $w(x_i) = u(x_i)$

$$p \in \partial w(x_i) \implies w(z) \geq w(x_i) + \langle p, z - x_i \rangle, \; \forall z \in \mathbb{R}^n$$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Αν $x_1, \dots, x_k \in \Omega$ και $a_i > 0$ λύνουμε

$$\begin{cases} \mu_u = \sigma := \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{x_i}, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

με **μέθοδο Perron**:

Θέτουμε

$$S := \{\, w : \Omega \to \mathbb{R} \,|\; w \text{ κυρτή}, \; w|_{\partial\Omega} = 0, \; \mu_w \geq \sigma \,\}$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι η $u := \sup_{w \in S} w$ λύνει το $(*)$

  - $S \neq \varnothing$
  - $\mu_u(\Omega \setminus \{x_1, \dots, x_k\}) = 0$
  - $\mu_u\Big(\{\, x_i \,\}\Big) \geq \sigma\Big(\{\, x_i \,\}\Big)$: κατασκευάζουμε $w \in S$ με $w(x_i) = u(x_i)$

$$p \in \partial w(x_i) \implies w(z) \geq w(x_i) + \langle p, z - x_i \rangle, \; \forall z \in \mathbb{R}^n \implies p \in \partial u(x_i)$$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Αν $x_1, ..., x_k \in \Omega$ και $a_i > 0$ λύνουμε

$$\begin{cases} \mu_u = \sigma := \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{x_i}, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

με **μέθοδο Perron**:

Θέτουμε

$$S := \{\, w : \Omega \to \mathbb{R} \mid \, w \text{ κυρτή}, \, w|_{\partial\Omega} = 0, \, \mu_w \geq \sigma \,\}$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι η $u := \sup_{w \in S} w$ λύνει το $(*)$

- $S \neq \varnothing$
- $\mu_u(\Omega \setminus \{x_1, ..., x_k\}) = 0$
- $\mu_u\big(\{\, x_i \,\}\big) \geq \sigma\big(\{\, x_i \,\}\big)$: κατασκευάζουμε $w \in S$ με $w(x_i) = u(x_i)$

$$p \in \partial w(x_i) \implies w(z) \geq w(x_i) + \langle p, z - x_i \rangle, \, \forall z \in \mathbb{R}^n \implies p \in \partial u(x_i)$$

- $\mu_u\big(\{\, x_i \,\}\big) > \sigma\big(\{\, x_i \,\}\big) \implies$ άτοπο

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Αν $x_1, \ldots, x_k \in \Omega$ και $a_i > 0$ λύνουμε

$$\begin{cases} \mu_u = \sigma := \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{x_i}, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

με **μέθοδο Perron**:

Θέτουμε

$$S := \{\, w : \Omega \to \mathbb{R} \mid \ w \text{ κυρτή},\ w|_{\partial\Omega} = 0,\ \mu_w \geq \sigma \,\}$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι η $u := \sup_{w \in S} w$ λύνει το $(*)$

- $S \neq \varnothing$
- $\mu_u(\Omega \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}) = 0$
- $\mu_u\Big(\{\, x_i \,\}\Big) \geq \sigma\Big(\{\, x_i \,\}\Big)$: κατασκευάζουμε $w \in S$ με $w(x_i) = u(x_i)$

$$p \in \partial w(x_i) \implies w(z) \geq w(x_i) + \langle p, z - x_i \rangle,\ \forall z \in \mathbb{R}^n \implies p \in \partial u(x_i)$$

- $\mu_u\Big(\{\, x_i \,\}\Big) > \sigma\Big(\{\, x_i \,\}\Big) \implies$ άτοπο

Άρα $\mu_u\Big(\{\, x_i \,\}\Big) = \sigma\Big(\{\, x_i \,\}\Big)$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης ύπαρξης

- Αν $x_1, ..., x_k \in \Omega$ και $a_i > 0$ λύνουμε

$$\begin{cases} \mu_u = \sigma := \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{x_i}, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

  με **μέθοδο Perron**:

  Θέτουμε

$$S := \{ w : \Omega \to \mathbb{R} | \ w \text{ κυρτή}, \ w|_{\partial\Omega} = 0, \ \mu_w \geq \sigma \}$$

  και θέλουμε να δείξουμε ότι η $u := \sup_{w \in S} w$ λύνει το $(*)$

  - $S \neq \varnothing$
  - $\mu_u(\Omega \setminus \{x_1, ..., x_k\}) = 0$
  - $\mu_u\Big(\{ x_i \}\Big) \geq \sigma\Big(\{ x_i \}\Big)$: κατασκευάζουμε $w \in S$ με $w(x_i) = u(x_i)$

$$p \in \partial w(x_i) \implies w(z) \geq w(x_i) + \langle p, z - x_i \rangle, \ \forall z \in \mathbb{R}^n \implies p \in \partial u(x_i)$$

  - $\mu_u\Big(\{ x_i \}\Big) > \sigma\Big(\{ x_i \}\Big) \implies$ άτοπο

  Άρα $\mu_u\Big(\{ x_i \}\Big) = \sigma\Big(\{ x_i \}\Big) \implies \mu_u = \sigma$

Hölder συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός

- $|u(x) - u(z)| \leq M|x - y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in \Omega, u \in C(\Omega)$

Hölder συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός

- $|u(x) - u(z)| \leq M|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in \Omega, u \in C(\Omega)$
- $[u]_\alpha := \sup\limits_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad u \in C(\Omega)$

Hölder συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός

- $|u(x) - u(z)| \leq M|x-y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in \Omega, u \in C(\Omega)$
- $[u]_{\alpha} := \sup\limits_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}, \quad u \in C(\Omega)$
- *Για* $\alpha \in (0,1)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό και φραγμένο, ορίζουμε*

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) := \{u \in C(\Omega) : \ [u]_{\alpha} < \infty\}$$

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{\infty} + [u]_{\alpha}$$

Hölder συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός

- $|u(x) - u(z)| \leq M|x-y|^\alpha, \quad \forall x, y \in \Omega, u \in C(\Omega)$
- $[u]_\alpha := \sup\limits_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad u \in C(\Omega)$
- *Για* $\alpha \in (0,1)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό και φραγμένο, ορίζουμε*

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) := \{u \in C(\Omega) : \ [u]_\alpha < \infty\}$$

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|u\|_\infty + [u]_\alpha$$

- *Για* $\alpha \in (0,1)$, $k \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό και φραγμένο, ορίζουμε*

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in C^k(\Omega) : \ D^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ και } \sum_{i=1}^n \beta_i \leq k \right\}$$

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\beta| \leq k} \|D^\beta u\|_\infty + \sum_{|\beta|=k} [D^\beta u]_\alpha$$

Γνήσια κυρτότητα λύσεων Alexandrov

Θεώρημα (Caffarelli,1990)

Αν το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό, κυρτό και φραγμένο σύνολο, ενώ η $u : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή ώστε

$$\begin{cases} \lambda\, dx \leq \mu_u \leq \; \Lambda dx, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

για $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ και $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ με $\alpha > 1 - \frac{2}{n}$,

Γνήσια κυρτότητα λύσεων Alexandrov

Θεώρημα (Caffarelli,1990)

Αν το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό, κυρτό και φραγμένο σύνολο, ενώ η $u : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή ώστε

$$\begin{cases} \lambda\, dx \le \mu_u \le \Lambda dx, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

για $0 < \lambda \le \Lambda < \infty$ και $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ με $\alpha > 1 - \frac{2}{n}$,

τότε η u είναι γνήσια κυρτή.

Γνήσια κυρτότητα λύσεων Alexandrov

Θεώρημα (Caffarelli,1990)

Αν το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *είναι ένα ανοικτό, κυρτό και φραγμένο σύνολο, ενώ η* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *είναι κυρτή ώστε*

$$\begin{cases} \lambda\, dx \leq \mu_u \leq \Lambda dx, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

για $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ *και* $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ *με* $\alpha > 1 - \frac{2}{n}$*,*

τότε η u *είναι γνήσια κυρτή.*

- $\alpha > 1 - \frac{2}{n}$ βέλτιστο

Γνήσια κυρτότητα λύσεων Alexandrov

Θεώρημα (Caffarelli,1990)

Αν το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό, κυρτό και φραγμένο σύνολο, ενώ η $u : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή ώστε

$$\begin{cases} \lambda\, dx \leq \mu_u \leq \Lambda dx, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

για $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ και $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ με $\alpha > 1 - \frac{2}{n}$,

τότε η u είναι γνήσια κυρτή.

- $\alpha > 1 - \frac{2}{n}$ βέλτιστο
- Επέκταση αποτελέσματος Alexandrov για $n = 2$:

Γνήσια κυρτότητα λύσεων Alexandrov

Θεώρημα (Caffarelli,1990)

Αν το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό, κυρτό και φραγμένο σύνολο, ενώ η $u : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή ώστε

$$\begin{cases} \lambda\, dx \leq \mu_u \leq \Lambda dx, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

για $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ και $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ με $\alpha > 1 - \frac{2}{n}$,

τότε η u είναι γνήσια κυρτή.

- $\alpha > 1 - \frac{2}{n}$ βέλτιστο
- Επέκταση αποτελέσματος Alexandrov για $n = 2$:

$$u \text{ κυρτή και } \mu_u = f\, dx \text{ με } 0 < \lambda \leq f \leq \Lambda < \infty$$

Γνήσια κυρτότητα λύσεων Alexandrov

Θεώρημα (Caffarelli,1990)

Αν το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό, κυρτό και φραγμένο σύνολο, ενώ η $u : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή ώστε

$$\begin{cases} \lambda\, dx \leq \mu_u \leq \Lambda dx, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

για $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ και $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ με $\alpha > 1 - \frac{2}{n}$,

τότε η u είναι γνήσια κυρτή.

- $\alpha > 1 - \frac{2}{n}$ βέλτιστο
- Επέκταση αποτελέσματος Alexandrov για $n = 2$:

$$u \text{ κυρτή και } \mu_u = f\, dx \text{ με } 0 < \lambda \leq f \leq \Lambda < \infty$$

$$\implies u \text{ γνήσια κυρτή}$$

Λειότητα λύσεων Alexandrov

Θεώρημα (Pogorelov,1971)

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό,* $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ *με* $\alpha \in (0,1)$*,* $k \geq 2$

Λειότητα λύσεων Alexandrov

Θεώρημα (Pogorelov,1971)

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό,* $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ *με* $\alpha \in (0,1)$*,* $k \geq 2$ *και* $f \geq c_0 > 0$*,*

Λειότητα λύσεων Alexandrov

Θεώρημα (Pogorelov,1971)

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό,* $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ *με* $\alpha \in (0,1)$, $k \geq 2$ *και* $f \geq c_0 > 0$, *τότε για την εκάστοτε γνήσια κυρτή* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *με*

$$\mu_u = f\,dx \quad \text{στο } \Omega$$

Λειότητα λύσεων Alexandrov

Θεώρημα (Pogorelov,1971)

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό,* $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ *με* $\alpha \in (0,1)$, $k \geq 2$ *και* $f \geq c_0 > 0$, *τότε για την εκάστοτε γνήσια κυρτή* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *με*

$$\mu_u = f\,dx \quad \text{στο } \Omega$$

ισχύει $u \in C^{k+2,\alpha}_{\ell oc}(\Omega)$.

Λειότητα λύσεων Alexandrov

Θεώρημα (Pogorelov,1971)

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό,* $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ *με* $\alpha \in (0,1)$, $k \geq 2$ *και* $f \geq c_0 > 0$, *τότε για την εκάστοτε γνήσια κυρτή* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *με*

$$\mu_u = f\,dx \quad \text{στο } \Omega$$

ισχύει $u \in C^{k+2,\alpha}_{\ell oc}(\Omega)$.

Θεώρημα (Caffarelli,1991)

Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό και* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *γνήσια κυρτή ώστε*

$$\lambda\,dx \leq \mu_u \leq \Lambda\,dx \quad \text{στο } \Omega,$$

για $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$.

Λειότητα λύσεων Alexandrov

Θεώρημα (Pogorelov,1971)

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ με $\alpha \in (0,1)$, $k \geq 2$ και $f \geq c_0 > 0$, τότε για την εκάστοτε γνήσια κυρτή $u : \Omega \to \mathbb{R}$ με

$$\mu_u = f\, dx \quad \text{στο } \Omega$$

ισχύει $u \in C^{k+2,\alpha}_{\ell oc}(\Omega)$.

Θεώρημα (Caffarelli,1991)

Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ γνήσια κυρτή ώστε

$$\lambda\, dx \leq \mu_u \leq \Lambda\, dx \quad \text{στο } \Omega,$$

για $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$.
Τότε $u \in C^{1,\alpha}_{\ell oc}(\Omega)$ για κάποιο $\alpha \in (0,1]$ το οποίο εξαρτάται αποκλειστικά από τα n, λ και Λ.

2. Κλασικές λύσεις

Ύπαρξη και μοναδικότητα κλασικών λύσεων

Θεώρημα

Θεωρούμε $k \geq 2$, $\alpha \in (0,1)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ένα ομοιόμορφα κυρτό σύνολο με* $\partial\Omega \in C^{k+2,\alpha}$

Ύπαρξη και μοναδικότητα κλασικών λύσεων

Θεώρημα

Θεωρούμε $k \geq 2$, $\alpha \in (0,1)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ένα ομοιόμορφα κυρτό σύνολο με* $\partial\Omega \in C^{k+2,\alpha}$ *και* $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ *όπου* $f \geq c_0 > 0$.

Ύπαρξη και μοναδικότητα κλασικών λύσεων

Θεώρημα

Θεωρούμε $k \geq 2$, $\alpha \in (0,1)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ένα ομοιόμορφα κυρτό σύνολο με* $\partial\Omega \in C^{k+2,\alpha}$ *και* $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ *όπου* $f \geq c_0 > 0$.

Τότε $\forall g \in C^{k+2,\alpha}(\partial\Omega)$ *υπάρχει μοναδική κυρτή λύση* $u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *στο πρόβλημα*

$$\begin{cases} \det D^2 u = f, & \textit{στο } \Omega \\ u = g, & \textit{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Ύπαρξη και μοναδικότητα κλασικών λύσεων

Θεώρημα

Θεωρούμε $k \geq 2$, $\alpha \in (0,1)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ένα ομοιόμορφα κυρτό σύνολο με* $\partial\Omega \in C^{k+2,\alpha}$ *και* $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ *όπου* $f \geq c_0 > 0$.

Τότε $\forall g \in C^{k+2,\alpha}(\partial\Omega)$ *υπάρχει μοναδική κυρτή λύση* $u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *στο πρόβλημα*

$$\begin{cases} \det D^2 u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

- u ομοιόμορφα κυρτή και $\det D^2 u = f$ ομοιόμορφα ελλειπτική

Ύπαρξη και μοναδικότητα κλασικών λύσεων

Θεώρημα

Θεωρούμε $k \geq 2$, $\alpha \in (0,1)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ένα ομοιόμορφα κυρτό σύνολο με* $\partial\Omega \in C^{k+2,\alpha}$ *και* $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ *όπου* $f \geq c_0 > 0$.

Τότε $\forall g \in C^{k+2,\alpha}(\partial\Omega)$ *υπάρχει μοναδική κυρτή λύση* $u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *στο πρόβλημα*

$$\begin{cases} \det D^2 u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

- u ομοιόμορφα κυρτή και $\det D^2 u = f$ ομοιόμορφα ελλειπτική
- Η απόδειξη γίνεται με την **μέθοδο της συνέχειας** ($g = 0$)

Ύπαρξη και μοναδικότητα κλασικών λύσεων

Θεώρημα

Θεωρούμε $k \geq 2$, $\alpha \in (0,1)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ένα ομοιόμορφα κυρτό σύνολο με* $\partial\Omega \in C^{k+2,\alpha}$ *και* $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ *όπου* $f \geq c_0 > 0$.

Τότε $\forall g \in C^{k+2,\alpha}(\partial\Omega)$ *υπάρχει μοναδική κυρτή λύση* $u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *στο πρόβλημα*

$$\begin{cases} \det D^2 u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

- u ομοιόμορφα κυρτή και $\det D^2 u = f$ ομοιόμορφα ελλειπτική
- Η απόδειξη γίνεται με την **μέθοδο της συνέχειας** ($g = 0$)
- Δείχνουμε την περίπτωση $k = 2$ και κάνουμε αναγωγή για $k \geq 3$ από γενική θεωρία μη γραμμικών ομοιόμορφα ελλειπτικών εξισώσεων

Η μέθοδος της συνέχειας

- Κατασκευάζουμε $u_0 \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ ομοιόμορφα κυρτή λύση με $u_0|_{\partial\Omega} = 0$

Η μέθοδος της συνέχειας

- Κατασκευάζουμε $u_0 \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ ομοιόμορφα κυρτή λύση με $u_0|_{\partial\Omega} = 0$, οπότε αυτή λύνει το

$$\begin{cases} \det D^2 u_0 =: f_0, & \text{στο } \Omega \\ u_0 = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Η μέθοδος της συνέχειας

- Κατασκευάζουμε $u_0 \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ ομοιόμορφα κυρτή λύση με $u_0|_{\partial\Omega} = 0$, οπότε αυτή λύνει το

$$\begin{cases} \det D^2 u_0 =: f_0, & \text{στο } \Omega \\ u_0 = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

- Θεωρούμε $f_\sigma := (1-\sigma) f_0 + \sigma f$ για $\sigma \in [0,1]$ και τα προβλήματα

$$\begin{cases} \det D^2 u_\sigma = f_\sigma, & \text{στο } \Omega \\ u_\sigma = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (\ *_\sigma)$$

Η μέθοδος της συνέχειας

- Κατασκευάζουμε $u_0 \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ ομοιόμορφα κυρτή λύση με $u_0|_{\partial\Omega} = 0$, οπότε αυτή λύνει το

$$\begin{cases} \det D^2 u_0 =: f_0, & \text{στο } \Omega \\ u_0 = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

- Θεωρούμε $f_\sigma := (1-\sigma) f_0 + \sigma f$ για $\sigma \in [0,1]$ και τα προβλήματα

$$\begin{cases} \det D^2 u_\sigma = f_\sigma, & \text{στο } \Omega \\ u_\sigma = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (\ *_\sigma)$$

- Δείχνουμε ότι το

$$\mathcal{T} := \{ \sigma \in [0,1] \mid \text{το } (\ *_\sigma) \text{ έχει κυρτή λύση } u_\sigma \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega}) \}$$

είναι ένα **ανοικτό** και **κλειστό** υποσύνολο του $[0,1]$

Η μέθοδος της συνέχειας

- Κατασκευάζουμε $u_0 \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ ομοιόμορφα κυρτή λύση με $u_0|_{\partial\Omega} = 0$, οπότε αυτή λύνει το

$$\begin{cases} \det D^2 u_0 =: f_0, & \text{στο } \Omega \\ u_0 = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

- Θεωρούμε $f_\sigma := (1-\sigma) f_0 + \sigma f$ για $\sigma \in [0,1]$ και τα προβλήματα

$$\begin{cases} \det D^2 u_\sigma = f_\sigma, & \text{στο } \Omega \\ u_\sigma = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (\ *_\sigma)$$

- Δείχνουμε ότι το

$$\mathcal{T} := \{\, \sigma \in [0,1] \mid \text{το } (\ *_\sigma) \text{ έχει κυρτή λύση } u_\sigma \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega}) \,\}$$

είναι ένα **ανοικτό** και **κλειστό** υποσύνολο του $[0,1]$
$\implies \mathcal{T} = [0,1]$

Η μέθοδος της συνέχειας

- Κατασκευάζουμε $u_0 \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ ομοιόμορφα κυρτή λύση με $u_0|_{\partial\Omega} = 0$, οπότε αυτή λύνει το

$$\begin{cases} \det D^2 u_0 =: f_0, & \text{στο } \Omega \\ u_0 = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

- Θεωρούμε $f_\sigma := (1-\sigma) f_0 + \sigma f$ για $\sigma \in [0,1]$ και τα προβλήματα

$$\begin{cases} \det D^2 u_\sigma = f_\sigma, & \text{στο } \Omega \\ u_\sigma = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (\ *_\sigma)$$

- Δείχνουμε ότι το

$$\mathcal{T} := \{\, \sigma \in [0,1] \mid \text{το } (\ *_\sigma) \text{ έχει κυρτή λύση } u_\sigma \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega}) \,\}$$

είναι ένα **ανοικτό** και **κλειστό** υποσύνολο του $[0,1]$
$\implies \mathcal{T} = [0,1]$

- $1 \in \mathcal{T} \xRightarrow{f_1 = f}$ υπάρχει λύση και για το αρχικό πρόβλημα

Σχεδιάγραμμα απόδειξης (ανοικτό)

- Δείχνουμε $\mathcal{T}$ ανοικτό:
  - Θεωρούμε $\hat{\sigma} \in \mathcal{T}$ με $F(\hat{u}, \hat{\sigma}) := \det D^2\hat{u} - f_{\hat{\sigma}} = 0$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης (ανοικτό)

- Δείχνουμε $\mathcal{T}$ ανοικτό:
  - Θεωρούμε $\hat{\sigma} \in \mathcal{T}$ με $F(\hat{u}, \hat{\sigma}) := \det D^2\hat{u} - f_{\hat{\sigma}} = 0$
  - Μερική παράγωγος Fréchet:
    $\frac{\partial F}{\partial u}(\hat{u}, \hat{\sigma})[h] = (\det D^2\hat{u}) \sum_{i,j=1}^{n} \hat{u}^{ij} h_{ij}$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης (ανοικτό)

- Δείχνουμε $\mathcal{T}$ ανοικτό:
  - Θεωρούμε $\hat{\sigma} \in \mathcal{T}$ με $F(\hat{u}, \hat{\sigma}) := \det D^2\hat{u} - f_{\hat{\sigma}} = 0$
  - Μερική παράγωγος Fréchet:
    $$\frac{\partial F}{\partial u}(\hat{u}, \hat{\sigma})[h] = (\det D^2\hat{u}) \sum_{i,j=1}^{n} \hat{u}^{ij} h_{ij}$$
  - Από κλασική θεωρία μη ομογενών γραμμικών ομοιόμορφα ελλειπτικών ΜΔΕ: (βλ. Gilbarg-Trudinger)

Σχεδιάγραμμα απόδειξης (ανοικτό)

- Δείχνουμε $\mathcal{T}$ ανοικτό:
  - Θεωρούμε $\hat{\sigma} \in \mathcal{T}$ με $F(\hat{u}, \hat{\sigma}) := \det D^2\hat{u} - f_{\hat{\sigma}} = 0$
  - Μερική παράγωγος Fréchet:
    $\frac{\partial F}{\partial u}(\hat{u}, \hat{\sigma})[h] = (\det D^2\hat{u}) \sum_{i,j=1}^{n} \hat{u}^{ij} h_{ij}$
  - Από κλασική θεωρία μη ομογενών γραμμικών ομοιόμορφα ελλειπτικών ΜΔΕ: (βλ. Gilbarg-Trudinger)

    η εξίσωση $\dfrac{\partial F}{\partial u}(\hat{u}, \hat{\sigma})[h] = g$ έχει μοναδική λύση h

Σχεδιάγραμμα απόδειξης (ανοικτό)

- Δείχνουμε $\mathcal{T}$ ανοικτό:
  - Θεωρούμε $\hat{\sigma} \in \mathcal{T}$ με $F(\hat{u}, \hat{\sigma}) := \det D^2 \hat{u} - f_{\hat{\sigma}} = 0$
  - Μερική παράγωγος Fréchet:
    $\frac{\partial F}{\partial u}(\hat{u}, \hat{\sigma})[h] = (\det D^2 \hat{u}) \sum_{i,j=1}^{n} \hat{u}^{ij} h_{ij}$
  - Από κλασική θεωρία μη ομογενών γραμμικών ομοιόμορφα ελλειπτικών ΜΔΕ: (βλ. Gilbarg-Trudinger)

    η εξίσωση $\dfrac{\partial F}{\partial u}(\hat{u}, \hat{\sigma})[h] = g$ έχει μοναδική λύση h

    $\Longrightarrow$ η $\dfrac{\partial F}{\partial u}(\hat{u}, \hat{\sigma})$ είναι γραμμικός ισομορφισμός

Σχεδιάγραμμα απόδειξης (ανοικτό)

- Δείχνουμε $\mathcal{T}$ ανοικτό:
  - Θεωρούμε $\hat{\sigma} \in \mathcal{T}$ με $F(\hat{u}, \hat{\sigma}) := \det D^2\hat{u} - f_{\hat{\sigma}} = 0$
  - Μερική παράγωγος Fréchet:
    $\frac{\partial F}{\partial u}(\hat{u}, \hat{\sigma})[h] = (\det D^2\hat{u}) \sum_{i,j=1}^{n} \hat{u}^{ij} h_{ij}$
  - Από κλασική θεωρία μη ομογενών γραμμικών ομοιόμορφα ελλειπτικών ΜΔΕ: (βλ. Gilbarg-Trudinger)
    η εξίσωση $\dfrac{\partial F}{\partial u}(\hat{u}, \hat{\sigma})[h] = g$ έχει μοναδική λύση h
    $\Longrightarrow$ η $\dfrac{\partial F}{\partial u}(\hat{u}, \hat{\sigma})$ είναι γραμμικός ισομορφισμός
  - Από Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης σε χώρους Banach: για κάθε $\hat{\sigma}$ υπάρχει περιοχή $U \subseteq \mathcal{T}$ ώστε

$$F(u_\sigma, \sigma) = 0$$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης (ανοικτό)

- Δείχνουμε $\mathcal{T}$ ανοικτό:
  - Θεωρούμε $\hat{\sigma} \in \mathcal{T}$ με $F(\hat{u}, \hat{\sigma}) := \det D^2\hat{u} - f_{\hat{\sigma}} = 0$
  - Μερική παράγωγος Fréchet:
    $\frac{\partial F}{\partial u}(\hat{u}, \hat{\sigma})[h] = (\det D^2\hat{u}) \sum_{i,j=1}^{n} \hat{u}^{ij} h_{ij}$
  - Από κλασική θεωρία μη ομογενών γραμμικών ομοιόμορφα ελλειπτικών ΜΔΕ: (βλ. Gilbarg-Trudinger)
    $$\text{η εξίσωση } \frac{\partial F}{\partial u}(\hat{u}, \hat{\sigma})[h] = g \text{ έχει μοναδική λύση } h$$
    $$\Longrightarrow \text{η } \frac{\partial F}{\partial u}(\hat{u}, \hat{\sigma}) \text{ είναι γραμμικός ισομορφισμός}$$
  - Από Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης σε χώρους Banach: για κάθε $\hat{\sigma}$ υπάρχει περιοχή $U \subseteq \mathcal{T}$ ώστε
    $$F(u_\sigma, \sigma) = 0$$
    δηλαδή στο $U \subseteq \mathcal{T}$ η $(*)$ έχει λύση

Σχεδιάγραμμα απόδειξης (κλειστό)

- Δείχνουμε $\mathcal{T}$ κλειστό:
  - Θεωρούμε $\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$ με $\sigma_m \to \hat{\sigma} \in \mathbb{R}$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης (κλειστό)

- Δείχνουμε $\mathcal{T}$ κλειστό:
  - Θεωρούμε $\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$ με $\sigma_m \to \hat{\sigma} \in \mathbb{R}$

    Συνεπώς υπάρχουν $u_{\sigma_m} \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ λύσεις του ($*_{\sigma_m}$)

Σχεδιάγραμμα απόδειξης (κλειστό)

- Δείχνουμε $\mathcal{T}$ κλειστό:
  - Θεωρούμε $\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$ με $\sigma_m \to \hat{\sigma} \in \mathbb{R}$

    Συνεπώς υπάρχουν $u_{\sigma_m} \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ λύσεις του $(*_{\sigma_m})$
  - Υπολογίζουμε $C^k(\overline{\Omega})$ a priori εκτιμήσεις για $k = 0, 1, 2$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης (κλειστό)

- Δείχνουμε $\mathcal{T}$ κλειστό:
  - Θεωρούμε $\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$ με $\sigma_m \to \hat{\sigma} \in \mathbb{R}$

    Συνεπώς υπάρχουν $u_{\sigma_m} \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ λύσεις του ($*_{\sigma_m}$)
  - Υπολογίζουμε $C^k(\overline{\Omega})$ a priori εκτιμήσεις για $k = 0, 1, 2$ και από κλασική θεωρία μη γραμμικών ομοιόμορφα ελλειπτικών ΜΔΕ έχουμε $C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ εκτιμήσεις: (βλ. Caffarelli-Cabrè)

Σχεδιάγραμμα απόδειξης (κλειστό)

- Δείχνουμε $\mathcal{T}$ κλειστό:
  - Θεωρούμε $\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$ με $\sigma_m \to \hat{\sigma} \in \mathbb{R}$

    Συνεπώς υπάρχουν $u_{\sigma_m} \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ λύσεις του ($*_{\sigma_m}$)
  - Υπολογίζουμε $C^k(\overline{\Omega})$ a priori εκτιμήσεις για $k = 0, 1, 2$ και από κλασική θεωρία μη γραμμικών ομοιόμορφα ελλειπτικών ΜΔΕ έχουμε $C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ εκτιμήσεις: (βλ. Caffarelli-Cabrè)

$$\|u_{\sigma_m}\|_{C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(\|f_{\sigma_m}\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})})$$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης (κλειστό)

- Δείχνουμε $\mathcal{T}$ κλειστό:
  - Θεωρούμε $\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$ με $\sigma_m \to \hat{\sigma} \in \mathbb{R}$

    Συνεπώς υπάρχουν $u_{\sigma_m} \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ λύσεις του ($*_{\sigma_m}$)
  - Υπολογίζουμε $C^k(\overline{\Omega})$ a priori εκτιμήσεις για $k = 0, 1, 2$ και από κλασική θεωρία μη γραμμικών ομοιόμορφα ελλειπτικών ΜΔΕ έχουμε $C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ εκτιμήσεις: (βλ. Caffarelli-Cabrè)

$\|u_{\sigma_m}\|_{C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(\|f_{\sigma_m}\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})})$ και $\|f_{\sigma_m}\| \leq \|f_0\| + \|f\|$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης (κλειστό)

- Δείχνουμε $\mathcal{T}$ κλειστό:
  - Θεωρούμε $\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$ με $\sigma_m \to \hat{\sigma} \in \mathbb{R}$

    Συνεπώς υπάρχουν $u_{\sigma_m} \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ λύσεις του ($*_{\sigma_m}$)
  - Υπολογίζουμε $C^k(\overline{\Omega})$ a priori εκτιμήσεις για $k = 0, 1, 2$ και από κλασική θεωρία μη γραμμικών ομοιόμορφα ελλειπτικών ΜΔΕ έχουμε $C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ εκτιμήσεις: (βλ. Caffarelli-Cabrè)

$$\|u_{\sigma_m}\|_{C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(\|f_{\sigma_m}\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}) \text{ και } \|f_{\sigma_m}\| \leq \|f_0\| + \|f\|$$

$$\Longrightarrow \|u_{\sigma_m}\|_{C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \text{ ομοιόμορφο φράγμα ως προς } m \in \mathbb{N}$$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης (κλειστό)

- Δείχνουμε $\mathcal{T}$ κλειστό:
  - Θεωρούμε $\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$ με $\sigma_m \to \hat{\sigma} \in \mathbb{R}$

    Συνεπώς υπάρχουν $u_{\sigma_m} \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ λύσεις του ($*_{\sigma_m}$)
  - Υπολογίζουμε $C^k(\overline{\Omega})$ a priori εκτιμήσεις για $k = 0, 1, 2$ και από κλασική θεωρία μη γραμμικών ομοιόμορφα ελλειπτικών ΜΔΕ έχουμε $C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ εκτιμήσεις: (βλ. Caffarelli-Cabrè)

$\|u_{\sigma_m}\|_{C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(\|f_{\sigma_m}\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})})$ και $\|f_{\sigma_m}\| \leq \|f_0\| + \|f\|$

$\Longrightarrow \|u_{\sigma_m}\|_{C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C$ ομοιόμορφο φράγμα ως προς $m \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow u_{\sigma_m} \to u$ (Arzelà-Ascoli)

Σχεδιάγραμμα απόδειξης (κλειστό)

- Δείχνουμε $\mathcal{T}$ κλειστό:
  - Θεωρούμε $\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$ με $\sigma_m \to \hat{\sigma} \in \mathbb{R}$

    Συνεπώς υπάρχουν $u_{\sigma_m} \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ λύσεις του ($*_{\sigma_m}$)
  - Υπολογίζουμε $C^k(\overline{\Omega})$ a priori εκτιμήσεις για $k = 0, 1, 2$ και από κλασική θεωρία μη γραμμικών ομοιόμορφα ελλειπτικών ΜΔΕ έχουμε $C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ εκτιμήσεις: (βλ. Caffarelli-Cabrè)

$\|u_{\sigma_m}\|_{C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(\|f_{\sigma_m}\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})})$ και $\|f_{\sigma_m}\| \leq \|f_0\| + \|f\|$

$\Longrightarrow \|u_{\sigma_m}\|_{C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C$ ομοιόμορφο φράγμα ως προς $m \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow u_{\sigma_m} \to u$ (Arzelà-Ascoli)

- Για $m \to \infty$ από τα προβλήματα:

$$\begin{cases} \det D^2 u_{\sigma_m} = f_{\sigma_m}, & \text{στο } \Omega \\ u_{\sigma_m} = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (\ *_{\sigma_m})$$

Σχεδιάγραμμα απόδειξης (κλειστό)

- Δείχνουμε $\mathcal{T}$ κλειστό:
  - Θεωρούμε $\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$ με $\sigma_m \to \hat{\sigma} \in \mathbb{R}$

    Συνεπώς υπάρχουν $u_{\sigma_m} \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ λύσεις του ($*_{\sigma_m}$)
  - Υπολογίζουμε $C^k(\overline{\Omega})$ a priori εκτιμήσεις για $k = 0, 1, 2$ και από κλασική θεωρία μη γραμμικών ομοιόμορφα ελλειπτικών ΜΔΕ έχουμε $C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ εκτιμήσεις: (βλ. Caffarelli-Cabrè)

$$\|u_{\sigma_m}\|_{C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(\|f_{\sigma_m}\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}) \text{ και } \|f_{\sigma_m}\| \leq \|f_0\| + \|f\|$$

$$\Longrightarrow \|u_{\sigma_m}\|_{C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \text{ ομοιόμορφο φράγμα ως προς } m \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow u_{\sigma_m} \to u \qquad \text{(Arzelà-Ascoli)}$$

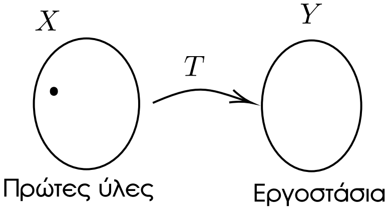
  - Για $m \to \infty$ από τα προβλήματα:

$$\begin{cases} \det D^2 u_{\sigma_m} = f_{\sigma_m}, & \text{στο } \Omega \\ u_{\sigma_m} = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \qquad (\,*_{\sigma_m})$$

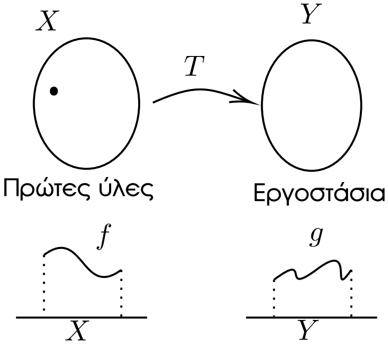
η u λύνει το ($*_{\hat{\sigma}}$) $\implies \hat{\sigma} \in \mathcal{T}$

3. Εφαρμογή στη Βέλτιστη Μεταφορά (optimal transport)

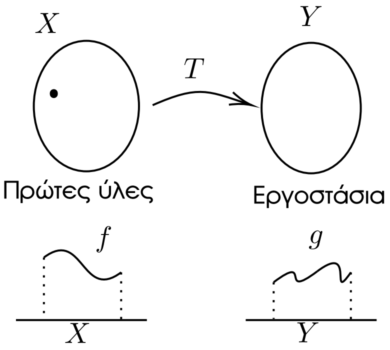
Απεικόνιση Μεταφοράς



Απεικόνιση Μεταφοράς



Απεικόνιση Μεταφοράς



$$\int_X \varphi \circ T\, f\, dx = \int_Y \varphi\, g\, dy, \quad \forall \varphi \in C_c(Y)$$

$$\iff T_\#(f\, dx) = g\, dy$$

Θεωρία της Βέλτιστης Μεταφοράς

- $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτά, φραγμένα
- $\mu = f\,dx, \nu = g\,dy$ μέτρα στα X, Y
  όπου f, g πυκνότητες πιθανότητας
- $c : X \times Y \to \mathbb{R}$ συνάρτηση κόστους

Ορισμός

Η $T : X \to Y$ καλείται απεικόνιση μεταφοράς αν

$$T_{\#}\mu = \nu,$$

δήλαδη $\mu(T^{-1}(\,\cdot\,)) = \nu$

Θεωρία της Βέλτιστης Μεταφοράς

- $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτά, φραγμένα
- $\mu = f\,dx, \nu = g\,dy$ μέτρα στα X, Y
όπου f, g πυκνότητες πιθανότητας
- $c : X \times Y \to \mathbb{R}$ συνάρτηση κόστους

Ορισμός

Η $T : X \to Y$ καλείται απεικόνιση μεταφοράς αν

$$T_{\#}\mu = \nu,$$

δήλαδη $\mu(T^{-1}(\,\cdot\,)) = \nu$

Πρόβλημα Βέλτιστης Μεταφοράς

Να βρεθεί απεικόνιση μεταφοράς $T : X \to Y$ που ελαχιστοποιεί την ποσότητα

$$\int_X c(x, T(x))\,d\mu$$

Το πρόβλημα της βέλτιστης μεταφοράς με κόστος την απόσταση στο τετράγωνο $c(x,y) := |x-y|^2$

Θεώρημα (Brenier,1991)

Αν τα μ, ν είναι μέτρα πιθανότητας του $\mathbb{R}^n$ με $\mu = f\,dx$ και έτσι ώστε $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2\,d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} |y|^2\,d\nu(y) < \infty$,

Το πρόβλημα της βέλτιστης μεταφοράς με κόστος την απόσταση στο τετράγωνο $c(x,y) := |x-y|^2$

Θεώρημα (Brenier,1991)

Αν τα μ, ν είναι μέτρα πιθανότητας του $\mathbb{R}^n$ με $\mu = f\,dx$ και έτσι ώστε $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2\,d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} |y|^2\,d\nu(y) < \infty$,

τότε υπάρχει μ-σ.π. μοναδική απεικόνιση Βέλτιστης Μεταφοράς T.

Το πρόβλημα της βέλτιστης μεταφοράς με κόστος την απόσταση στο τετράγωνο $c(x,y) := |x-y|^2$

Θεώρημα (Brenier, 1991)

Αν τα μ, ν είναι μέτρα πιθανότητας του $\mathbb{R}^n$ με $\mu = f\,dx$ και έτσι ώστε $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2\,d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} |y|^2\,d\nu(y) < \infty$,

τότε υπάρχει μ-σ.π. μοναδική απεικόνιση Βέλτιστης Μεταφοράς T.

Επιπλέον υπάρχει $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ η οποία είναι

- *κυρτή*
- *κάτω ημισυνεχής*
- *μ-σ.π. διαφορίσιμη*
- $T = \nabla u$

Σχέση του προβλήματος με την εξίσωση Monge-Ampère

$T = \nabla u \in C^1(X)$ απεικόνιση βέλτιστης μεταφοράς του X στο Y

$\implies T_{\#}\mu = \nu$

Σχέση του προβλήματος με την εξίσωση Monge-Ampère

$T = \nabla u \in C^1(X)$ <u>απεικόνιση βέλτιστης μεταφοράς</u> του X στο Y

$$\implies T_{\#}\mu = \nu$$

$$\iff \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \circ T \, f \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, g \, dy, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Σχέση του προβλήματος με την εξίσωση Monge-Ampère

$T = \nabla u \in C^1(X)$ <u>απεικόνιση βέλτιστης μεταφοράς</u> του X στο Y

$$\implies T_{\#}\mu = \nu$$

$$\iff \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \circ T\, f\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, g\, dy, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\iff \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \circ T\, f\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \circ T\, g \circ T\, |\det \nabla T|\, dx, \ \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Σχέση του προβλήματος με την εξίσωση Monge-Ampère

$T = \nabla u \in C^1(X)$ απεικόνιση βέλτιστης μεταφοράς του X στο Y

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow\ T_{\#}\mu = \nu \\
&\Longleftrightarrow\ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \circ T\, f\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, g\, dy, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \\
&\Longleftrightarrow\ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \circ T\, f\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \circ T\, g \circ T\, |\det \nabla T|\, dx, \ \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \\
&\Longleftrightarrow\ f = g \circ T\, |\det \nabla T|, \quad \text{στο } X \qquad (T = \nabla u)
\end{aligned}$$

Σχέση του προβλήματος με την εξίσωση Monge-Ampère

$T = \nabla u \in C^1(X)$ απεικόνιση βέλτιστης μεταφοράς του X στο Y

$$\Longrightarrow \; T_{\#}\mu = \nu$$

$$\Longleftrightarrow \; \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \circ T \, f \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, g \, dy, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\Longleftrightarrow \; \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \circ T \, f \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \circ T \, g \circ T \, |\det \nabla T| \, dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\Longleftrightarrow \; f = g \circ T \, |\det \nabla T|, \quad \text{στο } X \qquad (T = \nabla u)$$

$$\Longleftrightarrow \; \det D^2 u = \frac{f}{g \circ (\nabla u)}, \quad \text{στο } X$$

Σχέση του προβλήματος με την εξίσωση Monge-Ampère

$T = \nabla u \in C^1(X)$ απεικόνιση βέλτιστης μεταφοράς του X στο Y

$$\implies T_\# \mu = \nu$$

$$\iff \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \circ T\, f\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, g\, dy, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\iff \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \circ T\, f\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \circ T\, g \circ T\, |\det \nabla T|\, dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\iff f = g \circ T\, |\det \nabla T|, \quad \text{στο } X \qquad (T = \nabla u)$$

$$\iff \det D^2 u = \frac{f}{g \circ (\nabla u)}, \quad \text{στο } X$$

Γενικότερα: $\mu_u = \dfrac{f}{g \circ (\nabla u)}\, dx \quad$ στο X

$C^{0,\alpha}$ κανονικότητα απεικόνισης μεταφοράς

Θεώρημα (Caffarelli,1991)

Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό και* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *γνήσια κυρτή ώστε*

$$\lambda\, dx \leq \mu_u \leq \Lambda\, dx \quad \text{στο } \Omega,$$

για $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$. *Τότε* $u \in C^{1,\alpha}_{\ell oc}(\Omega)$ *για* $\alpha \in (0,1]$.

$C^{0,\alpha}$ κανονικότητα απεικόνισης μεταφοράς

Θεώρημα (Caffarelli,1991)

Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό και* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *γνήσια κυρτή ώστε*

$$\lambda\, dx \leq \mu_u \leq \Lambda\, dx \quad \text{στο } \Omega,$$

για $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$. *Τότε* $u \in C^{1,\alpha}_{\ell oc}(\Omega)$ *για* $\alpha \in (0,1]$.

Θεώρημα (Caffarelli,1992)

Ας είναι $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτά, φραγμένα σύνολα*

$C^{0,\alpha}$ κανονικότητα απεικόνισης μεταφοράς

Θεώρημα (Caffarelli,1991)

Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό και* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *γνήσια κυρτή ώστε*

$$\lambda\, dx \leq \mu_u \leq \Lambda\, dx \quad \text{στο } \Omega,$$

για $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$. *Τότε* $u \in C^{1,\alpha}_{\ell oc}(\Omega)$ *για* $\alpha \in (0,1]$.

Θεώρημα (Caffarelli,1992)

Ας είναι $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτά, φραγμένα σύνολα,*
$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ *πυκνότητες πιθανότητας των* μ, ν*,*

$C^{0,\alpha}$ κανονικότητα απεικόνισης μεταφοράς

Θεώρημα (Caffarelli,1991)

Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ γνήσια κυρτή ώστε

$$\lambda\, dx \leq \mu_u \leq \Lambda\, dx \quad \text{στο } \Omega,$$

για $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$. Τότε $u \in C^{1,\alpha}_{\ell oc}(\Omega)$ για $\alpha \in (0,1]$.

Θεώρημα (Caffarelli,1992)

Ας είναι $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτά, φραγμένα σύνολα,
$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ πυκνότητες πιθανότητας των μ, ν,
$\operatorname{spt} f = X, \operatorname{spt} g = Y$, ενώ $m \leq f, g \leq M$ στα X, Y.

$C^{0,\alpha}$ κανονικότητα απεικόνισης μεταφοράς

Θεώρημα (Caffarelli,1991)

Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό και* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *γνήσια κυρτή ώστε*

$$\lambda\, dx \leq \mu_u \leq \Lambda\, dx \quad \text{στο } \Omega,$$

για $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$. *Τότε* $u \in C^{1,\alpha}_{\ell oc}(\Omega)$ *για* $\alpha \in (0,1]$.

Θεώρημα (Caffarelli,1992)

Ας είναι $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτά, φραγμένα σύνολα,*
$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ *πυκνότητες πιθανότητας των* μ, ν,
$\operatorname{spt} f = X, \operatorname{spt} g = Y$, *ενώ* $m \leq f, g \leq M$ *στα* X, Y.

Αν το Y *είναι κυρτό και* $T = \nabla u : X \to Y$ *η απεικόνιση βέλτιστης μεταφοράς που εξασφαλίζει το Θεώρημα του Brenier,*

$C^{0,\alpha}$ κανονικότητα απεικόνισης μεταφοράς

Θεώρημα (Caffarelli,1991)

Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ γνήσια κυρτή ώστε

$$\lambda\, dx \leq \mu_u \leq \Lambda\, dx \quad \text{στο } \Omega,$$

για $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$. Τότε $u \in C^{1,\alpha}_{\ell oc}(\Omega)$ για $\alpha \in (0,1]$.

Θεώρημα (Caffarelli,1992)

Ας είναι $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτά, φραγμένα σύνολα,
$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ πυκνότητες πιθανότητας των μ, ν,
$\operatorname{spt} f = X, \operatorname{spt} g = Y$, ενώ $m \leq f, g \leq M$ στα X, Y.

Αν το Y είναι κυρτό και $T = \nabla u : X \to Y$ η απεικόνιση βέλτιστης μεταφοράς που εξασφαλίζει το Θεώρημα του Brenier,

υπάρχει $\alpha \in (0,1]$ ώστε $T \in C^{0,\alpha}_{\ell oc}(X)$.

Βιβλιογραφία I

- Figalli, A.
  The Monge-Ampère Equation and Its Applications.
  Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society, 2017.
- Gutierrez, C. E.
  The Monge-Ampère equation, 2nd ed.
  Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Birkhäuser Boston, 2016.
- Hiriart-Urruty, J. B., και Lemarechal, C.
  Fundamentals of Convex Analysis.
  Grundlehren Text Editions. Springer, 2004.
- Rockafellar, R. T.
  Convex Analysis.
  Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton University Press, 1970.
- Gilbarg, D., και Trudinger, N. S.
  Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed.
  Classics in mathematics. Springer-Verlag, 1984.
- Santambrogio, F.
  Optimal Transport for Applied Mathematicians, Calculus of Variations, PDEs, and Modeling.
  Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Birkhäuser, 2015.

Βιβλιογραφία II

- Brezis, H.
  Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.
  Universitext. Springer, New York, NY, 2011.
- Bogachev, V.I.
  Measure Theory II
  Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- Caffarelli, L. A., και Cabre X.
  Fully Nonlinear Elliptic Equations
  Colloquium Publications. American Mathematical Society, 1995.
- Κουμουλλης, Γ., και Νεγρεποντης, Σ.
  Θεωρία Μέτρου.
  Εκδόσεις Συμμετρία, 2005.
- Alexandrov, A. D.
  Dirichlet's problem for the equation $\det\|z_{ij}\| = \varphi(z_1, \ldots, z_n, z, x_1, \ldots, x_n)$ I.
  Vestnik Leningrad. Univ. Ser. Mat. Meh. Astr. 13, 1 (1958), 5-24.
- Brenier, Y.
  Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions.
  Communications on Pure and Applied Mathematics 44, 4 (1991), 375-417.

Βιβλιογραφία III

- CAFFARELLI, L. A.
  A localization property of viscosity solutions to the Monge-Ampère equation and their strict convexity.
  Ann. of Math. (2) 131, 1 (1990), 129-134.
- CAFFARELLI, L. A.
  Some regularity properties of solutions of Monge-Ampère equation.
  Comm. Pure Appl. Math. 44, 8-9 (1991), 965-969.
- CAFFARELLI, L. A.
  The regularity of mappings with a convex potential.
  J. Amer. Math. Soc. 5, 1 (1992), 99-104.
- POGORELOV, A. V.
  The regularity of the generalized solutions of the equation
  $\det(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i x^j}) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n) > 0.$
  Dokl. Akad. Nauk SSSR200, (1971), 534-537.

Ευχαριστώ για την προσοχή σας